

LICEO SCIENTIFICO “G.GALILEI”  
MACERATA

# MATERIALE DIDATTICO



## LA CRISI DELLA FISICA CLASSICA

*ed*

## ELEMENTI DI MECCANICA QUANTISTICA

Prof. Angelo Angeletti

Rev. 05.2017

## 1 – Premessa

L'impianto teorico e concettuale di partenza per questa indagine è fornito dalla fisica del 1800. Ricordiamo sinteticamente i principali successi teorici conseguiti dai fisici in questo secolo.

- 1810-1820: la luce viene riconosciuta e descritta quantitativamente come fenomeno ondulatorio (Young e Fresnel).
- 1820-1830: a partire dall'esperimento di Oersted, soprattutto tramite le ricerche di Ampère e di Faraday, viene fondato l'elettromagnetismo.
- Ancora negli anni Venti nasce la scienza dei rapporti fra calore e produzione di lavoro, la termodinamica (Carnot e Klapeyron), mediante la quale sarà possibile rendere ragione di una grande quantità di dati sperimentali, acquisiti attraverso l'osservazione del funzionamento delle macchine termiche.
- Anni Quaranta: viene enunciato il principio di conservazione dell'energia (Mayer, Joule, Helmholtz) valido per qualunque sistema fisico isolato.
- 1850-1870: il concetto di calore trova una sua interpretazione definitiva nell'ambito di una descrizione corpuscolare e statistica (Clausius, Maxwell, Boltzmann).
- Anni Settanta: tutte le leggi sui fenomeni elettrici e magnetici vengono inquadrare nello schema delle equazioni di Maxwell e nel modello di "campo"; la luce viene identificata come radiazione elettromagnetica e quindi l'ottica viene inglobata nell'elettromagnetismo.
- Fine degli anni Ottanta: Hertz ottiene per la prima volta onde elettromagnetiche da un circuito oscillante.

Nel milleottocento la scienza fisica non rimane legata all'ambito teorico, ma trova sempre più significative applicazioni nel campo tecnologico e industriale. Basti ricordare:

- lo sviluppo della macchina a vapore
- le applicazioni industriali dell'elettrochimica
- il telegrafo e il telefono
- la produzione di corrente elettrica per l'alimentazione dei motori elettrici e per l'illuminazione
- le prime comunicazioni di segnali mediante radiazioni elettromagnetiche.

Questi sviluppi tecnologici condizionarono gli orientamenti della ricerca e diedero ad essa un carisma di onnipotenza che solo gli addetti ai lavori (e neppure tutti!) potevano percepire come impropria definitività, quasi che ormai fosse stato detto tutto ciò che c'era da dire sul "modo" di analizzare il reale fisico. Essi sembravano comprovare una concezione strettamente "deterministica" della realtà, secondo la quale lo stato di un sistema in un certo istante è necessariamente e univocamente determinato dallo stato del sistema nell'istante immediatamente precedente. Così, ad esempio, si esprimeva Pierre Simon de Laplace agli inizi del 1800:

*«Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa del suo stato futuro. Un'intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi».* P. S. de Laplace, Saggio filosofico sulla probabilità, in Opere, UTET pag. 243

Tra queste sicurezze si annidavano però alcune contraddizioni fra previsioni teoriche e dati sperimentali che i termini e i concetti della fisica ottocentesca non riuscivano a eliminare. A prima

vista tali contraddizioni avrebbero potuto apparire come banali effetti di un'inadeguata applicazione dei principi allora noti, di fatto esse si dimostrarono generatori di una delle più importanti evoluzioni (o rivoluzioni?) del pensiero scientifico e, in ultima analisi, filosofico.

I problemi che la fisica classica non riusciva a spiegare sono:

### **La discontinuità degli spettri di emissione**

Già agli inizi del XIX secolo si era scoperto che facendo passare la luce del sole attraverso una fenditura prima e attraverso un prisma poi, si osservavano delle righe scure sui "colori dell'arcobaleno". Righe ben distinte corrispondenti a diverse lunghezze d'onda. Qual era la causa di questa discontinuità spettrale che contrastava così apertamente con la struttura degli spettri di emissione dei corpi solidi incandescenti, apparentemente continui?

### **L'effetto fotoelettrico**

Nell'ultima decade del diciannovesimo secolo, molti fisici avevano osservato che, investendo con radiazione ultravioletta o con radiazione X (la scoperta di questa radiazione avvenne nel 1896) la superficie di sostanze solide, in particolare metalliche, queste si caricavano elettricamente. Dopo l'individuazione dell'elettrone, ci si rese conto che dai corpi solidi investiti dalla radiazione venivano espulse proprio queste particelle cariche e che ciò avveniva, però, con modalità non interpretabili mediante i ben associati concetti classici di energia della radiazione e di struttura della materia.

### **La radiazione del "corpo nero"**

La tipologia della radiazione emessa dai corpi riscaldati era stata oggetto di ricerche fin dagli anni cinquanta del diciannovesimo secolo, ma solo verso la fine di quel secolo una serie di misure molto precise delle frequenze emesse da un particolare modello fisico dei corpi incandescenti (detto "corpo nero") fu in grado di evidenziare l'inadeguatezza delle interpretazioni classiche che fino a quel momento erano state proposte per giustificare il fenomeno. Lo studio teorico-sperimentale dell'emissione del "corpo nero" divenne perciò il problema del corpo nero".

### **Il modello nucleare dell'atomo**

L'applicazione dei concetti elettrostatici classici, unitamente a nuove osservazioni sperimentali, fu in grado di condurre Rutherford, nel 1911, al modello dell'atomo a struttura nucleare. Modello di successo, perché in grado di interpretare la deviazione delle particelle  $\alpha$  e di giustificare sia i valori dell'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno, sia l'ordine di grandezza della lunghezza d'onda della radiazione luminosa emessa dagli atomi. Eppure questo modello era soggetto a critiche di importanza tutt'altro che secondaria. Infatti, secondo tale modello, gli elettroni sono dotati di un moto circolare attorno al nucleo con frequenza molto elevata ( $\sim 10^{15}$  Hz) e, conseguentemente, sono anche dotati di elevata accelerazione centripeta. D'altra parte, la teoria elettromagnetica insegna che qualunque particella carica accelerata deve irraggiare energia sotto forma di campo elettromagnetico. Dunque, gli elettroni rotanti avrebbero dovuto perdere progressivamente energia e cadere sul nucleo. Il modello di Rutherford perciò, proposto per interpretare la struttura degli atomi e quindi dell'universo, ne implicherebbe la sua totale instabilità.

La maggior parte dei problemi esistenti a cavallo dei diciannovesimo e del ventesimo secolo è strettamente connessa all'interazione fra la radiazione e la materia. La loro presenza indicava perciò che era necessario operare un'analisi critica profonda dei modelli che tradizionalmente venivano proposti per descrivere questi due enti e la loro interazione per scrivere, forse, una fisica nuova. Il primo passo verso questa meta fu fatto da Planck, nel 1900, e riguardò il problema del corpo nero. Cinque anni dopo, Einstein pose le basi teoriche per l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico e del calore specifico dei solidi. Nel 1913 infine, Bohr diede una prima significativa interpretazione della stabilità del modello nucleare dell'atomo e della discontinuità degli spettri di emissione.

## 2 – Il problema del corpo nero e l'ipotesi di Planck

La fisica classica è in grado di spiegare l'interazione della radiazione elettromagnetica con la materia, si può infatti mostrare che una radiazione elettromagnetica di frequenza qualunque incontrando lungo il suo cammino un corpo materiale è in grado di trasferire a esso la propria energia; per contro, studiando la produzione delle radiazioni medesime si può capire come, a sua volta, la materia sia in grado di emettere tali radiazioni. Questa inscindibilità dei fenomeni di assorbimento ed emissione della radiazione elettromagnetica da parte della materia sono molto bene esemplificati da quanto accade al sistema Terra: il nostro pianeta riceve quotidianamente dal Sole un enorme quantitativo di energia associata alla radiazione elettromagnetica che esso emette ( $138 \text{ kW/m}^2$ ), ma ciò nonostante la temperatura della Terra è rimasta sostanzialmente invariata nel corso dei millenni. Questo indica che il nostro pianeta riemette tutto quanto riceve dall'esterno, permettendo così un equilibrio termico che consente il sussistere della vita nella biosfera.

Questa interrelazione dei fenomeni di emissione e di assorbimento della radiazione elettromagnetica da parte della materia ha attratto l'attenzione dei fisici sperimentali e teorici del diciannovesimo secolo che avevano intuito la possibilità di giungere alla conoscenza della struttura più intima sia della materia sia della radiazione. Una prima tappa importante di questo studio è costituita dal lavoro sperimentale di Gustav Robert Kirchhoff (Königsberg, 12 marzo 1824 – Berlino, 17 ottobre 1887) che, nel 1859, era riuscito a dimostrare che la radiazione irraggiata dai corpi che si trovano a temperature diverse è sempre della stessa natura e

quindi, diremmo oggi, che è radiazione elettromagnetica. Per perfezionare le proprie ricerche, Kirchhoff e i fisici di quell'epoca, utilizzarono un modello chiamato **corpo nero** che aveva la caratteristica di assorbire qualunque radiazione lo investisse permettendo così di esaminare, in assenza di radiazione riflessa, la sola radiazione da esso emessa alle diverse temperature. Il corpo nero è un tipico modello concettuale poiché anche i corpi che appaiono neri alla vista, come un pezzo di velluto nero o una superficie coperta di nerofumo, si avvicinano molto bene a questo modello solo in corrispondenza delle radiazioni visibili mentre in altre zone dello spettro sono riflettenti (anche se in piccola misura).

Esiste tuttavia un sistema fisico che può approssimare quasi perfettamente il modello di corpo nero: una cavità isolata verso l'esterno tranne che per un piccolo foro (per la realizzazione concreta di questo sistema, pensiamo ad esempio a un forno dotato di un piccolo oblò per la sua ispezione interna). La radiazione contenuta in una simile cavità, o che penetra in essa, vi rimane infatti imprigionata consentendo il crearsi di uno stato di equilibrio fra la radiazione emessa e la radiazione assorbita dalle pareti interne della cavità medesima (figura 1).

Le indagini sperimentali eseguite con questo modello, in particolare lo studio della tipologia della radiazione emessa dalla piccola apertura della cavità, evidenziarono le seguenti caratteristiche:

- ad una determinata temperatura, lo spettro della radiazione emessa presenta un picco di intensità in corrispondenza di una lunghezza d'onda caratteristica di quella temperatura, mentre l'intensità della radiazione diminuisce a lunghezze d'onda inferiori e superiori (vedi figura 2);
- la lunghezza d'onda corrispondente al picco d'intensità, diminuisce con l'aumentare della temperatura;
- l'intensità totale della radiazione emessa aumenta con la temperatura.

La b) è la cosiddetta legge di spostamento scoperta dal fisico tedesco Wilhelm Wien (1864 – 1928) nel 1893, mentre la c) fu scoperta sperimentalmente dal fisico sloveno Jožef Stefan (1835 – 1893) nel 1879 e spiegata teoricamente, usando la termodinamica, dal fisico austriaco Ludwig Boltzmann (1844 – 1906) nel 1884.

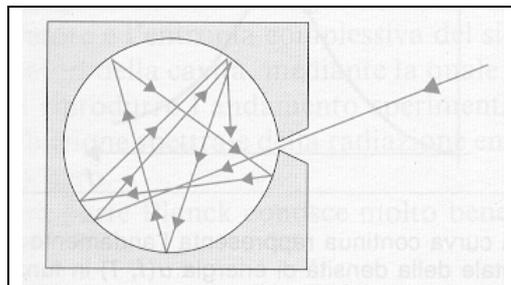


Figura. 1. - Modello concettuale di corpo nero. La radiazione che penetra nella cavità ha una probabilità pressoché nulla di riemergere dalla cavità stessa prima di venire assorbita dalle sue pareti.

La legge di Stefan<sup>[1]</sup> afferma che: *l'energia totale E, relativa cioè a tutto lo spettro della radiazione, emessa nell'unità di tempo dall'unità di superficie di un corpo nero alla temperatura T è data dalla relazione seguente:*

$$(1) \quad E = \sigma T^4$$

dove  $\sigma = (5,670400 \pm 0,000040) \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

La legge di spostamento di Wien afferma che: *fra la temperatura assoluta T di emissione di un corpo nero e la lunghezza d'onda  $\lambda_m$  in corrispondenza della quale, esso emette la massima intensità di energia, sussiste la relazione:*

$$(2) \quad \lambda_m T = \text{costante}$$

con costante =  $(2,8977685 \pm 0,0000051) \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$ . Si noti lo spostamento verso lunghezze d'onda sempre minori che si produce all'aumentare della temperatura di emissione del corpo<sup>[2]</sup>.

Tali leggi non risolvevano però il problema di descrivere la forma delle curve di figura 2; a tale scopo occorre, infatti, individuare una funzione che descrivesse l'intensità della radiazione emessa in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ , ovvero della frequenza  $f$ , e della temperatura  $T$ .

Questa indagine teorica impegnò non pochi fisici che operarono negli ultimi decenni dell'Ottocento. Lo stesso Wien nel 1896 propose una relazione, per la densità di energia emessa da un corpo nero a una data temperatura  $T$  e nel campo di frequenze compreso fra  $f$  e  $f + df$  <sup>[3]</sup>, che oggi scriveremo:

$$(3) \quad u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} e^{-\frac{hf}{kT}}.$$

I fisici britannici John William Strutt 3° barone di Rayleigh (1842 – 1919) James Hopwood Jeans (1877 – 1946) proposero un modello microscopico secondo il quale le pareti della cavità (corpo nero) si dovevano pensare come un insieme di cariche oscillanti, ciascuna con una frequenza propria, capaci di emettere e di assorbire radiazioni di frequenza identica a quella della propria oscillazione. Applicando a questo modello microscopico le leggi classiche dell'elettromagnetismo e della termodinamica, in particolare il principio di equipartizione dell'energia, Rayleigh e Jeans giunsero ad esprimere la densità di energia mediante la relazione (formula di Rayleigh-Jeans):

$$(4) \quad u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

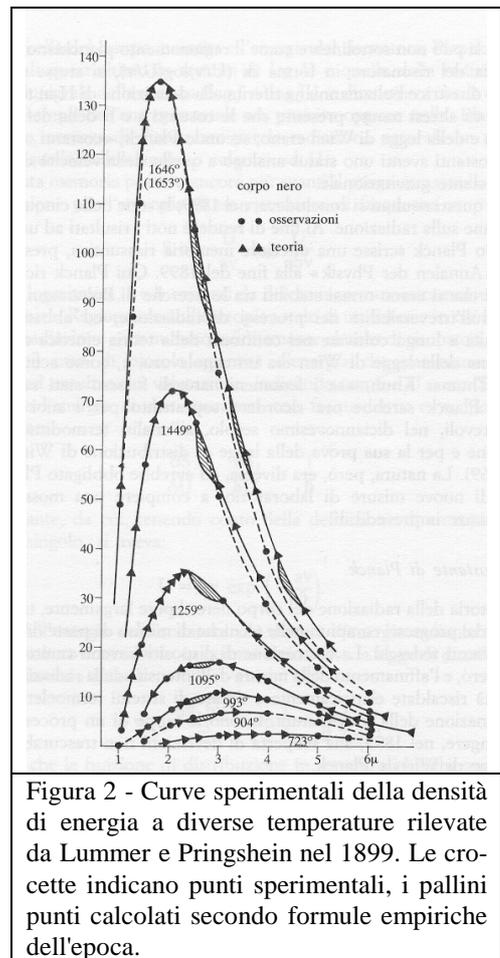


Figura 2 - Curve sperimentali della densità di energia a diverse temperature rilevate da Lummer e Pringshein nel 1899. Le crocette indicano punti sperimentali, i pallini punti calcolati secondo formule empiriche dell'epoca.

<sup>[1]</sup> In effetti Stefan enunciò la sua legge basandosi su dati sperimentali non molto corretti ma, pochi anni dopo, Boltzmann riuscì a dare una dimostrazione rigorosa di questa legge sfruttando il modello della cavità e applicando a esso i principi della termodinamica e dell'elettromagnetismo. Per tale motivo, questa legge è spesso denominata legge di Stefan-Boltzmann.

<sup>[2]</sup> Lo spostamento verso sinistra dei massimi della densità di energia emessa permette di capire che un corpo nero apparirà tale solo alle basse temperature. Lo spostamento del massimo connesso all'aumento della sua temperatura corrisponde infatti all'emissione di radiazione la cui lunghezza d'onda finirà col cadere nella gamma del visibile. In corrispondenza di una temperatura di circa 600 °C il corpo emittente (o la cavità) comincerà ad apparire rosso per poi divenire arancione, giallo, bianco e, infine, tendere al violetto per le temperature più elevate. In un grafico in cui sull'asse orizzontale si pongano le frequenze  $f$  va scambiata la sinistra con la destra, in quanto  $c = \lambda f$ .

<sup>[3]</sup> Per una data temperatura  $T$ , la densità di energia =  $\frac{\text{energia}}{\text{volume} \times \text{intervallo di frequenza}}$ .

L'incompatibilità della (4) con i dati sperimentali è evidente (vedi figura 4): mentre le osservazioni di laboratorio indicano che all'aumentare della frequenza (o, che è lo stesso, al diminuire della lunghezza d'onda), fino a un certo valore di  $f$ , la densità di energia  $u(f,T)$  aumenta, ma poi va rapidamente a zero, la (4) prevede che all'aumentare della frequenza il valore di  $u(f,T)$  aumenti sempre e con dipendenza quadratica. Così concludeva Rayleigh in un suo articolo del 1905: «*Il ragionamento che conduce alla (4) è molto semplice e questa formula mi sembra la necessaria conseguenza della legge di equipartizione così come proposta da Boltzmann e Maxwell [...]. Secondo la (4), se essa fosse applicabile a tutte le lunghezze d'onda, l'energia totale di radiazione ad una data temperatura dovrebbe essere infinita [...]. Mi sembra che si debba ammettere il fallimento della legge di equipartizione in questi casi estremi. Se è così, è ovviamente molto importante capirne la ragione.*» J.W. Rayleigh, *The dynamical theory of gases and of radiation*, Nature, 1905, vol. 72, pag. 54.

L'itinerario teorico percorso da Max Planck per giungere all'interpretazione della distribuzione energetica della radiazione emessa dal corpo nero è complesso e non verrà qui descritto nei suoi dettagli formali, è utile però ricordarne almeno l'impostazione per mostrare quanto di "classico" rimaneva in esso e quanto invece veniva introdotto di innovativo. Il punto di partenza di Planck sono i principi della termodinamica e un modello materiale del corpo nero: una cavità (si ricordi la figura 1) le cui pareti sono immaginate come costituite da un insieme di particelle oscillanti (che Planck chiama *risonatori*) che possono emettere o assorbire energia elettromagnetica avente la loro stessa frequenza di vibrazione. Utilizzando i principi della termodinamica e una buona dose di intuizione fisica, Planck individua (forse sarebbe meglio dire "ricostruisce") una relazione generale fra l'energia media  $\bar{E}$  del singolo oscillatore e l'entropia complessiva del sistema di oscillatori della cavità, mediante la quale è in grado di riprodurre l'andamento sperimentale della distribuzione spettrale della radiazione emessa dal corpo nero. Planck introduce il concetto fondamentale che l'energia posseduta da un oscillatore può variare solo per quantità discrete:

$$(5) \quad E = hf,$$

dove  $f$  è la sua frequenza e  $h$  una costante universale, oggi nota come costante di Planck, la cui miglior stima è  $h = (6,626\ 068\ 96 \pm 0,000\ 000\ 33) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ; nella maggior parte dei calcoli utilizzeremo  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

A partire da questa ipotesi Planck riesce ad esprimere la densità di energia mediante la relazione:

$$(6) \quad u(f,T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Si osservi che se  $h$  non avesse un valore finito ma potesse essere assunto piccolo a piacere, la formula (6) verrebbe a coincidere con la formula classica di Rayleigh e Jeans; infatti si dimostra facilmente che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \right) = kT \quad (\text{basta applicare la regola di de L'Hôpital}).$$

La figura 4 riporta il confronto tra la legge di Wien, quella di Rayleigh e Jeans (R&J) e quella di Planck per un corpo nero a  $6000 \text{ K}$ . Si può osservare facilmente che se  $f$ , essendo

$$\lim_{f \rightarrow 0} \left( \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \right) = kT, \quad \text{la legge di Planck si riduce alla formula di Rayleigh e Jeans, mentre valori di } f$$

grandi  $e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \cong e^{\frac{hf}{kT}}$  e quindi si ha la relazione di Wien.

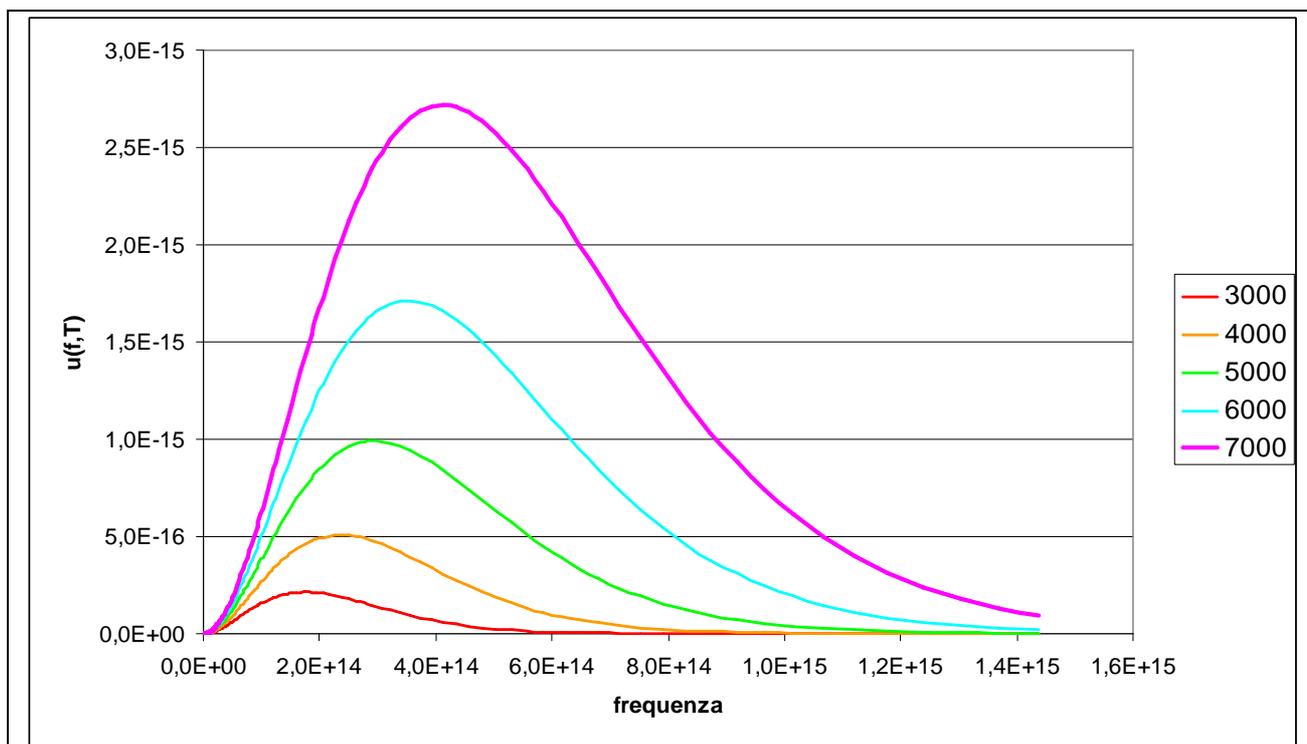


Figura 3 - Curve corrispondenti alla formula (7) relative alla temperatura di 3000 K, 4000 K, 5000 K, 6000 K, 7000 K.

La formula di Planck, oltre ad interpretare lo spettro del corpo nero, consentì di spiegare i valori anomali dei calori specifici dei gas ideali e dei solidi a bassissime temperature calcolati in base ai principi della teoria cinetica classica. Planck fin dall'inizio si dimostrò molto perplesso nei riguardi dell'ipotesi di quantizzazione dell'energia degli oscillatori della cavità e aveva tentato in ogni modo di farne a meno.

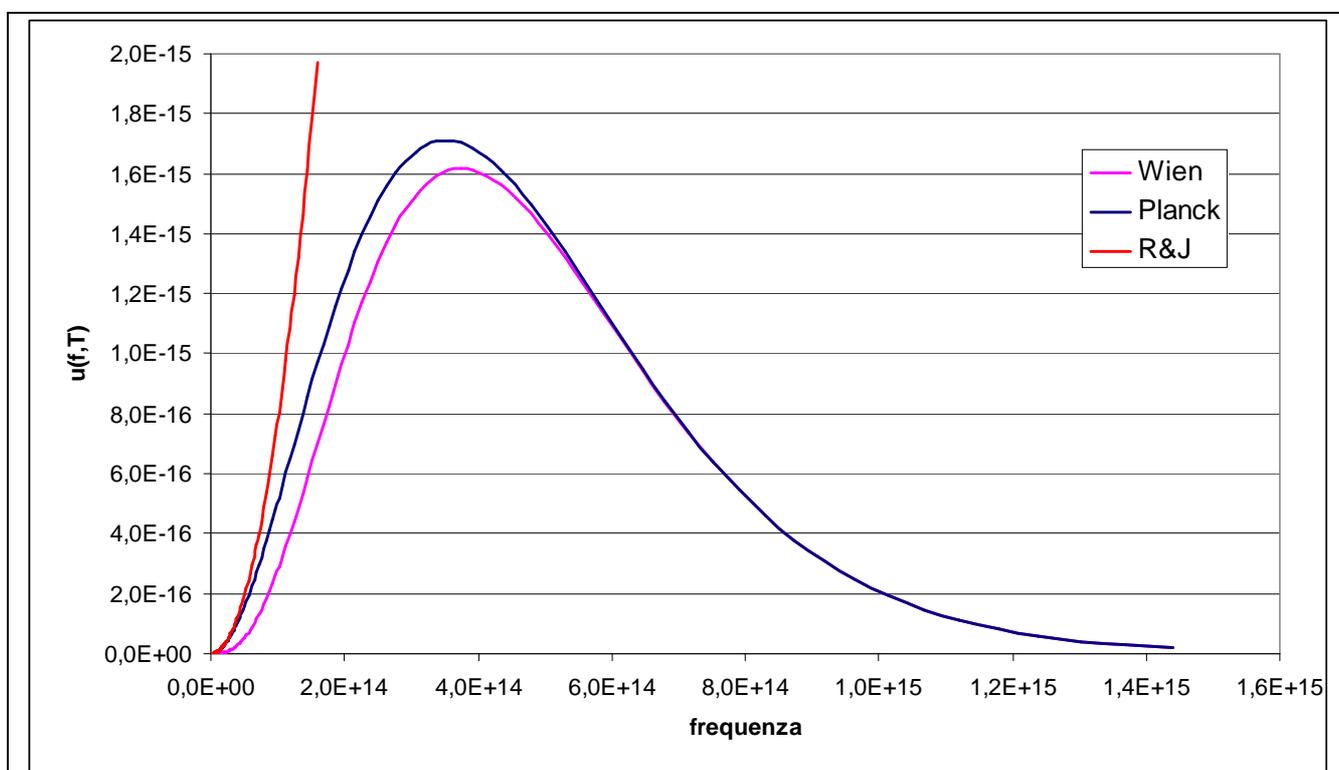


Figura 4 - Confronto tra le curve di emissione del corpo nero ottenute con le formule di Wien, di Rayleigh e Jeans (R&J) e di Planck per un corpo nero a 6000 K.

### 3 – Effetto fotoelettrico e l'interpretazione di Einstein

L'effetto fotoelettrico consiste nell'emissione di elettroni da una superficie metallica quando questa viene colpita da una radiazione elettromagnetica avente una certa frequenza. L'effetto fotoelettrico fu rivelato da Hertz nel 1887 nell'esperimento che egli fece per generare e rivelare onde elettromagnetiche. Vari fisici si dedicarono allo studio di tale effetto; per capirne ora il significato utilizzeremo l'apparato sperimentale utilizzato da Lenard nel 1900. La comprensione dell'effetto fotoelettrico è stata fondamentale per comprendere la natura quantistica della luce.

Nell'apparato di figura 5<sup>[4]</sup> il catodo<sup>[5]</sup> (che insieme all'anodo sono contenuti in un tubo a vuoto) viene investito da un fascio di luce di frequenza  $f$  e intensità  $I$ . Il potenziale  $V$ , tra catodo e anodo, può essere variato a addirittura, per mezzo del commutatore, scambiato di segno. Se il potenziale è zero, alcuni elettroni possono essere dotati di energia sufficiente per raggiungere l'anodo, che quindi si carica negativamente (il catodo quindi si carica positivamente) e l'amperometro  $A$  registrerà una corrente  $i$ .

Se si collega il catodo con il polo negativo della batteria e l'anodo con il polo positivo, gli elettroni emessi acquisteranno energia dal campo elettrico e ce ne saranno sempre di più che arriveranno all'anodo facendo aumentare la corrente  $i$  all'aumentare del potenziale, c'è però un limite alla corrente (detta intensità di saturazione) e questo è dato dal valore che questa assume quando tutti gli elettroni emessi raggiungono l'anodo; a quel punto, aumentando la tensione la corrente rimarrà costante.

Se si inverte la polarità di catodo e anodo, gli elettroni emessi verranno rallentati e saranno sempre di meno quelli che raggiungeranno l'anodo; per un opportuno potenziale  $V_A$  (detto potenziale d'arresto), tale per cui l'energia cinetica massima degli elettroni emessi ( $K_{MAX}$ ) è uguale all'energia potenziale  $U$  del campo elettrico ( $U = eV_A$ ,  $e$  è la carica dell'elettrone), nessun elettrone arriverà più sull'anodo e quindi cesserà il flusso di corrente.

In figura 6 vengono riportati i grafici della corrente  $i$  in funzione del potenziale  $V$  per una data frequenza  $f$  e per diverse intensità  $I$  della luce. Come si può osservare all'aumentare dell'intensità dalla radiazione aumenta la corrente.

Nella figura 7 vengono riportati i grafici della corrente  $i$  in funzione del potenziale  $V$  per una intensità  $I$  della luce costante e per diverse frequenze. Come si può osservare l'intensità di corrente di saturazione non varia al variare delle frequenze, mentre il potenziale d'arresto aumenta all'aumentare della frequenza.

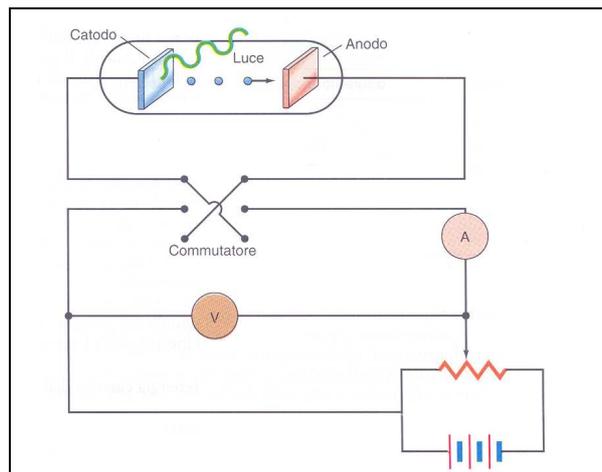


Figura 5 – Apparato sperimentale di Lenard (1900)

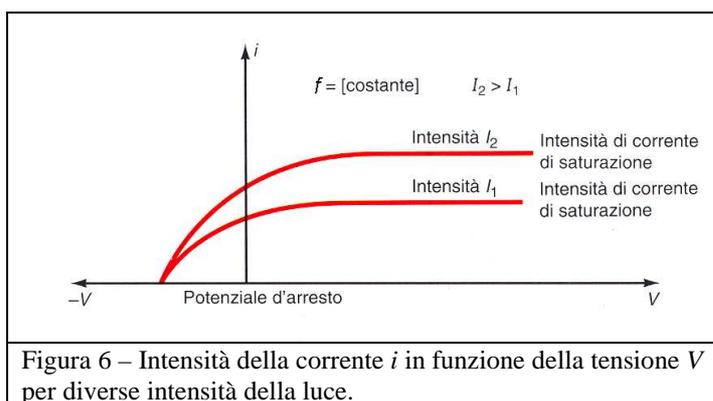


Figura 6 – Intensità della corrente  $i$  in funzione della tensione  $V$  per diverse intensità della luce.

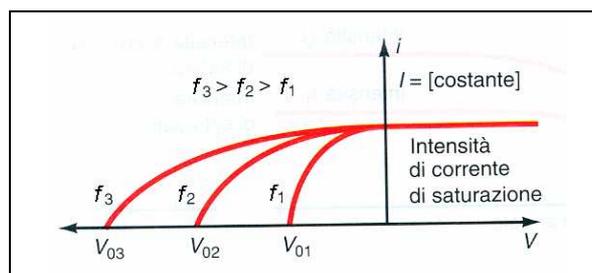


Figura 7 – L'intensità di corrente  $i$  in funzione della tensione  $V$  per differenti frequenze della luce.

<sup>[4]</sup> Le figure 5, 6 e 7 sono tratte dal libro di Peter Nolan, Complementi di Fisica, edito da Zanichelli, Bologna, 1996

<sup>[5]</sup> Nei sistemi elettronici il catodo è il polo negativo, mentre l'anodo il polo positivo.

Un altro fenomeno che si osserva è che se la frequenza della luce non è superiore ad un valore  $f_0$  (detto frequenza di soglia) il fenomeno non avviene affatto. Inoltre si osserva che con piccole intensità della luce di frequenza superiore alla frequenza di soglia, l'emissione degli elettroni è pressoché istantanea.

I risultati dell'esperimento sono quindi:

- 1) La corrente si manifesta quasi istantaneamente anche per luce di intensità molto bassa (in effetti c'è un ritardo dell'ordine di  $10^{-9}$  s).
- 2) Quando la frequenza ed il potenziale sono tenuti fissi, la corrente è direttamente proporzionale all'intensità della luce incidente.
- 3) Tenendo fissa la frequenza e l'intensità della luce, la corrente diminuisce all'aumentare del potenziale ritardante, annullandosi per il potenziale d'arresto  $V_A$ . Il potenziale d'arresto non dipende dall'intensità della luce.
- 4) Per un dato materiale, il potenziale d'arresto varia linearmente con la frequenza secondo la relazione

$$eV_A = hf - W_0$$

Il valore del termine  $W_0$  varia da sostanza a sostanza, ma la pendenza della retta rimane la stessa per tutte le sostanze ( $h$  è la costante di Planck).

- 5) Per una data sostanza, esiste una frequenza di soglia  $f_0$ , al di sotto della quale non verranno emessi elettroni per quanto sia elevata l'intensità della luce.

Una interpretazione della luce come onda riesce a spiegare soltanto il risultato 2), e cioè l'aumento della corrente con l'intensità poiché più è intensa la luce, tanto maggiore sarà l'energia trasmessa dall'onda e tanto maggiore sarà il numero di elettroni che dovrebbero essere emessi.

Una stima grossolana<sup>[6]</sup> del tempo necessario perché si accumuli l'energia necessaria è di circa 9 ore, mentre sperimentalmente si osserva che il processo avviene pressoché istantaneamente.

Gli altri risultati sono del tutto inspiegabili con la teoria ondulatoria.

L'interpretazione quantistica della luce per l'effetto fotoelettrico fu proposta da A. Einstein nel 1905 ed è in grado di spiegare tutti i risultati sperimentali. Nell'interpretazione quantistica, la luce viene vista come un'insieme di particelle (oggi chiamate fotoni) ognuna delle quali trasporta una energia  $E = hf$  che viene ceduta ad un singolo elettrone. Se l'elettrone è espulso dalla sostanza, la differenza tra l'energia assorbita dall'elettrone e l'energia con cui esso è legato al metallo compare come energia cinetica dell'elettrone. Gli elettroni sono legati al metallo con energie variabili e che dipendono dal materiale e l'energia necessaria per estrarli dal materiale si chiama *lavoro di estrazione*  $W_0$ . Perciò gli elettroni verranno espulsi con un'energia cinetica variabile da zero ad un valore massimo dato da:

$$(7) \quad K_{MAX} = hf - W_0$$

e ciò spiega il risultato 3). Poiché  $K_{MAX} = eV_A$  la relazione dell'energia massima diventa

$$(8) \quad eV_A = hf - W_0.$$

Con ciò si spiega la relazione del risultato 4), insieme con l'esistenza di una frequenza di soglia (risultato 5)), infatti, l'elettrone per lasciare il metallo deve assorbire una quantità di energia tale che:

$$hf_0 = W_0$$

---

[6]Supponiamo di far incidere su un  $\text{cm}^2$  di superficie del metallo una radiazione luminosa di  $10^{-7}$  J/s. Usiamo la luce del doppietto del sodio la cui frequenza è  $5 \cdot 10^{14}$  Hz e come metallo il potassio, il cui lavoro di estrazione è circa 2 eV =  $3,2 \cdot 10^{-19}$  J. L'energia che investe un atomo, di diametro dell'ordine di  $1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  m, è di circa  $10^{-23}$  J/s. Assumendo perciò che l'energia sia distribuita uniformemente su di una superficie con diametro di  $1 \text{ \AA}$  e che l'elettrone possa accumulare l'energia, si avrebbe un tempo dell'ordine di  $\frac{3,2 \times 10^{-19} \text{ J}}{10^{-23} \text{ J/s}} = 3,2 \times 10^4 \text{ s} \approx 9 \text{ ore}$ . In realtà l'effetto fotoelettrico non è istantaneo, ma l'emissione avviene nell'ordine dei nanosecondi.

e l'equazione (8) si può scrivere anche nella forma

$$(9) \quad eV_A = h(f - f_0)$$

Al di sotto di questa frequenza di soglia i fotoni non hanno energia sufficiente per l'estrazione degli elettroni dal metallo, qualunque sia l'intensità della luce. Infine, quanto più è intensa la luce, tanto maggiore sarà la densità dei fotoni, e quindi tanto maggiore sarà il numero degli elettroni espulsi dalla superficie e ciò spiega il risultato 2).

### 3.1 – Determinazione della costante di Planck per mezzo dell'effetto fotoelettrico.

L'equazione (9) fornisce un metodo per determinare la costante di Planck. Infatti con un dispositivo costituito da una sorgente luminosa (una lampada a vapori di mercurio) con filtri di vari colori (per selezionare una luce monocromatica), un tubo fotoelettrico<sup>[7]</sup> e un circuito come quello di figura 4 possono essere misurate frequenze dalla luce e i corrispondenti potenziali di arresto (la tabella di lato riporta i valori ottenuti in una serie di misure fatte nell'anno scolastico 1994/1995).

L'equazione della retta dei minimi quadrati è

$$V_A = 2,37 \cdot 10^{-15} f - 0,995$$

o, che è lo stesso:

$$V_A = 2,37 \cdot 10^{-15} (f - 4,2 \cdot 10^{14})$$

$\lambda$ nm	$f$ $10^{12}$ Hz	$V_A$ Volt
370	810,8	0,95
370	810,8	0,75
436	688,1	0,70
436	688,1	0,85
440	681,8	0,65
546	549,5	0,20
578	519,0	0,21

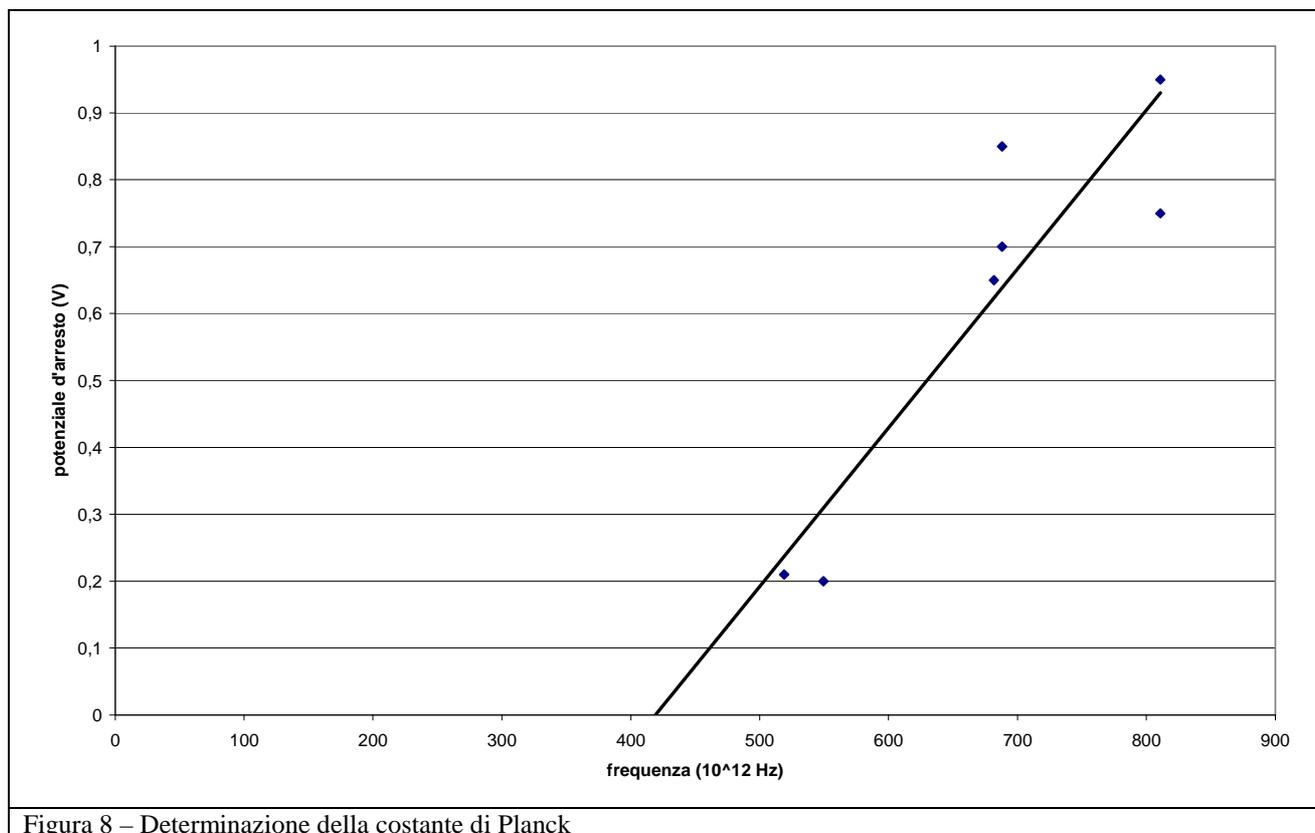


Figura 8 – Determinazione della costante di Planck

<sup>[7]</sup> Il tubo fotoelettrico consiste essenzialmente in un bulbo di vetro in cui è stato fatto il vuoto contenente una pellicola di potassio applicata internamente ad una delle facce del tubo ed un filo di platino a forma di anello disposto di fronte alla superficie di potassio. Il potassio è l'anodo emettitore e il filo di platino è il catodo.

Confrontando quest'ultima espressione con la (9) si ricava  $h = 2,37 \cdot 10^{-15} \cdot e = 3,80 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  (valore corretto solo per l'ordine di grandezza) e  $f_0 = 4,21 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . L'anno successivo è stato ricavato  $h = 3,7 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  e  $f_0 = 2,9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

### 3.2 – Determinazione della costante di Planck per mezzo di un LED [8].

Il funzionamento di un LED viene illustrato nella figura 9. In un semiconduttore gli elettroni degli atomi si distribuiscono nella banda di valenza e nella banda di conduzione che sono nettamente separate da una energia di gap (un elettrone per passare dalla banda di valenza a quella di conduzione deve acquisire tale energia). Per la presenza del campo elettrico un elettrone salta dalla banda di valenza a quella di conduzione e nella banda di valenza si forma una “lacuna” positiva.

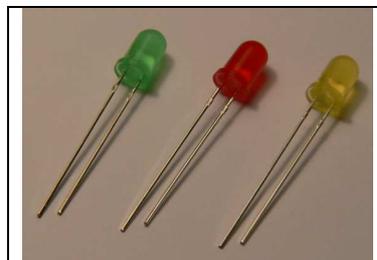


Figura 9 – LED di colori diversi

L'elettrone tende a ricombinarsi con la lacuna restituendo l'energia di gap sotto forma di un fotone di energia  $E_g = hf$ .

Essendo un diodo, il LED permette il passaggio della corrente in una sola direzione, inoltre si osserva che l'emissione luminosa inizia ad un particolare valore del potenziale, detto potenziale di innesco  $V_I$ , e che corrisponde al valore della tensione per il quale gli elettroni cominciano a saltare dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Sperimentalmente questo valore può essere determinato a partire dalla curva caratteristica di un LED (vedi figura 11) dalla quale si ricava che la corrente  $I$  è direttamente proporzionale al potenziale solo a partire da un opportuno valore di  $V$ ;

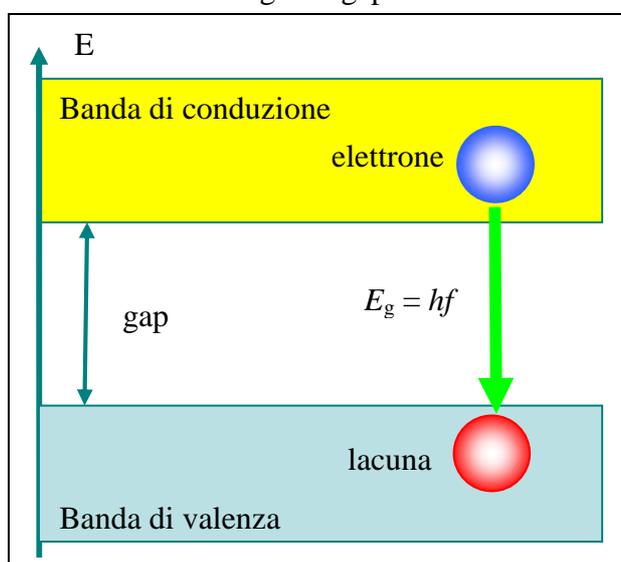


Figura 10 – Funzionamento di un LED

$$I = k(V - V_I)$$

Anche se non molto preciso, il potenziale d'innesco può essere valutato semplicemente misurando il potenziale al quale il LED inizia ad emettere luce (ed è così che abbiamo fatto).

L'energia  $E$ , emessa quando l'elettrone si ricombina con la lacuna, è:

$$E = hf = eV_I + kT$$

dove il termine  $kT$  è un fattore termico che però è trascurabile. Si ha quindi la relazione:

$hf = eV_I$  dalla quale si ricava l'espressione che utilizzeremo per la determinazione della costante di Planck.

$$(10) \quad h = \frac{eV_I}{f} = \frac{eV_I \lambda}{c}$$

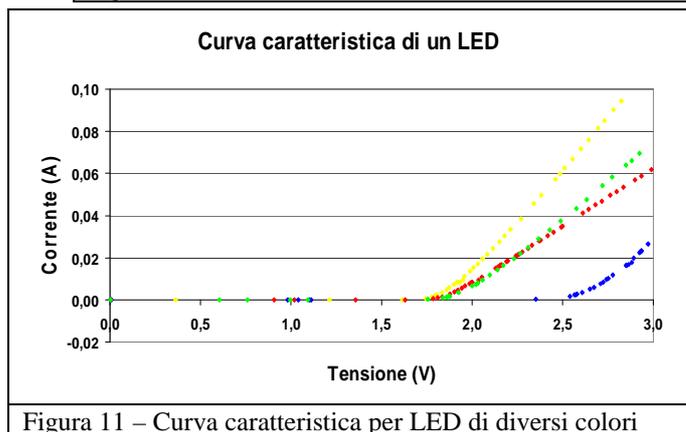


Figura 11 – Curva caratteristica per LED di diversi colori

[8] Un LED (Light Emitting Diode = diodo ad emissione luminosa) è un dispositivo elettronico che sfrutta le proprietà ottiche di alcuni materiali semiconduttori per produrre fotoni a partire dalla ricombinazione di coppie elettrone-lacuna.

Abbiamo utilizzato l'espressione con la lunghezza d'onda invece che quella con la frequenza in quanto è più facile effettuarne la misura. In figura 12 è stato schematizzato l'apparato sperimentale utilizzato per misurare la lunghezza d'onda della luce emessa dal LED. Una lente mette a fuoco l'immagine del LED su uno schermo posto perpendicolarmente all'asse ottico della lente; tra di essi viene interposto un reticolo di diffrazione (quello usato è di 570 righe per millimetro) e sullo schermo si visualizzano tre punti luminosi.

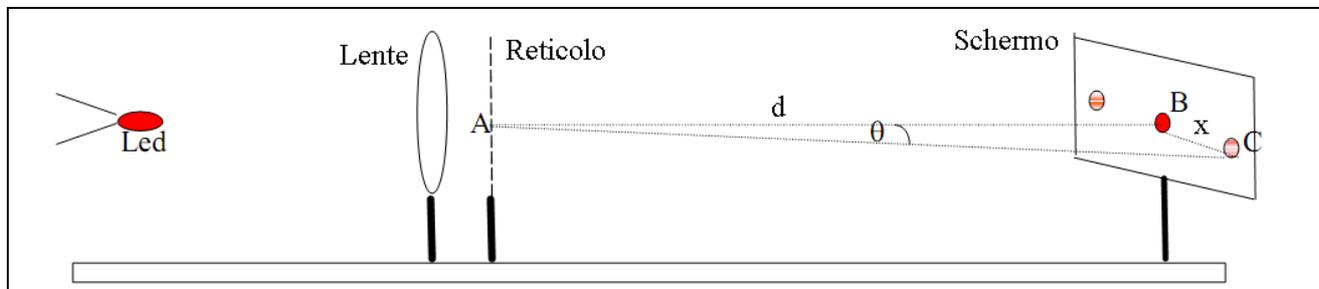


Figura 12 – Schema per la determinazione della lunghezza d'onda della luce emessa dal LED

Misurando la distanza  $d$  tra il reticolo e lo schermo e la distanza  $x$  tra il punto luminoso centrale e uno dei due laterali, essendo  $p$  il passo del reticolo, la lunghezza d'onda (in metri) si ricava da:

$$(11) \quad \lambda = p \cdot \sin\theta = \frac{10^{-3}}{n} \cdot \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}},$$

dove  $n$  è il numero di righe per millimetro del reticolo di diffrazione.

Per migliorare la misura di  $x$  abbiamo misurato la distanza dei due punti luce laterali rispetto a quello centrale e fatto la media.

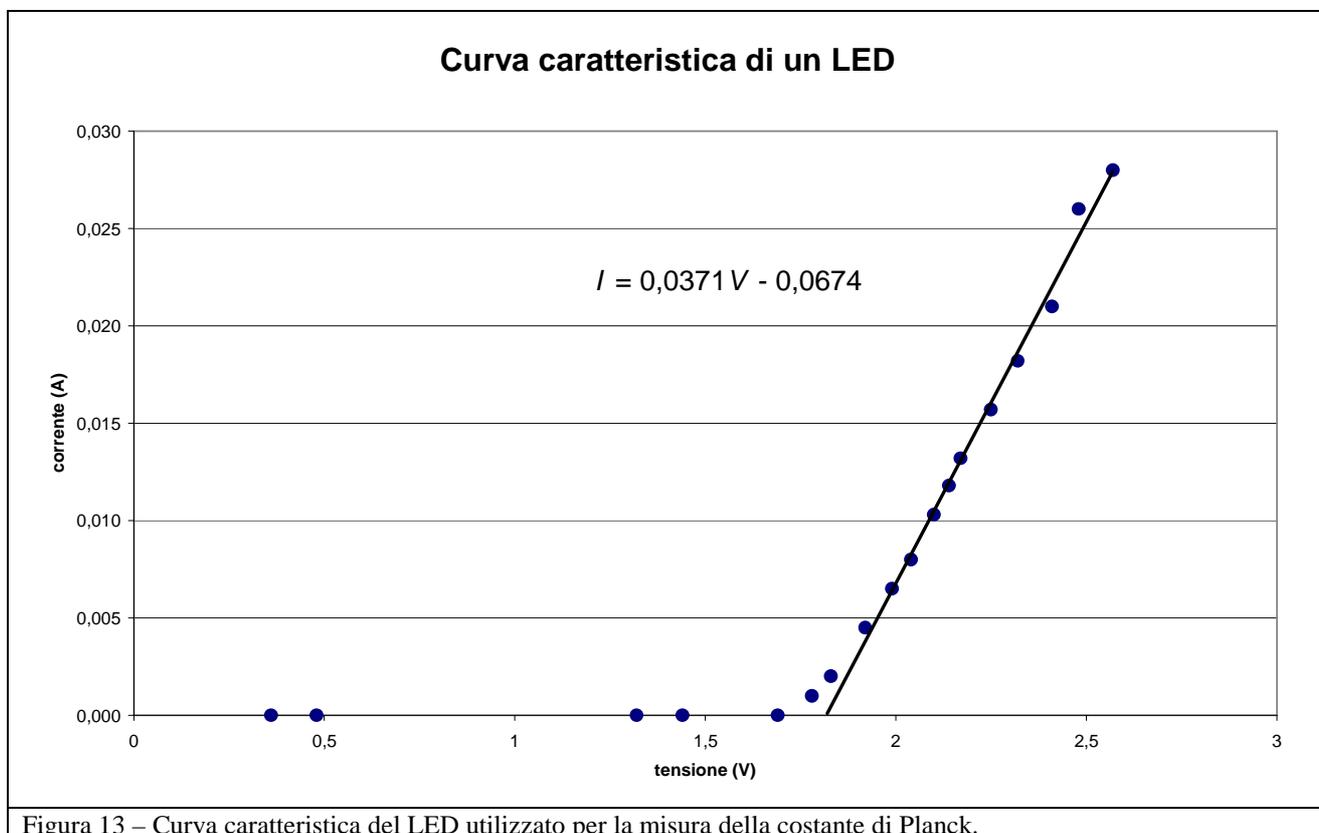


Figura 13 – Curva caratteristica del LED utilizzato per la misura della costante di Planck.

Le misure ottenute sono state:  $V_f = 1,73 \text{ V}$ ,  $d = 14,2 \text{ cm}$ ,  $x = 5,5 \text{ cm}$ . Da cui si è ricavato un valore di  $h = 5,86 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  con un errore di circa il 10%.

In una misura successiva fatta utilizzando la curva caratteristica del LED (vedi figura 13) ottenuta misurando tensione e corrente in un circuito contenente il LED ed una resistenza (in serie) ho ottenuto  $V_f = 1,82 \text{ V}$ ,  $d = 14,3 \text{ cm}$ ,  $x = 5,45 \text{ cm}$ , da cui  $h = 6,06 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  sempre con un errore di circa il 10%.

## 4 – L'effetto Compton [9]

Einstein nel 1916 estese il suo concetto di fotone asserendo che il quanto di luce possiede anche una quantità di moto diversa da zero. Il modulo  $p$  della quantità di moto di un fotone associato a un'onda di energia  $hf$  è

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Nell'interazione tra luce e materia i fotoni non cedono solo energia, ma anche quantità di moto, proprio come negli urti tra punti materiali nel senso classico.

Nel 1923 Arthur Holly Compton (1892 – 1962) all'università G. Washington di St. Louis (USA), eseguì un esperimento che fornì una solida prova alla teoria della quantità di moto posseduta dai fotoni. Si predispose a bombardare un bersaglio di grafite  $T$  con un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  (vedi figura 14). I raggi X sono radiazione elettromagnetica di elevata frequenza e quindi di breve lunghezza d'onda. Egli misurò, in funzione della lunghezza d'onda, l'intensità dei raggi X diffusi dal bersaglio in diverse direzioni. La figura 15 illustra i risultati sperimentali delle misure. Si vede che, sebbene il raggio incidente consista essenzialmente di una singola lunghezza d'onda  $\lambda = 71,1$  pm, i raggi diffusi presentano due picchi di intensità a due lunghezze d'onda diverse; uno di essi ha la stessa lunghezza d'onda del raggio incidente, ma l'altro ( $\lambda'$ ) possiede una lunghezza d'onda maggiore di una quantità  $\Delta\lambda$  che viene chiamato **spostamento Compton** e varia a seconda dell'angolo da cui si osserva la diffusione dei raggi X e aumenta al crescere dell'angolo.

Il risultato, riportato in figura 15, non può essere spiegato nell'ambito della fisica classica dove i raggi X incidenti sono considerati come un'onda elettromagnetica; l'onda incidente di frequenza  $f$  induce un'oscillazione della stessa frequenza negli elettroni del bersaglio diffondente. Questi elettroni vibranti, come cariche che oscillano avanti e indietro nell'antenna di una radiotrasmittente, irradiano onde elettromagnetiche che ancora una volta hanno la stessa frequenza. Così, secondo questa interpretazione, le onde propagate dovrebbero avere la stessa frequenza e quindi la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente. Ma non è così.

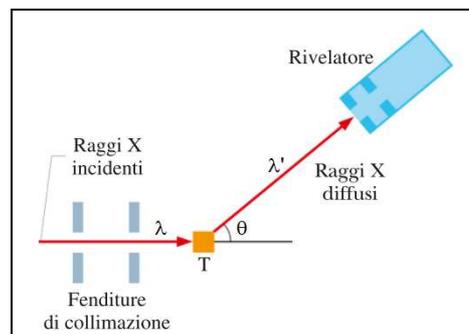


Figura 14 – Apparecchiatura usata per studiare l'effetto Compton. Un fascio di raggi X con lunghezza d'onda  $\lambda = 71,1$  pm colpisce un bersaglio di grafite  $T$ . I raggi X diffusi dal bersaglio vengono rilevati a vari angoli  $\theta$  rispetto alla direzione di incidenza. Il rivelatore misura sia l'intensità sia la lunghezza d'onda di questi raggi X diffusi.

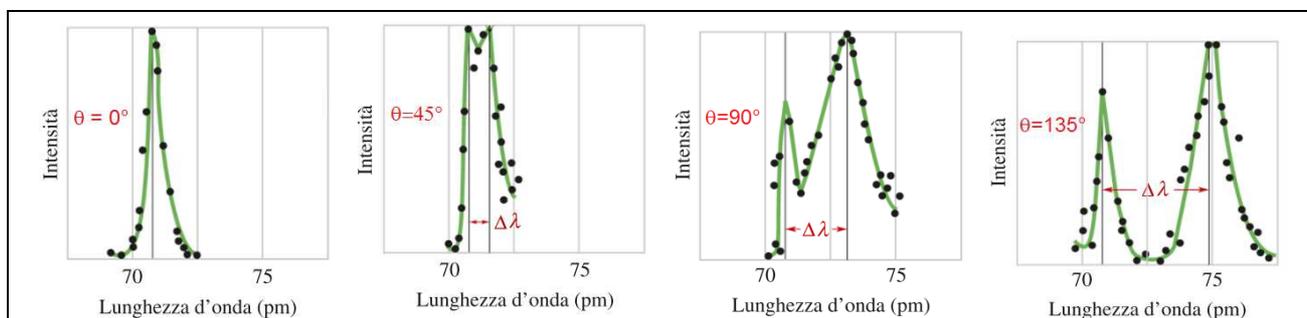


Figura 15 – I risultati di Compton per quattro valori dell'angolo di diffusione  $\phi$ . Si noti che lo spostamento Compton  $\Delta\lambda$  aumenta al crescere dell'angolo di diffusione.

[9] Le figure 14 e 15 e parte del testo sono riprese dal libro: D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: FONDAMENTI DI FISICA - ZANICHELLI

Compton spiegò i suoi risultati sperimentali postulando che il fascio di raggi X si comporti non come un'onda, ma come un flusso di fotoni, e che alcuni di questi fotoni siano soggetti a collisioni con gli elettroni liberi del bersaglio diffondente. Vediamo ora, prima concettualmente e poi quantitativamente, come questa interpretazione di meccanica quantistica porti a spiegare i risultati di Compton.

Supponete che un singolo fotone (di energia  $E = hf$ ) sia interessato nell'interazione tra il fascio X incidente e l'elettrone fermo. In linea di massima il raggio X viene deviato (il fotone è diffuso) e l'elettrone rincula. Quest'ultimo acquista quindi un po' di energia cinetica. Dato che l'energia si conserva in questo evento isolato, l'energia del fotone diffuso ( $E' = hf'$ ) sarà inferiore a quella del fotone incidente. Il fotone dopo l'urto vede quindi ridotta la propria frequenza a  $f'$  e accresciuta la lunghezza d'onda a  $\lambda'$ , proprio come dimostrano l'esperimento di Compton e la figura 15.

Compton considera la diffusione della radiazione elettromagnetica da parte dell'elettrone come un urto perfettamente elastico. Ricordando che  $\lambda f = c$ , per il principio di conservazione dell'energia si ha

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2$$

isolando il termine  $mc^2$ , elevando al quadrato e riordinando si ha:

$$(12) \quad (mc^2)^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda^2 + \lambda'^2) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'}(\lambda' - \lambda) + (m_0c^2)^2$$

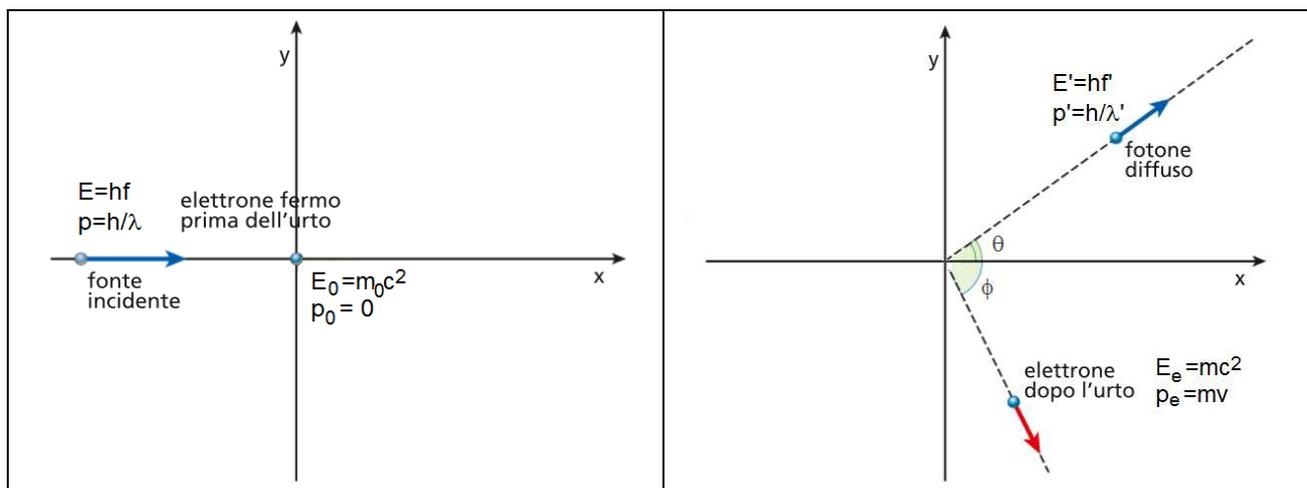


Figura 16 – La diffusione Compton: a sinistra prima dell'urto, a destra dopo l'urto

Per la conservazione della quantità di moto deve essere (vedi figura 17)

$$\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$$

per il teorema del coseno

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2p \cdot p' \cdot \cos \theta$$

si ha

$$(13) \quad p_e^2 = m^2v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h}{\lambda}\frac{h}{\lambda'}\cos \theta = \frac{h^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda'^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda'\cos \theta).$$

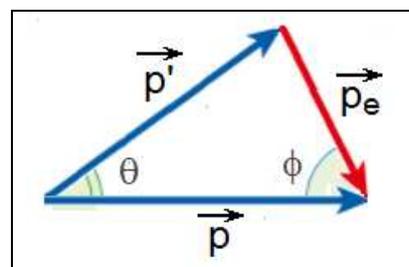


Figura 17 – Composizione dei momenti della quantità di moto

Tenendo conto che tra  $E'_e$ ,  $E_e$  e  $p_e$  esiste la relazione<sup>[10]</sup>

$$E'_e{}^2 = (p_e c)^2 + E_e^2$$

o, che è lo stesso,

$$(m c^2)^2 = (p_e c)^2 + (m_0 c^2)^2,$$

sostituendo (12) e (13) si ha:

$$\frac{h^2 c^2}{\lambda^2 \lambda'^2} (\lambda^2 + \lambda'^2) - \frac{2h^2 c^2}{\lambda \lambda'} + \frac{2h m_0 c^3}{\lambda \lambda'} (\lambda' - \lambda) + (m_0 c^2)^2 = \frac{h^2 c^2}{\lambda^2 \lambda'^2} (\lambda^2 + \lambda'^2 - 2\lambda \lambda' \cos \theta) + (m_0 c^2)^2.$$

Semplificando si ottiene:

$$(14) \quad \Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta).$$

La quantità  $\frac{h}{m_0 c}$  viene chiamata **lunghezza d'onda di Compton**; il suo valore per l'elettrone è  $2,43 \cdot 10^{-12}$  m.

La variazione di lunghezza d'onda del fotone incidente non dipende dalla sua lunghezza d'onda.

La variazione di lunghezza d'onda dipende dall'angolo di diffusione e assume il valore massimo  $\Delta \lambda_{\text{MAX}} = 4,8 \cdot 10^{-12}$  m per  $\theta = 180^\circ$ , cioè per diffusione all'indietro.

Nei grafici di figura 15 si nota che ci sono due picchi di intensità e uno corrisponde a  $\lambda = 71,1$  pm. Questo fatto si spiega perché i fotoni incidenti non solo urtano gli elettroni liberi, ma anche quelli legati agli atomi. In questo caso, nella (14) bisogna sostituire a  $m_0$  (la massa a riposo dell'elettrone) la massa  $M$  dell'atomo: poiché  $M \gg m_0$  (per la grafite  $M \cong 22\,000 m_0$ ), la variazione di lunghezza d'onda diventa del tutto trascurabile;  $\frac{h}{Mc} \cong 1,10 \cdot 10^{-16}$  m. Questo spiega perché molta parte della radiazione diffusa ha la stessa lunghezza d'onda della radiazione incidente.

Come osservò Einstein «il risultato positivo dell'esperimento di Compton dimostra che la radiazione si comporta come se consistesse di proiettili con energia discreta, non solo per quanto riguarda il trasferimento di energia, ma anche per quanto riguarda il trasferimento di quantità di moto».

Per questa scoperta Compton ricevette il premio Nobel per la Fisica nel 1927.

[10] Come è noto dalla relatività ristretta, se un corpo in quiete ha massa  $m_0$ , allora alla velocità  $v$  la massa  $m$  è data dalla relazione:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Si elevi al quadrato tale espressione e si moltiplichino ambo i membri per la quantità  $c^4 [1 - v^2/c^2]$ , si ottiene:

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

Ricordando inoltre che  $E' = m c^2$ ,  $E = m_0 c^2$  e  $|\vec{p}| = m v$  si trova la relazione:  $E_e'^2 = (p_e c)^2 + E_e^2$  che esprime l'energia in termini della quantità di moto.

## 5 – Carica specifica dell'elettrone (rapporto $e/m$ )

Nel 1897 il fisico britannico Joseph John Thomson (1856 – 1940) con un celebre esperimento dimostrò che gli atomi non erano entità elementari, ma erano invece composti di particelle cariche positivamente e negativamente; in particolare, col suo esperimento, riuscì a misurare il rapporto  $\frac{e}{m}$  tra la carica e la massa dell'elettrone. [11]

Oggi per la misura viene utilizzato il cosiddetto *tubo a fascio filiforme* (vedi figura 20). Il tubo è costituito da un'ampolla di vetro di forma sferica contenente idrogeno a bassa pressione ( $1,33 \text{ Pa} = 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ atm}$ ). Un filamento posto all'interno del tubo viene portato all'incandescenza ed emette elettroni per effetto termoionico; gli elettroni vengono accelerati da una differenza di potenziale (max 300 Volt) tra il filamento e un anodo posto immediatamente sopra di esso. L'anodo, a forma di cono, presenta sulla punta un piccolo foro che permette agli elettroni di uscire formando un fascetto collimato. L'energia degli elettroni è sufficiente per eccitare per urto gli atomi di idrogeno presenti nell'ampolla; gli atomi decadono poi rapidamente allo stato fondamentale emettendo fotoni di lunghezza d'onda pari a  $4500 \text{ \AA}$ , rendendo così visibile il percorso degli elettroni all'interno del tubo. L'ampolla è collocata al centro di una coppia di bobine di Helmholtz (ovvero tali che il loro raggio è uguale alla loro distanza) che, alimentate da una corrente  $I$ , producono nella zona del tubo un campo di induzione magnetica  $B$  altamente uniforme di intensità:

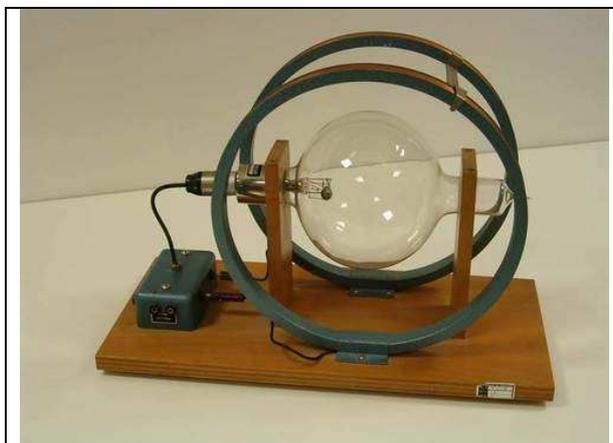


Figura 20 – Tubo a fascio filiforme per la misura del rapporto  $e/m$ .

$$B = \mu_0 \left( \frac{4}{5} \right)^{3/2} \cdot \frac{n \cdot I}{R}$$

dove  $n$  è il numero delle spire ( $= 130$ ),  $R$  è il raggio della bobina ( $= 0,15 \text{ m}$ ),  $\mu_0$  la permeabilità magnetica nel vuoto ( $= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$ )

Un elettrone di carica  $e$  che si muove con velocità  $v$  perpendicolare ad un campo magnetico è soggetto alla forza di Lorentz il cui modulo è dato da  $F = evB$  e la cui direzione è perpendicolare alla velocità e al campo magnetico; si tratta di una forza centripeta che obbliga gli elettroni a percorrere un'orbita circolare il cui raggio  $r$  si ricava dalla relazione

$$(17) \quad m \frac{v^2}{r} = evB$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone.

Gli elettroni prodotti dal filamento hanno una velocità trascurabile, ma vengono accelerati dal campo elettrico di potenziale  $V$ , acquistando una energia cinetica

[11] Influenzato dagli studi di Maxwell e dalla scoperta dei raggi X arrivò alla scoperta degli elettroni. In precedenza George Johnstone Stoney presuppone l'elettrone come l'unità di carica in elettrochimica, ma Thomson comprese subito che in realtà esso era una particella subatomica, la prima ad essere scoperta. La sua scoperta gli portò una certa notorietà e gli consentì di vincere il Nobel in fisica nel 1906: per ironia della sorte il figlio George Paget Thomson ricevette alcuni anni più tardi (1937) lo stesso premio ma per aver dimostrato che l'elettrone è, di fatto, un'onda. Alla sua morte fu sepolto nell'Abbazia di Westminster, accanto ad Isaac Newton.

$$(18) \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = eV$$

Ricavando  $v$  dalla (18) e sostituendo nella (17), si ha:

$$\frac{m}{r} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = eB.$$

In questa equazione  $r$ ,  $V$  e  $B$  possono essere misurati, mentre, semplificandola opportunamente si ricava:

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2}$$

Nella tabella alcuni valori ottenuti da misure fatte nel 2009 nel laboratorio del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Macerata.

$I$ (A)	$V$ (V)	$r$ (cm)	$B$ (T)	$e/m$ (A·s/kg)	$E\%$
0,98	137,6	5,2	$7,64 \cdot 10^{-4}$	$1,75 \cdot 10^{11}$	5,9
0,99	147	5,2	$7,71 \cdot 10^{-4}$	$1,83 \cdot 10^{11}$	5,9
1,06	162	5,2	$8,26 \cdot 10^{-4}$	$1,76 \cdot 10^{11}$	5,7
1,11	180	5,2	$8,65 \cdot 10^{-4}$	$1,78 \cdot 10^{11}$	5,6
1,14	191,5	5,2	$8,88 \cdot 10^{-4}$	$1,79 \cdot 10^{11}$	5,6
1,20	205	5,2	$9,35 \cdot 10^{-4}$	$1,73 \cdot 10^{11}$	5,5

I valori oggi accettati sono:

$$e = 1,602\,176\,487 \cdot 10^{-19} \text{ C (con un'incertezza di } 0,000\,000\,040 \cdot 10^{-19} \text{ C),}$$

$$m = 9,109\,381\,15 \cdot 10^{-31} \text{ kg (con un'incertezza di } 0,000\,000\,15 \cdot 10^{-31} \text{ kg)}$$

da cui segue:

$$e/m = 1,758\,820\,34 \cdot 10^{11} \text{ A·s/kg (con un'incertezza di } 0,000\,000\,13 \cdot 10^{11} \text{ A·s/kg).}$$

## 6 – Il modello atomico di Rutherford [12]

Negli ultimi decenni dell'Ottocento un numero crescente di ricerche in varie branche del sapere scientifico portavano a supporre che la materia fosse composta da atomi. La mancanza di un'evidenza sperimentale diretta era imputata alle loro dimensioni microscopiche. Era pertanto necessario studiare dei fenomeni che potessero provare l'esistenza degli atomi.

### 6.1 – Il modello atomico di Thomson

Abbiamo visto che nel 1897 J. J. Thomson dimostrò sperimentalmente l'esistenza dell'elettrone, cioè di uno dei costituenti atomici. Egli misurò il rapporto  $e/m$  fra la carica e la massa dell'elettrone. A partire da questo dato sperimentale, egli stimò che la massa dell'elettrone era migliaia di volte inferiore a quella dell'atomo più piccolo. Thomson era consapevole che un modello atomico dovesse tener conto dei fatti seguenti:

- l'atomo assorbe ed emette onde elettromagnetiche, dunque per la teoria di Maxwell deve essere costituito da cariche elettriche in grado di muoversi nella struttura atomica;
- l'atomo è neutro, quindi le cariche negative (gli elettroni) dovevano essere compensate da un'identica carica positiva, la cui natura era sconosciuta poiché al tempo non era nota alcuna particella positiva;
- l'atomo è stabile.

Fra il 1903 e il 1906 Thomson propose un modello atomico detto "a panettone" in cui gli elettroni puntiformi erano immersi in una carica positiva diffusa, che consentiva il moto degli elettroni al suo interno e assicurava la quasi totalità della massa dell'atomo. Il problema fondamentale del modello era però la sua instabilità, perché cariche in moto perdono energia a causa dell'emissione di onde elettromagnetiche. Thomson calcolò anche varie configurazioni di equilibrio con cariche in quiete, ma tutte erano instabili: qualunque perturbazione avrebbe portato alla distruzione della struttura atomica.

### 6.2 – Il modello planetario di Rutherford

Sfruttando le conoscenze sulla radioattività, ambito di ricerca a cui diede contributi fondamentali, Ernest Rutherford (1871-1937) intraprese a partire dal 1908 un'indagine sistematica sulla struttura atomica bombardando lamine di vari metalli con particelle provenienti dai decadimenti di elementi radioattivi.

In particolare la scelta cadde sulle particelle alfa: si tratta di nuclei di elio, emessi da elementi pesanti, che hanno carica  $+2e$  e massa praticamente uguale alla massa atomica dell'elio. Il dispositivo sperimentale era molto semplice: uno stretto fascio di particelle emesse dal materiale radioattivo veniva fatto incidere su una lamina sottile e poi, mediante un microscopio, si contavano su uno schermo di solfuro di zinco le scintillazioni prodotte dalle particelle alfa diffuse a un dato angolo.



La distribuzione angolare delle particelle diffuse dipende dalle interazioni con gli atomi del bersaglio. Inizialmente si pensava che la deflessione finale della particella fosse dovuta alle deflessioni successive provocate dall'interazione con i diversi atomi incontrati lungo il percorso. Accurati esperimenti di Hans Geiger e Ernest Marsden dimostrarono al contrario che le particelle alfa venivano

[12] Vedi C. Romeni, Fisica, Zanichelli vol. 3

deviate in un solo urto. Inoltre, essi registrarono un numero imprevedibilmente elevato di particelle deflesse a grandi angoli, tanto che una particella alfa su circa 10000 veniva addirittura deflessa all'indietro.

Questi fatti non si accordavano con il modello di Thomson che prevedeva una carica positiva diffusa e come uniche particelle gli elettroni: non era possibile che un elettrone deviasse in modo apprezzabile in un singolo urto una particella con una massa circa 10000 volte maggiore e velocità pari a 1/10 di quella della luce. Rutherford comprese che all'interno dell'atomo doveva esistere qualcosa dotato di grande massa e di rigidità notevole. Egli fece quindi l'ipotesi che nell'atomo esistesse una carica centrale concentrata in un punto e che le singole grandi deflessioni delle particelle alfa fossero dovute al passaggio attraverso l'intenso campo elettrico centrale. Ipotizzando che la particella alfa e il nucleo interagissero mediante la forza coulombiana, Rutherford dedusse una formula per la distribuzione angolare delle particelle alfa diffuse che era in pieno accordo con i dati sperimentali: la sua ipotesi che esistesse un nucleo all'interno dell'atomo era stata confermata. Rimaneva da capire quali fossero le proprietà del nucleo.

### 6.3 – Le dimensioni del nucleo

Esaminando il caso di diffusione all'indietro, in cui la particella alfa arriva alla minima distanza dal nucleo bersaglio, Rutherford fu in grado di stimare il raggio del nucleo dell'oro con un ragionamento molto simile al seguente. Consideriamo una particella alfa (carica  $+2e$ ) che si muove in direzione di un nucleo di oro con una energia cinetica iniziale  $K = 5$  MeV. La particella alfa si muove nel campo coulombiano generato dal nucleo di carica positiva  $Ne$  e raggiunge la minima distanza  $r_{\min}$  da esso quando la sua energia cinetica si trasforma interamente in energia potenziale elettrica:

$$K = k \frac{(Ne)2e}{r_{\min}}$$

La minima distanza è quindi  $r_{\min} = k \frac{2N \cdot e^2}{K}$ .

Oggi sappiamo che la carica del nucleo di oro è  $Z = 79$ , ma Rutherford era solo in grado di stimare che la carica di un nucleo fosse circa la metà del suo peso atomico, che per l'oro è circa 197: quindi  $N = 100$ .

La minima distanza di avvicinamento è pertanto:

$$r_{\min} = \frac{2(9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2})100(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(5 \cdot 10^6 \text{ eV})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} = 6,0 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

Rutherford stimò che il raggio del nucleo d'oro fosse inferiore a  $3,0 \cdot 10^{-14}$  m. La misura reale è di circa  $5,0 \cdot 10^{-15}$  m.

### 6.4 – L'atomo planetario

Attorno al 1913 il modello atomico di Rutherford era completamente delineato. Secondo questo modello planetario:

- l'atomo è formato da un nucleo centrale con carica positiva  $Ne$  e da  $N$  elettroni che ruotano attorno al nucleo;
- nel nucleo, che ha dimensioni dell'ordine di  $10^{-15}$  m, è concentrata la massa dell'atomo;
- ogni elemento è contraddistinto da un particolare numero  $N$  approssimativamente uguale alla metà del peso atomico dell'elemento;
- secondo una proposta avanzata nel 1911 dall'olandese Antonius van der Broek (1870 – 1926), il numero  $N$  di unità di carica del nucleo di un elemento è uguale al numero d'ordine con cui quell'elemento compare nella scala dei pesi atomici ordinati in senso crescente.

Il modello planetario presenta alcuni punti non risolti: l'ipotesi sull'ordinamento atomico è sbagliata e lo stesso atomo dovrebbe essere instabile a causa delle perdite per irraggiamento degli elettroni.

Secondo il modello di Rutherford gli elettroni, mentre orbitano attorno al nucleo, hanno un'accelerazione diversa da zero. La teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell prevede che una particella carica accelerata emetta con continuità onde elettromagnetiche, le quali determinerebbero una perdita di energia da parte dell'elettrone, che pertanto dovrebbe descrivere una traiettoria a spirale che converge sul nucleo. Nonostante i limiti del modello di Rutherford, questo ha avuto un ruolo fondamentale nella messa a punto da parte di Bohr del suo modello atomico.

## 7 – L'atomo di Bohr <sup>[13]</sup>

Attorno al 1913 tra i fisici è diffusa la convinzione che l'elettromagnetismo classico sia sostanzialmente inadeguato a descrivere i comportamenti di sistemi su scala atomica. In particolare, i principali problemi aperti sono:

- **la quantizzazione degli scambi energetici fra radiazione e materia:** l'ottimo accordo con i dati sperimentali rende la teoria di Planck degna di considerazione, ma l'ipotesi fondamentale sulla quale si fonda, cioè l'esistenza di un quanto elementare di energia, sarà valutata ancora per anni in modo assai critico;
- **la quantizzazione del campo elettromagnetico:** la fiducia indotta dai successi interpretativi della teoria di Maxwell è tale che l'ipotesi del fotone di Einstein viene praticamente ignorata nei lavori del tempo;
- **l'origine degli spettri a righe:** le lunghezze d'onda presenti in molte delle serie spettrali degli elementi erano calcolate con grande precisione mediante formule empiriche, come quella di Balmer<sup>[14]</sup>, ma nessuno era in grado di comprenderne la ragione;
- **la stabilità dell'atomo:** il modello di Rutherford propone una struttura atomica semplice e in grado di spiegare vari effetti, ma è inconciliabile con la teoria elettromagnetica secondo la quale un atomo con cariche in moto deve essere instabile a causa delle perdite di energia per irraggiamento.

### 7.1 – Le ipotesi del modello atomico di Bohr

Nel 1913 il danese Niels Bohr (1885-1962), uno dei padri della fisica moderna, propose un modello semi-classico di atomo di idrogeno basato su una originale sintesi di fisica classica e nuove ipotesi quantistiche.

Il punto di partenza fu quello di assumere la stabilità dell'atomo di Rutherford come fatto empirico: pur mancando una spiegazione teorica adeguata, gli atomi sono stabili. Quindi Bohr pose a fondamento della sua costruzione il seguente postulato:

- I. nell'atomo esistono orbite stabili in cui si muove l'elettrone e che possono essere descritte mediante la fisica classica.

Per semplicità si considerano orbite circolari. L'energia dell'elettrone dipende dalla sua orbita, che avviene nel campo elettrostatico del nucleo. Fino a quando l'elettrone rimane su una data orbita, non irraggia. Quando l'elettrone passa da un'orbita a un'altra varia la sua energia: questa variazione avviene attraverso emissione o l'assorbimento di un quanto di energia. Bohr postulò che

---

[13] Vedi C. Romani, Fisica, Zanichelli vol. 3

[14] Nella seconda metà dell'Ottocento si accumulò una enorme quantità di dati sulle righe spettrali, senza che fosse possibile ricondurli a un qualche schema interpretativo. La teoria elettromagnetica di Maxwell individuava l'origine delle linee nelle oscillazioni delle cariche elettriche, presenti all'interno dell'atomo, ma la mancanza di un modello atomico soddisfacente impediva di comprendere a fondo il fenomeno. Il primo passo verso la soluzione del problema fu compiuto da Johann Balmer (1825 – 1898) che scoprì nel 1885 una formula numerica con cui calcolare la lunghezza d'onda di

alcune linee spettrali dell'idrogeno nel visibile. Balmer trovò la relazione  $\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4}$  con  $n > 2$ .  $B = 364,56 \text{ nm}$  detta

limite di Balmer. Successivamente furono trovate altre serie di righe spettrali per l'atomo di idrogeno: la serie di Lyman nell'ultravioletto, la serie di Paschen nell'infrarosso e altre.

- II. la transizione dell'elettrone da un'orbita con energia  $E_1$  a un'orbita con energia  $E_2$  avviene solo per assorbimento o emissione di un quanto di energia  $hf = |E_2 - E_1|$ .

Le serie spettrali indicano che l'atomo di idrogeno emette e assorbe solo fotoni con energie discrete. Questo fatto convinse Bohr dell'esistenza di una sorta di discretizzazione dei livelli energetici dell'atomo e quindi delle orbite possibili per l'elettrone. Egli introdusse una condizione di quantizzazione imponendo un vincolo sul momento angolare dell'elettrone:

- III. il momento angolare dell'elettrone può essere solo un multiplo intero di  $h/2\pi$  (spesso indicata con  $\hbar$ ):  $L = n \frac{h}{2\pi}$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$

## 7.2 – Le orbite e i livelli energetici dell'atomo di idrogeno

Un elettrone di massa  $m$  che si muove con modulo di velocità  $v$  costante su un'orbita circolare di raggio  $r$ , è sottoposto a una forza centripeta  $F = m \frac{v^2}{r}$ . Sull'elettrone si esercita però solo la forza coulombiana del nucleo  $F = k \frac{e^2}{r^2}$ . Eguagliando le due forze si ottiene

$m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$ , semplificando

$$(19) \quad mv^2 = k \frac{e^2}{r}$$

Dalla condizione di quantizzazione  $L = mrv = n \frac{h}{2\pi}$  si ricava un'espressione per la velocità:

$$v = n \frac{h}{2\pi mr}$$

Sostituendo nella (19) ed esplicitando rispetto a  $r$  si ottiene che il raggio  $r_n$  dell'orbita  $n$ -esima dell'atomo di idrogeno è

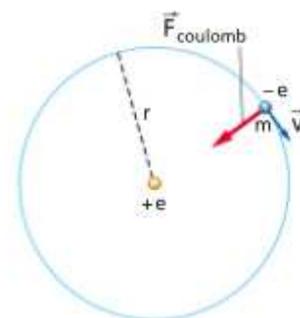
$$(20) \quad r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 k m e^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Si osservi che

- L'orbita più piccola è quella per  $n = 1$  ed ha raggio

$$r_1 = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{4\pi^2 (9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) (9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

- la (20) si può scrivere nella forma



$$(21) \quad r_n = n^2 r_1$$

L'elettrone si muove nel campo coulombiano del nucleo con un'energia totale  $E$  che è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elettrica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k \frac{e^2}{r}$$

Sostituendo nella relazione precedente la (19) si ottiene il legame fra l'energia dell'elettrone e il raggio  $r$  dell'orbita

$$E = \frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Inserendo nella precedente il raggio dell'orbita  $n$ -esima dato dalla (20) si ha:

$$E_n = -\frac{1}{2}ke^2 \frac{4\pi^2 kme^2}{h^2} \frac{1}{n^2}$$

In definitiva l'energia  $E_n$  dell'orbita  $n$ -esima dell'atomo di Bohr è

$$(22) \quad E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{2\pi^2 k^2 me^4}{h^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

- L'energia è negativa perché l'elettrone è in uno stato legato;
- L'energia minore, che corrisponde allo stato più legato al nucleo, si ha per  $n = 1$ :

$$(23) \quad E_1 = \frac{2\pi^2 (9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})^2 (9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^4}{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2} = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$$

- L'energia dell'orbita  $n$ -esima si può scrivere nella forma

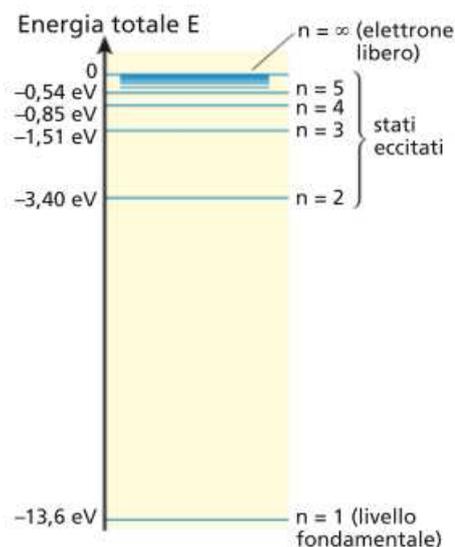
$$(24) \quad E_n = (-13,6 \text{ eV}) \frac{1}{n^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

### 7.3 – Livelli energetici e transizioni fra di essi

Il diagramma dei livelli energetici è una pratica rappresentazione delle energie che può avere un elettrone in un atomo.

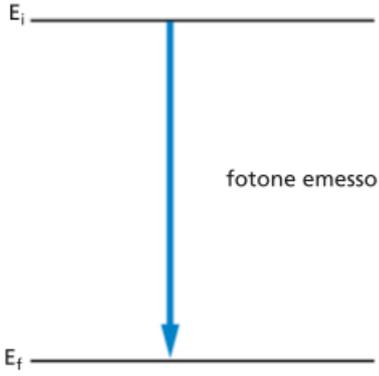
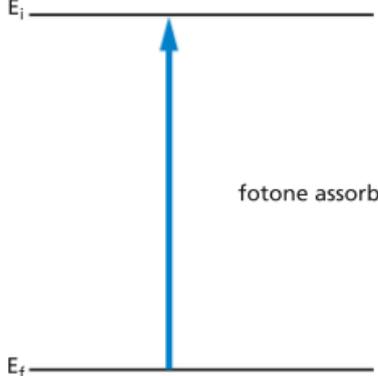
Il livello energetico più basso, che corrisponde allo stato più legato, è detto **livello** o **stato fondamentale** e per l'idrogeno corrisponde all'energia  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ .

Gli altri livelli sono detti **livelli** o **stati eccitati**. Al crescere di  $n$  l'elettrone è sempre meno legato al nucleo, fino a quando per  $n \rightarrow \infty$  l'elettrone è libero perché la sua energia di legame tende a zero.



L'**energia di ionizzazione** è la minima energia che bisogna fornire all'elettrone per estrarlo dall'atomo e coincide con  $E_1$ : dunque per l'idrogeno il modello di Bohr prevede un'energia di ionizzazione pari a  $-13,6$  eV, in ottimo accordo con i dati sperimentali.

Le transizioni da un livello all'altro sono indicate con una freccia.

<p>Nella transizione da un livello <math>E_i</math> a un livello <math>E_f</math> meno eccitato (<math>E_i &gt; E_f</math>) viene emesso un fotone di energia</p> $hf = E_i - E_f$	<p>La transizione da un livello <math>E_i</math> a un livello <math>E_f</math> più eccitato (<math>E_f &gt; E_i</math>) avviene a seguito dell'assorbimento di un fotone di energia</p> $hf = E_f - E_i$
	

#### 7.4 – Lo spettro a righe dell'idrogeno

Il modello di Bohr prevede che l'energia di un fotone emesso in una transizione dallo stato  $n$  allo stato  $m$ , con  $n > m$ , sia

$$(25) \quad E_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{con} \quad n > m$$

Poiché  $E_{n \rightarrow m} = \frac{hc}{\lambda_{n \rightarrow m}}$  in termini della lunghezza d'onda del fotone la relazione diviene

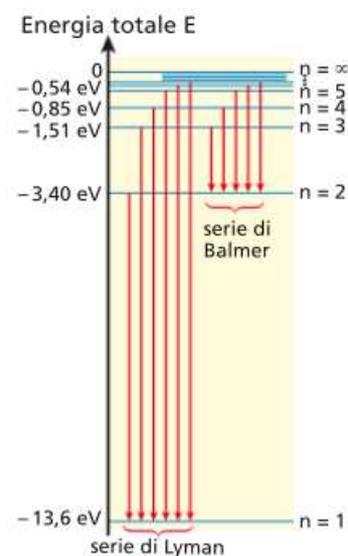
$$\frac{1}{\lambda_{n \rightarrow m}} = \frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{ch^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{con} \quad n > m$$

Questa legge è compatibile con la formula di Balmer ponendo

$$(26) \quad R = \frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{ch^3}$$

e  $m = 2$ . La costante  $R$  viene chiamata **costante di Rydberg** e vale  $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

Come riconobbe lo stesso Bohr, questo risultato ha un'importanza enorme: l'aver dimostrato che una costante sperimentale può essere espressa in termini di costanti fondamentali come la carica dell'elettrone, la velocità della luce e la costante di Planck rappresenta una conferma della bontà del modello e della significatività



delle ipotesi su cui esso si fonda. Si può affermare che la relazione (26) rappresenta un vero e proprio test teorico che il modello di Bohr supera brillantemente. A partire dalla relazione (25) si può spiegare l'origine delle serie spettrali.

La serie di Lyman si ottiene per  $n = 1$  e  $m = 2, 3, 4, \dots$  e corrisponde alle transizioni verso lo stato fondamentale.

L'energia minima della serie è quella del fotone emesso durante la transizione ( $2 \rightarrow 1$ )

$$E_{\text{MIN}} = 13,6 \text{ eV} - 3,40 \text{ eV} = 10,2 \text{ eV} .$$

Il corrispondente fotone emesso ha lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{hc}{E_{\text{MIN}}} \approx 121,6 \text{ nm}$  , pertanto la serie si trova nell'ultravioletto.

Per  $n = 2$  si ottiene la serie di Balmer<sup>[15]</sup>. In questo caso l'energia minima è quella del fotone emesso durante la transizione ( $3 \rightarrow 2$ )  $E_{\text{MIN}} = 3,40 \text{ eV} - 1,51 \text{ eV} = 1,89 \text{ eV}$  cui corrisponde una lunghezza d'onda

$\lambda = \frac{hc}{E_{\text{MIN}}} \approx 656,5 \text{ nm}$  , cioè una riga spettrale nel rosso.

Il modello atomico di Bohr manifestava alcuni limiti interpretativi: per esempio non consente di calcolare le intensità relative delle singole righe spettrali, ossia non fornisce alcuna regola per determinare quando avviene una data transizione né stabilisce quale fra le transizioni possibili avrà luogo.

Da parte di molti fisici si sottolineava anche la scelta di ipotesi non ancora ben comprese, come la quantizzazione, e l'abbandono disinvolto dell'elettromagnetismo di Maxwell.

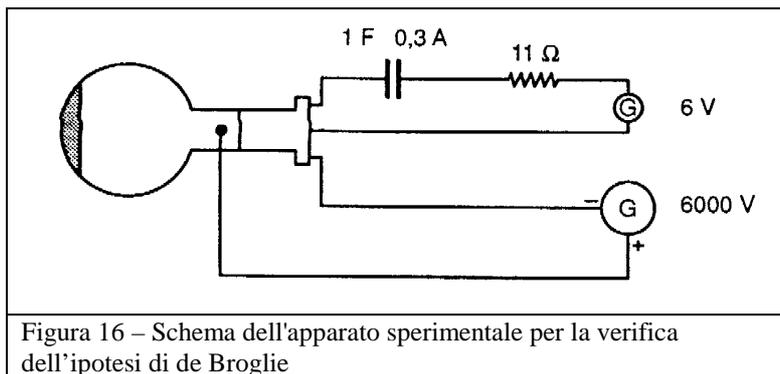
Era però opinione diffusa che la proposta di Bohr andasse nella giusta direzione: per comprendere a fondo i fenomeni atomici era necessario costruire una nuova fisica.

---

[15] Confrontando con la nota [14] si osserva che deve essere  $B = \frac{4}{R} = 364,63 \text{ nm}$

## 8 – L'ipotesi di de Broglie

Einstein, nella spiegazione dell'effetto fotoelettrico e con l'aiuto della relatività ristretta, aveva dimostrato che la luce aveva una doppia natura: ondulatoria, già nota, e che seguiva le leggi classiche delle onde; corpuscolare, cioè la luce è pensabile come un insieme di particelle (vedi Newton) i cosiddetti quanti di luce che successivamente Compton chiamerà



"fotoni" i quali possiedono una energia  $E = hf$  e una quantità di moto  $p = \frac{hf}{c}$  ( $f$  è la frequenza della radiazione).

Nel 1924 Louis de Broglie presenta una sua ipotesi che risultò fondamentale per la comprensione di alcuni fenomeni atomici. L'idea è alquanto semplice (ora!!!):

*se un'onda (la luce) può comportarsi come una particella, allora una particella può comportarsi come un'onda.*

Egli associa quindi ad ogni particella in moto con velocità  $v$  una lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{h}{p}$

dove  $p$  è la quantità di moto della particella. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle onde associate alle particelle calcoliamo la lunghezza d'onda di un elettrone che viaggia alla velocità di 1000 km/s e quella di un velocista di massa 60 kg che corre alla velocità di 10 m/s. Da  $\lambda = \frac{h}{p}$  si ricava:

$$\lambda_{\text{elettrone}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(10^6 \text{ m/s})} \cong 7,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{uomo}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(70 \text{ kg})(10 \text{ m/s})} \cong 9,5 \cdot 10^{-37} \text{ m}.$$

È evidente che non esiste nessun meccanismo adatto a rilevare la lunghezza d'onda associata all'uomo, mentre la lunghezza d'onda dell'elettrone è dell'ordine delle dimensioni atomiche.

Alla luce dell'ipotesi di de Broglie, l'ipotesi di Bohr sulla quantizzazione del momento angolare dell'elettrone nell'atomo di idrogeno e l'esistenza di orbite stazionarie, acquista un ben determinato significato fisico. Infatti se consideriamo l'onda associata all'elettrone sono possibili solo le orbite per cui si hanno onde stazionarie, ovvero quelle la cui lunghezza contiene un numero intero di lunghezze d'onda, cioè quelle per cui risulta

$$\underbrace{2\pi r}_{\text{lunghezza dell'orbita}} = \underbrace{n\lambda}_{\text{numero intero di lunghezze d'onda}}$$

( $r$  è il raggio dell'orbita,  $n$  è un numero naturale e  $\lambda$  la lunghezza d'onda associata all'elettrone).

Per l'ipotesi di de Broglie si ha:

$$2\pi r = n \frac{h}{p} \quad \text{da cui ricaviamo} \quad L = rp = rmv = n \frac{h}{2\pi}$$

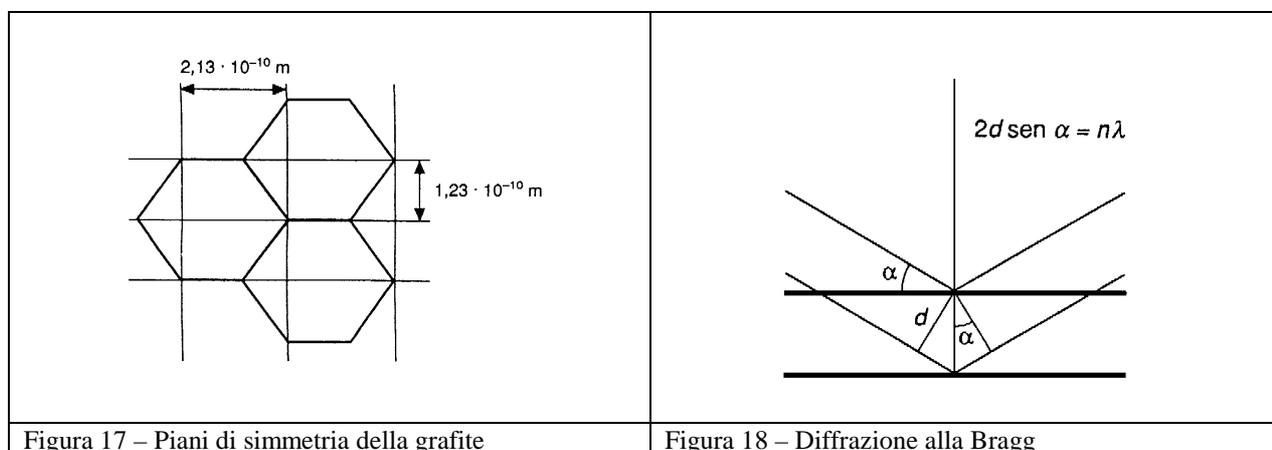
## 8.1 – Verifica sperimentale dell'ipotesi di de Broglie per mezzo della diffrazione degli elettroni

In figura 16 è rappresentato lo schema dell'apparato sperimentale per la verifica dell'ipotesi di de Broglie. Il tubo a diffrazione elettronica presenta un catodo incandescente come sorgente elettronica (alimentato a 6 V) e un anodo, posto a distanza, alimentato da tensioni fino a 6000 V. Attraverso una fenditura si genera un fascetto elettronico che viene inviato perpendicolarmente contro un sottilissimo foglio di grafite policristallina. La parete opposta del bulbo di vetro è provvista di un bulbo luminescente sul quale si rendono visibili gli elettroni diretti e quelli diffratti.

La grafite ha piani reticolari di simmetria di passo  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  e  $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  (figura 17). Se un raggio luminoso incide con angolo  $\alpha$  sui piani paralleli distanti  $d$  c'è interferenza costruttiva quando è soddisfatta la cosiddetta relazione di Bragg (figura 18)

$$2d \sin \alpha = n\lambda$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda ed  $n$  un numero intero.



Se gli elettroni hanno andamento ondulatorio devono formarsi gli anelli di diffrazione. Approssimando la superficie del bulbo con un piano ad essa tangente otteniamo  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{R}{L}$  dove  $R$  è il raggio dell'anello di diffrazione (da misurare) e  $L$  la distanza tra il piano della grafite e la superficie del bulbo (la casa costruttrice dà  $L = 13,5 \text{ cm}$ ). Poiché gli angoli in gioco sono piccoli, si può porre  $\operatorname{tg} 2\alpha \cong \sin 2\alpha \cong 2 \sin \alpha = \frac{R}{L}$ . Per i piani di passo  $d$  la relazione di Bragg diventa quindi  $d \frac{R}{L} = n\lambda$ , dalla quale si ricava:

$$(27) \quad \lambda = d \frac{R}{nL}$$

Poiché la grafite ha due serie di piani di simmetria si hanno anche due serie di figure di interferenza; ponendo  $n = 1$ , i primi due cerchi corrispondono all'interferenza dei primi due piani; si deduce che l'anello di raggio minore è prodotto dai piani di passo maggiore ( $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ).

Detta  $V$  la tensione acceleratrice del fascio di elettroni,  $m$  ed  $e$  la massa e la carica degli elettroni, si ha  $\frac{1}{2}mv^2 = eV$  da cui si ricava la velocità degli elettroni  $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ . La relazione di de

Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$  diventa allora

$$(28) \quad \lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eV}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

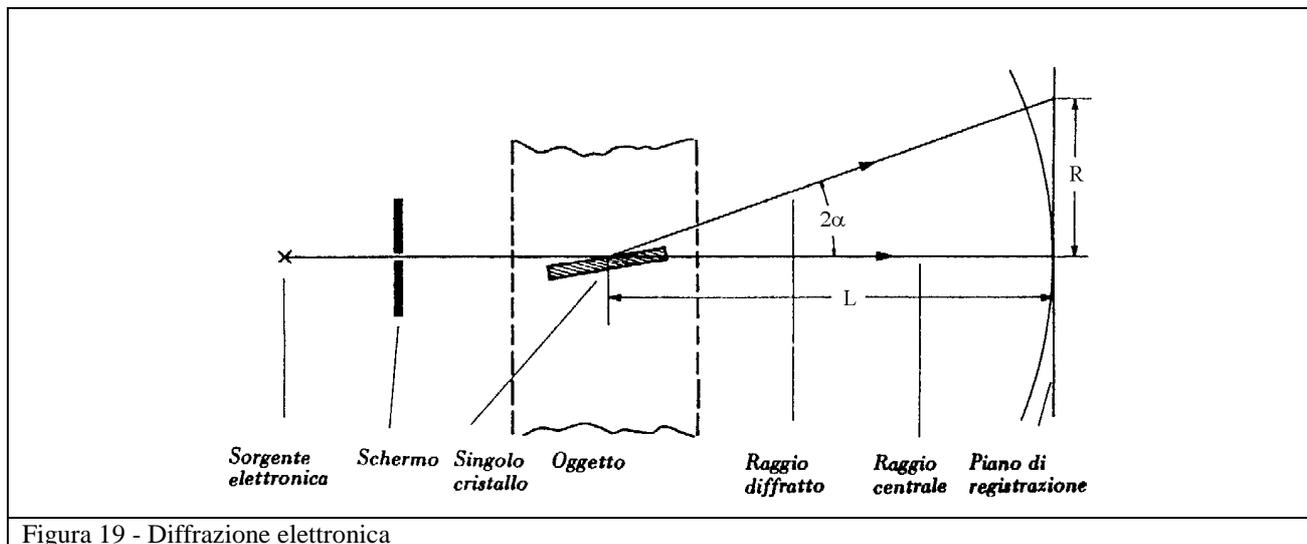


Figura 19 - Diffrazione elettronica

Le relazioni (27) e (28) danno due modi diversi per determinare la lunghezza d'onda degli elettroni diffratti e, se l'ipotesi di de Broglie è corretta, entro i limiti dell'errore sperimentale si deve ottenere lo stesso valore. La misura del raggio del primo anello di diffrazione (effettuata con un calibro) è stata  $R = 10,7 \text{ mm}$ . La lunghezza d'onda calcolata con la (27) è:

$$\lambda = \frac{(2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \cdot (10,7 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{(0,135 \text{ m})} = 1,69 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Con un errore stimato in  $\pm 0,04 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

La tensione acceleratrice misurata è stata  $V = 4600 \text{ V}$  e tenendo conto che  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  e  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , dalla (28) si ottiene:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ m})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(4600 \text{ V})}} = 1,81 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Con un errore stimato in  $\pm 0,03 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

In questa occasione i valori ottenuti per la lunghezza d'onda non sono compatibili, ma in molte altre occasioni sono stati ottenuti valori perfettamente compatibili.

## 9 – I principi della meccanica quantistica

Nella meccanica classica i valori che assumono le grandezze relative a una particella possono essere misurati nello stesso istante con una precisione che è limitata solo dall'accuratezza della procedura sperimentale.

In linea di principio, nulla impedisce di misurare e quindi di conoscere contemporaneamente la posizione e la velocità di una particella.

Questo fatto è implicitamente assunto quando si stabilisce la legge oraria  $s = s(t)$  di un corpo: a partire da essa si calcolano la posizione  $s(t_0)$  e la velocità  $v(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0)$  all'istante  $t_0$ .

Nel 1927 Werner Heisenberg (1901-1976) comprese che la natura ondulatoria della materia poneva una questione fondamentale alla base della nuova teoria atomica: il problema della misurazione. Egli osservò che per stabilire dove si trova una particella bisogna che essa interagisca con un qualche agente fisico che renda accessibile all'osservatore l'informazione sulla posizione in cui è avvenuta l'interazione. Nel caso in cui l'agente fisico utilizzato sia la luce:

- si illumina la particella con luce avente lunghezza d'onda  $\lambda$  e composta da fotoni con una certa quantità di moto: l'incertezza  $\Delta x$  sulla posizione è comparabile con  $\lambda$ ;
- nell'interazione con il fotone, la quantità di moto della particella subisce una variazione  $\Delta p$  per effetto Compton.

Come notò lo stesso Heisenberg «questa variazione è tanto maggiore quanto minore è la lunghezza d'onda della luce impiegata, cioè quanto più precisa è la determinazione della posizione».

Per questo principio, nel 1932, gli fu conferito il Premio Nobel per la Fisica.

L'impossibilità di conoscere con precisione arbitraria posizione e quantità di moto di una particella in un dato istante è una proprietà fondamentale nota come principio di indeterminazione di Heisenberg.

**In una misura simultanea lungo l'asse  $x$ , le indeterminazioni di posizione  $\Delta x$  e di quantità di moto  $\Delta p_x$  di una particella sono legate dalla relazione**

$$(29) \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}.$$

L'origine del principio di indeterminazione è nel dualismo ondulatorio-corpuscolare della materia. Nell'argomentazione precedente, l'indeterminazione sulla quantità di moto è dovuta alla natura corpuscolare del fotone che trasmette quantità di moto all'elettrone. Mostriamo ora come tale espressione derivi dalla natura ondulatoria dell'elettrone. Supponiamo di voler misurare mediante una fenditura orizzontale larga  $\Delta x$  la posizione  $x$  di una particella in moto verticale lungo  $y$  con una quantità di moto  $p_y$ .

Attraversando la fenditura la particella con una lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{h}{p_y}$  subisce una diffrazione che, per la prima frangia scura, corrisponde a un angolo  $\theta$  tale che

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{p_y \Delta x}.$$

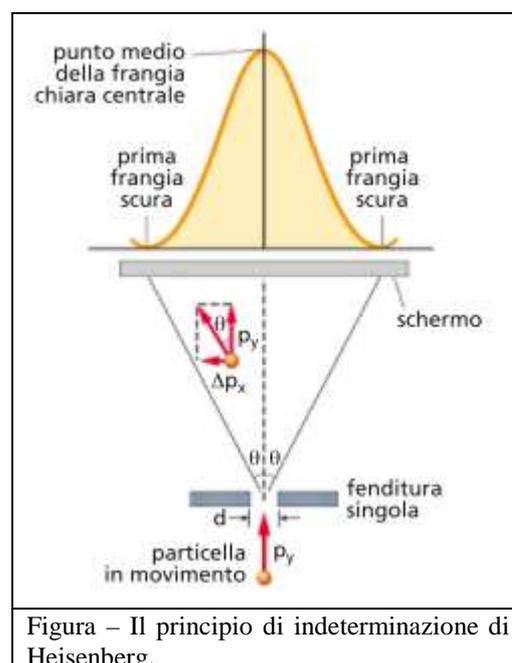


Figura – Il principio di indeterminazione di Heisenberg.

La particella cambia direzione di moto di un angolo  $\theta$  perché la sua quantità di moto lungo  $x$  subisce una variazione  $\Delta p_x$  tale che

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta p_x}{p_y}$$

Se  $\theta$  è piccolo,  $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ : confrontando le due espressioni precedenti si ha p

$$\frac{\Delta p_x}{p_y} \approx \frac{h}{p_y \Delta x}$$

e quindi si ottiene una forma approssimata del principio di indeterminazione:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

Anche in questo caso, minore è l'ampiezza della fenditura, cioè migliore è la conoscenza della posizione  $x$  della particella, maggiore è l'indeterminazione della sua quantità di moto.

Il principio di indeterminazione sussiste anche fra altre coppie di grandezze dette per questo *incompatibili*, fra cui la coppia *energia-tempo*:

$$(30) \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

dove  $\Delta E$  è l'indeterminazione dell'energia di una particella che si trova in un dato stato e  $\Delta t$  è l'indeterminazione relativa all'intervallo di tempo in cui essa rimane in quello stato. In altri termini: se l'energia  $E$  dello stato di un sistema viene misurata nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , la sua indeterminazione  $\Delta E \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta t}$ . Per misurare l'energia di un fotone si può fare uso della formula di Planck

$E = h \cdot f$ . In pratica però, per misurare la frequenza si devono contare le oscillazioni in un intervallo di tempo determinato: per fare ciò bisogna che si verifichi almeno un'oscillazione completa. Ecco perché l'intervallo di tempo deve essere determinato: non si può infatti stabilire la frequenza di una radiazione in meno tempo di quello che la luce impiega per fare un'oscillazione completa. Perciò per le onde radio si impiega più tempo a stabilire la frequenza rispetto alla radiazione visibile, perché per compiere un'oscillazione le prime ci impiegano molto più tempo delle seconde. Questa premessa sottolinea che c'è sempre un limite ineliminabile con cui si può conoscere la frequenza di un fotone o di qualunque altra particella: se infatti si misura solo parte dell'oscillazione, il valore della frequenza e per conseguenza quello dell'energia, è indeterminato; perciò, una determinazione esatta del valore energetico della particella, implica un tempo piuttosto lungo. Ma se in un esperimento interessa sapere quando avviene un evento, lo si deve fare a scapito della misura dell'energia. Ecco che energia e tempo risultano essere non compatibili fra loro, perché una precisa misurazione dell'una rende imprecisa quella dell'altro e viceversa. La relazione  $\Delta E \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta t}$  ci permette di vedere che

energia e tempo sono inversamente proporzionali e questo fa sì che diminuendo il valore del tempo si accresce quello dell'energia, ovvero se si effettuano misurazioni per un periodo di tempo tendente a zero, i valori di energia tendono ad infinito: un fatto questo che permette la violazione del principio di conservazione dell'energia per istanti tanto brevi da essere  $\Delta E \cdot \Delta t < \frac{h}{4\pi}$ . La conseguenza e-

strema di ciò è che il vuoto non sia poi così vuoto, ma in realtà ricco di fluttuazioni energetiche di brevissima durata tali da creare particelle (dette virtuali) che scompaiono dopo pochissimo tempo.

Un'altra conclusione cui si perviene dall'analisi fatta nei paragrafi precedenti è che non è possibile stabilire la natura della luce; esistono situazioni in cui si comporta come un'onda (riflessione, rifrazione, diffrazione, interferenza) ed altre in cui si comporta come un corpuscolo (spettri atomici, effetto Compton, effetto fotoelettrico). Allo stesso modo la "materia" non ha più una natura definita ma anche essa in alcune situazioni si comporta come un'onda. Tale fatto venne assunto dal fisico danese Niels Henrik David Bohr (1885 – 1962) a livello di principio, il cosiddetto principio di complementarità secondo il quale *i fenomeni che avvengono a livello atomico e subatomico hanno un duplice aspetto: corpuscolare e ondulatorio, e questi due aspetti non possono mai essere osservati contemporaneamente durante lo stesso esperimento*. Ciò definisce quello che oggi chiamiamo dualismo onda-corpuscolo delle particelle elementari.

Possiamo concludere riassumendo i principi che via via sono emersi.

- a) Le grandezze fisiche che caratterizzano un sistema (energia, quantità di moto, momento angolare ecc.) non possono assumere valori arbitrari ma sono quantizzate (ipotesi di Planck).
- b) La materia e la radiazione presentano simultaneamente l'aspetto corpuscolare e quello ondulatorio (dualismo onda corpuscolo): questi due aspetti sono legati tra loro dalla relazione di de Broglie.
- c) L'evolversi di un evento è descritto da una funzione  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , dipendente dalla posizione  $\mathbf{r}(x, y, z)$  e dal tempo  $t$ , detta funzione d'onda o ampiezza di probabilità.
- d) La probabilità  $P$  di un evento è data dal quadrato della funzione d'onda (ipotesi di Bohr); la quantità

$$P = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV dt$$

rappresenta la probabilità che un evento si verifichi nel volume  $dV$  nell'intervallo di tempo  $dt$ .

- e) Se un evento può avvenire secondo varie alternative che indichiamo con  $A$  e  $B$  (esempio il fascio di elettroni che attraversa due fenditure), la funzione d'onda per l'evento composto è data dalla somma delle singole funzioni d'onda considerate separatamente, cioè

$$\Psi = \Psi_A + \Psi_B$$

e quindi la probabilità dell'evento composto è

$$P = |\Psi_A + \Psi_B|^2 dV dt$$

(condizione di interferenza).

- f) Se si effettua un esperimento al fine di stabilire quale delle due alternative è realizzata, la probabilità dell'evento è pari alla somma delle singole probabilità di ogni alternativa, ossia

$$P = P_A + P_B$$

(la figura di interferenza viene distrutta)

## 10 – Equazione di Schrödinger [16]

Deriveremo l'equazione di Schrödinger partendo dalle proprietà delle onde. Iniziamo dal fatto che la descrizione di un'onda può essere fatta a partire da una funzione del tipo:

$$\Psi(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right).$$

La funzione dipende sia dal tempo  $t$  sia dalla posizione  $x$  ed è una funzione periodica sia rispetto al tempo (il periodo è  $T$ ), sia rispetto alla posizione (il periodo è  $\lambda$ ).

Se deriviamo la funzione  $\Psi(x, t)$  due volte rispetto a  $x$ [17] otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -A \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -A \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Psi\end{aligned}$$

la funzione  $\Psi(x, t)$  soddisfa quindi l'equazione differenziale:

$$(31) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Psi = 0$$

Nel caso di particelle ricordiamo che vale la relazione di de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$ , per cui possiamo scrivere l'equazione (31) nella forma

$$(32) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2 p^2}{h^2} \Psi = 0.$$

L'energia totale di una particella è data da  $E = K + U$ , dove  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$  è l'energia cinetica, mentre  $U$  è l'energia potenziale. Ricavando la quantità di moto, si può scrivere  $p^2 = 2mK = 2m(E - U)$  e l'equazione (32) può essere scritta nella forma

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m(E - U)}{h^2} \Psi = 0.$$

Ricordando che  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo è:

$$(34) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = E\Psi.$$

La funzione  $\Psi$  è chiamata funzione d'onda di una particella; non ha un significato fisico immediato, ma se consideriamo un intervallo infinitesimo  $dx$  dell'asse  $x$ ,  $|\Psi(x)|^2 dx$  esprime la probabilità di trovare la particella nell'intervallo  $x, x + dx$ .

$U(x)$  è una funzione, mentre  $E$  è una costante e rappresenta l'energia totale del sistema.

[16] Vedi J.S. Walker, Fisica, Zanichelli vol. 3 o vol. B

[17] La derivazione di una funzione a due variabili rispetto ad una delle due variabili non è molto diversa dalla derivazione di una funzione ad una variabile: si deriva la funzione con le solite regole considerando l'altra variabile come una costante.

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo può essere scritta anche nella forma:

$$(35) \quad \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U \right] \Psi = E\Psi$$

e indicando  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U$  nella forma compatta:

$$(36) \quad H\Psi = E\Psi .$$

Dove  $H$  è detto operatore di Schrödinger.

### 10.1 – L'elettrone libero in una scatola

Per un elettrone in una scatola, ovvero libero di muoversi nell'intervallo  $0 \leq x \leq L$ , essendo  $U(x)=0$ , l'equazione di Schrödinger diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E\Psi .$$

Cerchiamo quindi una funzione d'onda del tipo:  $\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$  dove  $A, B, k$  sono costanti da determinare. Poiché sempre di onda si tratta, devono valere le seguenti condizioni:

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0 \text{ [18]}$$

Si ha quindi:

$$\Psi(0) = A \sin(k \cdot 0) + B \cos(k \cdot 0) = B = 0$$

$$\Psi(L) = A \sin(k \cdot L) = 0$$

Nella seconda espressione, non potendo essere  $A = 0$  (altrimenti si avrebbe una soluzione identicamente nulla), deve essere  $\sin(k \cdot L) = 0$  da cui segue:  $k \cdot L = n\pi$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$  e quindi  $k = \frac{n\pi}{L}$ .

La soluzione fin qui trovata è quindi:

$$\Psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Resta ancora da determinare  $A$ . Ricordando il significato fisico di  $\Psi(x)$  si ha una ulteriore condizione che deve essere rispettata:

$$\int_0^L \Psi^2(x) dx = 1$$

condizione che esprime il fatto che l'elettrone si trova sicuramente all'interno dell'intervallo  $0 \leq x \leq L$ , e quindi che la probabilità totale deve essere 1. Si ha quindi:

$$1 = \int_0^L \left[ A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

[18] Si noti la stretta somiglianza con il problema delle onde stazionarie su una corda di lunghezza  $L$ , dove agli estremi della corda deve esservi sempre un nodo per cui  $y(0) = y(L) = 0$  [ $y(x)$  è lo spostamento della corda dalla posizione di riposo].

ponendo  $\frac{n\pi}{L}x = t$  e sostituendo si ha:  $1 = \frac{A^2 L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \text{sen}^2(t) dt$ .

Ricordando che  $\int \text{sen}^2(t) dt = \frac{t - \text{sen}t \text{ cost}}{2} + C$  si ottiene:

$$1 = \frac{A^2 L}{n\pi} \left[ \frac{t - \text{sen}t \text{ cost}}{2} \right]_0^{n\pi} = \frac{A^2 L}{n\pi} \left[ \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{A^2 L}{2}$$

da cui segue:  $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ .

La funzione d'onda cercata è quindi

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Come si può osservare non esiste una sola soluzione, ma ne esistono infinite. Derivando due volte la funzione  $\Psi(x)$  si ottiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Psi(x)$$

e sostituendo nell'equazione di Schrödinger si ha:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Psi(x) \right] = E\Psi(x)$  e quindi:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 = \frac{h^2}{8mL^2} n^2.$$

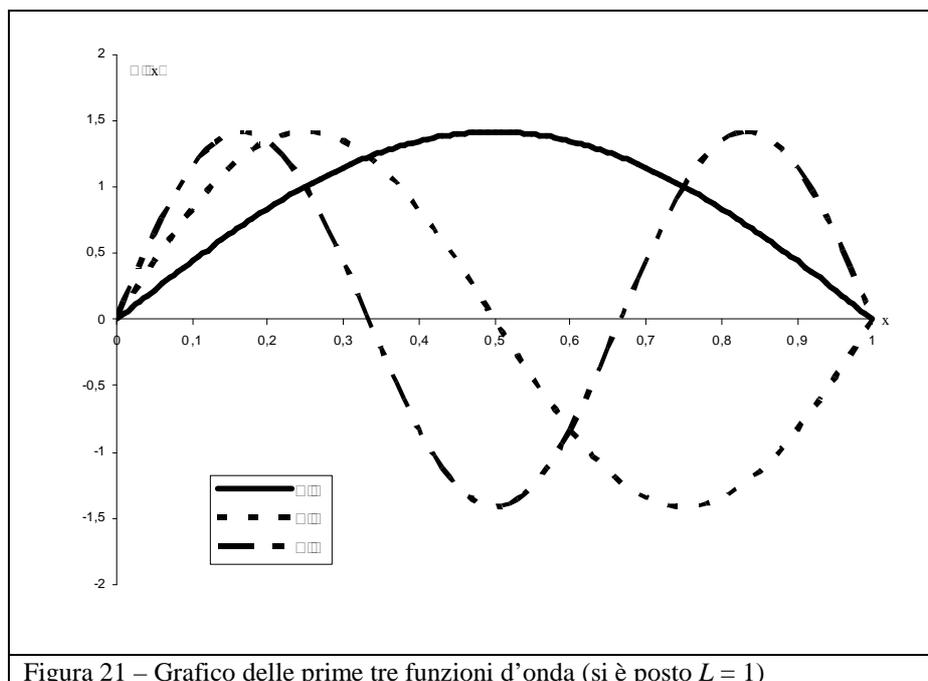


Figura 21 – Grafico delle prime tre funzioni d'onda (si è posto  $L = 1$ )

Quest'ultima espressione esprime la quantizzazione dei livelli energetici che l'elettrone può assumere, cioè l'elettrone non può possedere una qualunque quantità di energia, ma solo quantità

discrete. L'energia minima è:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

e per questo stato energetico la funzione d'onda è:

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

Gli altri valori dell'energia permessi sono dati da  $E_n = n^2 E_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) e ad ognuno di essi è associata la funzione d'onda corrispondente. Nella figura 21 viene riportato il grafico delle prime tre funzioni d'onda (si è posto  $L = 1$ ).

Lo stato dell'elettrone nella scatola è dato dalla sovrapposizione di tutti gli stati possibili.

Per comprendere meglio questo fatto consideriamo il paradosso del gatto di Schrödinger, un esperimento mentale ideato da Erwin Schrödinger allo scopo di dimostrare come l'interpretazione classica della meccanica quantistica risulta essere incompleta quando deve descrivere sistemi fisici in cui il livello subatomico interagisce con il livello macroscopico.

«Si rinchioda un gatto in una scatola d'acciaio insieme con la seguente macchina infernale (che occorre proteggere dalla possibilità d'essere afferrata direttamente dal gatto): in un contatore Geiger si trova una minuscola porzione di sostanza radioattiva, così poca che nel corso di un'ora forse uno dei suoi atomi si disintegra, ma anche in modo parimenti verosimile nessuno; se ciò succede, allora il contatore lo segnala e aziona un relais di un martelletto che rompe una fiala con del cianuro. Dopo avere lasciato indisturbato questo intero sistema per un'ora, si direbbe che il gatto è ancora vivo se nel frattempo nessun atomo si fosse disintegrato. La prima disintegrazione atomica lo avrebbe avvelenato. La funzione  $\Psi$  dell'intero sistema porta ad affermare che in essa il gatto vivo e il gatto morto non sono stati puri, ma miscelati con uguale peso »



Figura 22 – Il gatto di Schrödinger.

Dopo un certo periodo di tempo, quindi, il gatto ha la stessa probabilità di essere morto quanto l'atomo di essere decaduto. Visto che fino al momento dell'osservazione l'atomo esiste nei due stati sovrapposti, il gatto resta sia vivo sia morto fino a quando non si apre la scatola, ossia non si compie un'osservazione. In pratica, dal momento che una particella elementare possiede la capacità di collocarsi in diverse posizioni contemporaneamente, ed anche di esser dotata di quantità d'energia diverse al medesimo istante, per quanto "assurda" al nostro modo di pensare, queste strane proprietà della materia e dell'energia corrispondono alla realtà del mondo dei quanti. Le particelle subatomiche sono "delocalizzate" nello spazio e nel moto, per cui – fra un esperimento e l'altro – si comportano come se stessero in più luoghi contemporaneamente. Ma, paradosso nel paradosso, ogni qualvolta una particella delocalizzata venga osservata con un esperimento che – per propria natura – modifica sia il livello energetico, la quantità di moto e pure la posizione della particella in esame, essa verrà certamente trovata nella posizione cercata e dotata di quel determinato livello energetico.

Ritornando al caso del gatto, fino a quando l'atomo non si disintegra (e questo evento dipende unicamente dalla natura dell'atomo radioattivo scelto, quindi è un evento unicamente probabilistico), emettendo la particella che aziona il marchingegno letale, il gatto è sicuramente vivo. Viceversa, al decadimento dell'atomo, il gatto va certamente incontro alla morte. Pertanto, se non si apre il contenitore in cui alloggiavano il gatto ed il marchingegno letale, non si potrà sapere che destino abbia avuto il gatto: di conseguenza, il gatto può essere considerato sia vivo sia morto. Solo aprendo il contenitore (quindi, compiendo l'esperimento) si reperirà un gatto vivo o morto. Il paradosso, solo apparente, sta proprio qui: finché non si compie l'osservazione, il gatto può esser descritto indifferentemente come vivo o come morto, in quanto è soltanto l'osservazione diretta che, alterando i pa-

rametri basali del sistema, attribuirà al gatto (al sistema medesimo) uno stato determinato e "coerente" con la nostra consueta realtà.

È sempre stato così, solamente non ce ne siamo accorti fino al secolo scorso: nel mondo microscopico, ogni singola particella si comporta individualmente come delocalizzata. Viceversa, nel nostro universo macroscopico, un aggregato di singole particelle non si comporta individualmente, come la singola particella, l'insieme delle particelle singole, una volta aggregate, azzerava le singole posizioni individuali, abolendo l'anomalia propria di ciascuna particella singola. L'interazione reciproca delle singole particelle in una realtà macroscopica che sgretola le singole anomalie prende il nome di "Desincronizzazione delle funzioni d'onda" o di "Decoerenza". Viceversa, si può altrimenti affermare che una particella microscopica, di dimensioni compatibili con quelle di una lunghezza d'onda, può comportarsi come una particella materiale o come un'onda energetica al contempo. Ma è estremamente improbabile che un corpo macroscopico, in un qualche momento, si trovi ad avere dimensioni compatibili con quelle d'una lunghezza d'onda, comportandosi, pertanto, come un'onda vera e propria.