Prof. Angelo Angeletti

I VETTORI

Si consideri la seguente situazione: in un prato due ragazzi stano giocando e uno dice all'altro "spostati di 5 passi". È chiaro che il comando non è completo in quanto non viene detto in quale direzione ci si deve spostare.

Lo spostamento è una grandezza fisica, ma non è dello stesso tipo della lunghezza di un oggetto o della sua massa o della sua temperatura. Per definirlo, oltre che all'entità dello spostamento, si ha bisogno di altre informazioni; servono infatti una direzione e un verso.

Grandezze di questo tipo vengono chiamate **vettori**. Un vettore è quindi una grandezza fisica per la quale restano definiti una **direzione** (una retta), un **verso** (quale dei due versi di percorrenza sulla retta) e un **modulo** (l'intensità del vettore).

Nell'esempio di cui sopra un comando corretto è: "spostati di 5 passi verso Nord".

Oltre allo spostamento in fisica ci sono altre grandezze definite tramite vettori: un'altra che conosciamo è la forza.

Un vettore viene rappresentato graficamente con un segmento orientato OA (vedi figura 1): la retta su cui giace il segmento OA è la direzione, il verso è quello che va da O verso A e il modulo è la misura del segmento OA. Chiameremo il punto O, punto di applicazione del vettore (o, meno correttamente, coda del vettore), mentre chiameremo il punto A estremo libero del vettore (o, meno correttamente, punta).

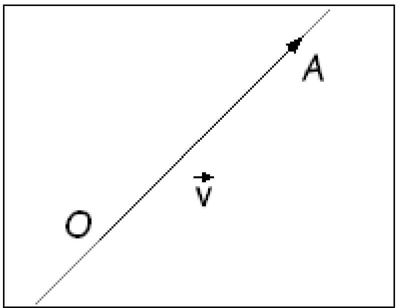


Figura 1 - Rappresentazione grafica di un vettore

Un vettore viene scritto utilizzando o le lettere che ne indicano gli estremi o una singola lettera. Nel primo caso si mette per prima la lettera che indica il punto di applicazione, nel nostro caso si dice "il vettore OA" o semplicemente "$\overrightarrow{OA}$", cioè si mette sopra le lettere una freccetta. Nel secondo caso possono essere utilizzate le lettere dell'alfabeto (le più comuni sono a, b, c, u, v, w, z) con sopra la freccetta, per esempio $\vec{v}$. In molti testi il vettore viene scritto con la lettera in neretto (**v**). In questi appunti si è preferito quest'ultimo modo di rappresentazione.

Per indicare il modulo del vettore si usa mettere delle sbarrette verticali (per esempio $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ oppure $|\vec{v}|$ oppure $|\mathbf{v}|$) o più semplicemente si scrive $\overline{OA}$ (volendo indicare la misura del segmento OA) oppure v (la lettera che indica il vettore senza la freccetta o il neretto).

Quando due vettori giacciono su rette parallele allora hanno la stessa direzione e si dicono concordi se hanno anche lo stesso verso, se invece hanno verso opposto si dicono discordi; vettori che hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo si dicono equipollenti (nel linguaggio comune si dice anche che sono uguali, ma non è del tutto corretto). Se due vettori hanno la stessa direzione, stesso modulo, ma verso opposto si dice che sono opposti.

Nella situazione data sopra viene dato il seguente comando: “spostati di 10 passi verso Nord e quindi di 10 passi verso Est”. Ci poniamo due domande: 1) quanto spazio è stato percorso? 2) qual è stato lo spostamento complessivo e in che direzione?

Alla prima domanda la risposta è semplice: lo spazio percorso è la somma degli spazi percorsi, cioè 10 passi + 10 passi = 20 passi.

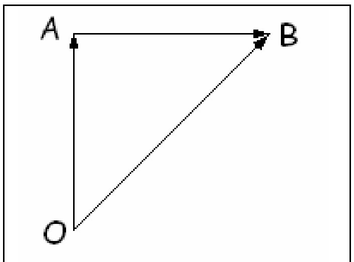


Figura 2 - Spostamento complessivo

La risposta alla seconda domanda è un po’ più complessa: infatti, se il vettore $\overrightarrow{OA}$ rappresenta il primo spostamento e $\overrightarrow{AB}$ il secondo, lo spostamento complessivo è dato dal vettore $\overrightarrow{OB}$ (vedi figura 2) che, come si può facilmente osservare ha modulo uguale alla lunghezza di OB. Essendo OA = AB, OB è l’ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OAB, quindi OB = $OA\sqrt{2}$ [1] = circa 14 passi.

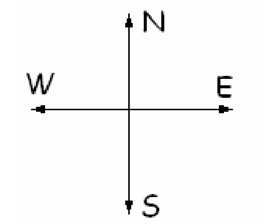


Figura 3a - Rappresentazione grafica dei punti cardinali

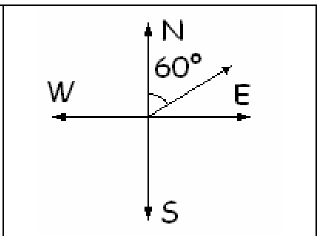


Figura 3b - Rappresentazione grafica delle direzioni intermedie

Il problema non è ancora completamente risolto perché c’è da stabilire la direzione: tenendo conto dei punti cardinali si ha che la direzione di $\overrightarrow{OB}$ è NE[2] (Nord Est).

L’operazione che abbiamo appena fatto con la spostamento può essere fatta per qualunque vettore e si chiama somma di vettori o composizione di vettori. La regola generale è la seguente: **per effettuare la somma di due vettori si riportano i due vettori con l’origine in comune, quindi si costruisce il parallelogramma che ha i due vettori come lati, la somma dei due vettori è la diagonale del parallelogramma che ha origine in comune con i due vettori dati**.

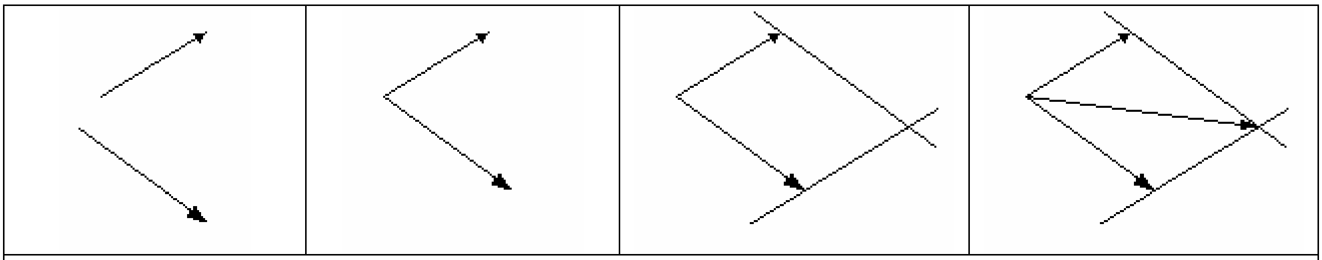


Figura 4 - Somma tra due vettori

Il vettore somma di due vettori è anche detto risultante tra i vettori.

La determinazione della somma tra due vettori non è sempre realizzabile in

[1] Si ricordi che in un triangolo rettangolo isoscele, se un cateto è ℓ, allora l’ipotenusa è $\ell\sqrt{2}$.

[2] Stabiliamo la seguente convenzione: nelle rappresentazioni grafiche degli spostamenti indicheremo con il Nord l’alto, con il Sud il basso, l’Est è verso destra, l’Ovest (W perché la O si può confondere con lo zero) verso sinistra (vedi figura 3a). Le direzioni intermedie vengono indicate specificando l’angolo a partire da una direzione iniziale: per esempio N60°E (si legge Nord sessanta gradi Est) significa che la direzione forma un angolo di 60° con la direzione Nord, verso Est (vedi figura 3b). <u>Solo nel caso che l’angolo sia 45° questo si può omettere e dire solo NE, NW, SE, SW.</u>

quanto il problema del calcolo della diagonale del parallelogramma non è un problema che può essere risolto, in tutti i casi, con la matematica che si conosce in primo liceo. Il calcolo può essere fatto solo nel caso in cui l'angolo fra i vettori è particolare.

ESERCIZIO SVOLTO 1

Determinare la risultante tra due vettori di ugual modulo che formano un angolo di 60°.

Si osservi (vedi figura 5) che, essendo i due vettori uguali in modulo, il parallelogramma è un rombo e la risultante tra i vettori è la diagonale maggiore del rombo; inoltre si osservi che essendo l'angolo tra i vettori di 60°, la diagonale minore del rombo lo divide in due triangoli equilateri per cui la diagonale maggiore risulta essere due volte l'altezza del triangolo equilatero[3].

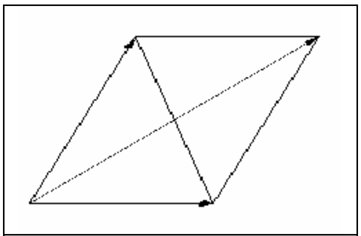


Figura 5 - Relativa all'esercizio svolto 2.

ESERCIZIO SVOLTO 2

Calcolare la somma di due vettori **u**, **v** tali che u = 5 e v = 8, che formano un angolo di 30°.

Si disegni il parallelogramma OACB (nella figura 6 **u** è $\overrightarrow{OA}$ e **v** è $\overrightarrow{OB}$); la risultante dei due vettori è la diagonale OC. Per la sua determinazione osserviamo che il triangolo OCH è un triangolo rettangolo con ipotenusa OC; se riusciamo a determinare i cateti del triangolo, OH e CH il problema è risolto. Si osservi a tal proposito che poiché OA e BC sono parallele, allora l'angolo $C\hat{B}H$ è di 30° e quindi, per quanto detto sopra, si ha: $CH = \frac{BC}{2} = 2{,}5$ e $BH = \frac{BC}{2}\sqrt{3} = 4{,}33$ da cui segue che OH = OB + BH = 12,33. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACH si ricava:

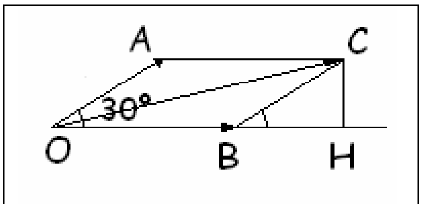


Figura 6 - Rappresentazione dei vettori dell'esercizio svolto 2

$$OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{12{,}33^2 + 2{,}5^2} = 12{,}58.$$

Si deve determinare ora un angolo (per esempio $C\hat{O}B$) per individuare la direzione di $\overrightarrow{OC}$, ma questo non può essere fatto in modo analitico con la matematica che si conosce al momento attuale. L'unico modo per avere un risultato è quello di costruire la figura in scala e misurare l'angolo con un goniometro.[4] In questo caso l'angolo $C\hat{O}B = 11{,}5°$.

[3] Si ricorda che un triangolo equilatero è diviso da una sua altezza (che è anche mediana e bisettrice) in due triangoli rettangoli che hanno angoli di 30°, 60° e 90°. In un triangolo rettangolo con gli angoli di 30°, 60°, 90°, se ℓ è l'ipotenusa del triangolo, allora il cateto minore (quello opposto all'angolo di 30°) è $\frac{\ell}{2}$ e quello maggiore (opposto all'angolo di 60°) è $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$.

[4] Si tenga presente che la costruzione in scala dei vettori utilizzando riga, squadra, compasso e goniometro, e la misura della diagonale del parallelogramma e dell'angolo che questa forma con uno dei vettori dati, e l'unico modo per operare (al momento) se i vettori non formano angoli particolari di 30°, 45°, 60° o 90° o angoli riconducibili ad essi

Si osservi che la somma tra due vettori può anche essere fatta mettendo i vettori uno di seguito all'altro; la risultante è il vettore che si ottiene unendo il punto di applicazione del primo vettore con l'estremo libero dell'ultimo vettore. Questa tecnica è utile quando si deve fare la somma (grafica) di tre o più vettori.

Il problema della differenza tra due vettori è molto simile a quello della somma, basta osservare che: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$; cioè **la differenza tra due vettori è la somma del primo vettore con l'opposto del secondo**.

Come casi particolari abbiamo la situazione in cui i vettori hanno la stessa direzione; dati due vettori **u** e **v**, si ha:

- se i vettori hanno lo stesso verso la somma è un vettore che ha la stessa direzione, stesso verso e modulo uguale alla somma dei moduli
- se hanno versi opposti la somma è un vettore che ha la stessa direzione, verso del vettore di modulo maggiore e modulo uguale alla differenza dei moduli.

Quello che abbiamo visto finora è la composizione tra due vettori. Il problema inverso è la scomposizione di un vettore, cioè determinare due vettori la cui somma sia un vettore assegnato. Come accade con in numeri[5] il problema posto in questi termini non ha un'unica soluzione. Il problema ammetta un'unica soluzione se si impongono per esempio le direzioni lungo le quali vogliamo i vettori. La figura 7 illustra un esempio.

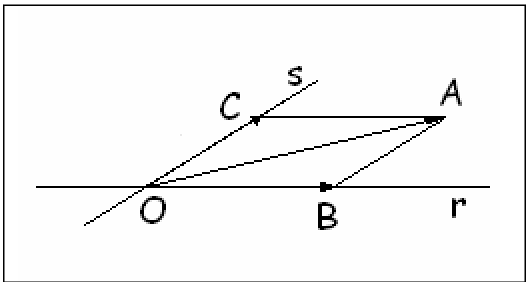


Figura 7 - Scomposizione di un vettore lungo due direzioni assegnate.

Per effettuare la scomposizione del vettore $\overrightarrow{OA}$ lungo le direzioni assegnate r ed s, si riporta il vettore in modo che il punto di applicazione (O) coincida con il punto di intersezione delle rette r ed s, quindi dall'estremo libero del vettore (A) si tracciano le parallele alla rette r, che incontra la retta s nel punto C, e alla retta s, che incontra la retta r nel punto B. I vettori $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ sono i vettori cercati. È infatti semplice verificare che $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

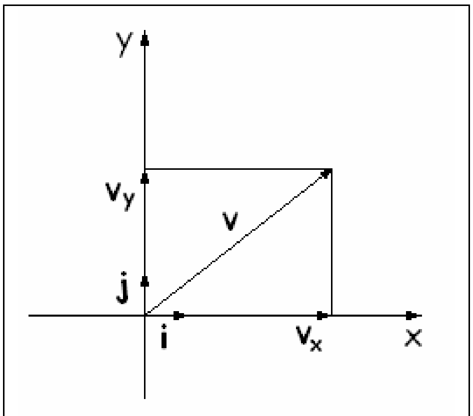


Figura 8 - Riferimento cartesiano per

La questione è di rilevante importanza quando le direzioni sono perpendicolari. Per analogia con i sistemi di assi cartesiani le direzioni vengono prese una orizzontale indicata x e una verticale indicata con y e in ognuna di esse si fissano un verso e un vettore unitario **i** per l'asse x e **j** per l'asse y. I vettori i e j sono tali che $|\mathbf{i}| = 1$ e $|\mathbf{j}| = 1$, sono perpendicolari e vengono chiamati **versori**. Un vettore **v** può essere quindi scomposto nei due vettori componenti $\mathbf{v_x}$ e $\mathbf{v_y}$, ossia il vettore componente lungo l'asse x e quello lungo l'asse y:

[5] Il problema "trovare due numeri che sommati diano 5" ammette più di una soluzione se si tratta di numeri naturali, sono infinite soluzioni se si tratta di numeri interi o razionali o addirittura reali.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_x} + \mathbf{v_y}.$$

Tenendo conto dei versori **i** e **j** definiti sugli assi x e y si può scrivere:

$$\mathbf{v_x} = v_x \cdot \mathbf{i} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v_y} = v_y \cdot \mathbf{j}$$

e quindi

$$\mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j}.$$

I numeri v_x e v_y sono dette le **componenti** del vettore **v** e sono il modulo dei vettori $\mathbf{v_x}$ e $\mathbf{v_y}$; se il punto di applicazione di **v** coincide con l'origine degli assi cartesiani, questi numeri rappresentano anche le coordinate cartesiane dell'estremo libero di **v**: è per questo motivo che si può anche scrivere $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Tenendo conto di quanto detto sopra la somma di due vettori $\mathbf{u}=(u_x,u_y)$ e $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ può essere fatta così:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x \cdot \mathbf{i} + u_y \cdot \mathbf{j}) + (v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j}) = u_x \cdot \mathbf{i} + u_y \cdot \mathbf{j} + v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} = u_x \cdot \mathbf{i} + v_x \cdot \mathbf{i} + u_y \cdot \mathbf{j} + v_y \cdot \mathbf{j} =$$
$$= (u_x+v_x)\mathbf{i} + (u_y+v_y)\mathbf{j} = (u_x+v_x; u_y+v_y).$$

Ovvero, **la somma tra due vettori è un vettore che ha per componenti la somma delle componenti dei vettori dati**.

Si osserva facilmente che, facendo uso del teorema di Pitagora, il modulo di un vettore $\mathbf{v} = (v_x,v_y)$ è dato da $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Dati i vettori $\mathbf{u}=(3,4)$ e $\mathbf{v}=(-4,3)$, se vengono rappresentati su un diagramma cartesiano, si verifica facilmente che sono perpendicolari. Si dimostra anche facilmente che la somma del prodotto tra le componenti lungo lo stesso asse è zero:

$$u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 0.$$

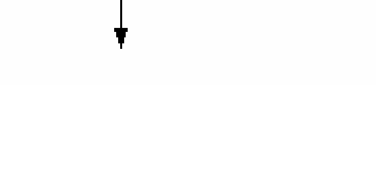
Questa proprietà è generale: **dati due vettori** $\mathbf{u}=(u_x,u_y)$ e $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$, **essi sono perpendicolari se e solo se** $u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0$.

Si può constatare facilmente, per via grafica, che, dato un vettore $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ ne esistono infiniti ad esso perpendicolare (sono tutti quelli che hanno direzione perpendicolare alla direzione di **v**). I vettori perpendicolari al vettore **v** possono essere scritti nella forma $\mathbf{u} = (-k \cdot v_y, k \cdot v_x)$ dove k rappresenta un numero reale qualsiasi; infatti, qualunque sia k si ha $v_x \cdot (-k \cdot v_y) + v_y \cdot (k \cdot v_x) = -k \cdot v_x \cdot v_y + k \cdot v_y \cdot v_x = 0$.

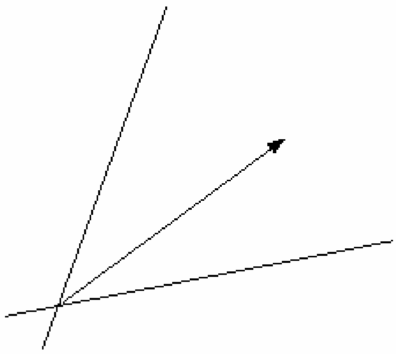
Due vettori $\mathbf{u}=(u_x,u_y)$ e $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ si dicono paralleli (hanno la stessa direzione) se $u_x \cdot v_y = v_x \cdot u_y$, ovvero $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = h$ (h è un valore costante); da ciò si ricava che $u_x = h \cdot v_x$ e $u_y = h \cdot v_y$, o, che è la stessa cosa che $\mathbf{u} = h \cdot \mathbf{v}$. In effetti due vettori paralleli differiscono solo per modulo e verso.

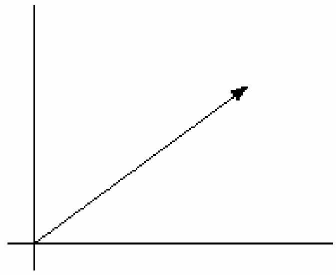
ESERCIZI

1) Calcolare la risultante di due forze di intensità F_1 = 100 N e F_2 = 70 N che formano tra di loro un angolo di 30°.
2) Determinare modulo, direzione e verso della risultate tra due forze di intensità F_1=F_2=100 N che formano un angolo di 120°. [modulo 100N, 60° con F_1]
3) Determinare modulo, direzione e verso della risultate tra due forze di intensità F_1=F_2=50 N che formano un angolo di 60°. [modulo 86,6N, 30° con F_1]
4) Determinare modulo, direzione e verso della risultate tra due forze di intensità F_1=100 N e F_2=$100\sqrt{2}$ N che formano un angolo di 135°. [modulo 100N, 90° con F_1]
5) Calcolare la risultante di due spostamenti di modulo s_1 = 150 m e s_2 = 100 m che formano tra di loro un angolo di 45°.
6) Calcolare la risultante di due spostamenti s_1 = 1000 m e s_2 = 800 m che formano tra di loro un angolo di 60°.
7) Trovare sia graficamente sia algebricamente il modulo, la direzione e il verso della risultante di due vettori aventi lo stesso punto di applicazione e lo stesso modulo v=5u (u rappresenta l'unità di misura), nei seguenti casi: (a) i due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso; (b) i due vettori hanno la stessa direzione e verso opposto; (c) i due formano un angolo di 90°
8) Un aeroplano vola in direzione ovest per 500 km quindi vira di 45° in direzione sud ovest e vola per altri 705 km. Qual è lo spostamento complessivo
9) Un aeroplano si sposta di 200 km verso est. Di quanto deve successivamente spostarsi verso nord affinché lo spostamento risultante abbia la direzione nord 30° est e il modulo uguale a 400 km ?
10) Un aeroplano vola in direzione N60°E per 500 km quindi vira in direzione SE e vola per altri 700 km. Qual è lo spostamento finale ? [960 km]
11) Un aeroplano vola in direzione N70°W per 300 km quindi vira in direzione S20°W e vola per altri 520 km. Qual è lo spostamento finale e in che direzione è avvenuto? [600 km; W10°S]
12) Un fiume scorre da Ovest verso Est ed è largo 800 m. Una barca che vuole attraversarlo si muove dalla sponda Sud verso quella Nord, ma la corrente del fiume la trascina verso Est di 1384 m. Qual è stato lo spostamento della barca e in che direzione ha navigato?
13) Disegnare la risultante dei seguenti vettori:



14) Scomporre i seguenti vettori secondo le direzioni indicate:





15) Determinare il modulo, la direzione e il verso della risultante tra due vettori **a** (a = 5 N) e **b** (b = 4 N) che formano tra di essi un angolo di 70°.
16) Un uomo si sposta di $6\sqrt{3}$ km in direzione E30°N e successivamente di $4\sqrt{2}$ km in direzione E45°N. Calcolare il modulo dello spostamento risultante.
17) Determinare la risultante tra due forze di intensità F_1 = 20 N e F_2 = 10 che formano tra di loro un angolo di 105°.
18) Due masse, A e B, distano 100 m. $m_A = 5m_B$ = 100 kg. Una terza massa C, m_C = 50 kg, è posta in modo tale che il triangolo ABC sia rettangolo in C e l'angolo in A sia di 60°. Calcolare le forze che A e B esercitano su C e la loro risultante. Effettuare una rappresentazione in scala della situazione.
19) Determinare la risultante dei vettori dati in figura 9. I moduli sono: a=6u, b=4u, c=8u.
20) Determinare la risultante dei vettori dati nella figura 10. I moduli sono: a=8u, b=6u, c=4u.
21) Tre vettori hanno modulo uguale: a = b = c = 3u; i vettori **a** e **b** formano un angolo di 105° come pure i vettori **b** e **c**. Calcolare la somma dei tre vettori. Trovare un quarto vettore **d** in modo tale che la somma di tutti e quattro i vettori sia zero?
22) Sono assegnati i vettori **a** = 2**i** + **j**; **b** = -**i** + 3**j** e **c** = 3**i** + 2**j**.
    a. Scriverne le componenti
    b. Rappresentare i vettori sul piano cartesiano
    c. Calcolarne il modulo
    d. Scrivere i vettori:
        - **d** = 2 **a** + 3**b** – **c**;
        - **f** = -**a** + **b** – 2c;
        - **g** = 4 **a** - 2 **b** – **c**
    e. scriverne le componenti, rappresentarli sul piano cartesiano e calcolarne il modulo.
    f. Scrivere i vettori perpendicolari ai vettori dati che abbiano modulo doppio.
    g. Scrivere il vettore che sommato ad **a** sia uguale a **b**.
    h. Determinare, se esiste, un numero k tale che k·**b** = **c**.

23) Sono assegnati i vettori **a** = (3,2); **b** = (–1,3) e **c** = (0,–2)
   a. Rappresentare i vettori sul piano cartesiano.
   b. Calcolare il vettore risultante **d** e rappresentarlo sul piano cartesiano. [**d** = (2,3)]
   c. Scrivere il vettore: **f** = **a** – **b** – 2 **c**, rappresentarlo sul piano cartesiano e calcolarne il modulo. [**f** = (4,3), f = 5]
   d. Scrivere il vettore **g**, parallelo a **f**, che ha verso opposto e modulo 2. [**g** = (–1,6; –1,2)]
   e. Scrivere il vettore **h** che sommato ad **a** sia uguale a **b**. [**h** = (–4,1)]

24) Determinare i vettori perpendicolari a **c** di modulo 4. [$\mathbf{v_1}$=(–4,0);$\mathbf{v_2}$=(4,0)] Sono dati vettori **a**, **b**, **c** i cui moduli sono: a = 3,00 u, b = 4,00 u, c = 5,00 u (u sta ad indicare una unità di misura arbitraria). Tra **a** e **b** c'è un angolo di 75,0° e tra **b** e **c** un angolo di 120°. Determinare la risultante **d** dei tre vettori e calcolarne il modulo. NOTA: dopo aver disegnato **a**, gli altri due vettori vanno rappresentati in ordine alfabetico, in senso antiorario [**d** = (–2,78u; 1,26u); d = 3,05u]

25) Sono dati vettori **a**, **b**, **c** i cui moduli sono: a = 4,00 u, b = 8,00 u, c = 6,00 u (u sta ad indicare una unità di misura arbitraria). Tra **a** e **b** c'è un angolo di 15,0° e tra **b** e **c** un angolo di 150°. Determinare la risultante **d** dei tre vettori e calcolarne il modulo. NOTA: dopo aver disegnato **a**, gli altri due vettori vanno rappresentati in ordine alfabetico, in senso antiorario [**d** = (1,63u; 6,76u); d = 6,95u]

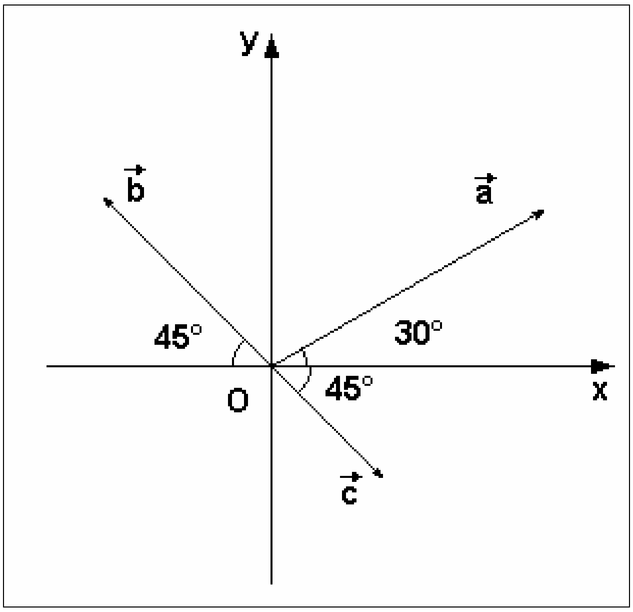


Figura 9

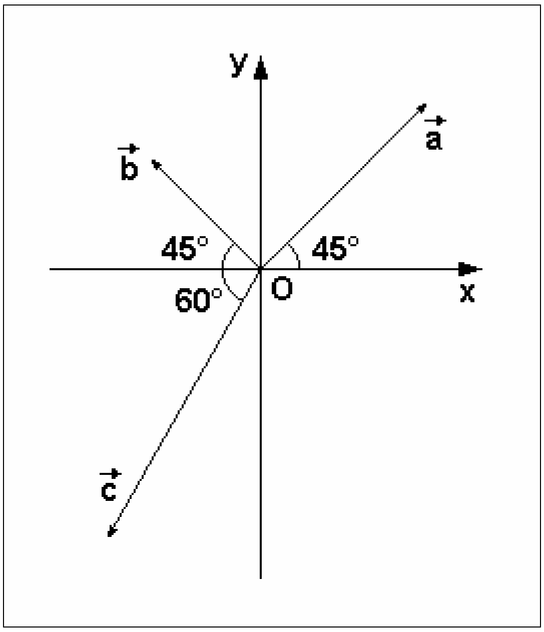


Figura 10