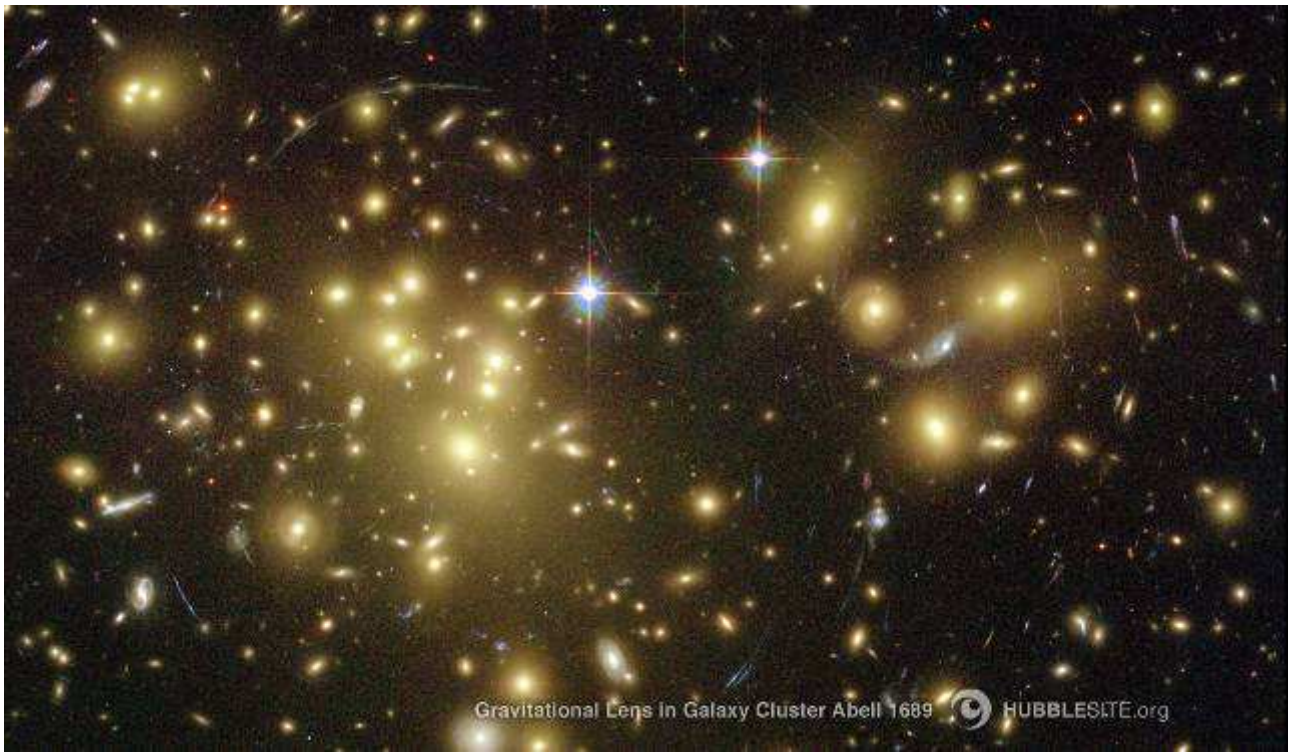
LICEO SCIENTIFICO “G.GALILEI”
MACERATA

MATERIALE DIDATTICO



ELEMENTI DI RELATIVITA' RISTRETTA E GENERALE

Prof. Angelo Angeletti

Rev. gennaio 2018

ELEMENTI DI RELATIVITÀ RISTRETTA

RELATIVITÀ GALILEIANA

I principi della dinamica hanno la stessa validità in tutti i sistemi di riferimento inerziali (in quiete o in moto rettilineo uniforme tra di loro); per esempio due osservatori in due sistemi inerziali S ed S' misurano gli stessi valori sia dell'accelerazione di un punto materiale sia della forza. È questo il principio di relatività galileiana che possiamo enunciare anche così: **le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali**.

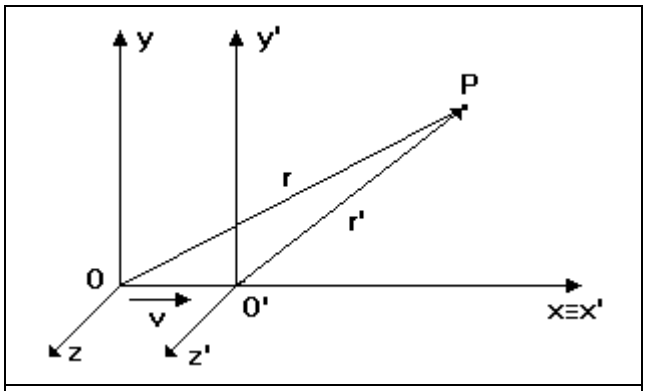


Figura1 - Sistemi di riferimento inerziali.

Si supponga che due osservatori *O* e *O*' si muovano di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro con velocità relativa $\vec{v}$ e che gli assi *x* e *x*' sono diretti nella stessa direzione e gli assi *y* e *y*', *z* e *z*' siano paralleli (vedi figura 1). Un punto *P* verrà individuato da quattro parametri, tre spaziali e uno temporale; per l'osservatore *O* sarà *P*(*x*,*y*,*z*,*t*), per l'osservatore *O*' sarà *P*(*x*',*y*',*z*',*t*'). Le quattro equazioni:

[1]
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

note come **trasformazioni galileiane**, mettono in relazione le coordinate spazio-temporali di uno stesso evento nei due sistemi di riferimento S ed S' in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Passando da un sistema di riferimento all'altro, cioè per effetto delle trasformazioni galileiane, alcune grandezze fisiche restano invariate; queste si chiamano **invarianti**. Nella fisica classica sono invarianti: la distanza tra due punti, la massa di una particella (in quanto si suppone che la massa non dipenda dalla velocità), l'accelerazione di un corpo e la forza agente su di esso, ecc. Non è invariante, per esempio la velocità, infatti se $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ sono le velocità misurate da *O* e *O*', ricordando che la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo e utilizzando le trasformazioni galileiane date sopra, si ottiene:

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{d}{dt}(x - vt) = \dfrac{dx}{dt} - v = u_x - v \\ u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{dt} = u_y \\ u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{dt} = u_z \end{cases}$$

cioè:

[2]
$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

Da ciò segue che la velocità misurata nei due sistemi di riferimento è diversa (vettorialmente $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$).

Ricordando che l'accelerazione è la derivata della velocità fatta rispetto al tempo si ha:

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{d}{dt'}u'_x = \dfrac{d}{dt'}(u_x - v) = \dfrac{d}{dt}(u_x - v) = \dfrac{du_x}{dt'} = a_x \\ a'_y = \dfrac{d}{dt'}u'_y = \dfrac{d}{dt}u_y = a_y \\ a'_z = \dfrac{d}{dt'}u'_z = \dfrac{d}{dt}u_z = a_z \end{cases}$$

cioè:

[3] $$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

Da ciò segue che l'accelerazione misurata da due osservatori inerziali è la stessa. Questo è il principio di relatività classica che può anche essere enunciato anche dicendo che: **le leggi della dinamica sono invarianti per trasformazioni galileiane.**

ELETTRODINAMICA E PRINCIPIO DI RELATIVITÀ

I risultati sperimentali sulla deviazione degli elettroni da parte dei campi magnetici ci dimostrano che la forza esercitata dal campo magnetico su cariche in movimento (vedi la forza di Lorentz) dipende anche dalla velocità delle cariche. Sorge quindi naturale il problema di stabilire rispetto a quale sistema di riferimento tale velocità debba essere misurata. Ci sono due alternative: misurarla rispetto ad un particolare osservatore, oppure, in accordo con il principio di relatività (galileiana), dare alle equazioni dell'elettrodinamica una forma valida in qualsiasi sistema di riferimento. In particolare, poiché il campo magnetico è prodotto solo da cariche in movimento e agisce soltanto su cariche in movimento, esisterà sempre un osservatore per il quale sia il campo magnetico prodotto da una certa carica sia la forza magnetica agente su di essa sono nulli: l'osservatore rispetto al quale la carica è in quiete.
Se è presente sia un campo magnetico sia un campo elettrico, su di una carica in moto agisce una forza:

[4] $$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

essendo $\vec{F} = q\vec{E}$ la forza elettrica e $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la forza magnetica[i]. La relazione $\vec{F} = q\vec{E}$ è stata dedotta solo per cariche in quiete, chi ci assicura che resta valida anche se le cariche sono in movimento? La carica potrebbe assumere valori differenti rispetto ad osservatori differenti, ossia la forza agente su una carica in moto in un certo campo elettrico potrebbe essere differente dalla forza agente sulla carica quando questa è in quiete. Le cose non stanno così; fatti sperimentali hanno permesso di arrivare alla cosiddetta legge di invarianza relativistica della carica elettrica che enunciamo come segue: **una carica elettrica assume lo stesso valore rispetto a tutti gli osservatori inerziali**.

La forza data dalla [4], la forza di Lorentz, descrive correttamente l'interazione di una carica in movimento che attraversa una regione di spazio in cui sono presenti un campo elettrico e un campo magnetico.

[i] Il simbolo $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ indica il prodotto vettoriale. Il prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore $\vec{c}$ che ha direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e verso che vede $\vec{a}$ ruotare verso $\vec{b}$ descrivendo l'angolo minore in senso antiorario. Per ricordare, se $\vec{a}$ è il medio della mano sinistra, $\vec{b}$ l'indice, $\vec{c}$ è il pollice.

Consideriamo due sottili fasci di raggi catodici, paralleli ed equiversi posti a distanza r l'uno dall'altro. Ciascuno di essi può essere pensato come una successione di elettroni in moto lungo una stessa traiettoria con velocità v. Ogni elettrone di un fascio interagisce con tutti gli elettroni dell'altro fascio e quindi sarà sottoposto ad una forza trasversale (ossia perpendicolare alla direzione dei due fasci); l'effetto di tale forza sarà una deflessione più o meno intensa dei due fasci.

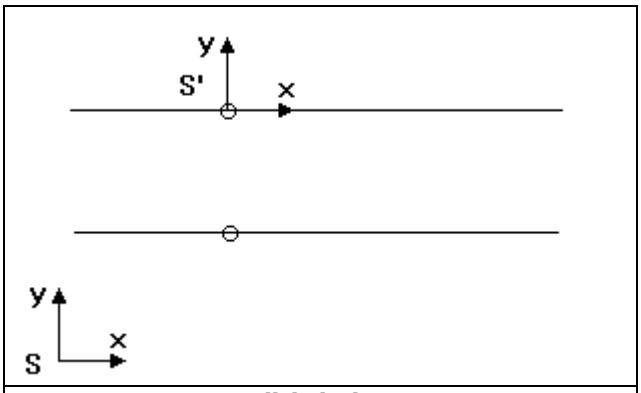


Figura 2 - Fascetti paralleli di elettroni

Per calcolare la forza agente su un elettrone useremo la [4]. A questo scopo osserviamo che il fascio di elettroni è equivalente ad un filo uniformemente carico (avente forma rettilinea nell'approssimazione in cui la deflessione è trascurabile), il campo elettrico è dato da

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{L}{r}$$

dove L è la densità lineare di carica, ossia la carica per unità di lunghezza del filo. D'altra parte, il fascio corrisponde anche ad una corrente rettilinea di intensità $i = Lv$; si ha infatti; $L = dq/dl$ e $v = dl/dt$, da cui $i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = Lv$; dalla legge di Biot e Savart si ha

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Lv}{r}$$

Infine tenuto conto che sia la forza elettrica sia la forza magnetica sono trasversali rispetto al fascio e che sono opposte, indicata con e la carica dell'elettrone, dalla (1) si ricava:

$$F = eE - evB = e\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{L}{r} - \frac{\mu_0}{2\pi}v^2\frac{L}{r}\right)$$

ossia

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{eL}}{2\pi\varepsilon_0\mathbf{r}}\left(1-\varepsilon_0\mu_0\mathbf{v}^2\right).$$

Nell'elettromagnetismo classico $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, quindi possiamo scrivere:

[5] $$F = \frac{eL}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

In base al principio di relatività è possibile tuttavia risolvere il problema anche ricorrendo alla sola **elettrostatica**; infatti, detto S il sistema di riferimento del laboratorio, in cui gli elettroni si muovono con velocità v e S' il sistema di riferimento in cui gli elettroni sono in **quiete**, basterà calcolare la forza in S' e poi passare da S' a S con un'opportuna **trasformazione di coordinate** spazio-temporali. Il fisico dell'800 conosceva solo le trasformazioni galileiane. Dette L' e F' la densità di carica e la forza misurate in S', essendo F' puramente elettrica, otteniamo:

[6] $$F' = \frac{eL'}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Consideriamo quindi le definizioni di forza[ii] e di densità lineare di carica in ciascun sistema di riferimento:

[7] $$F = \frac{dp}{dt}, \qquad F' = \frac{dp'}{dt'}$$

[8] $$L = \frac{dq}{dl}, \qquad L' = \frac{dq'}{dl'}$$

ove *dp* (o *dp*') esprime la variazione della quantità di moto dell'elettrone in direzione trasversale rispetto al fascio e *dq* (o *dq*') la quantità di carica presente in un tratto di fascio di lunghezza *dl* (o *dl*'). Si ha *dp* = *dp*' e, in base all'invarianza della carica, *dq* = *dq*'. D'altra parte le trasformazioni di Galileo di danno *dl* = *dl* ' e *dt* = *dt* ', da cui otteniamo semplicemente *F* = *F* ' e *L* = *L*', ossia:

$$F = \frac{eL}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

che è chiaramente in contrasto con la [5]. Ci troviamo pertanto di fronte al dilemma da cui ha avuto origine la teoria della relatività ristretta: **o il principio di relatività non si applica alle leggi dell'elettrodinamica, oppure le trasformazioni di Galileo non sono trasformazioni corrette per il passaggio da *S* a *S*'**.
Sicuramente è più utile conservare il principio di relatività e modificare le trasformazioni sostituendole con altre.

Sostituendo le [7] e le [8] nella [5] si ha:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{e\frac{dq}{dl}}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{da cui segue} \quad dp = \frac{e\frac{dq}{dl}}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dt$$

Sostituendo le [7] e le [8] nella [6] si ha:

$$F' = \frac{dp'}{dt'} = \frac{e\frac{dq'}{dl'}}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{da cui segue} \quad dp' = \frac{e\frac{dq'}{dl'}}{2\pi\varepsilon_0 r}dt'.$$

È naturale preservare il principio di conservazione della quantità di moto: *dp* = *dp*'.
Sostituendo le espressioni appena trovate, semplificando e facendo uso del principio di conservazione della carica elettrica (*dq* = *dq*') si ha:

[9] $$\frac{1}{dl}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dt = \frac{1}{dl'}dt'$$

È questa la condizione che deve esistere affinché la [5] e la [6] coincidano. L'equazione [9] ammette diverse soluzioni.

Se poniamo *dt* = *dt*' (l'invarianza della durata temporale di un fenomeno) allora:

$$dl = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dl'$$

c'è una contrazione delle lunghezze (N.B. v deve essere minore di c altrimenti le lunghezze potrebbero diventare negative o nulle).

[ii] La definizione di forza che viene data è quella legata alla variazione della quantità di moto (o meglio al teorema dell'impulso) secondo la quale una forza produce una variazione della quantità di moto nel tempo in cui viene applicata: $F = dp/dt$.

Se poniamo *dl* = *dl*' (l'invarianza delle lunghezze) allora:

$$dt = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt'$$

c'è una dilatazione dei tempi (gli orologi nei due sistemi di riferimento non segnerebbero la stessa durata per lo stesso fenomeno). Anche in questo caso *v* deve essere minore di *c*.

Per altre vie si arriverà a dire che la soluzione della [9] è data da:

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad dl = dl'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Queste equazioni derivano dalle cosiddette trasformazioni di Lorentz (vedi paragrafo successivo) che sono le trasformazioni utilizzate nella Relatività Ristretta.

Il fatto che la [5] e la [6] coincidono, conducono all'affermazione che: **due cariche uguali che si muovono parallelamente con la stessa velocità interagiscono con una forza minore di quella con cui interagirebbero se fossero in quiete**. Nella fisica classica ciò si spiega introducendo una forza magnetica attrattiva che si oppone alla forza elettrica repulsiva; nella fisica relativistica tale "indebolimento" è visto come effetto combinato della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze. In altre parole, **ciò che viene chiamato "magnetismo" non è che un puro fenomeno relativistico**, in quanto la forza che è giudicata "elettrica" da un osservatore, può essere giudicata "elettrica e magnetica" da un altro osservatore.
Che il campo magnetico non sia altro che un effetto relativistico può sorprendere chi è abituato a pensare che gli "effetti relativistici" si manifestino soltanto per velocità prossime a quella della luce. Se è vero che gli elettroni che costituiscono un fascio di raggi catodici possono raggiungere velocità prossime a quella della luce, è anche vero che in un comune filo percorso da una corrente di pochi ampere la velocità degli elettroni di conduzione è inferiore al mm/s.

L'ETERE E L'ESPERIMENTO DI MICHELSON E MORLEY

Come è noto, dalle equazioni di Maxwell segue che le onde elettromagnetiche viaggiano nel vuoto alla velocità: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ [iii]. Il problema che si pose subito dopo questa scoperta fu proprio quello di stabilire a quale sistema di riferimento doveva essere riferita la velocità c della luce.
È chiaro che, ammessa l'esistenza di un sistema di riferimento *S* privilegiato in cui la luce viaggia con velocità *c*, e ritenute valide le trasformazioni di Galileo, segue che la velocità di propagazione della luce per un sistema *S* ' in moto rispetto ad *S* ha un valore diverso da *c*. Infatti, se *S* ' è in moto rispetto ad *S* con velocità *v*, la luce nel sistema *S* ' ha una velocità compresa tra $c - v$ e $c + v$.
Il risultato fondamentale è che la misura della velocità della luce in un sistema di riferimento collegato con un corpo in movimento, essendo una funzione di *v*, dovrebbe mettere in evidenza il moto del corpo rispetto alla Terra. In effetti ai tempi della pubblicazione delle equazioni di Maxwell si supponeva che la luce si propagasse attraverso un mezzo chiamato **etere**, in quanto per i fisici del tempo non era pensabile che un'onda potesse propagarsi senza le vibrazioni di un mezzo. Lo stesso Maxwell, condizionato da questa convinzione, avendo scoperto la natura elettromagnetica della luce, pensò che l'etere fosse il mezzo che con le sue vibrazioni trasmettesse nello spazio il campo elettromagnetico. Perciò, ritenuto che esistesse un sistema di riferimento privilegiato *S* in cui la luce e le onde elettromagnetiche in genere viaggiano con velocità c, la cosa più naturale era quella di

[iii] Nel 1983 il Bureau International des Poids et Mésures ha stabilito che *c* = 299792458 m/s.

supporre il sistema di riferimento *S* collegato con l'etere. Come abbiamo visto, però, le leggi della meccanica di Newton differiscono da quelle dell'elettromagnetismo di Maxwell: mentre le prime sono invarianti per una trasformazione galileiana, le seconde non lo sono. Ciò indusse a ritenere che fosse possibile mettere sperimentalmente in evidenza il moto di un sistema *S* ', sede di fenomeni elettromagnetici, rispetto al sistema di riferimento *S*, se vogliamo privilegiato, assoluto, coincidente cioè con l'ipotetico etere.

Fu appunto al fine di raggiungere questo scopo che si cercò con esperienze di ottica (fenomeno elettromagnetico) eseguite sulla Terra di vedere se la velocità della luce rispetto alla Terra fosse la stessa in tutte le direzioni. Valutando infatti la velocità della luce lungo diverse direzioni, si dovrebbe, in linea di principio, riuscire a determinare il moto della Terra rispetto al sistema di riferimento assoluto in cui si assumeva che l'etere fosse a riposo.
Poiché la Terra ruota intorno al Sole con una velocità media di 30 km/s, cambiando continuamente direzione, ci saranno certamente dei periodi dell'anno in cui la Terra ha almeno una velocità di 30 km/s rispetto all'etere. Se l'etere fosse immobile rispetto al Sole la terra avrebbe costantemente la velocità di 30 km/s rispetto all'etere. Ciò premesso, Michelson dal 1881 e insieme a Morley dal 1887 cercarono di misurare, dall'esame di una figura di interferenza, proprio la velocità della terra rispetto all'etere.
Nella figura 3 è rappresentato schematicamente l'interferometro di cui essi si servirono per misurare la velocità v della Terra rispetto all'etere. Un raggio luminoso viene emesso dalla sorgente *S*, giunto allo specchio semi-argentato *M* in parte viene trasmesso verso lo specchio M_1 che lo riflette verso *M* che a sua volta lo riflette verso lo schermo, in parte viene riflesso verso lo specchio M_2 che lo riflette verso *M* che a sua volta lo trasmette allo schermo. I due raggi che giungono sullo schermo hanno percorso i cammini $2L_1$ e $2L_2$ con velocità diverse a causa del moto della Terra rispetto all'etere impiegando i tempi t_1 e t_2 pure diversi. Essi, sovrapponendosi sullo schermo generano una figura di interferenza in cui la posizione delle frange dipende dalla differenza $dt = t_2 - t_1$ dei tempi impiegati a percorre i due tragitti. Se supponiamo che la Terra, e quindi anche il dispositivo interferometrico ad essa collegato, trasli rispetto all'etere con velocità *v* diretta come la congiungente gli specchi MM_1, la differenza *dt* dei tempi è funzione di *v*. Ruotando il dispositivo di 90°, il raggio luminoso che prima percorreva il cammino $2L_1$ nella stessa direzione della velocità $\vec{v}$ della Terra rispetto all'etere percorrerà lo stesso cammino in direzione ortogonale a $\vec{v}$ e, viceversa, il raggio luminoso, che prima si muoveva da *M* a M_2 in direzione ortogonale a $\vec{v}$, si muoverà percorrendo la stessa distanza nella direzione di $\vec{v}$. I raggi prima di interferire impiegano ora tempi diversi t'_1 e t'_2 per percorrere le stesse distanze $2L_1$ e $2L_2$; di conseguenza la differenza di tempo $dt' = t'_2 - t'_1$ che è diversa da *dt*.
Sullo schermo dovrebbe quindi osservarsi una nuova figura di interferenza; ruotando con continuità il dispositivo si dovrebbe vedere uno spostamento delle frange di interferenza, in relazione alla velocità v della Terra rispetto all'etere.
Michelson e Morley, pur usando un interferometro capace di rilevare lo spostamento previsto e pur ripetendo le esperienze durante il giorno e la notte e in tutte le stagione dell'anno, non osservarono alcuno spostamento delle frange. La conclusione sperimentale che la velocità della Terra rispetto all'etere è nulla era così imprevista che per oltre cinquant'anni si continuò a ripetere gli esperimenti con strumenti sempre più precisi senza che il risultato cambiasse.
Analizziamo ora quantitativamente, dal punto di vista classico, l'esperimento di Michelson e Morley.

Il raggio che va da *M* a M_1 viaggia con velocità $c' = c + v$ e quindi il tempo richiesto è $\frac{L_1}{c+v}$. Il percorso del raggio di luce da M_1 a *M* avviene invece con velocità $c' = c - v$ e quindi in un tempo $\frac{L_1}{c-v}$ ne segue che il tempo totale è:

$$t_1 = \frac{L_1}{c+v} + \frac{L_1}{c-v} = \frac{2cL_1}{c^2-v^2} = \frac{2L_1}{c}\cdot\frac{1}{1-v^2/c^2}$$

Per il secondo raggio, mentre la luce viaggia da M a M_2, M_2 si sposta di un tratto $v\frac{t_2}{2}$. Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = L_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2$$

da cui si ricava

$$t_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

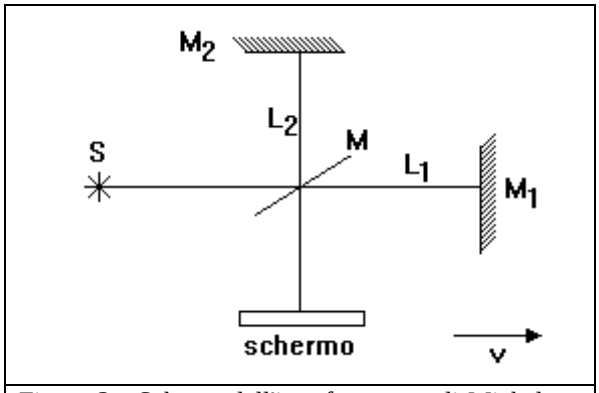


Figura 3 - Schema dell'interferometro di Michelson e Morley.

Non è superfluo osservare che nel calcolo di t_1 e t_2 abbiamo usato due distinti sistemi di riferimento, uno collegato con la Terra e l'altro con l'etere. Tale calcolo è corretto nell'ambito della fisica classica in quanto la misura del tempo è indipendente dal sistema di riferimento. La differenza dei tempi impiegati dai due raggi per percorrere le distanze $2L_1$ e $2L_2$ fra gli specchi, prima di sovrapporsi sullo schermo, originando una figura d'interferenza è:

$$dt = \frac{2}{c}\cdot\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{L_1}{1-v^2/c^2}\right).$$

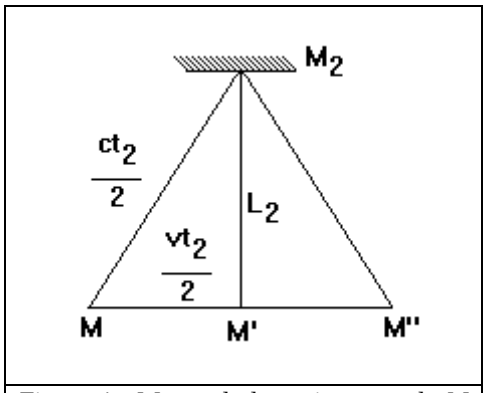


Figura 4 - Mentre la luce si muove da M a M_2 lo specchio M_2 si sposta.

Ruotando l'interferometro di 90°, L_1 diventa il cammino percorso dalla luce perpendicolarmente a v e L_2 quello percorso nella direzione di v che dovrebbe produrre un differente valore per dt causando uno spostamento delle frange di interferenza. Qualunque altra posizione intermedia avrebbe prodotto un intervallo ancora diverso e quindi una figura di interferenza sempre diversa.

DEDUZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

« È noto che l'elettrodinamica di Maxwell - così come essa è comunemente intesa - conduce, nelle sue applicazioni a corpi in movimento, ad asimmetrie che non sembrano conformi ai fenomeni. [...] i tentativi falliti di individuare un qualche movimento della Terra relativamente al "mezzo luminifero" [etere] suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all'idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che, [...], per tutti i sistemi di coordinate per le quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche. Eleveremo questa congettura (il contenuto della quale verrà detto, in quanto segue, **principio di relatività**) al rango di postulato; supporremo inoltre - un postulato, questo, solo apparentemente incompatibile con il precedente - che la luce, nello spazio vuoto, si propaghi sempre con una velocità determinata, c, che non dipende dallo stato del moto del corpo che la emette. Questi due postulati bastano per giungere ad una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento, semplice e coerente, fondata sulla teoria di Maxwell per i corpi stazionari. L'introduzione di un "etere luminifero" si manifesta superflua, tanto più che la concezione che qui illustreremo non avrà bisogno di uno "spazio assolutamente stazionario" corredato di particolari proprietà, né di un vettore velocità assegnato a un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici .»

Con queste parole Albert Einstein[iv] inizia l'articolo *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (L'elettrodinamica dei corpi in moto) pubblicato negli *Annalen der Physik* nel 1905, in cui la **teoria della relatività ristretta** (in quanto si riferisce ai sistemi inerziali). Da questi primi passi si evincono i due postulati che stanno alla base della teoria e che enunciamo come segue:

1) **Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

2) **La velocità della luce nel vuoto, c, è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

Come si è visto sopra, per trattare anche i fenomeni elettromagnetici è necessario un nuovo insieme di trasformazioni. Einstein trovò che l'insieme di trasformazioni proposte da Lorentz[v] per la risoluzione di altri problemi facevano a caso suo.
Il punto di partenza per la deduzione delle trasformazioni di Lorentz sono i postulati della Relatività Ristretta.

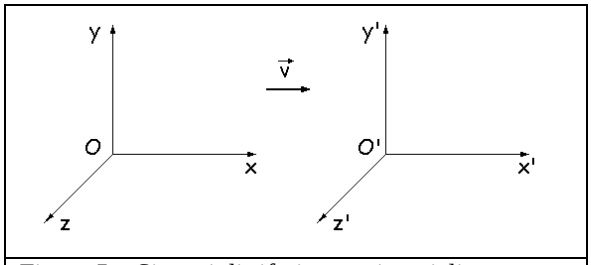


Figura 5 – Sistemi di riferimento inerziali.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali *S*, *S '* (vedi figura 5); per comodità il moto avviene solo nella direzione *x*. Nell'istante $t = 0$ le origini dei due sistemi coincidono ($O \equiv O'$) e un raggio di luce viene lanciato verso un punto *P*. Il postulato 2) impone che la velocità della luce *c* sia la stessa in entrambi i sistemi, pertanto dopo un tempo *t* esso si trova in *P* le cui coordinate spaziali sono (*x*,*y*,*z*) nel sistema *S* e (*x*',*y*',*z*') nel sistema *S*' e si ha:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \text{ (nel sistema } S\text{)}; \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \text{ (nel sistema } S'\text{)}.$$

Le coordinate di *P* sono diverse nei due sistemi di riferimento e questo impone che anche i tempi nei due sistemi di riferimento debbano essere diversi.
A questo punto è necessario generalizzare le trasformazioni di Galileo. Decidiamo di modificarle il meno possibile, preservando la linearità ed estendendola anche alla relazione di passaggio tra *t* e *t '* (che come abbiamo già detto deve esistere perché *t* e *t '* non possono più coincidere). Poniamo quindi:

$$\begin{cases} x' = k(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a(t - bx) \end{cases}$$

[iv] Albert Einstein (Ulma, 14 marzo 1879 – Princeton, 18 aprile 1955) è stato un fisico e filosofo tedesco naturalizzato svizzero e statunitense. Oltre a essere uno dei più celebri fisici della storia della scienza, che mutò in maniera radicale il paradigma di interpretazione del mondo fisico, fu attivo in diversi altri ambiti, dalla filosofia alla politica. Per il suo apporto alla cultura in generale è considerato uno dei più importanti studiosi e pensatori del XX secolo.
Nel 1905, ricordato come annus mirabilis, pubblicò quattro articoli a contenuto fortemente innovativo riguardanti tre aree differenti della fisica:
dimostrò la validità del concetto di quanto di Planck nell'ambito della spiegazione dell'effetto fotoelettrico dei metalli; fornì una valutazione quantitativa del moto browniano e l'ipotesi di aleatorietà dello stesso;
espose in due articoli la teoria della relatività ristretta, che precedette di circa un decennio quella della relatività generale.
Nel 1921 ricevette il premio Nobel per la fisica «...per i contributi alla fisica teorica, in particolare per la scoperta della legge dell'effetto fotoelettrico» e la sua fama dilagò in tutto il mondo soprattutto per la teoria della relatività, in grado, per l'assoluta originalità, di colpire l'immaginario collettivo.
[v] Lorentz dedusse queste equazioni per spiegare il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley, prima dell'enunciazione della teoria della relatività ristretta di Einstein. Erano delle equazioni empiriche, nel senso che non venivano dedotte da basi generali, come poi fece Einstein.

La scelta del moto nella sola direzione x ci permette di lasciare inalterati *y*' e *z*' e si ipotizzi per *t* e *t*' una relazione di passaggio simile a quella tra *x* e *x*'. *k*, *a*, *b* sono costanti che si devono determinare. Con le nostre scelte si ha:

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \quad \rightarrow \quad k^2\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2=c^2a^2\left(t-bx\right)^2,$$

sviluppando i quadrati e i prodotti di quest'ultima e raccogliendo i termini simili si ottiene:

$$\left(k^2-c^2a^2b^2\right)x^2-2\left(k^2v-c^2a^2b\right)tx+y^2+z^2=\left(c^2a^2-k^2v^2\right)t^2$$

confrontando con $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ si ha il sistema:

$$\begin{cases} k^2-c^2a^2b^2=1 \\ k^2v-c^2a^2b=0 \\ -k^2v^2+c^2a^2=c^2 \end{cases}$$

La seconda equazione dà: $k^2v=c^2a^2b$.

Sostituendo nella terza equazione si ha $-c^2a^2bv+c^2a^2=c^2$ e semplificando c^2 e risolvendo rispetto ad a^2, otteniamo $a^2=\dfrac{1}{1-bv}$.

Sostituendo quindi a^2 nella seconda equazione troviamo $k^2v=\dfrac{c^2b}{1-bv}$ da cui segue $k^2=\dfrac{c^2b}{v\left(1-bv\right)}$.

Sostituendo nella prima equazione abbiamo allora:

$$\frac{c^2b}{v\left(1-bv\right)}-c^2\frac{b^2}{\left(1-bv\right)}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2b}{\left(1-bv\right)}\left(\frac{1}{v}-b\right)=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2b}{1-bv}\cdot\frac{1-bv}{v}=1$$

e finalmente $b=\dfrac{v}{c^2}$.

Di seguito si trova: $a^2=\dfrac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$; l'unica soluzione accettabile è quella positiva (il tempo dovrebbe scorrere nello stesso verso in entrambi i sistemi; questa non è una dimostrazione, ma solo una scelta di buon senso). Pertanto si ha $a=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Infine, $k^2v=c^2a^2b \quad \Rightarrow \quad k^2=\dfrac{c^2a^2b}{v}=\dfrac{c^2}{v}a^2b=\dfrac{c^2}{v}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\cdot\dfrac{v}{c^2}=\dfrac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ e scegliendo anche per *k* la radice positiva (*x* e *x*' hanno lo stesso segno) si ricava: $k=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Molto spesso si usa la notazione (tradizionale) $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, $\beta=\dfrac{v}{c}$. Si vede subito che β e γ sono adimensionali. Il fattore γ viene chiamato anche **fattore lorenziano**.

La forma delle trasformazioni di Lorentz è quindi:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta x}{c}\right) \end{cases}$$

Le trasformazioni di Lorentz inverse sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

dove praticamente si sono scambiate x', y', z', t' rispettivamente con x, y, z, t e viceversa e v con $-v$.

E' importante notare come, per v molto piccola rispetto a c, il rapporto $v/c \simeq 0$, quindi $\gamma = 1$ e le trasformazioni di Lorentz si riducano alle trasformazioni galileiane.

Esempio. Calcolare il valore di γ per (a) $v = 1000$ km/h, (b) $v = 1000$ km/s, (c) $v = 0{,}8c$

(a) $v = 1000$ km/h = 278 m/s per cui

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{278}{299792458}\right)^2}} = 1{,}00000000000043$$

(b) $v = 1000$ km/s = 10^6 m/s per cui

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{10^6}{299792458}\right)^2}} = 1{,}0000056$$

(c) Se $v = 0{,}8c$ s abbiamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0{,}8c}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

Il record di velocità per un manufatto umano spetta alla sonda Juno, che orbita intorno a Giove dal 5 luglio 2016. Durante il suo avvicinamento a Giove ha raggiunto la velocità di 265,000 km/h. In questo caso $\gamma = 1{,}000000057$.

Nella figura 6 viene riportato l'andamento di γ in funzione del rapporto *v*/*c*.

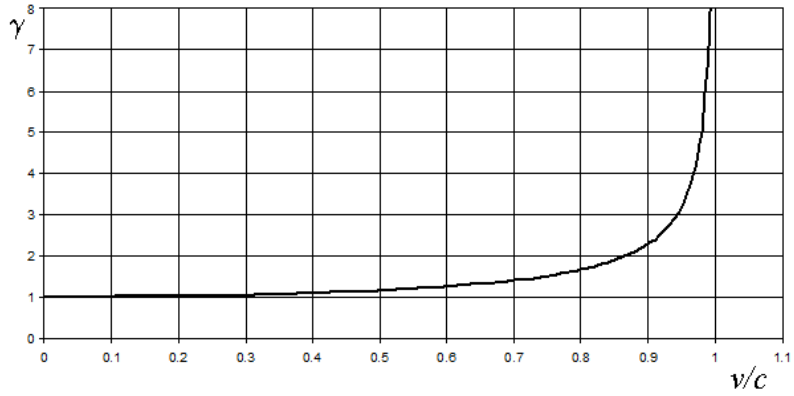


Figura 6 – L'andamento del fattore lorentziano γ in funzione del rapporto v/c.

CONSEGUENZE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Simultaneità

Consideriamo questi due casi che sono simmetrici rispetto allo scambio delle coordinate spazio-temporali.

Caso 1: *O'* osserva che due eventi avvengono nello stesso luogo ma sono separati in tempo: *O* affermerà allora che i due eventi avvengono in due luoghi diversi.

Caso 2: *O'* osserva che due eventi avvengono nello stesso istante ma sono separati nello spazio; *O* affermerà allora che i due eventi avvengono in tempi diversi.

Il caso 1 è facilmente comprensibile sulla base dell'esperienza quotidiana. Se un uomo (*O'*) su un treno in movimento accende due sigarette, una dieci minuti dopo l'altra, allora questi eventi avvengono nello stesso luogo nel suo sistema di riferimento (il treno). Un osservatore a terra (*O*), comunque, asserirebbe che questi stessi eventi avvengono in luoghi diversi nel suo sistema di riferimento (la terra).

Il caso 2, sebbene vero, non può essere facilmente suffragato dall'esperienza quotidiana. Supponiamo che *O'*, posto al centro di un vagone ferroviario in movimento, osservi che due uomini, uno in ciascuna estremità del vagone, accendono una sigaretta simultaneamente. L'osservatore sulla terra *O*, vedendo passare il vagone, asserirebbe (se potesse fare delle misure abbastanza precise) che l'uomo della parte posteriore del vagone ha acceso la sua sigaretta un po' prima dell'uomo della parte anteriore. Il fatto che la velocità della luce sia così grande rispetto alle velocità dei familiari oggetti macroscopici rende il caso 2 intuitivamente meno ragionevole del caso 1, come ora dimostriamo.

a) Nel caso 1, supponiamo che la separazione in tempo in *O'* sia di 10 minuti; qual è la distanza osservata da *O*?
b) Nel caso 2, supponiamo che la distanza di separazione in *O'* sia di 25 *m*, qual è la separazione in tempo osservata da *O*? Si prenda $v = 20{,}0$ *m/s* che corrisponde a 72 *km/h*, ossia $v/c = 6{,}6\cdot10^{-8}$.

a) Dalle trasformate di Lorentz si ha:

$$x_2 - x_1 = \gamma(x_2' + vt_2') - \gamma(x_1' + vt_1') = \gamma\left[(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')\right]$$

Essendo $x_2' = x_1'$ e $t_2' - t_1' = 10\ min$, si ha

$$x_2 - x_1 = \frac{(20{,}0\ m/s)(10\ min)}{\sqrt{1-\left(6{,}6\cdot10^{-8}\right)^2}} = 12000\ m = 12\ km\,.$$

Questo risultato si comprende facilmente. Poiché il denominatore è circa uguale a uno, il risultato coincide anche numericamente con ciò che ci si aspetterebbe dalle equazioni di Galileo.

b) Sempre dalle trasformate di Lorentz si ha

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'\right) = \gamma\left[(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')\right]$$

essendo $t_2' = t_1'$ e $x_2' - x_1' = 25\ m$, si ha

$$t_2 - t_1 = \frac{(25\ m)(20{,}0\ m/s)/\left(3{,}0\cdot10^8 m/s\right)^2}{\sqrt{1-\left(6{,}6\cdot10^{-8}\right)^2}} = 5{,}6\cdot10^{-15} s\,.$$

Il risultato non è zero, come ci si aspetterebbe dalla fisica classica, ma l'intervallo di tempo è così piccolo che sarebbe molto difficile dimostrare sperimentalmente che è realmente diverso da zero.

Se confrontiamo le espressioni precedenti per $x_2 - x_1$ e per $t_2 - t_1$ vediamo che mentre v appare a fattore nel secondo termine della prima espressione, nella seconda compare v/c^2. Così il relativamente alto valore di *c* pone il caso 1 entro i limiti dell'esperienza ordinaria ma pone il caso 2 al di fuori di questi limiti.

Contrazione delle lunghezze

Consideriamo due aste *A* e *B* di uguale lunghezza, fissate la prima a un osservatore *O* e la seconda a un osservatore *O*' in moto rettilineo uniforme con velocità *v* rispetto a *O*. Supponiamo inoltre che la direzione del moto coincida con quella comune degli assi *x* e *x* ' e che le aste siano disposte secondo la direzione di questi assi.

L'osservatore *O*' per misurare la lunghezza della propria asta *B* può riportare sull'asta un regolo di lunghezza nota. Indichiamo la misura con

$$l_0 = x_2' - x_1' ,$$

dove x'_1 e x'_2 sono le ascisse degli estremi dell'asta nel sistema di coordinate *S* ' collegato con *O*'.

L'osservatore *O*, invece, per misurare la lunghezza della stessa asta, dato che essa è in movimento, può segnare sull'asse *x* a un certo istante *t*, misurato nel proprio sistema di riferimento, le posizioni degli estremi dell'asta. Se le ascisse di questi estremi sono x_1 e x_2 , la lunghezza dell'asta, misurata dall'osservatore *O*, è

$$l = x_2 - x_1 .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz segue:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \qquad \text{e} \qquad x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

da cui:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

cioè

$$l = \frac{l_0}{\gamma} .$$

Da questa espressione segue che la lunghezza *l* dell'asta misurata dall'osservatore *O* è minore della lunghezza l_0 della stessa asta misurata dall'osservatore *O*', cioè all'osservatore *O* l'asta appare contratta secondo il fattore lorentziano γ. Naturalmente anche qui la contrazione è significativa solo per velocità *v* non trascurabili rispetto alla velocità della luce.

Anche *O*' misura per l'asta *A* una lunghezza minore di quella misurata da *O*. L'asta *A*, infatti, rispetto a *O*' si muove nella direzione degli assi *x* e *x*' con velocità *–v*. Il ragionamento è analogo al precedente e se con l_0 indichiamo la misura dell'asta nel sistema di riferimento in cui essa è in quiete e con *l* la sua misura in un sistema di riferimento in cui essa è in moto otteniamo sempre lo stesso risultato:

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

Questa espressione si poteva ottenere dalla precedente applicando il principio di relatività in base al quale, se all'osservatore *O* l'asta collegata con *O*' appare contratta, la stessa cosa avviene per l'osservatore *O*' nei riguardi dell'asta collegata con *O*. Se invece la contrazione avvenisse solo per un osservatore, questi avrebbe la possibilità di evidenziare il suo moto rettilineo uniforme rispetto all'altro.

La lunghezza l_0 misurata nel sistema di riferimento in cui l'asta è in quiete si chiama **lunghezza propria**.

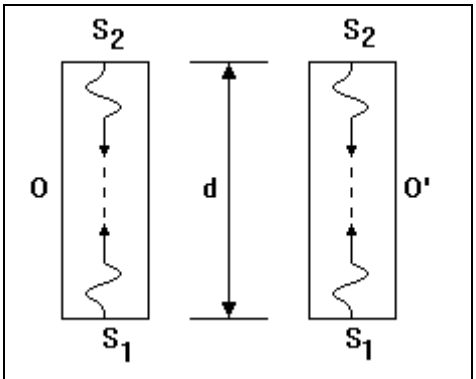


Figura 7 – Orologi a luce.

Dilatazione dei tempi

Per misurare il tempo consideriamo un orologio a luce, schematicamente rappresentato in figura 7. Un lampo di luce viene prodotto da S_1 si riflette sullo specchio S_2 e ritorna verso S_1 che lo rileva, quindi, immediatamente parte un altro lampo e così via. Il tempo impiegato dal lampo per percorrere la distanza *d* da S_1 a S_2 e ritornare rappresenta il periodo *dt* di questo orologio a luce.

Consideriamo ora due orologi a luce, uno dei quali è collegato a un osservatore *O*, mentre l'altro è fissato a un osservatore *O*'. Se i due osservatori sono fermi, gli orologi hanno lo stesso periodo e quindi il *dt* di *O* coincide col *dt*' di *O*'.
Immaginiamo ora (figura 8) che l'osservatore *O*' si muova con velocità costante *v*, insieme al suo orologio, rispetto all'osservatore *O*. L'osservatore *O*' non nota nulla di nuovo, nel senso che, osservando il proprio orologio lo vede funzionare regolarmente.
L'osservatore *O* che osserva l'orologio di *O*' vede invece il lampo di luce procedere obliquamente.
Durante il tempo, *dt*'/2, impiegato dalla luce rispetto ad *O*' per andare da S_1 a S_2, il lampo di luce percorre, rispetto all'osservatore *O*, il tratto *L*, ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti *d* e la distanza *a* percorsa dall'orologio rispetto ad *O*. Quindi lo spazio percorso dalla luce rispetto ad *O* è maggiore di quello percorso dallo stesso lampo rispetto ad *O*'. Poiché la velocità della luce è la stessa per i due osservatori, concludiamo che il tempo *dt*/2 impiegato dalla luce per andare da S_1 ad S_2 e misurato dall'osservatore *O* è maggiore di quello registrato dall'osservatore *O*'.

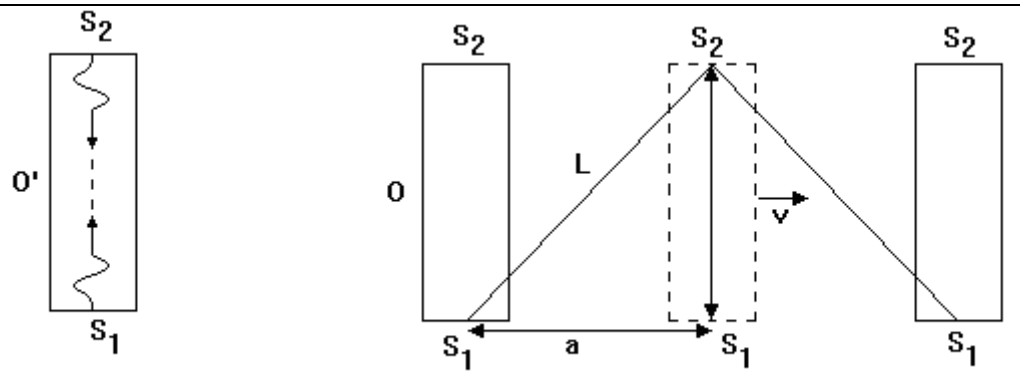


Figura 8 - L'orologio a luce collegato con l'osservatore *O*' in moto rettilineo uniforme rispetto ad *O* ritarda rispetto all'orologio collegato con l'osservatore *O*.

Troviamo ora la relazione che intercorre tra i due intervalli di tempo *dt* e *dt* ' . Dalla figura 8 si ha:

$$L^2 = d^2 + a^2$$

d'altra parte è anche:

$$\begin{cases} L = c \cdot \dfrac{dt}{2} \\ d = c \cdot \dfrac{dt'}{2} \\ a = v \cdot \dfrac{dt}{2} \end{cases}$$

Sostituendo si ricava:

$$c^2 \cdot dt^2 = c^2 \cdot dt'^2 + v^2 \cdot dt^2$$

da cui

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma dt'$$

L'intervallo di tempo dt' misurato dall'osservatore *O*' nel proprio sistema di riferimento in cui l'orologio è in quiete si chiama **tempo proprio** (e generalmente viene indicato con dt_0).

$$dt = \gamma dt_0$$

Per concludere, facciamo presente che i risultati dedotti misurando il tempo con un orologio a luce valgono in generale, e tutti gli orologi di *O*', qualunque sia il principio di funzionamento essi

ritardano rispetto ad *O*. In *O*' qualsiasi fenomeno subisce un rallentamento: per esempio, nell'ipotesi di considerare dei moti relativi a velocità relativistiche (confrontabili con la velocità della luce), l'osservatore *O* vede *O*' fumarsi una sigaretta o mangiare più lentamente rispetto a quando *O'* sia fermo rispetto ad *O*. Più in generale, la scala temporale di *O* e quella di *O*' sono diverse se gli osservatori si trovano in uno stato di moto relativo.
In base a ciò, due eventi che sono simultanei in un sistema di riferimento non lo sono in un altro sistema che sia in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. Infatti se due orologi sono sincronizzati in un sistema in cui sono fermi, non lo saranno più quando i due sistemi sono in moto relativo.
Si osservi come le due espressioni per la contrazione delle lunghezze e per la dilatazione dei tempi diano semplicemente $l = l_0$ e $dt = dt_0$ per v piccola rispetto a c; a testimonianza del fatto che le trasformazioni galileiane (e la relatività galileiana) sono una approssimazione per piccole velocità delle trasformazioni di Lorentz (e della relatività ristretta).

Moto di particelle ad alte energie
Fra le particelle della fisica delle alte energie ci sono i pioni carichi, particelle di massa compresa fra quella dell'elettrone e quella del protone e di carica eguale o opposta a quella dell'elettrone. Queste particelle vengono prodotte all'interno di un acceleratore di particelle, dove un bersaglio viene bombardato da protoni di alta energia. I pioni si muovono con velocità vicine a quella della luce. Si è trovato che, a riposo, la loro vita media risulta essere $1{,}77\cdot10^{-8}$ *s*: cioè metà del numero presente ad un certo istante decade (ovvero si trasforma in altre particelle di massa minore) dopo $1{,}77\cdot10^{-8}$ *s*. Si trova che un fascio collimato di pioni, che parta dal bersaglio di un acceleratore ad una velocità di 0,99*c*, si riduce alla metà dell'intensità originale a 37 *m* dal bersaglio.
a) Sono consistenti questi risultati?
Se consideriamo la vita media essere $1{,}77\cdot10^{-8}$ *s* e la velocità $2{,}97\cdot10^{8}$ *m/s* (= 0,99*c*), la distanza percorsa nel tempo in cui metà dei pioni dovrebbero decadere è

$$d = vt = (2{,}97\cdot10^{8}\ m/s)(1{,}77\cdot10^{-8}\ s) = 5{,}26\ m.$$

Ciò sembra contraddire la misura diretta di 37 *m*.
b) Mostrare in che modo la dilatazione dei tempi rende ragione delle misure.
Se non esistessero gli effetti relativistici, la vita media misurata sarebbe la stessa per pioni a riposo e per pioni in moto. Nella relatività, tuttavia, la vita media propria (misurate cioè nel sistema di riferimento in cui le particelle sono in quiete, in questo caso $dt_0 = 1{,}77\cdot10^{-8}$ s) e non proprie (*dt* misurate in un sistema di riferimento rispetto al quale sono in movimento) sono legate dalla relazione:

$$dt = \gamma dt_0 .$$

Nel riferimento del laboratorio i pioni sono in movimento ad alte velocità e ivi l'intervallo di tempo (non proprio) risulterà essere più grande (gli orologi in movimento sembrano andare più lentamente). La vita media misurata nel riferimento del laboratorio, sarebbe allora

$$dt = \frac{1{,}77\cdot10^{-8}\,s}{\sqrt{1-(0{,}99)^2}} = 1{,}25\cdot10^{-7}\,s$$

I pioni che vivono per questo tempo, viaggiando alla velocità di 0,99*c*, percorreranno una distanza

$$d = (0{,}99c)dt = (2{,}97\cdot10^{8}\ m/s)(1{,}25\cdot10^{-7}\ s) = 37\ \text{m}$$

esattamente uguale a quella misurata nel laboratorio.
c) Mostrare in che modo la contrazione delle lunghezze rende ragione delle misure.
Nella parte a) abbiamo usato una misura di lunghezza (37 *m*) data nel riferimento del laboratorio e una misura di tempo ($1{,}77\cdot10^{-8}$ *s*) data nel riferimento del pione e le abbiamo combinate erroneamente. Nella parte b) abbiamo usato le misure di lunghezza (37 *m*) e di tempo ($1{,}3\cdot10^{-7}$ *s*)

date nel riferimento del laboratorio. Ora usiamo le misure di lunghezza e di tempo per il riferimento del pione. Conosciamo già la vita media nel riferimento del pione, cioè, il tempo proprio $1{,}77\cdot10^{-8}$ *s*. Qual è la distanza percorsa dal fascio di pioni mentre la sua intensità si riduce alla metà del suo valore originario? Se fossimo connessi col pione, la distanza di 37 *m* nel laboratorio ci apparirebbe molto più corta poiché il laboratorio si muove con una velocità 0,99*c* rispetto a noi (al pione). In effetti, misureremmo la distanza

$$d' = \frac{d}{\gamma} = d\sqrt{1-v^2/c^2} = (37\ m)\sqrt{1-(0{,}99)^2} = 5{,}22\ m$$

all'incirca la distanza percorsa dal pione del suo sistema di riferimento. Così, a seconda di quale riferimento scegliamo per farvi le misure, questo esempio illustra la realtà fisica sia della dilatazione dei tempi che della contrazione delle lunghezze predette dalla teoria della relatività.

Ogni pione trasporta il proprio orologio, che determina il tempo proprio τ di decadimento, ma il tempo di decadimento osservato da un osservatore nel laboratorio è molto più grande. Cioè, in altre parole, il pione in movimento vede le distanze nel laboratorio contratte e nel suo tempo proprio di decadimento può coprire nel laboratorio distanze più grandi di quelle misurate nel suo riferimento proprio.

Si noti che in questa regione di $v \approx c$ gli effetti relativistici sono grandi. Non si può avere nel nostro esempio, alcun dubbio sul fatto che la distanza sia 37 *m* o 5,3 *m*. Se il tempo proprio avesse significato anche nel riferimento del laboratorio, il tempo necessario per percorrere i 37 *m* corrisponderebbe a più di sette vite medie. Il fascio invece di ridursi a metà della sua intensità iniziale, si ridurrebbe a $(1/2)^7$ della sua intensità iniziale. Differenze di questo ordine sono facilmente rilevabili.

Questo esempio non è assolutamente un risultato isolato. Tutte le misure cinematiche (e dinamiche) della fisica delle alte energie sono consistenti con i risultati della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze. Gli esperimenti e gli acceleratori stessi sono progettati in modo da tenere conto degli effetti relativistici. La relatività è di uso quotidiano nella fisica e nell'ingegneria delle alte velocità.

Composizione delle velocità

Consideriamo come al solito un osservatore *O*' collegato a un sistema di coordinate *S* ' in moto rettilineo uniforme lungo l'asse *x* (coincidente con *x*') del sistema *S* collegato con l'osservatore *O*. La velocità di *O*' rispetto a *O* sia $\vec{v}$. Sia quindi *A* un oggetto in moto rispetto ad entrambi gli osservatori (per semplicità di calcolo consideriamo *A* in moto lungo l'asse *x*).

Dette $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ le velocità di *A* rispetto ad *O* e ad *O*', la fisica classica ci dice che queste sono legate dalla relazione:

$$\vec{u} = \vec{u}' \pm \vec{v}$$

il segno + se $\vec{u}'$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$ e il segno – se $\vec{u}'$ ha verso opposto rispetto a $\vec{v}$.

Supponiamo ad esempio che una nave spaziale in moto con velocità v = 100 000 km/s rispetto ad una stazione spaziale emetta un'onda elettromagnetica davanti a sé; in questo caso $u' = c$ = 300 000 *km/s*. L'onda elettromagnetica rispetto alla stazione spaziale ha velocità u = 400 000 *km/s*.

Il valore trovato, essendo superiore a *c*, è in contrasto con il secondo postulato della relatività ristretta. D'altra parte si vede immediatamente che tutte le formule della relatività perdono significato quando $v > c$ in quanto il fattore γ non risulta più un numero reale. Concludiamo perciò che la legge di composizione delle velocità non può essere quella data qui sopra. Ciò d'altra parte è ovvio in quanto questa relazione è stata ricavata dalle trasformazioni galileiane, che sono state sostituite con quelle di Lorentz. Se vogliamo trovare la corretta legge di composizione delle velocità dobbiamo partire dalle trasformazioni di Lorentz.

Ricordiamo che la velocità è un rapporto tra spazio e tempo e che lo spazio e il tempo sono suscettibili di misure diverse da parte di ciascuno dei due osservatori.

Se il moto di *A* è rettilineo uniforme (la condizione è posta solo per semplicità di calcolo) si ha:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{e} \qquad u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Dove Δx è lo spazio percorso da *A* nell'intervallo di tempo Δt misurati da *O*, mentre Δx' e Δt' sono misurati da *O*'. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz si ottiene:

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) = \gamma\left(u - v\right)\Delta t \qquad \text{e} \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)\Delta t\ .$$

Facendo il rapporto membro a membro si ha:

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma\left(u - v\right)\Delta t}{\gamma\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)\Delta t} = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

cioè

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

che sostituisce la formula classica di composizione delle velocità.
Risolvendo l'equazione delle velocità rispetto a *u*, si ha l'equazione inversa

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

Dalle equazioni precedenti si vede che nel caso delle comuni velocità, ivi comprese quelle delle moderne navi spaziali, il prodotto $v \cdot u$ è trascurabile rispetto a c^2, quindi il denominatore si può approssimare con 1 e la formula si riduce a quella classica.
Riconsideriamo quindi l'esempio dell'astronave, essendo $u' = c$ si ha:

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c$$

e quindi anche *O* misura una velocità *c*.
Allo stesso modo se il segnale elettromagnetico fosse inviato dalla stazione spaziale verso l'astronave, sarebbe $u = c$ e si ricava $u' = c$.

Nel caso il moto non avvenisse lungo l'asse *x*, le velocità *u* e *u*' avrebbero delle componenti anche lungo gli assi *y* e *z*, si avrebbe $\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$ e $\vec{u}' = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$. Procedendo come nel caso visto sopra, si ricavano le equazioni:

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}u_x\right)} \end{cases}$$

Dimostriamo la seconda. Dalle trasformazioni di Lorentz si ricava che $\Delta y' = \Delta y$, per cui

$$u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

L'intervallo invariante

Da quanto si è detto finora, sembra che tutto sia relativo. Nel mondo variabile dello spazio-tempo esiste qualcosa che rimanga costante? Esiste qualcosa su cui possano concordare tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto? Nel campo della fisica, si cercano sempre alcune costanti caratteristiche del moto. Ci si chiede quindi se esista una costante del moto nello spazio-tempo. La risposta è affermativa. Il valore costante su cui concordano tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto, è detto ***intervallo invariante***. Come abbiamo visto più sopra, dalle trasformazioni di Lorentz è possibile ricavare:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \text{e} \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$

Sviluppiamo il seguente calcolo:

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2\left(\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)\right)^2 - \left(\gamma(\Delta x - v\Delta t)\right)^2 =$$

$$= c^2\gamma^2\left[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\left(\frac{v}{c^2}\right)^2 - 2\Delta t\Delta x\left(\frac{v}{c^2}\right)\right] - \gamma^2\left[(\Delta x)^2 + v^2(\Delta t)^2 - 2v\Delta x\Delta t\right] =$$

$$= \gamma^2\left[c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cancel{-2\Delta t\Delta x v} - (\Delta x)^2 - v^2(\Delta t)^2 \cancel{+2v\Delta x\Delta t}\right] =$$

$$= \gamma^2\left[(\Delta t)^2(c^2 - v^2) - (\Delta x)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \gamma^2\left[c^2(\Delta t)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - (\Delta x)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] =$$

$$= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Si ottiene l'uguaglianza:

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

che può essere vera solo se ognuno dei due termini è una costante; poniamo

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 .$$

Se includiamo anche le altre due dimensioni spaziali otteniamo:

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Esempio: siano $P(10,3,2,1)$ e $Q(4,1,5,3)$ sono due eventi per l'osservatore O (i primi tre numeri indicano la posizione in metri, il quarto il tempo in secondi) e P', Q' gli stessi eventi per un osservatore O' che si muove con velocità costante v = 0,8c rispetto ad O lungo la direzione positiva dell'asse x (come si è visto in molti casi precedenti, vedi anche figura 5.

Per O si ha:

$$(\Delta s)^2 = c^2(1-3)^2 - (10-4)^2 - (3-1)^2 - (2-5)^2 = 4c^2 - 49.$$

Mediante le trasformazioni di Lorenzt troviamo le coordinate dei punti P' e Q' trasformati di P e Q.

Osserviamo per prima cosa che $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}$, quindi

$$P' \equiv \begin{cases} x' = \frac{5}{3}(10 - 0{,}8c) \\ y' = 3 \\ z' = 2 \\ t' = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{8}{c}\right) \end{cases} \quad \text{e} \quad Q' \equiv \begin{cases} x' = \frac{5}{3}(4 - 2{,}4c) \\ y' = 1 \\ z' = 5 \\ t' = \frac{5}{3}\left(4 - \frac{3{,}2}{c}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= c^2\left[\frac{5}{3}\left(4 - \frac{3{,}2}{c}\right) - \frac{5}{3}\left(1 - \frac{8}{c}\right)\right]^2 - \left[\frac{5}{3}(4 - 2{,}4c) - \frac{5}{3}(10 - 0{,}8c)\right]^2 - [1-3]^2 - [2-5]^2 = \\ &= \frac{25}{9}c^2\left[3 - \frac{4{,}8}{c}\right]^2 - \frac{25}{9}[-6 - 1{,}6c]^2 - 4 - 9 = \\ &= \frac{25}{9}c^2\left[9 + \frac{23{,}04}{c^2} - \frac{28{,}8}{c}\right] - \frac{25}{9}\left[36 + 2{,}56c^2 - 19{,}2c\right] - 13 = \\ &= \frac{25}{9}c^2 + 64 - 80c - 100 - \frac{64}{9}c^2 + \frac{160}{3}c - 13 = \\ &= -\frac{39}{9}c^2 - \frac{80}{3}c - 49 \end{aligned}$$

L'espressione per l'intervallo invariante può essere scritta anche nella forma:

$$(\Delta s)^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{i,j}\Delta x_i \Delta x_j$$

dove si è posto: $\Delta x_1 = c\Delta t$; $\Delta x_2 = \Delta x$; $\Delta x_3 = \Delta y$; $\Delta x_4 = \Delta z$; $g_{i,j}$ sono delle costanti e sono gli elementi della matrice quadrata[vi] 4×4

$$g_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pertanto si avrebbe:

$$\begin{aligned} &(\Delta s)^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{i,j}\Delta x_i \Delta x_j = g_{1,1}\Delta x_1\Delta x_1 + g_{1,2}\Delta x_1\Delta x_2 + g_{1,3}\Delta x_1\Delta x_3 + g_{1,4}\Delta x_1\Delta x_4 + g_{2,1}\Delta x_2\Delta x_1 + g_{2,2}\Delta x_2\Delta x_2 + \\ &+ g_{2,3}\Delta x_2\Delta x_3 + g_{2,4}\Delta x_2\Delta x_4 + g_{3,1}\Delta x_3\Delta x_1 + g_{3,2}\Delta x_3\Delta x_2 + g_{3,3}\Delta x_3\Delta x_3 + g_{3,4}\Delta x_3\Delta x_4 + g_{4,1}\Delta x_4\Delta x_1 + \\ &+ g_{4,2}\Delta x_4\Delta x_2 + g_{4,3}\Delta x_4\Delta x_3 + g_{4,4}\Delta x_4\Delta x_4 = (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 = \\ &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Lo spazio–tempo di Minkowski

Poco tempo dopo che Einstein ebbe pubblicato la propria teoria della relatività ristretta, Hermann Minkowski (1864-1909), ex docente di Einstein, si accinse a geometrizzare la relatività. Disse che il tempo e lo spazio sono inseparabili. Nelle sue parole, «*Nessuno ha mai notato un luogo se non a un certo istante, o un istante se non in un certo luogo. ...Un punto dello spazio in un dato tempo, cioè,*

[vi] Si ricorda che una matrice è una tabella dove i valori vengono allineati in righe e colonne, il primo indice indica la riga, il secondo la colonna; per esempio $g_{2,3}$ indica il valore che si trova alla seconda riga e terza colonna.

un sistema di valori di x, y, z, t, lo chiamerò un punto di universo. La molteplicità di tutti i sistemi immaginabili di valori x, y, z, t la chiameremo universo.»
Per semplificare la trattazione, considereremo soltanto una dimensione dello spazio, la coordinata *x*. Ogni evento nello spazio–tempo (o cronotopo) è rappresentato nel ***diagramma spaziotemporale o diagramma di Minkowski*** della 9(a). L'evento potrebbe essere, per esempio, l'esplosione di un petardo. La posizione di questo evento è il punto di universo e ha le coordinate *x* e *t*. [Molti autori di libri sulla relatività a livello più avanzato scambiano le coordinate, disponendo l'asse dei tempi nella direzione verticale per richiamare l'attenzione sul fatto che questo è un diagramma diverso dal tradizionale diagramma dello spazio in funzione del tempo (diagramma orario). In questo materiale useremo la rappresentazione grafica tradizionale perché è più familiare.

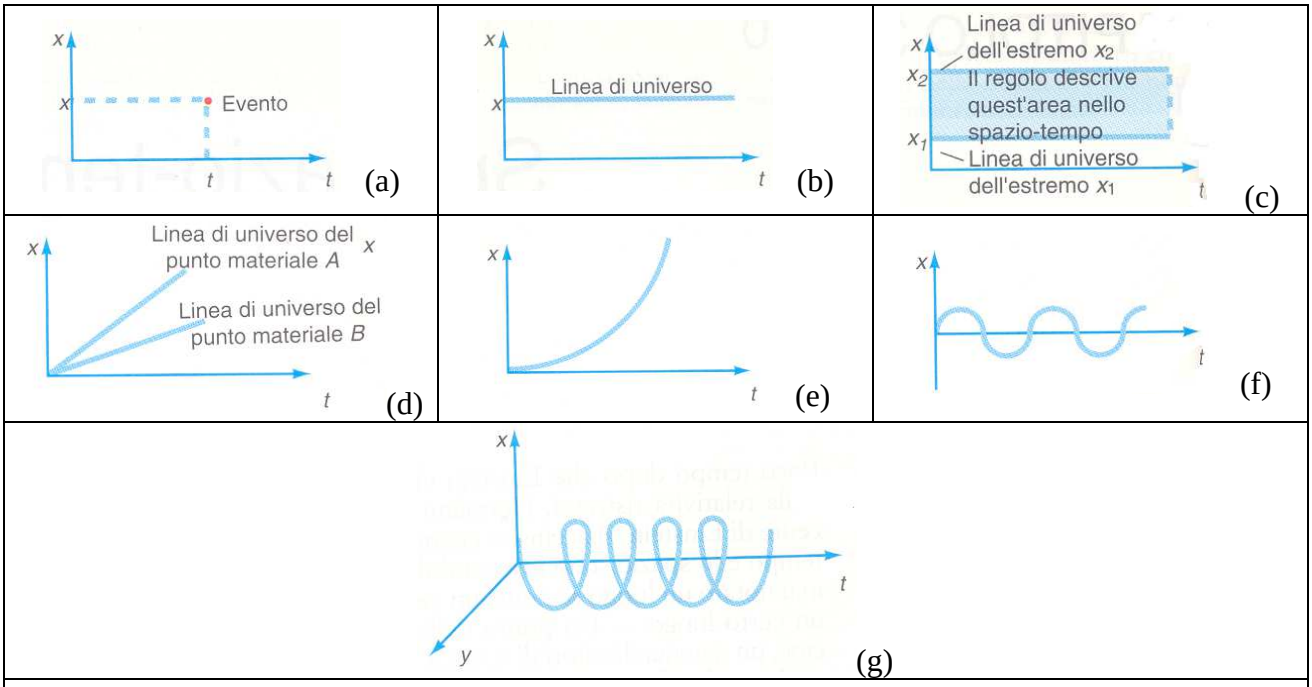


Figura 9 – Diagrammi spaziotemporali

La figura 9(b) è una rappresentazione di una linea di universo (o linea oraria) di un punto materiale in quiete nella posizione *x*. Il diagramma indica che il punto materiale, anche se è in quiete nello spazio, è tuttavia in moto nel tempo. La coordinata *x* del punto materiale è costante poiché esso non si muove attraverso lo spazio, ma la sua coordinata temporale cresce continuamente, indicando il moto attraverso il tempo. La figura 9(c) rappresenta un regolo in quiete nello spazio-tempo. La linea superiore rappresenta la linea di universo dell'estremo del regolo in x_2, mentre la linea inferiore rappresenta la linea di universo dell'estremo opposto del regolo in x_1. È importante notare che il regolo in quiete descrive un'area nello spazio–tempo. La figura 9(d) mostra la linea di universo del punto materiale A in moto a velocità costante v_A e la linea di universo del punto B in moto a velocità costante v_B. Il coefficiente angolare di una retta su un diagramma di *x* in funzione di *t* rappresenta la velocità del punto materiale: maggiore è il coefficiente angolare maggiore è la velocità. Il punto materiale A, avendo il coefficiente angolare maggiore, ha la velocità maggiore, cioè, $v_A > v_B$. Se la velocità di un punto materiale varia nel tempo, la sua linea di universo non è più una retta, ma diventa una curva, come è illustrato nella figura 9(e). Perciò, la linea di universo di un punto materiale accelerato è curva nello spazio–tempo. La figura 9(f) è la linea universo di una massa attaccata a una molla che si muove di moto armonico semplice. È importante notare che la linea di universo curva dappertutto, la qual cosa indica che si tratta di un moto accelerato. La figura 9(g) è una rappresentazione, in due dimensioni spaziali, dell'orbita di un pianeta attorno al Sole. Il moto del pianeta si svolge nel piano *xy*, ma, poiché il pianeta si muove anche nel tempo, la sua linea di universo esce dal piano diventando un'elica. Perciò, quando il pianeta parte dalla posizione

spaziale *x*, percorre una volta la propria orbita e ritorna allo stesso punto spaziale *x*, esso non è nella stessa posizione nello spazio–tempo: il pianeta si è mosso in avanti attraverso il tempo.
Un'altra rappresentazione conveniente nei diagrammi spaziotemporali si ottiene cambiando l'asse dei tempi *t* in τ, dove

$$\tau = ct\,.$$

In realtà τ ha le dimensioni di una lunghezza (è velocità per tempo) e rappresenta lo spazio che la luce percorre nel tempo *t* . Se *t* è un secondo, τ è un secondo–luce, se *t* è un anno, τ è un anno–luce, ecc.
Una retta, nel diagramma spaziotemporale con questa nuova notazione, può rappresentare ancora una velocità, infatti, poiché la velocità è data da $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ e

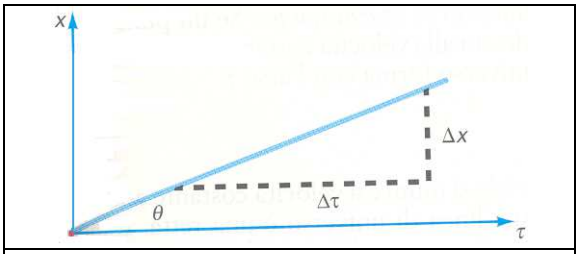


Figura 10 – Cambiamento dall'asse *t* all'asse τ.

poiché $\tau = ct$, abbiamo $c\Delta t = \Delta\tau$, ossia $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{c}$. La velocità diventa $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta\tau/c} = c\frac{\Delta x}{\Delta\tau}$, ma $\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = tg\theta$ è il coefficiente angolare della retta, quindi su tale diagramma la velocità è data da

$$v = c \cdot tg\theta\,.$$

Nel caso particolare in cui θ = 45° abbiamo *v* = *c*.

Perciò, su un diagramma spaziotemporale di *x* in funzione di τ, una retta inclinata di 45° rappresenta la linea di universo di un segnale luminoso.
Se una sorgente di luce posta nell'origine emette simultaneamente un raggio luminoso verso destra e un raggio luminoso verso sinistra, la rappresentazione su un diagramma spaziotemporale è quella mostrata nella figura 11. La retta OL è la linea di universo del raggio luminoso emesso verso destra, mentre OL' è la linea di universo del raggio luminoso emesso verso sinistra. Poiché la velocità di un
punto materiale deve essere minore di *c*, la linea di universo di un punto materiale qualsiasi situato in O deve avere un'inclinazione minore di 45° ed è contenuta entro le due linee di universo luminose OL e OL '. Se il punto materiale in O è in quiete la sua linea di universo è l'asse τ.

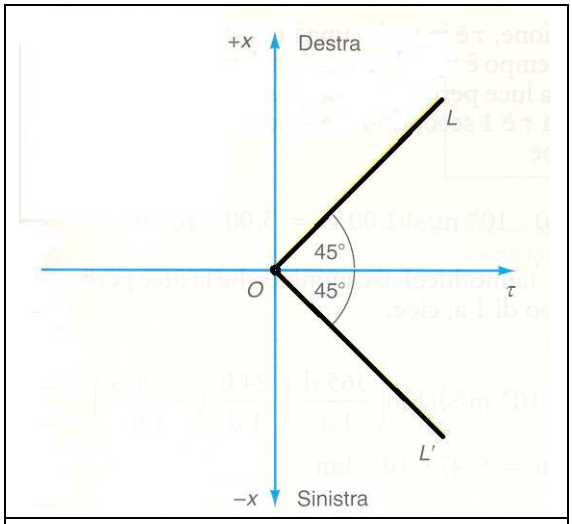


Figura 11 – Linea di universo di raggi luminosi

Esempio: *L'angolo che la linea di universo di un punto materiale forma mentre il punto si muove attraverso lo spazio-tempo*. Se un punto materiale si muove verso destra alla velocità costante *c*/2, si trovi l'angolo che la linea di universo forma con l' l'asse τ.

Poiché il punto materiale si muove a velocità costante attraverso lo spazio-tempo, la sua linea di universo è una retta. L'angolo che la linea di universo forma con l' l'asse τ, dato dall'equazione $v = c \cdot tg\theta$, è $\theta = arctg\frac{v}{c} = arctg\frac{c/2}{c} = arctg\frac{1}{2} = 26,6°$.
E' da notare che la linea di universo di questo punto materiale è contenuta entro le rette OL e OL'.

Nel caso $\theta = 45°$, si dimostra che $\Delta s = 0$, per contro si dimostra che le linee dello spazio tempo per cui $\Delta s = 0$ sono le linee lungo cui si muove la luce.

Se si estende il diagramma della figura 11 in due dimensioni spaziali, si ottiene il cono di luce mostrato nella figura 12. Le rette passanti per O e contenute entro il cono di luce sono possibili linee di universo di un punto materiale o di un osservatore nell'origine O. Ogni linea di universo all'interno del cono di sinistra proviene dal passato dell'osservatore, mentre ogni linea di universo all'interno del cono di destra va nel futuro dell'osservatore. Soltanto le linee di universo entro il cono di luce possono avere una relazione di causa ed effetto sul punto materiale o sull'osservatore in O. Le linee di universo che giacciono all'esterno del cono di luce non hanno alcun effetto sul punto materiale o sull'osservatore in O e sono linee di universo di qualche altro punto materiale o qualche altro osservatore. Gli eventi che «**vediamo**» effettivamente giacciono sulla superficie del cono di luce poiché vediamo questi eventi mediante raggi luminosi. Le linee di universo all'interno del cono sono dette «**tipo tempo**» (**timelike**) poiché ci sono accessibili nel tempo. Gli eventi all'esterno del cono sono detti «**tipo spazio**» (**spacelike**) poiché accadono in un'altra parte dello spazio che non ci è accessibile e quindi è detta «**altrove**» (**elsewhere**).

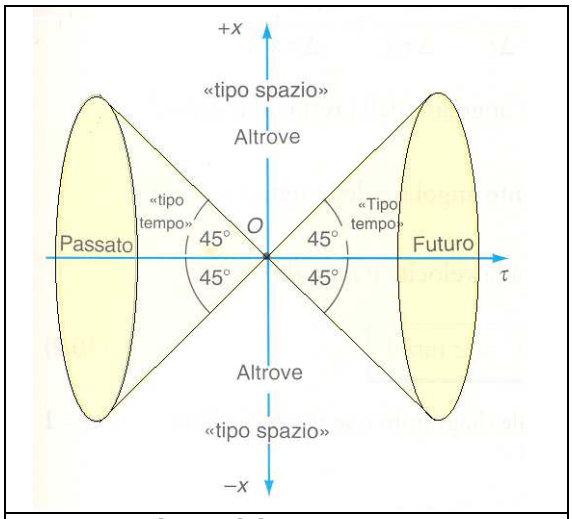


Figura 12 – Il cono di luce

L'intervallo invariante Δs esprime la ***distanza fra i due eventi*** nello spazio-tempo quadridimensionale e, perciò viene chiamata una ***metrica pseudo-euclidea***: ovvero la ***metrica di Minkowski dello spazio-tempo*** quadridimensionale con la quale si misura la distanza di due eventi in questo spazio.

CENNI DI DINAMICA RELATIVISTICA

Principio di conservazione della quantità di moto e massa relativistica

Come si è detto la quantità di moto si conserva rispetto a una trasformazione Galileo. Ci chiediamo se il principio di conservazione della quantità di moto e valido anche nella meccanica relativistica.

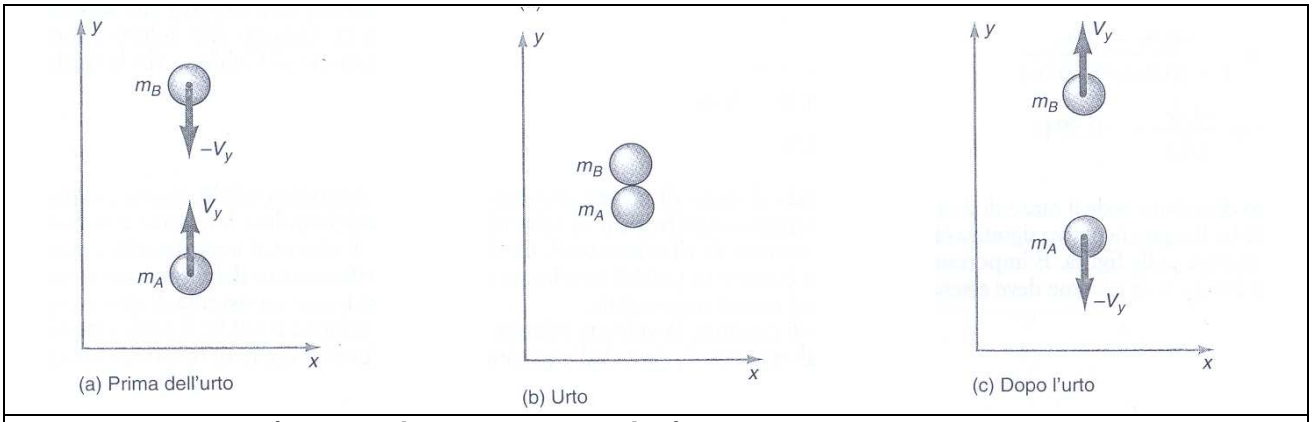


Figura 13 – Un urto perfettamente elastico in un sistema di riferimento in quiete

Consideriamo anzitutto il seguente urto perfettamente elastico tra due palle che sono identiche quando vengono osservate nel sistema di riferimento in quiete S nella figura 13. La prima palla, di massa m_A, viene lanciata lungo la verticale ascendente alla velocità V_y, mentre la seconda palla, di

massa m_B, viene lanciata lungo la verticale discendente alla velocità $-V_y$. Perciò, il modulo della velocità di ciascuna palla è lo stesso. Supponiamo che la distanza iniziale tra le due palle sia piccola e che la velocità V_y sia relativamente grande, affinché si possa trascurare l'effetto dell' accelerazione di gravità. Applicando all'urto il principio di conservazione della quantità di moto, si ottiene:

[quantità di moto prima dell' urto] = [quantità di moto dopo l'urto]

$$m_A V_y - m_B V_y = m_B V_y - m_A V_y$$

Semplificando, si ottiene

$$2m_A V_y = 2m_B V_y$$

ossia

[1] $$m_A V_y = m_B V_y$$

L'equazione ora trovata indica anche che $m_A = m_B$, come si è affermato inizialmente.

Consideriamo ora un analogo urto perfettamente elastico, ma supponendo ora che la palla B sia lanciata da un osservatore in moto. L'osservatore in quiete è nel sistema di riferimento S e l'osservatore in moto è nel sistema di riferimento S', che si muove verso sinistra alla velocità $-v$, come è indicato nella figura 14. Nel sistema di riferimento in quiete S, l'osservatore lancia una palla lungo la verticale ascendente, nella direzione positiva dell'asse y, alla velocità V_y. L'osservatore in moto S' è su un autocarro che si muove verso sinistra alla velocità $-v$. L'osservatore in moto lancia una palla identica lungo la verticale discendente, nella direzione negativa dell'asse y, alla velocità $-u'$ nel sistema di riferimento in moto. Nel sistema di riferimento in quiete, il valore osservato di questa velocità è $-u$. Supponiamo che entrambi gli osservatori lancino la palla a velocità uguali in modulo nei loro sistemi di riferimento. Cioè, il modulo della velocità V_y nel sistema di riferimento S è identico al modulo della velocità $-u'$ nel sistema di riferimento S'. (Per esempio, supponiamo che l'osservatore S lanci la propria palla lungo la verticale ascendente a una velocità di modulo 20 m/s e che l'osservatore S' lanci la propria palla lungo la verticale discendente a una velocità di modulo 20 m/s.) Le due palle sono identiche in quanto hanno la stessa massa e lo stesso diametro quando sono in quiete prima che cominci l'esperienza.

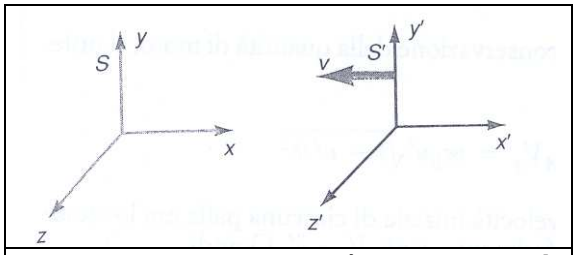


Figura 14 – Un osservatore è in un sistema di riferimento in quiete e un osservatore è in un sistema di riferimento in moto.

Dopo un po' di pratica, gli sperimentatori riescono a lanciare le palle in modo che avvenga un urto.

Osservato dal sistema di riferimento S sul suolo, l'urto appare come nella figura 15(a). La massa m_A sale lungo la verticale ascendente, compie un urto perfettamente elastico contro la massa m_B e si riflette alla velocità $-V'_y$ poiché nell'urto non si ha perdita di energia e quindi il modulo della velocità rimane invariato. La palla B ha una componente della velocità $-u$ lungo la verticale discendente (dal

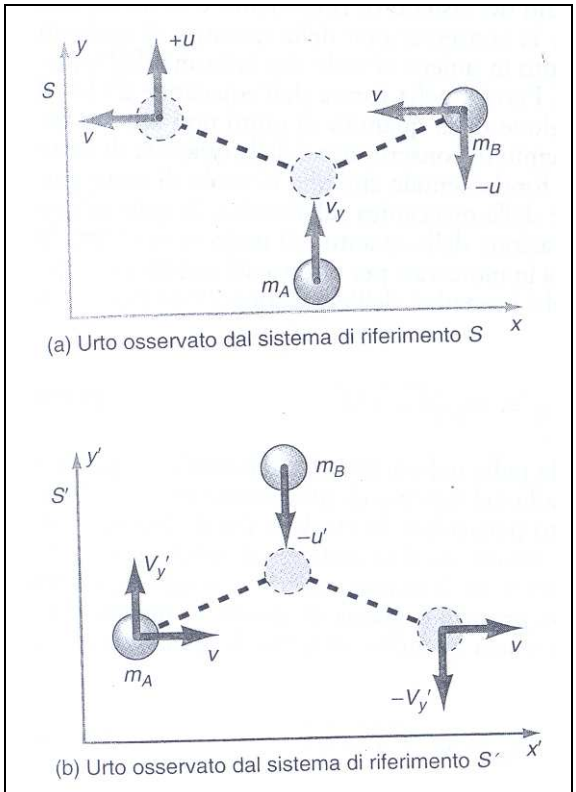


Figura 15 – Un urto perfettamente elastico osservato da un differenti sistemi di riferimento

punto di vista dell'osservatore S), ma si muove anche nella direzione negativa dell'asse *x* alla velocità *–v*, la velocità dell'autocarro e quindi la velocità del sistema di riferimento S'.
La componente *y* del principio di conservazione della quantità di moto, osservata nel sistema di riferimento in quiete S, si può scrivere come

[quantità di moto prima dell' urto] = [quantità di moto dopo l'urto]

$$m_A V_y - m_B u = -m_A V_y - m_B u$$

Semplificando, si ottiene

$$2m_A V_y = 2m_B u$$

ossia

[2] $$m_A V_y = m_B u$$

Ma la velocità u nel sistema di riferimento in quiete S è legata alla velocità u' nel sistema di riferimento in moto S' attraverso l'equazione di trasformazione delle velocità:

$$u = \frac{u'}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}V'_x\right)}$$

In questa esperienza $V'_x = 0$ poiché m_B viene lanciata soltanto nella direzione *y*. Quindi

[3] $$u = \frac{u'}{\gamma}.$$

Sostituendo l'espressione [3] nella [2], che esprime il principio della conservazione della quantità di moto, ricaviamo

$$m_A V_y = m_B \frac{u'}{\gamma},$$

Ma il modulo della velocità iniziale di ciascuna palla era lo stesso in ciascun sistema di riferimento, cioè, $V_y = u'$, quindi,

[4] $$m_A V_y = m_B \frac{V_y}{\gamma}$$

Confrontando l'equazione [4], per la conservazione della quantità di moto quando uno dei sistemi di riferimento è in moto, con l'equazione [1], per la conservazione della quantità di moto in un sistema di riferimento in quiete, si vede che la forma dell'equazione è molto diversa. Perciò, nella forma dell'equazione [4], il principio di conservazione della quantità di moto non sembra essere valido. Ma il principio di conservazione della quantità di moto è una legge fisica così fondamentale che non si vuole di certo perderla nella descrizione della meccanica relativistica. Si può salvare il principio di conservazione della quantità di moto se si accetta la possibilità che la massa in moto vari per effetto del suo moto. Cioè, se si dividono entrambi i membri dell'equazione [4] per V_y, si ottiene

[5] $$m_A = \frac{m_B}{\gamma}$$

Ma m_A è la massa della palla nel sistema di riferimento in quiete e m_B è la massa della palla nel sistema di riferimento in moto. Se si considera il caso molto particolare in cui $V_y = 0$ nel sistema di riferimento S, allora la massa m_A è in quiete nel sistema di riferimento in quiete. Sia $m_A = m_0$ la massa quando è in quiete, da ora in poi chiamata **massa propria** o **massa di quiete** (o **massa di riposo**), e sia $m_B = m$ la massa quando è in moto. L'equazione [5] può essere scritta nella forma

[6] $$m = \gamma m_0$$

In conclusione, se vogliamo che rimanga valido il principio di conservazione della quantità di moto bisogna introdurre il concetto di massa relativistica *m* e di massa propria m_0 legate dalla [6]. Poiché il fattore lorentziano γ è sempre maggiore di 1, la massa relativistica *m*, ossia la massa di un corpo in moto alla velocità *v*, è sempre maggiore di m_0. La variazione della massa con la velocità è di nuovo molto piccola, salvo che la velocità non sia molto grande.

Esempio – Si determini la massa *m* di un corpo in moto quando (a) *v* = 1000 km/h, (b) *v* = 1000 km/s e (c) *v* = 0,8*c*.

(a) $v = 1000$ km/h = 278 m/s per cui

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{278}{299792458}\right)^2}} = 1{,}00000000000043 m_0 \simeq m_0$$

(b) $v = 1000$ km/s = 10^6 m/s per cui

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{10^6}{299792458}\right)^2}} = 1{,}0000056 m_0 .$$

Tale velocità è ancora talmente grande che i corpi macroscopici non riescono ancora a raggiungerla.

(c) Se $v = 0{,}8c$ s abbiamo

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}8c}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67 m_0 .$$

Questo è un valore facilmente raggiungibile negli acceleratori di particelle dove si osserva che i risultati previsti dalla teoria della relatività sono in accordo con le misure.

La prima di numerose esperienze per verificare la variazione della massa al variare della velocità fu eseguita nel 1909 da A. H. Bucherer. Elettroni, dapprima accelerati da una grande differenza di potenziale fino a raggiungere alte velocità, venivano immessi in un selettore di velocità[vii] in modo che, variando l'intensità del campo elettrico e l'induzione del campo magnetico del selettore di velocità, si potevano ottenere elettroni di velocità desiderata. Questi elettroni venivano poi inviati attraverso un campo magnetico uniforme di induzione B in cui venivano deviati su una traiettoria circolare. Uguagliando la forza centripeta alla forza magnetica, si ottiene:

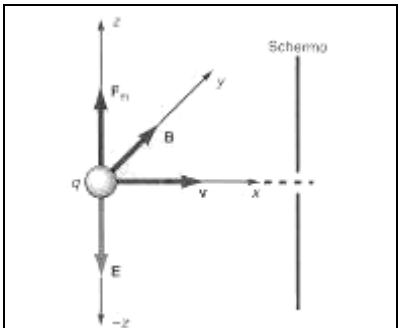


Figura 16 – Selettore di velocità

$$mv = qBr$$

Ma la massa che compare in questa equazione è una massa relativistica per cui l'equazione precedente diventa

$$\gamma m_0 v = qBr$$

[vii] Si ricorda che un selettore di velocità è un dispositivo in cui un campo elettrico e un campo magnetico perpendicolari possono essere variati a piacimento. Se delle particelle cariche entrano nel dispositivo, solo quelle che hanno velocità *v* = *E*/*B* escono perpendicolari al piano individuato dai vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (vedi Figura 11)

L'esperimento di Bucherer misurò il rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone; dall'equazione precedente si ricava: $\frac{q}{m_0} = \gamma \frac{v}{Br}$. *B*, *r* e *v* potevano essere misurati direttamente e l'esperimento confermò la variazione di massa al variare della velocità. Dal 1909 in poi, l'esperimento è stato eseguito migliaia di volte confermando sempre la variazione di massa al variare della velocità.
Tale variazione pone in rilievo il significato del concetto di massa inerziale come misura della resistenza che la materia oppone al moto. Per la massa relativistica, a velocità sempre più alte aumenta sempre più la resistenza al moto e questo aumento si manifesta come aumento della massa del corpo.
Con questa definizione della massa relativistica si può definire la quantità di moto relativistica come

$$p = mv = \gamma m_0 v .$$

Definendo la quantità di moto in base a quest'ultima equazione resta valido il principio di conservazione della quantità di moto.

Nella meccanica relativistica restano valide anche le leggi della dinamica di Newton, a patto di definire la forza come la variazione della quantità di moto nel tempo[viii], cioè:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v)$$

Moto rettilineo dovuto ad una forza costante
Come applicazione dell'espressione della forza, analizziamo il moto rettilineo sotto l'azione di una forza costante.
Nella meccanica classica, utilizzando il secondo principio della dinamica e tenendo conto della definizione della quantità di moto, si può scrivere:

$$F = \frac{dp}{dt} .$$

È noto che se la forza F è costante nel tempo e all'istante $t = 0$, $x = 0$ e $v = 0$, allora il moto è uniformemente accelerato e l'accelerazione *a*, la velocità *v* e la posizione *x* sono date da:

$$a = \frac{F}{m}; \qquad v = at; \qquad x = \frac{1}{2}at^2 .$$

Tali espressioni possono essere ricavate ricordando che:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt}$$

(la massa non dipende dal tempo) da cui segue che

$$dv = a \cdot dt$$

integrando e ricordando che per $t = 0$, $v = 0$ si ricava: $v = at$. Ma $v = \frac{dx}{dt}$, quindi:

$$dx = v \cdot dt = a \cdot t \cdot dt$$

integrando ancora e ricordando che per $t = 0$, $x = 0$, si ha: $x = \frac{1}{2}at^2$.

Nel caso relativistico $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v)$. Integrando questa espressione, tenendo conto che F è costante e che per $t = 0$, $v = 0$, si ha:

[viii] In effetti la definizione originale del secondo principio è data in questi termini.

$$\int_0^t F dt = \int_0^t \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v) dt = \int_0^v d(\gamma m_0 v)$$

da cui segue

$$Ft = \gamma m_0 v .$$

Risolvendo rispetto alla velocità si ha:

$$v = c \frac{\frac{F}{m_0 c} t}{\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m_0 c}\right)^2 t^2}} .$$

Si pone $b = \frac{F}{m_0 c}$ e si ha: $v = \frac{bt}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} c$. Si può vedere che per $t \to +\infty$, $v \to c$ e $p \to +\infty$.

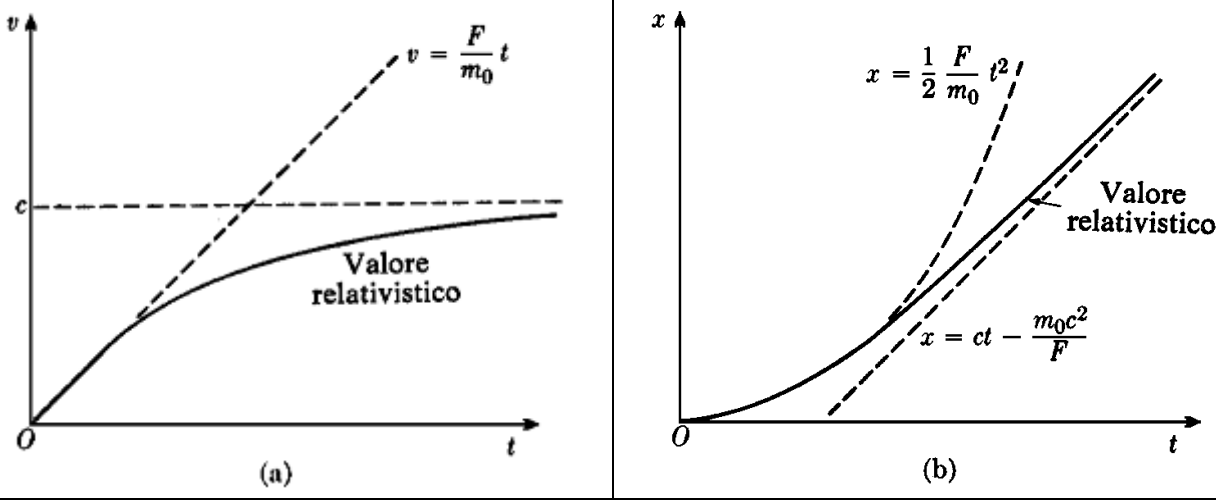


Figura 17 - (a) andamento della velocità in funzione del tempo; (b) andamento dello spazio in funzione del tempo (il tratteggio rappresenta l'andamento classico).

Per trovare lo spostamento della particella integriamo di nuovo partendo dall'espressione:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{bt}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} c$$

e ricordando le condizioni iniziali (per $t = 0$, $x = 0$); si ha:

$$\int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^x dx = \int_0^t c \frac{bt}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} dt$$

ovvero

$$x = \frac{c}{b}\left[\sqrt{1 + b^2 t^2} - 1\right]$$

Si dimostra che la curva ha un asintoto obliquo di equazione $x = ct - bc$ (vedi figura 17(b)).

Principio di conservazione della massa-energia

Una conseguenza molto importante della variazione della massa al variare della velocità si può ottenere scrivendone l'espressione nella forma

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Se v è molto piccola rispetto a c ($v << c$) si può effettuare l'approssimazione[ix]

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

L'espressione della massa può essere approssimata:

$$m = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Da cui si ottiene:

[7] $$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

l'ultimo termine a destra è l'energia cinetica (K) di un corpo che si muove a bassa velocità. Generalizzando si può scrivere:

$$K = mc^2 - m_0c^2 .$$

Il termine mc^2 è detto **energia relativistica totale** E, mentre $E_0 = m_0c^2$, essendo l'energia posseduta da un corpo quando è fermo ($K = 0$) è detta **energia a riposo**. L'equazione [7] diventa

$$E = K + E_0$$

Questo legame tra massa e energia permette di enunciare il principio di conservazione della massa-energia: **la massa può venire creata o distrutta, purché scompaia o appaia una quantità di energia pari alla massa per la velocità della luce al quadrato**.
Nella relatività e nella fisica atomica e nucleare si usa esprimere l'energia in elettronvolt (eV)[x]. Per definizione 1 eV è l'energia cinetica acquistata da un elettrone accelerato dal potenziale di 1 V; si ha quindi:

$$1 \text{ eV} = (1{,}602\cdot 10^{-19} \text{ C})\cdot(1 \text{ V}) = 1{,}602\cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Sono molto usati i multipli keV (leggi "chev" = 10^3 eV), MeV (leggi "mev" = 10^6 eV), GeV (leggi "gev" = 10^9 eV) e TeV (leggi "tev" = 10^{12} eV).
Ricordando la definizione di unità di massa atomica, si ha:

$$u = \frac{1}{12}m_C = 1{,}660540\cdot 10^{-27}\,\text{kg}$$

[ix] In base allo sviluppo del binomio di Newton si ha: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n = 1+nx+\ldots+nx^{n-1}+x^n$. Se x è molto minore di 1, cioè $x<<1$, allora si può approssimare $(1+x)^n \approx 1+nx$.

[x] Non è una unità del Sistema Internazionale, ma è ammessa a tempo indeterminato essendo molto usata nella comunità scientifica.

che, per la relazione massa-energia, corrisponde a 931,493 MeV. La tabella seguente riporta le masse a riposo di alcune tra le più note particelle espresse in unità di massa atomica e in elettronvolt.

particella	massa a riposo (unità di massa atomica)	massa a riposo (MeV)
protone	1,00726	938,256
neutrone	1,00865	939,550
elettrone	0,00055	0,551006

Dalla definizione della quantità di moto e dal principio di conservazione della massa-energia si ricava la relazione:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0{}^2c^2}\ .$$

Dall'espressione della quantità di moto si ricava che $v = \frac{p}{m}$ e pertanto, utilizzando la relazione $E = mc^2$, si può scrivere $v = \frac{pc^2}{E}$; quest'ultima si sostituisce a v nella relazione $p = mv = \gamma m_0 v$. Otteniamo

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0 \frac{pc^2}{E}}{\sqrt{1-\left(\frac{pc^2/E}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{m_0 \frac{c^2}{E}}{\sqrt{1-\left(\frac{pc}{E}\right)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{pc}{E}\right)^2} = m_0 \frac{c^2}{E} \quad \Rightarrow \quad 1-\left(\frac{pc}{E}\right)^2 = m^2 \frac{c^4}{E^2} \quad \Rightarrow \quad E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

E quindi

[8] $$E = c\sqrt{p^2 + m_0{}^2c^2}$$

Da questa segue che una particella che ha massa a riposo nulla ($m_0 = 0$) si può muovere solo alla velocità della luce in quanto dalla [8], $E = cp$ e quindi $v = \frac{pc^2}{E} = c$, cioè non può mai essere in quiete in nessun sistema inerziale. Viceversa se una particella si muove alla velocità della luce allora da $v = \frac{pc^2}{E}$ segue che $E = cp$ che confrontata con la [8] conduce a $m_0 = 0$, ovvero ha massa a riposo nulla.

ELEMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE

Nella teoria della relatività ristretta abbiamo visto che le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, per cui questi sistemi di riferimento sono in un certo senso privilegiati. Un principio per il quale le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento non può però prevedere sistemi di riferimento privilegiati. È quindi necessario far vedere che tutti i moti accelerati sono relativi.

Consideriamo il caso di una massa m sul pavimento di un razzo che è in quiete in un campo gravitazionale uniforme sulla superficie terrestre. La forza agente sulla massa è il suo peso *P*, dato da

$$F = P = mg$$

Consideriamo il caso dello stesso razzo nello spazio interstellare a grande distanza da tutti i campi gravitazionali. Si supponga che il razzo stia accelerando con accelerazione *a*, numericamente uguale all'accelerazione di gravità *g*, cioè, $a = g = 9{,}80\ m/s^2$. La massa *m* appoggiata sul pavimento del razzo è soggetta ora alla forza, data dalla seconda legge di Newton,

$$F = ma = mg = P$$

La massa *m* appoggiata sul pavimento del razzo accelerato è soggetta alla stessa forza a cui è soggetta la massa *m* appoggiata sul pavimento del razzo quando esso è in quiete nel campo gravitazionale della Terra. Ciò dimostra che esiste una relazione tra accelerazione e gravitazione.

Immaginiamo ora che un osservatore, nel razzo in quiete, tenga un oggetto davanti a sé e poi lo abbandoni a sé stesso. L'oggetto cade verso il pavimento e, se lo sperimentatore misurasse la sua accelerazione, troverebbe che essa è l'accelerazione di gravità $g = 9{,}80\ m/s^2$. Ora supponiamo che l'osservatore tenga lo stesso oggetto nel razzo accelerato e di nuovo lo abbandoni a sé stesso. Un osservatore inerziale, all'esterno del razzo, vedrebbe l'oggetto rimanere in una certa posizione e il pavimento del razzo accelerare verso l'oggetto con accelerazione $a = g$. L'astronauta nel razzo accelerato vede l'oggetto cadere verso il pavimento con accelerazione di $9{,}80\ m/s^2$, come ha osservato l'astronauta in quiete sulla Terra.

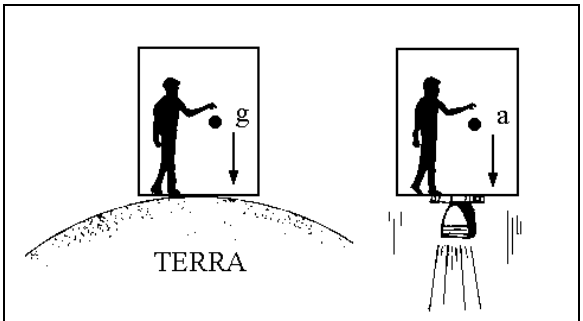


Figura 18 - Se l'accelerazione che il razzo imprime al laboratorio è uguale a g, l'osservatore non è in grado di distinguere se l'accelerazione da lui misurata è dovuta alla gravità oppure alla presenza del razzo

Consideriamo quest'altra situazione: l'astronauta nel razzo in quiete sulla Terra lancia un oggetto attraverso la cabina e osserva che questo segue la familiare traiettoria parabolica. Analogamente, l'astronauta nel razzo accelerato lancia l'oggetto attraverso la cabina. Un osservatore inerziale esterno lo vedrebbe muoversi attraverso la cabina seguendo una traiettoria rettilinea e vedrebbe il pavimento accelerare verso l'oggetto; l'astronauta accelerato vedrebbe l'oggetto descrivere la traiettoria parabolica che ha seguito sulla Terra.

Nel razzo accelerato si ottengono quindi gli stessi risultati che si ottengono nel razzo in quiete nel campo gravitazionale della Terra. Gli effetti del campo gravitazionale si possono quindi creare oppure eliminare con una scelta appropriata dei sistemi di riferimento.

Le precedenti considerazioni sperimentali indicano che il sistema di riferimento accelerato equivale a un sistema di riferimento inerziale in cui è presente il campo gravitazionale. Einstein trovò un metodo per rendere relative le accelerazioni ed enunciò i suoi risultati in quello che chiamò **principio di equivalenza**[xi]: **su scala locale gli effetti fisici di un campo gravitazionale sono indistinguibili dagli effetti fisici di un sistema di riferimento accelerato**.

[xi] Designando come sistema K il sistema di riferimento inerziale contenente il campo gravitazionale e come sistema K' il sistema di riferimento accelerato, Einstein disse: «*... nell'ipotesi che i sistemi K e K' siano esattamente equivalenti sotto il profilo fisico, e cioè che anche il sistema K possa essere considerato come un sistema situato in uno spazio*

L'equivalenza del campo gravitazionale e delle accelerazioni spiega anche l'osservazione che tutti i corpi, indipendentemente dalle loro dimensioni, cadono con la stessa accelerazione in un campo gravitazionale. Quindi, se m_G è la massa soggetta forza gravitazionale (massa gravitazionale)

$$F = P = m_G g$$

e, se m_I è la massa inerziale che si oppone al moto del razzo

$$F = m_I a = m_I g,$$

poiché si è già visto che le due forze sono uguali per il principio di equivalenza, ne consegue che

$$m_G = m_I.$$

Il principio di equivalenza implica quindi l'uguaglianza della massa inerziale e della massa gravitazionale.[xii]

Come ultimo esempio dell'equivalenza di un campo gravitazionale e di un'accelerazione, consideriamo un osservatore in una stanza chiusa, come una stazione spaziale non rotante nello spazio interstellare, a grande distanza da tutta la materia gravitante. Questa stazione spaziale è veramente un sistema di riferimento inerziale. Immaginiamo che l'osservatore ponga un libro davanti a sé e poi l'abbandoni a sé stesso. Poiché non sono presenti forze, neppure la forza gravitazionale, il libro rimane in sospensione nello spazio, in quiete, esattamente dove l'osservatore l'ha posto. Se poi l'osservatore lanciasse il libro attraverso la stanza, egli lo vedrebbe muoversi in linea retta a velocità costante.

Consideriamo ora la cabina di un ascensore sulla Terra e immaginiamo che i cavi di sostegno si rompano e la cabina precipiti in caduta libera. Un osservatore all'interno della cabina pone un libro davanti a sé e poi l'abbandona a sé stesso. All'osservatore in caduta libera il libro appare in quiete esattamente dove egli l'ha posto (ovviamente, un osservatore all'esterno della cabina vedrebbe sia l'uomo sia il libro in caduta libera, ma senza moto relativo l'uno rispetto all'altro). Se l'osservatore in caduta libera prende il libro e lo lancia attraverso la cabina dell'ascensore, egli osserva che si muove in linea retta a velocità costante.

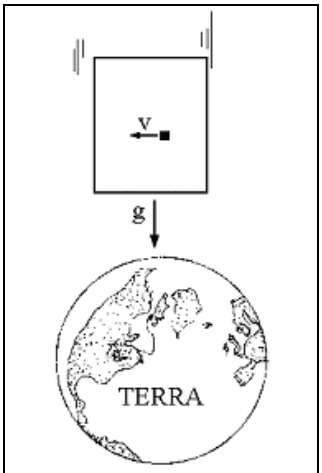


Figura 19 - Ascensore in caduta libera nel campo gravitazionale terrestre.

Poiché un sistema inerziale è definito, dalla prima legge di Newton, come un sistema di riferimento in cui un corpo in quiete rimane in quiete e un corpo in moto a velocità (vettoriale) costante continua a muoversi a quella stessa velocità costante, si deve concludere che il sistema di riferimento in caduta libera si comporta esattamente come un sistema di riferimento inerziale per chiunque sia al suo interno. Perciò, imprimendo al sistema di riferimento un'accelerazione uguale all'accelerazione di gravità, si è trasformata l'accelerazione di gravità, sopprimendola. Se la cabina dell'ascensore fosse completamente chiusa, l'osservatore non sarebbe in grado di stabilire se sia in una cabina in caduta libera oppure in una stazione spaziale nello spazio interstellare.

Il principio di equivalenza permette di considerare un sistema di riferimento accelerato come equivalente a un sistema di riferimento inerziale in cui sia assente un campo gravitazionale.

---

privo di campo gravitazionale; per questo dovremo tuttavia considerare K uniformemente accelerato. In questa impostazione, parlare di accelerazione assoluta del sistema di riferimento non è meno improprio di quanto non sia, secondo l'usuale teoria della relatività, il parlare della velocità assoluta di un sistema. ... Finché ci limitiamo a processi puramente meccanici nell'ambito di validità della meccanica newtoniana, siamo sicuri dell'equivalenza dei sistemi K e K'. Tuttavia la nostra formulazione acquista un significato profondo solo quando i sistemi K e K' sono equivalenti rispetto a tutti i processi fisici, cioè quando le leggi di natura in K e in K' siano esattamente le stesse.» da Albert Einstein, *L'effetto della gravitazione sulla propagazione della luce*. (originale in Annalen del Physik XXXV (1911) pp. 898-908). Traduzione italiana di Giuseppe Longo in Albert Einstein *Opere scelte*, a cura di Enrico Bellone. Bollati Boringhieri, Torino 1988 pp. 222-223

[xii] Questa uguaglianza è stata oggetto di molte verifiche sperimentali a partire da Newton che trovò l'uguaglianza entro un errore di una parte su mille. Storiche sono state le misure che il fisico ungherese Roland Eötvös (1848 - 1919) effettuò dal 1885 al 1910 con una bilancia gravitazionale; egli riuscì a stabile l'uguaglianza con un errore di una parte su duecento milioni influenzando notevolmente il lavoro di Einstein. Le migliori misure attuali danno l'uguaglianza con un'incertezza di 3×10^{-14} (Adelberger, et al. 2008).

Einstein, ponendo sullo stesso piano tutti i sistemi di riferimento, riuscì a formulare il postulato della teoria della relatività generale: **le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento**.
Un'analisi completa della teoria della relatività generale richiede una branca della matematica di livello molto avanzato, detta analisi tensoriale[xiii]; nonostante ciò molti dei risultati della teoria della relatività generale si possono però spiegare per mezzo del principio di equivalenza.
Einstein capì che la sua teoria della relatività generale era una teoria della gravitazione: «*Si vede da queste considerazioni che nell'istituire la teoria della relatività generale saremo condotti a una teoria della gravitazione, in quanto siamo capaci di "produrre" un campo gravitazionale semplicemente cambiando il sistema delle coordinate. Si vede altresì che il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto deve venire modificato.*>>[xiv]

Consideriamo ora un raggio luminoso che entra attraverso una finestra nella cabina di un ascensore in quiete. Il raggio luminoso segue una traiettoria rettilinea andando a incidere sulla parete opposta della cabina, nel punto P.

Figura 20 - Cabina dell'ascensore in quiete

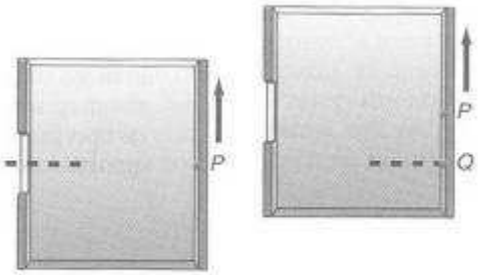


Figura 21 - Cabina dell'ascensore accelerata verso l'alto

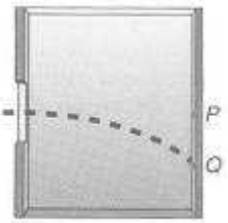


Figura 22 - Cammino luminoso osservato dalla cabina

Ripetiamo l'esperimento con la cabina dell'ascensore che accelera verso l'alto. Il raggio luminoso entra dalla finestra come prima ma, prima che possa attraversare la cabina, questa si è spostata verso l'alto a causa dell'accelerazione. Il raggio luminoso colpirà la parete in un punto Q, più in basso di P. Per un osservatore nella cabina il raggio descrive una traiettoria parabolica e quindi può asserire che nel suo sistema di riferimento la luce non si propaga in linea retta, ma descrive una traiettoria curva.
Per il principio di equivalenza la cabina accelerata equivale ad un campo gravitazionale, si deve quindi concludere che in un campo gravitazionale la luce devia rispetto al percorso rettilineo.
Einstein comprese che la teoria della relatività generale oltre ad essere una teoria della gravitazione era anche una teoria che coinvolgeva la geometria dello spazio-tempo. Per il principio di equivalenza un punto materiale in moto sotto l'effetto del campo gravitazionale deve avere una linea di universo curva nello spazio-tempo, quindi, la massa che genera il campo gravitazionale deve deformare lo spazio-tempo in modo da incurvare le linee di universo dello spazio-tempo. Una frase di John Archibald Wheeler (1911 – 2008) sintetizza in modo mirabile questi concetti:

la materia dice allo spazio-tempo come curvarsi
lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi.

[xiii] Questo tipo di matematica era stato sviluppato verso la fine del 1800, a Padova, dai matematici Gregorio Ricci-Curbastro e dal suo allievo Tullio Levi-Civita.
[xiv] Albert Einstein, *I fondamenti della Teoria della Relatività Generale*. Annalen del Physik XLIX (1916) pp. 769-822. Traduzione italiana di Aldo M. Fratelli in Albert Einstein *Opere scelte*, a cura di Enrico Bellone. Bollati Boringhieri, Torino 1988 p. 286.

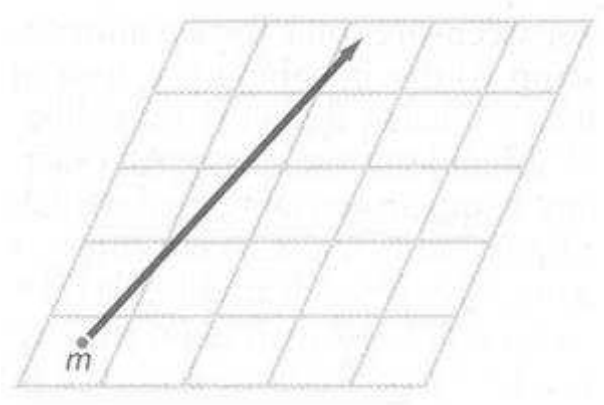


Figura 23 - Moto di una massa m in uno spazio-tempo piatto (privo do masse)

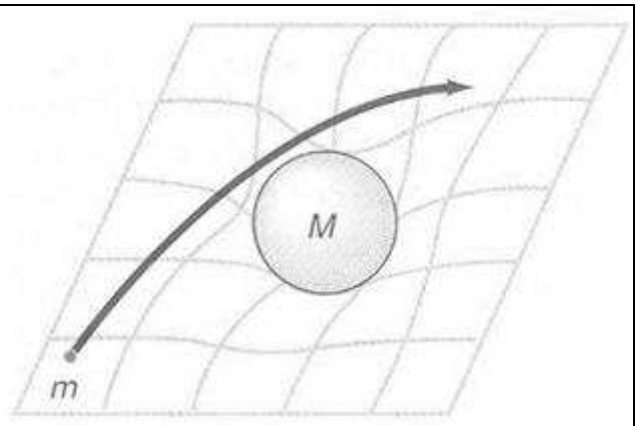


Figura 24 - Moto di una massa m in uno spazio-tempo curvo (è presente una massa M)

Un esempio familiare della visualizzazione dello spazio-tempo curvo è l'analogia con il trampolino elastico. Consideriamo un trampolino elastico piatto sul quale sia disegnato un reticolo rettangolare. Per la prima legge di Newton, una particella libera, costituita da sferetta rotolante m, si muove in linea retta. Sul trampolino viene poi posta una boccia di massa M, la quale deforma il trampolino. Quando la sferetta m viene fatta rotolare di nuovo sul trampolino, essa non si muove più su una traiettoria rettilinea, ma su una traiettoria curva attorno alla boccia M. Perciò, la gravitazione non è considerata più una forza nel senso newtoniano, ma è una conseguenza della curvatura dello spazio-tempo causata dalla massa. L'entità della curvatura è una funzione della massa.

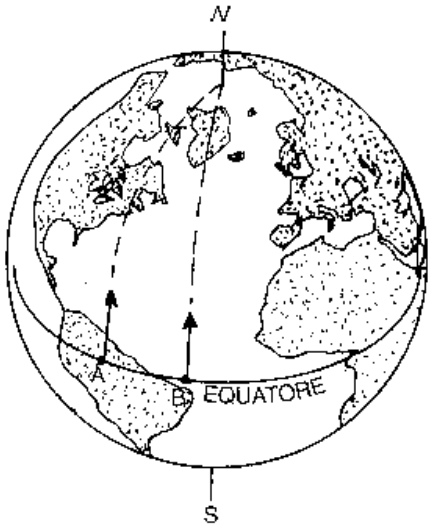


Figura 25 - Due esseri bidimensionali partono dall'equatore e si dirigono verso il polo nord secondo percorsi perpendicolari all'equatore. Quando si accorgono che la distanza che li separa diminuisce concludono che una forza li attrae l'uno verso l'altro; non vi è alcuna forza: i due esseri si stanno utilizzando la geometria euclidea in uno spazio che non è euclideo.

Un altro esempio molto significativo: immaginiamo due esseri bidimensionali che vivono sulla superficie di una sfera (per esempio la nostra Terra). Se i due esseri partono dai punti A e B, di distanza nota, posti all'equatore e si dirigono verso il polo nord terrestre lungo due direzioni, che essi chiamano "rette", perpendicolari all'equatore (essendo esseri bidimensionali non possono sapere nulla della curvatura terrestre), in virtù del quinto postulato di Euclide, non dovrebbero incontrarsi mai. Dopo aver percorso un determinato tratto si accorgono però che la loro distanza è diminuita; i due esseri, sulla base dei dati sperimentali in loro possesso, concludono che esiste una forza che li attira l'uno verso l'altro. In effetti non esiste alcuna forza; i nostri amici hanno solamente usato una geometria sbagliata: la geometria euclidea descrivere i moti sul piano e non sulla superficie di una sfera.

La teoria della relatività generale può essere sintetizzata in una equazione, detta equazione di campo, la cui forma è:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \chi T_{ij} \, .$$

Questa non è una sola equazione, ma un sistema di 16 equazioni differenziali (gli indici *i* e *j* variano da 1 a 4) la cui soluzione analitica esiste solo in alcuni casi particolari. Il primo membro riporta dei tensori di natura geometrica: due tensori di Riemann (indicati con la lettera R) che ci forniscono

informazioni sulla curvatura dello spazio, e il tensore metrico (indicato con la lettera g) che ci fornisce informazioni sulla forma del tessuto spazio-temporale[xv]. Al secondo membro abbiamo invece una costante, χ, e un tensore di natura fisica, il tensore energetico, che ci fornisce informazioni sulla distribuzione, nello spazio, della massa e dell'energia. Quindi la formula non esprime altro che il concetto:

Geometria = Fisica.

Attualmente sono molte le conferme sperimentali della teoria della relatività generale. Storicamente ricordiamo le seguenti.

1. La deflessione della luce in un campo gravitazionale.
2. La precessione del perielio del pianeta Mercurio.
3. Lo spostamento verso il rosso (red shift) delle righe spettrali.
4. L'esperienza di Shapiro, che dimostra la diminuzione della velocità della luce in prossimità di una grande massa.

DEFLESSIONE DELLA LUCE IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE

Già si è discusso questo concetto. Un altro modo di considerare la deflessione della luce è quello di dire che la luce ha energia, quindi, dall'equivalenza tra massa ed energia ($E = mc^2$) è ragionevole attendersi che in presenza di un campo gravitazionale la radiazione luminosa senta la presenza del campo e venga deflessa. Data la grande velocità di propagazione della luce l'interazione di questa con il campo generato da una massa (per esempio come il Sole) avrà una durata molto breve e quindi l'effetto sarà di piccolissima entità (vedi box a pagina 30).

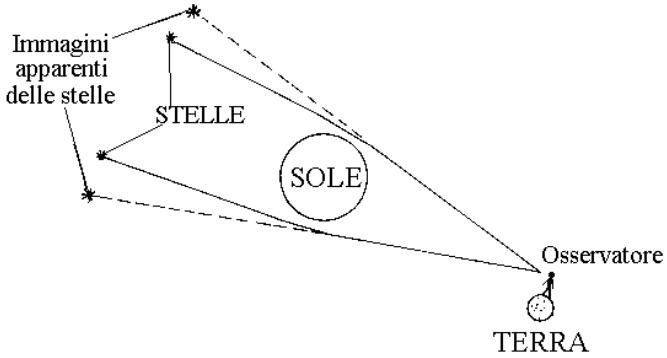


Figura 26 - La deflessione della luce sulla posizione apparente dei corpi celesti

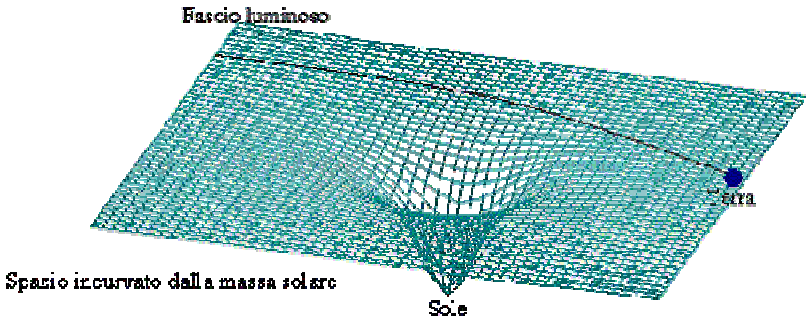


Figura 27 - Deflessione della luce

La misura della deflessione dei raggi luminosi nel passaggio in prossimità della massa del Sole è stata effettuata, per la prima volta, osservando lo spostamento nella posizione apparente di alcune stelle durante un'eclissi di sole. Il 29 maggio 1919 si verificò un'eclisse totale di Sole in condizioni favorevoli (oltre al fatto che era finita la prima guerra mondiale e quindi era più facile viaggiare, il Sole si sarebbe trovato davanti all'ammasso di stelle abbastanza luminoso delle Iadi, nella costellazione del Toro). Furono organizzate due spedizioni: una guidata da sir Artur Stanley Eddington si diresse alle isole São Tomé e Principe (in Africa, nel Golfo di Guinea, davanti al Gabon) dove vennero riprese parecchie immagini del bordo del sole. Le cattive condizioni meteorologiche non permisero di ottenere una

[xv] Abbiamo già visto il tensore g quando, in relatività ristretta, abbiamo parlato dell'intervallo invariante; in questo caso però gli elementi della matrice sono molto più complessi.

elevata qualità delle immagini (solo due delle sedici scattate, furono utilizzabili), ma nonostante ciò Eddington concluse che le misure fatte erano con accordo con la teoria di Einstein[xvi].
La seconda missione venne inviata a Sorbal in Brasile dove le condizioni meteo furono più favorevoli, ma il risultato ugualmente discutibile. Altre misure furono fatte in seguito, in occasione di altre eclissi, confermando le previsioni della teoria di Einstein. Poiché in presenza di una massa la geometria che descrive lo spazio-tempo non è una geometria euclidea, la linea più breve tra due punti (detta geodetica), non è una retta, ma una linea curva. La luce segue comunque la linea più breve tra due punti.

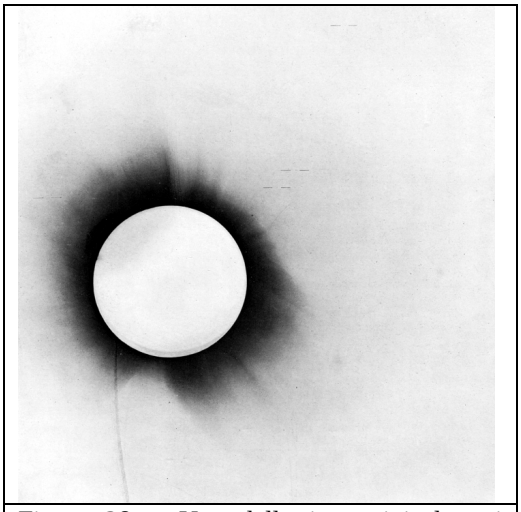


Figura 28 – Una delle immagini da cui Eddington ricavò il valore della deflessione della luce a causa della massa del Sole

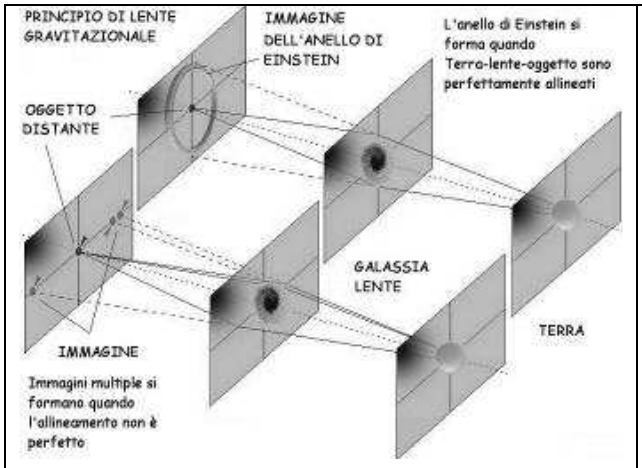


Figura 29 - Principio di lente gravitazionale

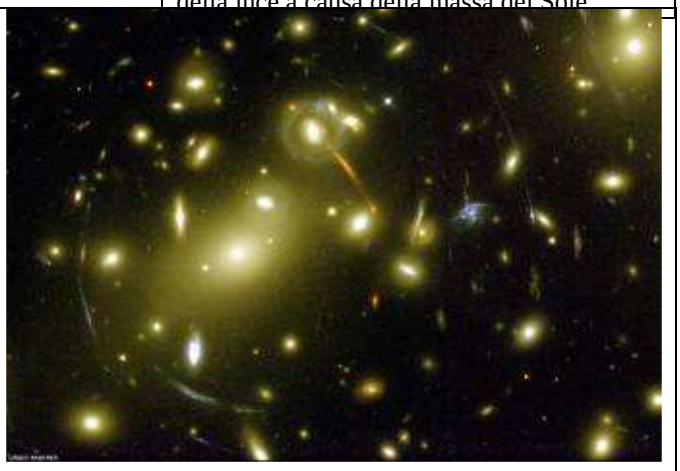


Figura 30 - L'ammasso di galassie Abell 2218 ripreso dal Telescopio Spaziale Hubble. Gli archi visibili nell'immagine sono dovuti alla deflessione da parte dell'ammasso della luce proveniente da al tre galassie poste a maggior distanza

Ricordiamo anche la luce si muove lungo le linee dello spazio-tempo in cui è $\Delta s = 0$.
Il fenomeno della deflessione della luce in prossimità di una massa oggi è molto utilizzato in astrofisica e viene denominato **effetto di lente gravitazionale** (vedi Figura 29): la luce proveniente da oggetti lontani (quasars o galassie) quando passa in prossimità di ammassi di galassie o singole galassie poste tra noi e l'oggetto, viene deflessa secondo le leggi della relatività generale.
Un altro campo di applicazione, ideato verso la fine del XX secolo, ha permesso di sviluppare una tecnica per la ricerca di pianeti extrasolari. Se una stella vicina attraversa la congiungente Terra-stella lontana, si verifica una intensificazione della luce proveniente dalla stella lontana a causa dell'effetto lente gravitazionale. Se la stella vicina ha un pianeta e anche questo passa sulla congiungente Terra-stella lontana, si ha un'altra intensificazione della luce della stella lontana, meno intensa, ma comunque misurabile (**fenomeno di micro-lensing**).

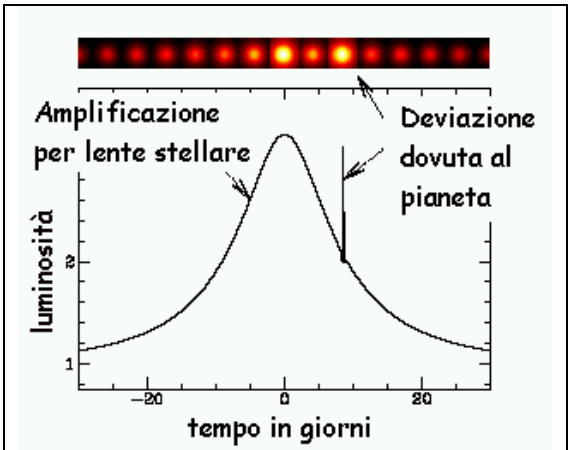
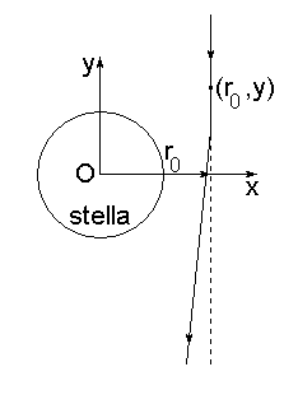


Figura 31 - Effetto di micro-lensing per la ricerca di pianeti extraterrestri

[xvi] Questo risultato è dubbio ancora oggi, in quanto, secondo molti, l'errore nelle misure sulle lastre fotografiche era tale da inficiare il risultato.

Deviazione della luce in un campo gravitazionale: un modello newtoniano [xvii].

Consideriamo un fotone che si muove in un campo gravitazionale. La risoluzione esatta del problema ce la dà la relatività generale, ma utilizzando le leggi di Newton possiamo arrivare ad una soluzione corretta almeno per l'ordine di grandezza. Supponiamo che il fotone abbia una massa *m* (nel calcolo il valore di *m* non ha importanza in quanto viene eliminato nelle semplificazioni). Supponiamo che il raggio di luce passi accanto alla stella alla distanza minima r_0, misurata dal centro e che la deviazione sia molto piccola così che r_0 sia circa lo stesso che si avrebbe se il fascio di luce non fosse deviato. La componente trasversale F_x della forza che agisce sul fotone nel punto (r_0, y) è:



[1] $$F_x = -GMm\frac{r_0}{\left(r_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

dove *y* è misurata come nella figura. Per il teorema dell'impulso, il valore finale della componente trasversale v_x della velocità del fotone si ottiene dalla:

[2] $$mv_x = \int F_x dt$$

Tenendo conto delle approssimazioni fatte, lungo l'asse *y*, sul fotone non agiscono forze quindi $c = v_y = \frac{dy}{dt}$ e la [2] diventa:

[3] $$mv_x = \int F_x dt = \int F_x \frac{dy}{v_y} \cong \frac{1}{c}\int F_x dy$$

utilizzando l'equazione [1] si ha:

[4] $$v_x \cong -\frac{GMr_0}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(r_0^2 + y^2\right)^{3/2}} = -\frac{2GMr_0}{c}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(r_0^2 + y^2\right)^{3/2}} = -\frac{2GMr_0}{c}\left[\frac{y}{r_0^2\sqrt{\left(r_0^2 + y^2\right)}}\right]_0^{+\infty} = -\frac{2GM}{cr_0}.$$

Quando r_0 è uguale al raggio *R* della stella la deflessione angolare □ è data da $tg\varphi = \frac{|v_x|}{v_y} = \frac{|v_x|}{c}$, ma dato il piccolo valore dell'angolo si ha:

[5] $$\varphi \cong \frac{|v_x|}{c} \cong \frac{2GM}{c^2 R} \text{ radianti}.$$

Se nell'equazione [5] sostituiamo i parametri del Sole ($M = 1{,}989\cdot 10^{30}$ kg e $R = 6{,}955\cdot 10^8$ m), $c = 2{,}998\cdot 10^8$ m·s^{-1} e $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ m^3·s^{-2}·kg^{-1} ed esprimiamo il risultato in secondi d'arco otteniamo $\varphi = 0{,}875''$.

I calcoli con la relatività generale danno il valore $\varphi = 1{,}75''$, quasi esattamente il doppio!!!

LA PRECESSIONE DEL PERIELIO DI MERCURIO

Si misura una precessione del perielio di Mercurio pari a 574" per secolo (in altri termini la linea delle apsidi ruota, rispetto alle stelle, di 574" ogni secolo); la teoria newtoniana della gravitazione riesce a render conto solo di 531" per secolo, considerando l'attrazione gravitazionale degli altri pianeti su Mercurio. Utilizzando le equazioni della teoria della relatività generale, si riesce a spiegare completamente la precessione del perielio di Mercurio.

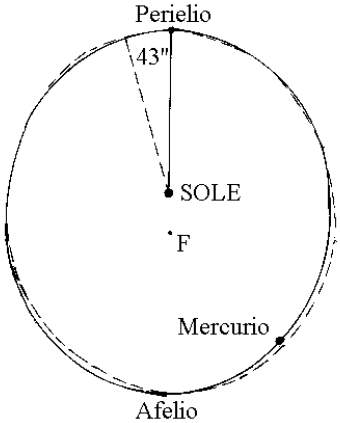


Figura 32 - La precessione del perielio di Mercurio.

LO SPOSTAMENTO VERSO IL ROSSO (RED SHIFT) DELLE RIGHE SPETTRALI

Un altro effetto previsto dalla teoria è il ***red shift gravitazionale***, ossia lo ***spostamento verso il rosso*** della

[xvii] Vedi La Fisica di Berkeley vol. 1 - Meccanica, ed. Zanichelli, pag 460.

radiazione luminosa a causa della presenza di un campo gravitazionale. Anche di questo effetto diamo un'interpretazione puramente qualitativa mediante un'analogia con il caso meccanico. Se un corpo di massa m viene lasciato cadere in un campo gravitazionale, si ha un aumento progressivo della sua energia cinetica. Analogamente un raggio luminoso che "cade" in un campo gravitazionale subirà un incremento della propria energia. Se nel caso di un corpo massivo l'aumento di energia si traduce in aumento della velocità, per la luce, come ben sappiamo, c rappresenta la velocità limite per cui l'aumento di energia si può manifestare unicamente come aumento della frequenza.
Se al contrario consideriamo un raggio luminoso emesso in direzione opposta a quella del campo gravitazionale, l'effetto risultante consisterà in una diminuzione della frequenza (o aumento della lunghezza d'onda) ossia in uno spostamento verso la parte rossa dello spettro. Si noti che lo spostamento verso il rosso dovuto al campo gravitazionale non ha nulla a che vedere con lo spostamento nella stessa direzione che si ha per effetto Doppler in quanto quest'ultimo dipende unicamente dal moto relativo tra sorgente ed osservatore.
Il fenomeno dello spostamento verso il rosso può essere interpretato anche come dilatazione del tempo dovuto al campo gravitazionale in prossimità di grandi masse. Un orologio in un campo gravitazionale rallenta rispetto ad uno lontano dal campo gravitazionale.
Il red shift gravitazionale fu confermato sulla Terra da un'esperienza eseguita nel 1959 da R.V. Pound e G.A. Rebka nella Harvard University. Raggi γ furono emessi da cobalto radioattivo nello scantinato dello Jefferson Physical Laboratory verso il tetto della struttura e, attraverso dei fori nei pavimenti, raggiunsero una postazione di rilevamento posizionata all'ultimo piano, 22,5 m più in alto. La differenza tra la frequenza dei raggi emessi e quella dei raggi assorbiti dal rilevatore risultò in accordo con l'equazione $\frac{\Delta f}{f} = \frac{gh}{c^2}$ che si ricava per il red shift nel campo gravitazionale terrestre.
L'esperienza fu ripetuta più volte confermando il red shift gravitazionale. Una conferma del rallentamento del tempo per orologi nel campo gravitazionale fu ottenuta da uno storico esperimento svolto da Joseph Hafele e Richard Keating nel 1971. Essi portarono con sé, in un viaggio aereo introno alla Terra, 4 orologi atomici precedentemente sincronizzati a Washington. Il confronto degli orologi, al ritorno dal viaggio, confermò l'esattezza delle previsioni teoriche.

L'ESPERIMENTO DI SHAPIRO

La teoria della relatività generale di Einstein prevede non soltanto rallentamento della marcia degli orologi in un campo gravitazionale, ma anche la contrazione della lunghezza di un regolo in un campo gravitazionale. La contrazione della lunghezza dei regoli e il rallentamento della marcia degli orologi in un campo gravitazionale si possono rappresentare anche come una curvatura dello spazio-tempo causata dalla presenza di una massa. Il rallentamento della marcia degli orologi e la contrazione gravitazionale delle lunghezze determinano una diminuzione della velocità della luce in prossimità di un corpo grande e massivo come il Sole. Nel 1970 I. I. Shapiro eseguì un'esperienza in cui misurò l'intervallo di tempo impiegato da un segnale radar (un'onda elettromagnetica o «luminosa») per raggiungere il pianeta Venere, riflettersi e ritornare sulla Terra, in un momento a cui Venere è vicina al Sole. Il rallentamento subito dalla luce quando passa accanto al Sole determina un ritardo di circa $240 \cdot 10^{-6}$ s del segnale radar. I risultati di Shapiro concordavano con la teoria di Einstein con una precisione di circa il 3%.
La sonda Cassini è una sonda automatica della NASA[xviii] (con a bordo anche strumentazione dell'ESA[xix]) che, lanciata nel 1997, ha raggiunto Saturno nel luglio 2004. Il 25 settembre 2003 la

[xviii] La NASA è l'Agenzia Spaziale degli Stati Uniti
[xix] L'ESA è l'Agenzia Spaziale Europea

rivista Nature ha pubblicato un articolo firmato da Bruno Bertotti (Università di Pavia), Luciano Iess (Università di Roma – La Sapienza) e Paolo Tortora (Università di Bologna a Forlì) in cui si riferisce di una nuova verifica della deflessione della luce dovuta al campo gravitazionale del Sole ottenuta utilizzando i segnali radio trasmessi dalla sonda Cassini.

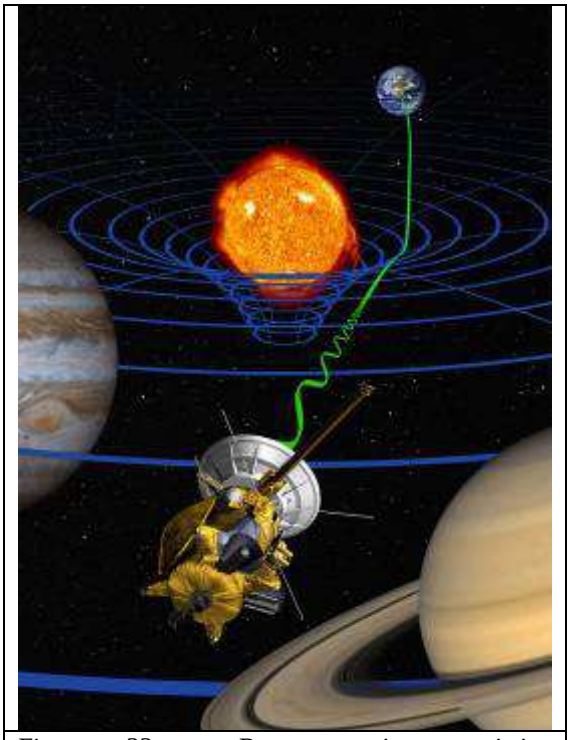


Figura 33 - Rappresentazione artistica dell'esperimento di Bertotti, Iess e Tortora.

L'esperimento ha avuto luogo nel giugno 2002 quando la sonda si trovava a 8,5 unità astronomiche dalla Terra (circa 1,3 miliardi di chilometri) e la congiungente Terra-Cassini passava molto vicino al bordo del Sole (cioè quando Cassini, Sole e Terra erano pressocchè allineati). In pratica si è riusciti a misurare il ritardo di tempo con il quale il segnale compiva il tragitto Cassini-Terra per il fatto che il percorso veniva allungato dalla distorsione gravitazionale. Per fare ciò è stato necessario misurare la velocità dalla Cassini con una precisione superiore ai 2 milionesimi di metro al secondo. Lo stesso esperimento era stato condotto già nel passato con le sonde Viking. Il risultato ottenuto aveva mostrato un accordo con la teoria con un'accuratezza dello 0,1% (un millesimo). Il risultato della Cassini, che conferma ancora una volta la teoria di Einstein, è 50 volte superiore, è stato cioè confermato che, con la precisione di 20 parti su un milione, la deflessione relativistica è quella prevista dalla relatività generale.

I BUCHI NERI

In questo paragrafo cercheremo di capire i buchi neri anche dal punto di vista della relatività generale.

Il modo più semplice per descrivere un buco nero è quello di partire dalla fisica classica. Supponiamo di volere lanciare un razzo dalla Terra verso lo spazio esterno. Con quale velocità deve essere lanciato per sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra?

Il razzo, quando viene lanciato, ha una velocità iniziale v_0 e quindi un'energia cinetica iniziale $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Via via che il razzo viaggia nello spazio, la sua velocità diminuisce, ma la sua energia potenziale aumenta. Ricordiamo che l'energia potenziale gravitazionale è data da: $U = -G\frac{M_T m}{r}$, dove G è la costante della gravitazione universale, M_T è la massa della Terra, m la massa del corpo e r la sua distanza dal centro della Terra. In un istante arbitrario l'energia totale del razzo è uguale alla somma dell'energia potenziale e della sua energia cinetica; cioè,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r}$$

Sappiamo che l'energia totale può essere positiva, negativa o nulla.

- Se $E > 0$ allora l'energia cinetica è sempre maggiore dell'energia potenziale e quando il razzo è infinitamente lontano dalla Terra ($r \to \infty$) e la sua energia potenziale tende a zero, ha ancora una velocità residua, e quindi non ricadrà mai sulla Terra.
- Se $E < 0$, l'energia potenziale predomina sull'energia cinetica e esiste un valore di r per il quale l'energia cinetica è zero: il razzo raggiunge una massima distanza dalla Terra e poi vi ricade.

- Se $E = 0$ allora l'energia potenziale e l'energia cinetica diventano zero all'infinito; siamo quindi nella condizione limite perché il razzo non ricada più sulla Terra. La velocità iniziale che realizza questa situazione è la cosiddetta velocità di fuga: v_F. Si ricava che essendo:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v_F^2 - G \frac{M_T m}{R_T} = 0$$

La velocità di fuga è:

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

La relazione dà la velocità di fuga dalla Terra, cioè, la velocità che un corpo deve avere per sfuggire al campo gravitazionale della Terra (ovviamente trascurando l'attrito dell'aria e la presenza degli altri corpi celesti che altrimenti concorrerebbero all'energia potenziale del razzo). Queste considerazioni furono fatte per la prima volta nel 1783 dall'astronomo dilettante britannico reverendo John Michell e 15 anni dopo dall'astronomo e matematico francese Pierre Simon de Laplace il quale dedusse che, se la luce fosse stata un corpuscolo, come era stato ipotizzato da Isaac Newton, allora sarebbe esistito un limite al raggio che la Terra avrebbe dovuto avere per permettere alla luce di fuggire da essa.

$$R_S = \frac{2GM_T}{c^2}$$

che si ottiene risolvendo la presedente a R e sostituendo la velocità di fuga v_F con la velocità della luce c. Per motivi che saranno chiari più avanti, questo valore, indicato con R_S, è detto raggio di Schwarzschild. Se calcoliamo il raggio di Schwarzschild della Terra, otteniamo 8,85 mm cioè, se la Terra si contraesse diventando una sfera di raggio minore 8,85 mm, allora la velocità di fuga dalla sua superficie sarebbe maggiore della velocità della luce. Cioè, nulla, neppure la luce, potrebbe fuggire. La Terra sarebbe un buco nero poiché non si vedrebbe alcunché provenire da essa.
Quanto detto per la Terra vale per qualunque corpo celeste.
Il nome di buco nero deriva dall'idea che noi possiamo osservare un oggetto celeste luminoso perché emette radiazione elettromagnetica di certe lunghezze d'onda, ma se si contraesse fino a diventare un buco nero, da esso non potrebbe più uscire nessuna radiazione. Quindi, se si guardasse verso la sua posizione non si vedrebbe nulla, solo l'oscurità; ma si sentirebbe il suo campo gravitazionale e la sua presenza curverebbe fortemente lo spazio-tempo. Al posto dell'oggetto sembrerà esserci un buco, quindi un buco nero.
Nel caso del Sole il raggio di Schwarzschild è di 2,95 km.
Fino a questo punto i ragionamenti sono stati rigorosamente classici. Poiché la teoria della relatività generale di Einstein è una teoria della gravitazione, ha avuto la sua applicazione ai buchi neri.
Come abbiamo visto, la teoria della relatività generale di Einstein dice che una massa deforma, o incurva, lo spazio-tempo. Maggiore è la massa del corpo gravitante, maggiore è la deformazione, o curvatura, dello spazio-tempo. Quando il raggio della stella diventa molto piccolo, la curvatura dello spazio-tempo diventa molto accentuata.
Poco dopo che Einstein ebbe proposto la teoria della relatività generale, K. Schwarzschild applicò le equazioni di Einstein al campo gravitazionale generato da una massa puntiforme e, data la simmetria del sistema riuscì a risolverle.
Della risoluzione di Schwarzschild ci interessa il ragionamento e i risultati che seguono.
Per prima cosa è necessario scrivere l'intervallo invariante per questa situazione (cosa che non facciamo), ma essendo il problema a simmetria sferica, ossia se P è un punto a distanza r dal buco nero puntiforme O, tutto quello che diciamo per P per tutti i punti che si trovano su una sfera di centro O che contiene P.

In situazioni come questa conviene utilizzale coordinate sferiche (dette anche polari nello spazio) invece di quelle cartesiane.
Come di vede facilmente dalla figura 34 per individuare la posizione del punto P si utilizzano la distanza dall'origine (detto anche polo) *r* (detto raggio vettore), l'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse *z* e la direzione OP (detta colatitudine) e l'angolo φ tra la direzione positiva dell'asse *x* e la direzione OQ, essendo Q la proiezione di P sul piano *xy* (detta longitudine).
Risulta $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
La trasformazione di coordinate è:

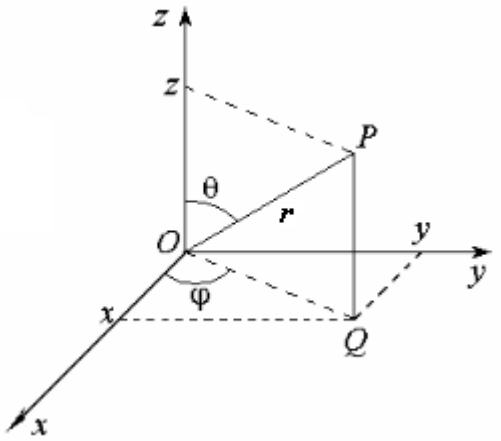


Figura 34 – Coordinate sferiche.

$$\begin{cases} x = r sen\theta \cos\varphi \\ y = r sen\theta sen\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Nell'intervallo invariante, una volta effettuate opportunamente le sostituzioni, compariranno, al posto di Δx, Δy, Δz, le quantità Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$. A causa della simmetria sferica la parte più significativa è quella radiale che, senza darne dimostrazione, è:

$$(\Delta s)^2 = \frac{(\Delta r)^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2(\Delta t)^2$$

Come abbiamo detto precedentemente, l'intervallo invariante è la metrica per lo spazio-tempo e $\Delta s=0$ è l'equazione geodetiche, ossia delle curve lungo le quali si muove la luce; nello spazio-tempo piatto di Minkowski alla velocità *c*.
Nel caso della massa puntiforme di Schwarzschild, lungo la direzione radiale, la condizione $\Delta s = 0$ conduce a:

$$\frac{(\Delta r)^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2(\Delta t)^2$$

$$\frac{(\Delta r)^2}{(\Delta t)^2} = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 c^2$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c$$

Ossia la velocita della luce lungo le geodetiche $\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$ dipende da *r*, ossia varia con la distanza dal punto O. È importante notare che, se $r = \frac{2GM}{c^2}$, allora $\Delta r/\Delta t = 0$. Ciò significa che la velocità della luce è zero e quindi non riesce ad abbandonare il corpo. Il valore di *r* è esattamente quello che abbiamo chiamato raggio di Schwarzschild; il raggio di Schwarzschild è detto anche orizzonte degli eventi del buco nero. L'ultima equazione può essere generalizzare alla forma:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \left(1-\frac{R_S}{r}\right)c$$

Nella Tabella 1 riportiamo i valori della velocità della luce per vari valori di *r*; possiamo notare alcune proprietà:

- La velocità della luce non è costante e quindi cade il postulato introdotto nella relatività ristretta della costanza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- Quando ci si allontana a grande distanza dal buco nero, $r >> R_S$, si entra nella regione dello spazio-tempo piatto e la velocità della luce ha il valore costante c in accordo con la relatività ristretta.
- All'interno dell'orizzonte degli eventi, la velocità della luce può essere maggiore di c.

Tabella 1	
r	$\Delta r/\Delta t$
$R_S/10$	$-9c$
$R_S/5$	$-4c$
$R_S/2$	$-c$
R_S	0
$2R_S$	$0{,}5c$
$10R_S$	$0{,}9c$
$100R_S$	$0{,}99c$
$1000R_S$	$0{,}999c$

Il buco nero di Schwarzschild è un esempio di un corpo massivo non rotante. Poiché il Sole e i pianeti ruotano attorno ai loro assi, una soluzione più generale di un buco nero dovrebbe tenere conto anche della rotazione del corpo. La soluzione per il buco nero rotante è detta buco nero di Kerr, dal nome del matematico neozelandese Roy Kerr che per primo ne propose un modello.
Un modello di buco nero sviluppato nel 1965 da Newmann prevede che il buco nero, oltre a ruotare, abbia anche una carica elettrica (buco nero di Kerr-Newmann). È questo il modello di buco nero attualmente più accreditato.

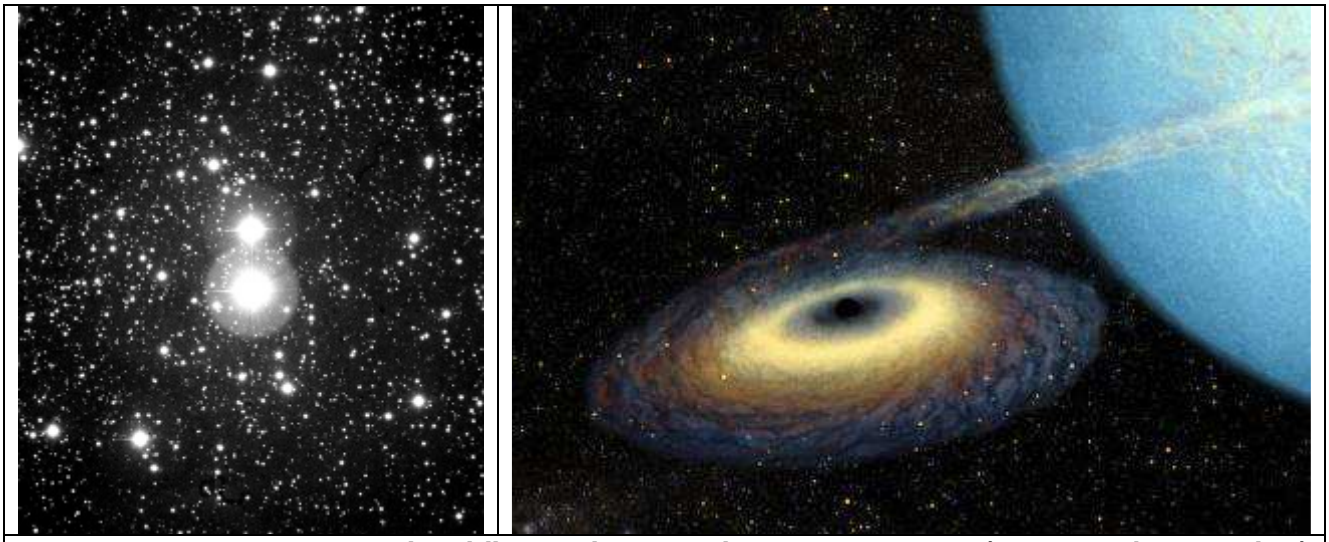


Figura 35 – Posta a circa 8000 anni luce dalla Terra, la sorgente di raggi X, Cygnus X-1, è un sospetto buco nero di più di 6 masse solari. Ogni 5,9 giorni, l'oggetto invisibile orbita intorno ad una stella supergigante blu di circa 30 masse solari strappandole materia che orbitandole intorno a velocità relativistiche emette raggi X. A sinistra un'immagine della supergigante, a destra una rappresentazione artistica.

Rimane una domanda molto ovvia: i buchi neri esistono in natura? O anche: è possibile che un oggetto esistente nell'Universo diventi un buco nero?
Anche se non ci sono prove dirette, ci sono molti luoghi nell'Universo in cui le intense emissioni di energia (specie nei raggi X) possono essere spiegate pensando al buco nero.
Oggi si ritiene che possano esistere tre tipi di buchi neri: buchi neri molto massivi (milioni di masse solari) nel centro delle galassie; buchi neri dovuti al collasso gravitazionale di stelle massicce (almeno 10 masse solari); mini buchi neri che si pensa possano essersi formati all'origine dell'Universo.
Le osservazioni hanno evidenziato che nel nucleo di molte galassie ci sono oggetti molto massivi, ma di dimensioni contenute; altre osservazioni indicano che alcune stelle doppie possano avere come compagno un buco nero (il primo caso trovato è quello della stella Cygnus X-1 – vedi figura 35).
Poiché in un campo gravitazionale il tempo rallenta, questo rallentamento diventa molto più pronunciato vicino ad un buco nero; il tempo misurato da un orologio solidale con una persona che di avvicinasse ad un buco nero sarebbe molto rallentato rispetto ad un orologio lontano dal campo

gravitazionale e tale rallentamento aumenterebbe sempre più man mano che si avvinasse all'orizzonte degli eventi dove si fermerebbe del tutto.
Anche con calcoli basati sulla legge di gravitazione di Newton, si può dimostrare che se un corpo si avvicinasse troppo ad un buco nero, finirebbe per essere disintegrato dalle enormi forze gravitazionali; per esempio se il Sole si riducesse ad un buco nero, a 1000 km di distanza, un uomo alto 1,80 m avvertirebbe una differenza di accelerazione di gravità tra la testa e i piedi di circa 500 m/s^2.

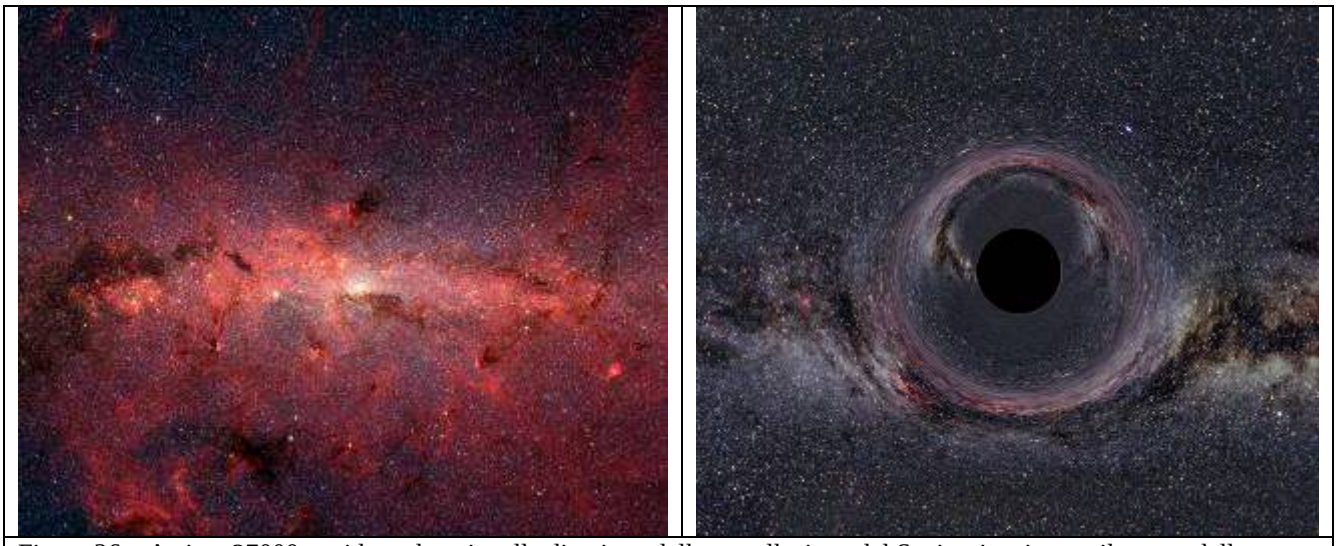


Figura 36 – A circa 27000 anni luce da noi, nella direzione della costellazione del Sagittario, si trova il centro della nostra Galassia dove si ritiene possa esistere un buco nero di massa pari a quattro milioni di masse solari. L'idea nasce dalle osservazioni del movimento di 28 stelle orbitanti intorno al centro della Galassia. A sinistra un'immagine del centro galattico ripresa con lo Spitzer Space Telescope, a destra una rappresentazione artistica del buco nero.

LA COSTANTE COSMOLOGICA

Era scontato che, essendo la teoria della relatività generale una teoria della gravitazione, prima o poi qualcuno cercasse di applicarla all'Universo nel suo insieme. Fu lo stesso Einstein che ci provò nel 1917 formulando il primo modello cosmologico relativistico. In questo modello lo spazio ha un volume finito ma illimitato (non è possibile visualizzare un tale spazio chiuso a tre dimensioni, ma è l'analogo tridimensionale della superficie di una sfera). Il risultato che ottenne fu di un universo destinato a crollare su sé stesso a causa della propria gravità, ma all'epoca si riteneva che l'universo fosse globalmente statico, e quindi Einstein introdusse nelle sue equazioni una forza repulsiva per impedirne il collasso. Egli si rese conto che, per esprimere le equazioni della relatività nella loro forma più generale, doveva introdurre una costante aggiuntiva la quale, se maggiore di zero, funge da forza repulsiva e che, assumendo un valore critico, compensa l'implosione dell'universo. Fu per questa ragione che venne introdotta la costante cosmologica Λ.
Lavori successivi mostrarono però che il modello di Einstein non è stabile: qualunque minima perturbazione ne provoca o il collasso o l'espansione. Inoltre, le osservazioni astronomiche di Edwin Powell Hubble (1889 – 1953) convinsero gli astronomi, a partire dal 1929, che l'universo è in espansione, e il modello di Einstein fu abbandonato dal suo stesso autore, che lo ritenne il più grave errore della sua vita.

LE ONDE GRAVITAZIONALI

Le onde gravitazionali sono onde dello spazio-tempo generate da masse accelerate. La loro esistenza è prevista dalla teoria Relatività Generale. Esse si propagano nello spazio-tempo modificando la distanza spazio-temporale di due punti vicini, facendola oscillare attorno a dei valori

di riferimento. La velocità (massima) delle onde gravitazionali è la velocità della luce nel vuoto *c*. Un campo gravitazionale si propaga nello spazio in senso radiale, mentre le distorsioni che esso provoca localmente sono perpendicolari alla sua direzione di propagazione e quindi le onde gravitazionali sono onde trasversali.
A partire dagli inizi del Novecento sono state formulate diverse teorie per determinare la meccanica di queste distorsioni. A tutt'oggi il modello teorico più accreditato è quello sviluppato da Einstein in base al quale si pensa che la quantità di radiazione gravitazionale emessa da un corpo dipenda dal grado di disomogeneità nella distribuzione della sua massa (in termini di deviazione del corpo dalla simmetria sferica); la grandezza fisica che misura questa disomogeneità è chiamata ***momento di quadrupolo***. Quando il momento di quadrupolo di un corpo di grande massa subisce variazioni molto rapide viene emesso un gran numero di onde gravitazionali, di intensità e quantità proporzionali alla velocità delle variazioni. L'aspetto più importante è che la sorgente deve muoversi con rapidità in modo tale da accentuare la sua componente non sferica; per esempio, una stella ovale che ruoti intorno all'asse maggiore non produce onde gravitazionali, ma se ruota intorno all'asse minore diventa un'emittente.
Fin dagli anni cinquanta sono stati effettuati vari esperimenti allo scopo di rilevare le onde gravitazionali. Una delle prime difficoltà sta nel fatto che, a differenza di altri tipi di radiazione, esse non possono essere riprodotte in laboratorio in quanto l'emissione di questo tipo di onde, da parte di masse da laboratorio, è estremamente debole e statisticamente improbabile: di conseguenza la strategia migliore è quella di cercare la radiazione emessa da masse grandissime, dell'ordine di quelle delle stelle o delle galassie.
Si conoscono molte possibili sorgenti di onde gravitazionali, tra le quali sistemi binari di stelle di neutroni o buchi neri, pulsar, esplosioni di supernovae, buchi neri in vibrazione e galassie in formazione; per ognuna di queste fonti il tipo di segnale emesso dovrebbe possedere un "timbro" caratteristico che identifichi univocamente il tipo di fonte e la causa dell'emissione.
Un sistema stellare binario, formato cioè da due stelle che orbitano intorno ad un comune centro di massa, dovrebbe produrre onde gravitazionali continue; il periodo fondamentale di queste onde sarebbe pari a metà del periodo dell'orbita delle due stelle. Quando un sistema binario muore, le stelle che lo compongono cadono rapidamente verso il centro seguendo una traiettoria a spirale, fino a che collidono o si disintegrano, emettendo onde gravitazionali. Nel caso che il sistema sia formato da due stelle di neutroni o buchi neri, entrambi gli eventi (collisione o disintegrazione) dovrebbero produrre un impulso di onde gravitazionali molto più intenso, a causa del maggiore quantitativo di massa presente nel sistema.
Anche la nascita di una stella di neutroni, dall'esplosione di una supernova, dovrebbe essere annunciata dalla trasformazione di circa lo 0,1% della massa iniziale in onde gravitazionali. Il "timbro" di queste onde dovrebbe essere di tipo pulsato. Il rilevamento di onde gravitazionali provenienti da una supernova permetterebbe anche di confermare la previsione di Einstein riguardo alla loro velocità: se le onde gravitazionali e quelle luminose venissero rilevate simultaneamente, avremmo una conferma diretta che le onde gravitazionali si propagano alla velocità della luce.
Un ulteriore vantaggio nello studio del collasso stellare proviene dal fatto che la radiazione elettromagnetica durante il collasso viene bloccata dagli strati esterni della stella, che nascondono alla vista le fasi più violente dell'esplosione; le onde gravitazionali, che interagiscono molto debolmente con la materia possono attraversare senza attenuazioni l'atmosfera di una stella e quindi svelare i dettagli più fini del collasso. Il numero di esplosioni di supernova che ci attendiamo nella nostra galassia è circa una ogni 30 anni. Nell'ammasso della Vergine, che conta circa 1000 galassie, ci attendiamo un'esplosione alla settimana.
Una stella di neutroni può essere una sorgente di onde gravitazionali se la sua massa non è disposta simmetricamente rispetto al suo asse di rotazione. In questo caso, come per i sistemi binari, le onde sono continue; il loro periodo fondamentale è uguale al periodo di rotazione della stella. Le informazioni ricevute darebbero informazioni sulla loro struttura interna che non è ancora completamente conosciuta.

Un'altra possibile fonte di onde gravitazionali è il Big Bang: le osservazioni più importanti sull'universo primordiale ci vengono dall'osservazione del fondo cosmico di microonde, il resto della radiazione termica che pervadeva l'universo ai suoi inizi. Il rilevamento di un fondo (rumore) cosmico di onde gravitazionali svelerebbe nuovi aspetti del Big Bang.

Le onde gravitazionali prodotte nelle situazioni descritte avrebbero comunque un impatto estremamente debole quando investono la Terra. Nel migliore dei casi, le masse dei rivelatori verrebbero appena sollecitate, con uno spostamento nelle loro posizioni di appena 10^{-21} m (un milionesimo del diametro di un protone) per ogni metro di separazione.
Bisogna considerare che la debolissima energia delle onde gravitazionali costringe gli scienziati ad aumentare sempre più la sensibilità della loro strumentazione di analisi ma, essendo anche gli strumenti e l'ambiente circostante coinvolto in modo diretto nell'esperimento perché la gravità non è schermabile, si amplificano anche i disturbi. Ecco perché si spera molto nel progetto LISA della NASA che prevede l'invio di una serie di rivelatori nello spazio.
Attualmente esistono diversi progetti per poter captare le onde gravitazionali, utilizzando rilevatori sempre più sensibili. Sostanzialmente le apparecchiature attuali si basano su due modelli: le antenne criogeniche e gli interferometri.
Attualmente la più elevata sensibilità di rilevazione è quella fornita dal rilevatore LIGO che nelle sue due stazioni di Hanford Site nello stato di Washington, negli Stati Uniti e a Livingston in Louisiana hanno effettuato la prima rilevazione di onde gravitazionali.
Il progetto italo-francese Virgo, nella campagna pisana, è un altro interferometro che nei prossimi anni dovrebbe contribuire alla rivelazione di onde gravitazionali.
Un esperimento che dovrebbe dare risultati significativi sulla ricerca delle onde gravitazionali è LISA (Laser Interferometer Space Antenna), un esperimento spaziale ancora in fase di studio da parte dell'ESA con la collaborazione della NASA; il lancio era previsto per il 2017, ma ritardi nella progettazione l'hanno fatto slittare. Nel 2015 è stato messo in orbita LISA Pathfinder un satellite destinato a ruotare attorno al Sole per sperimentare la tecnologia che verrà utilizzata su LISA.
Sono state attive anche delle antenne gravitazionali, in Italia i progetti NAUTILUS, condotto ai Laboratori Nazionali di Frascati, e il progetto AURIGA, condotto a Legnaro (PD). In queste sedi sono installati rivelatori di onde gravitazionali basati su antenne ultracriogeniche (cioè mantenute quasi allo zero assoluto). Qualora un'onda gravitazionale passasse attraverso il rivelatore, provocherebbe una distorsione con un incremento della distanza fra le masse in una direzione e una diminuzione nell'altra (effetto quadrupolo). I cambiamenti previsti sono comunque estremamente piccoli. Una conferma indiretta dell'emissione di onde gravitazionali è venuta dall'osservazione di un sistema di stelle binario attraverso l'osservazione di una coppia di stelle di neutroni ruotanti l'una attorno all'altra e destinate a fondersi in seguito all'aumento della loro velocità angolare. Questi studi sono stati effettuati utilizzando il radiotelescopio di Arecibo da Russel Hulse e Joseph Taylor che per questa scoperta hanno ricevuto il premio Nobel nel 1993.

Sulle orme delle onde gravitazionali (tra le altre cose) c'è il satellite Planck dell'Agenzia Spaziale Europea. Come ribadito anche sulla prestigiosa rivista Science, sull'osservatorio Planck, lanciato nel 2009 per studiare i primi istanti dell'Universo, è riposta una grande fiducia per rilevare tracce delle onde gravitazionali primordiali, quelle cioè generate dal Big Bang. Nella frazione di un secondo, l'Universo si è accresciuto da un puntino a un'enorme bolla, 10^{26} volte più grande; studiando la radiazione cosmica di fondo con la sensibilità degli strumenti del satellite Planck si dovrebbe riuscire a trovare tracce delle onde gravitazionali generate da quella eccezionale accelerazione di materia. Sarebbe un risultato estremamente importante per testare la teoria dell'inflazione e avere informazioni preziose sui primi battiti della vita dell'Universo. Planck potrebbe rilevarne il debolissimo segnale misurando le perturbazioni della polarizzazione del fondo cosmico. Se anche Planck dovesse mancare l'obiettivo, il risultato sarà comunque utile per fissare limiti superiori più stringenti per i satelliti che verranno.

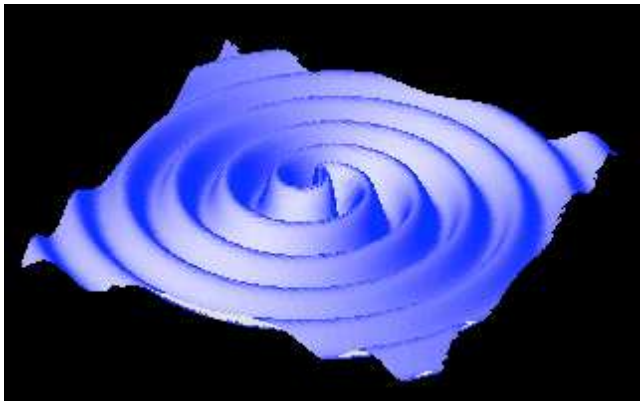


Figura 37 – Un modello per le onde gravitazionali

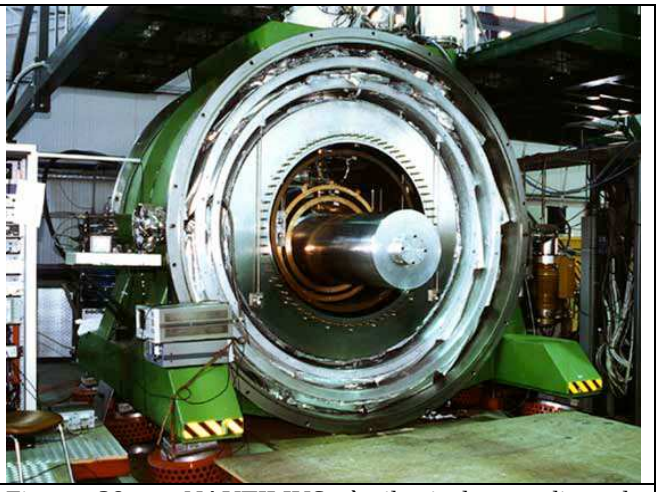


Figura 38 – NAUTILIUS è il rivelatore di onde gravitazionali risonante ultracriogenico istallato ai Laboratori Nazionali di Frascati dell'INFN dal 1992. Fa parte di una rete internazionali di rivelatori che include ALLEGRO (Louisiana, USA), AURIGA (INFN, Legnaro), EXPLORER (CERN, Ginevra).

Figura 39 – L'interferometro VIRGO nella campagna Toscana vicino a Cascina (PI)

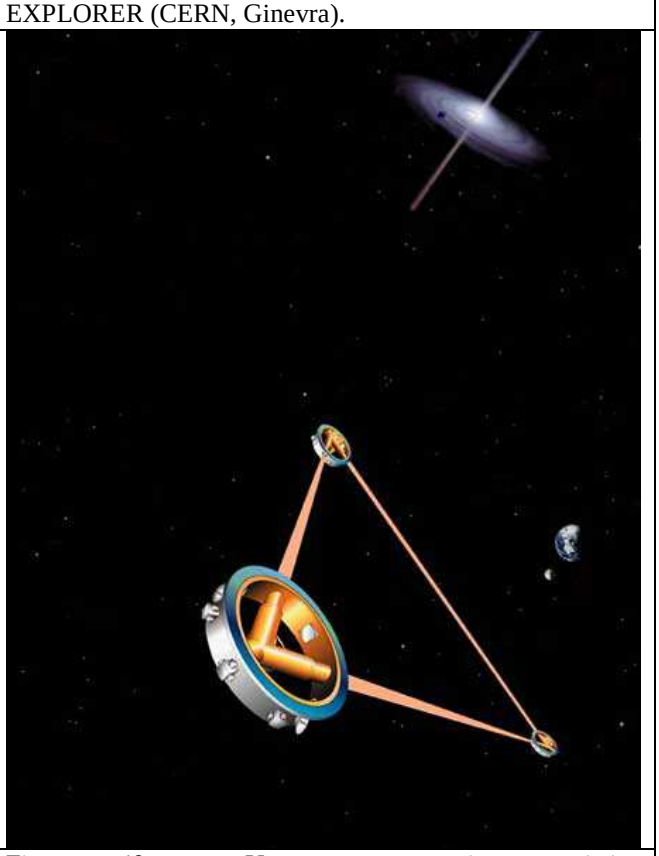


Figura 40 – Una rappresentazione artistica dell'interferometro spaziale LISA (Laser Interferometer Space Antenna), una missione spaziale in fase di progetto dell'ESA. La data di lancio è prevista per il 2017.

L'11 febbraio 2016 è stata confermata, in una conferenza stampa congiunta con LIGO ed VIRGO, l'esistenza delle onde gravitazionali, grazie allo studio sulla fusione di due buchi neri supermassicci distanti circa 1,3 miliardi di anni luce. I ricercatori del Caltech, del MIT e del LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), sono riusciti a rilevare la presenza delle onde gravitazionali di un evento cosmico utilizzando il LIGO, un doppio osservatorio costruito negli Stati Uniti, ad Hanford Site (Washington) e a Livingston (Louisiana). Si tratta di una importantissima conferma sperimentale, cui hanno collaborato anche ricercatori italiani e francesi di VIRGO.

Le onde gravitazionali furono rivelate per la prima volta il 14 settembre 2015, alle 10:50:45 ora italiana, da entrambi i rivelatori americani LIGO entro una finestra temporale di coincidenza di 10 millisecondi. Le onde gravitazionali rivelate sono state prodotte nell'ultima frazione di secondo del processo di fusione di due buchi neri, di massa equivalente a circa 29 e 36 masse solari, in un unico buco nero ruotante più massiccio di circa 62 masse solari: le 3 masse solari mancanti equivalgono all'energia emessa, sotto forma di onde gravitazionali, durante il processo di fusione dei due buchi neri.

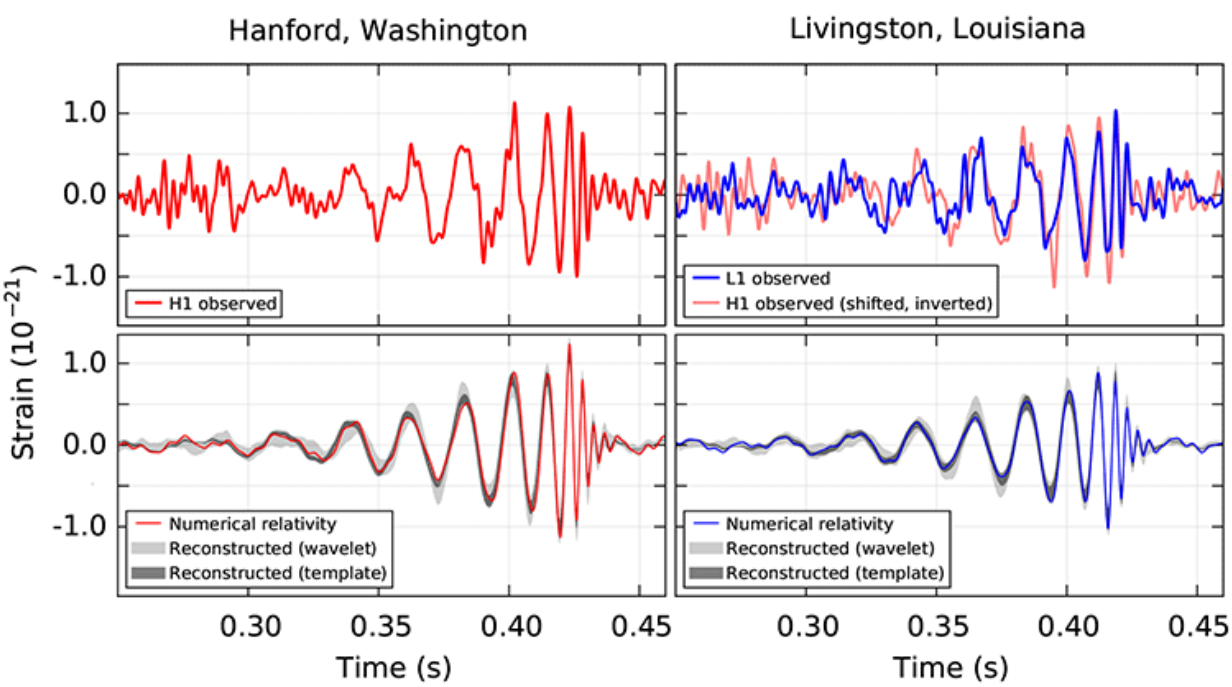


Figura 41 – I grafici originali della rivelazione delle onde gravitazionali diffuse l'11 febbraio 2016

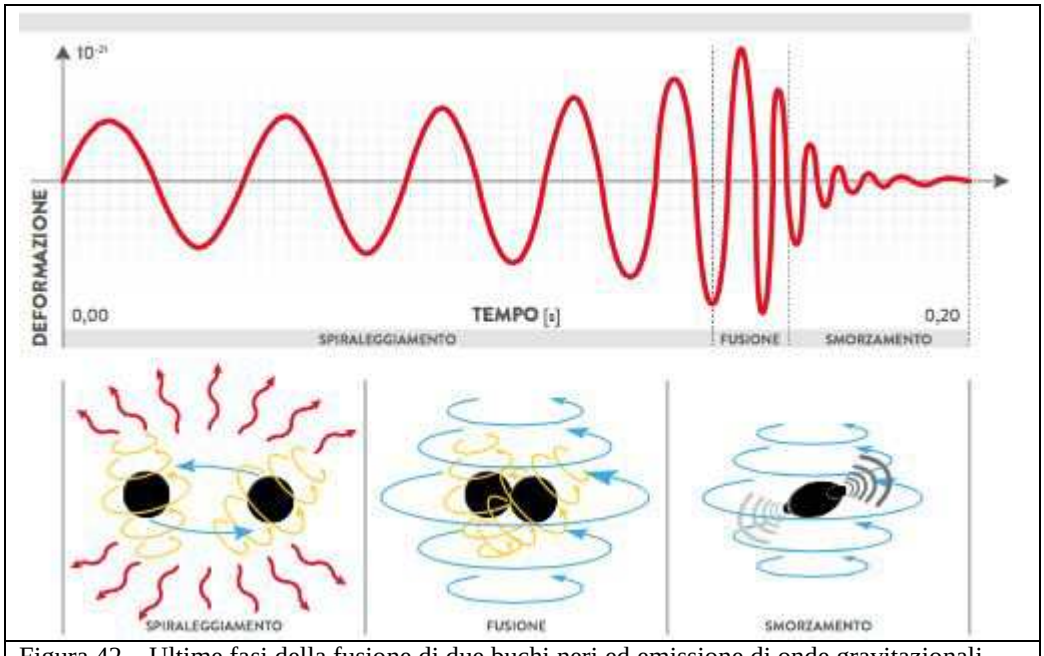


Figura 42 – Ultime fasi della fusione di due buchi neri ed emissione di onde gravitazionali

Rispetto alla radiazione elettromagnetica, che fino ad oggi è stata il principale mezzo di osservazione astronomica, le onde gravitazionali hanno una natura totalmente diversa, essendo

generate dal moto dei corpi celesti e riuscendo a trasportare intatta l'informazione sul fenomeno che le ha originate. L'osservazione delle onde gravitazionali fornisce così informazioni significative e complementari all'osservazione di onde elettromagnetiche (luce, onde radio, raggi X e gamma) e di particelle elementari (raggi cosmici, neutrini) di origine astrofisica. Saranno così svelati aspetti dell'universo finora inaccessibili: i processi più drammatici del cosmo sono sorgente di onde gravitazionali, e l'osservazione di tali onde ci consente di ottenere informazioni sulle masse e sui meccanismi coinvolti nell'emissione. Inoltre, contrariamente ai telescopi che possono osservare solo una piccola porzione del cielo alla volta, i rivelatori di onde gravitazionali sono per loro natura non direzionali e sono quindi in ascolto di un grande volume di universo, il cui raggio è ovviamente determinato dalla sensibilità dei rivelatori. Inoltre, la misura del fondo stocastico gravitazionale, che può essere originato da sorgenti cosmologiche oltreché astrofisiche, porterà informazioni sull'universo primordiale a un tempo molto prossimo al momento del Big Bang. Questa scoperta apre una nuova finestra sull'universo. Ogni nuovo strumento di osservazione della natura ha permesso di fare scoperte impreviste, che hanno arricchito la nostra conoscenza e spesso rivoluzionato la nostra immagine del mondo. È quindi probabile che gli unici interferometri avanzati al mondo per la rivelazione di onde gravitazionali, Advanced LIGO e Advanced VIRGO ci riveleranno aspetti insospettati dell'universo.