LE INCERTEZZE E LA LORO PROPAGAZIONE NELLE MISURE INDIRETTE

1) COME SI SCRIVE IL RISULTATO DI UNA MISURA

Il modo migliore per esprimere il risultato di una misura è quello di dare, accanto ad esso, l'incertezza sperimentale associata seguita dall'unità di misura. In generale si scrive:

(1) $$G = \left(\overline{G} \pm \Delta G\right)\ \mathrm{u}$$

Dove G è la grandezza da misurare, $\overline{G}$ (chiamato **valor medio**) è il valore numerico della misura (può essere ottenuto da una singola lettura o dalla media di diverse letture) e ΔG è l'**incertezza assoluta** sulla misura (ottenibile in diversi modi) e u è l'**unità di misura**.

Per esempio, il peso di una persona, espresso da (72,5 ± 0,5) kg sta ad indicare che la bilancia non ci ha permesso di apprezzare quantità più piccole di 0,5 kg e quindi che il peso della persona è compreso tra 72,0 kg e 73,0 kg; il lato di un cubo dato da (5,20 ± 0,05) cm sta ad indicare che nella misura c'è un'incertezza di 0,05 cm e cioè che esso è compreso tra 5,15 cm e 5,25 cm.

Se la misura della grandezza può essere ripetuta più volte il valor medio si ottiene dalla media delle misure e l'incertezza assoluta può essere ricavata in diversi modi. Il modo più semplice consiste nel fare la differenza tra il valore più grande e quello più piccolo delle misure, dividendo il risultato ottenuto per 2: $\Delta G = \dfrac{G_{MAX} - G_{MIN}}{2}$.

L'espressione (1) significa quindi che

$$\overline{G} - \Delta G < G < \overline{G} + \Delta G .$$

Rimane quindi definito un intervallo $\left(\overline{G} - \Delta G; \overline{G} + \Delta G\right)$ che viene chiamato **intervallo di confidenza** della misura (negli esempi dati sopra, per il peso della persona l'intervallo di confidenza è (72,0 kg; 73,0 kg), per il lato del cubo (5,15 cm; 5,25 cm)

Prendiamo in considerazione le misure (L_i) di una cattedra riportate nella tabella 1:

Tabella 1

1	139,2 cm	10	139,4 cm	19	139,2 cm
2	139,2 cm	11	139,3 cm	20	149 cm
3	139,2 cm	12	139,4 cm	21	132 cm
4	139,2 cm	13	139 cm	22	139,2 cm
5	139,3 cm	14	139,2 cm	23	139,25 cm
6	139,2 cm	15	139,4 cm	24	149,2 cm
7	139,2 cm	16	139,6 cm	25	139,1 cm
8	139,4 cm	17	139,2 cm	26	139,2 cm
9	139,2 cm	18	139,3 cm	27	139,2 cm

Una prima analisi ci porta a dire che probabilmente i valori 132 cm, 149 cm e 149,2 cm sono errati (quasi sicuramente ci sono stati degli errori di lettura). Inoltre alcuni risultati sono stati espressi con una cifra decimale (ciò significa che nella misura si è apprezzato anche il millimetro) mentre altri sono dati solo come numeri interi (ciò significa che si sono apprezzati solo i centimetri); in questo non c'è nulla di male, ma visto che avevamo a disposizione uno strumento con una sensibilità di 1 mm, era il caso di esprimere il risultato con questa precisione.

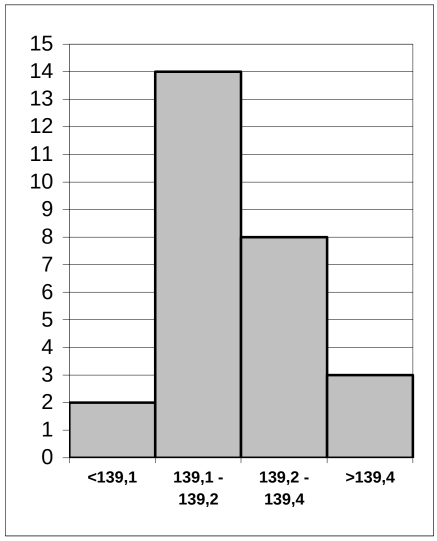


Figura 1 - Grafico dei valori delle misure della lunghezza della cattedra.

In base a quanto detto sopra possiamo quindi affermare che la misura della cattedra è L = (139,7±8,6) cm, dove il valor medio è

$$\overline{L} = \frac{139,2 + ... + 139,3 + ... + 139 + ... + 139,2}{27} = 139,7\text{cm}$$

e l'incertezza (errore) assoluta

$$\Delta L = \frac{L_{MAX} - L_{MIN}}{2} = \frac{149,2 - 132}{2} = 8,6\text{cm}.$$

Questo significa che in base alle misure fatte la lunghezza L della cattedra è compresa tra 131,1 cm e 148,3 cm:

131,1 cm < L < 148,3 cm.

È chiaro che il risultato non è molto soddisfacente, ma questo è quanto si ottiene dalle misure fatte. È perciò molto importante eseguire le misure correttamente. La presenza nella tabella di quei valori "strani", cioè di quelle misure che sono state fatte in maniera errata, ci porta ad un risultato non corretto. In generale non sempre è possibile accorgersi di misure errate e quindi bisogna fare più serie di misurazioni e fare poi la media dei valori ottenuti.

Diamo alcune regole per ottenre il risultato di una misurazione.

<u>REGOLA 1</u>:

In generale non è lecito effettuare una misura con un'incertezza inferiore alla sensibilità dello strumento[1].

Una buona riga da disegno può per esempio costituire un'eccezione; infatti è possibile stimare ad occhio (**interpolare**) un risultato più preciso come valore intermedio tra due incisioni successive che meglio approssima la lunghezza misurata. Per esempio, se in una misura si ritiene di poter apprezzare il mezzo millimetro, anche se la riga e graduata in millimetri, la misura si può esprimere ponendo (5,20 ± 0,05) cm. In questa misura lo zero che segue 5,2 sembrerebbe superfluo perché essendo a destra del punto decimale, non modifica il valore numerico. In verità, indicarlo esplicitamente ha un preciso significato sperimentale: rappresenta il fatto che la grandezza è conosciuta fino al limite permesso dalle incertezze, cioè, in questo caso, fino alla seconda cifra decimale (centesimi di centimetro).

<u>REGOLA 2</u>:

Il valor medio e l'incertezza di una misura devono essere scritti in maniera coerente; l'ultima cifra a destra del valor medio deve occupare la stessa posizione dell'ultima cifra a destra dell'incertezza.

È sbagliato scrivere (5,200 ± 0,05), perché l'ultimo zero a destra non avrebbe significato sperimentale.

[1] Per sensibilità di uno strumento intendiamo la più piccola misura che si può fare con quello strumento, per esempio il righello che generalmente utilizziamo ha una sensibilità di 1 mm, perché questa è la più piccola misura che possiamo fare con esso.

In un risultato vanno quindi indicate **tutte e sole** le cifre ottenibili dall'operazione di misura e che pertanto si chiamano **cifre significative**. Nella rappresentazione dei numeri, non sono significativi solo gli zeri che precedono una cifra diversa da zero: per esempio: 0,0023 è un numero con due cifre significative (2 e 3); 3,2050 è un numero con 5 cifre significative (3 – 2 – 0 – 5 – 0), per quanto detto sopra anche l'ultimo zero ha significato.

Chiameremo **misure dirette** quelle che si possono ricavare da un'unica lettura su di uno strumento (misure con righe, bilance, orologi, ecc.); **misure indirette** quelle che si ottengono combinando due o più misure dirette tramite operazioni matematiche.

Facciamo un esempio di misura indiretta. Supponiamo di voler sapere la velocità di un atleta che corre i 200 m. Per fare ciò è necessario procedere **calcolando** la velocità (che quindi è una misura indiretta) come rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo (che sono le misure dirette). Supponiamo di essere riusciti ad ottenere le seguenti misure: spazio $s = (200,0 \pm 0,1)$ m; tempo $t = (21,2 \pm 0,1)$ s. Una calcolatrice ci dà il seguente valore della velocità:

$$v = 9,433962264 \text{ m/s}$$

inoltre con regole che vedremo più avanti si calcola un errore pari a

$$\Delta v = 0,049216803 \text{ m/s}.$$

Negli esempi dati sopra l'**incertezza** di una misura è stata sempre data con una sola cifra; questo perché quello che interessa è semplicemente la valutazione di un limite superiore dell'incertezza, per cui **una sola cifra significativa** è sufficiente per fornire questa informazione. Ciò conduce quindi alla necessità di **arrotondare** il risultato del calcolo dell'incertezza Δv ad una sola cifra.

<u>REGOLA 3</u>:

Se in una approssimazione la cifra successiva a quella che si vuol mantenere è compresa tra 0 e 4 si arrotonda per difetto, se è compresa tra 5 e 9 si arrotonda per eccesso.

Nel nostro caso si ottiene

$$\Delta v = 0,05 \text{ m/s}$$

(se fosse stato $\Delta v = 0,043216803$ avremmo arrotondato a 0,04).

Per la REGOLA 3 non ha quindi senso esprimere la velocità con 9 cifre dopo la virgola; il modo migliore di esprimere il risultato è quindi:

$$v = (9,43 \pm 0,05) \text{ m/s}$$

Solo nel caso in cui la prima cifra dell'incertezza sia un 1 o un 2 conviene mantenere due cifre significative per evitare di introdurre approssimazioni troppo grandi. Infatti se ad esempio $\Delta x = 1,3$ arrotondare a $\Delta x = 1$ comporta un'approssimazione per difetto del 30%, davvero troppo grande.)

ESERCIZI

1) Le seguenti scritture rappresentano i risultati di misure indirette, calcolati con la loro incertezza e riportati così come vengono letti sul visore di una calcolatrice; poiché non tutte le cifre riportate sono significative, arrotondate opportunamente le incertezze e i risultati (in questo caso non vengono riportate le unità di misura perché non interessano).

(a) (31,25 ± 4,28906) (b) (2,701 ± 0,0583) (c) (980,2 ± 4,38)
(d) (4268 ± 34) (e) (12,2567 ± 0,013578) (f) $(7,12 \cdot 10^{-19} \pm 3,6 \cdot 10^{-20})$
Risposte [(a) (31± 4); (b) (2,70±0,06); (c) (980±4); (d) (4270±30); (e) (12,257±0,014); (f) $(7,1 \cdot 10^{-19} \pm 0,4 \cdot 10^{-19})$]

2) Scrivete il numero corretto di cifre significative per la grandezza $x = 2,9289$ nel caso in cui l'incertezza, espressa nella stessa unità di misura, sia pari a:

(a) $\Delta x = 0,007$ (b) $\Delta x = 0,03$ (c) $\Delta x = 0,12$
Risposte [(a) 2,929; (b) 2,93; (c) 2,93]

2) PRECISIONE DI UNA MISURA

Abbiamo visto che il modo migliore per esprimere il risultato di una misura è quello di indicare accanto ad esso l'intervallo di incertezza sperimentale. Per esempio:

$$A = (100 \pm 1)\ \text{mm}$$

Il termine **intervallo** va inteso come **campo di escursione** entro il quale abbiamo fiducia che il risultato sia compreso. Inoltre esso non ha confini netti; in effetti quello che ci serve è una stima dell'ordine di grandezza dell'incertezza sperimentale. E' per questo che comunemente la si esprime con una sola cifra significativa.

Tale intervallo di indeterminazione viene chiamato **incertezza assoluta** ed ha le stesse dimensioni fisiche della grandezza a cui si riferisce.

E' chiaro che più piccole sono le incertezze sperimentali e migliore è la misura. Ma cosa si deve intendere per "piccolo"? Cioè rispetto a che cosa esse devono essere piccole? Per esempio è migliore la misura di A o quella di B = (1000 ± 1) km ?

Una prima osservazione ci dovrebbe portare a notare che B è espressa con 4 cifre significative mentre A solo con 3; inoltre la misura di A è incerta di 1 mm su 100 mm (o più semplicemente di 1 parte su 100) mentre B è incerta di 1 km su 1000 km (1 parte su 1000). Questo conduce al fatto che per valutare quale grandezza è più precisa tra A e B si deve effettuare il rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore della grandezza.

Data quindi una grandezza $G = \left(\overline{G} \pm \Delta G\right)$ u, si chiama **incertezza relativa $E_r(G)$** il rapporto

$$E_r(G) = \frac{\Delta G}{\overline{G}}.$$

Nel linguaggio scientifico l'incertezza relativa viene quindi identificata con la **precisione di una misura**. Un modo comodo di esprime le incertezze relative consiste nel rapportarle a 100 ottenendo così le **incertezze percentuali $E_{\%}(G)$**.

$$E_{\%}(G) = E_r(G) \cdot 100$$

Nella misura della lunghezza della cattedra abbiamo ottenuto un'incertezza relativa $E_r(L) = \frac{8,6}{139,7}$ = 0,06, ossia un errore percentuale $E_{\%}(L) = E_r(L) \cdot 100 = 6\%$

ESEMPI:

$E_r(A) = 1/100 = 0,01$ E% (A) = 0,01•100 = 1%
$E_r(B) = 1/1000 = 0,001$ E% (B) = 0,001•100 = 0,1%

E' opportuno notare che l'incertezza relativa ci permette di stabilire qual è la più precisa tra una serie di misure anche di natura diversa, ma non ci permette di definire quando una misura sia **buona**, ovvero di stimare l'**attendibilità** della misura.

Per esempio se andiamo a vedere gli errori fatti nelle misurazioni della lunghezza della cattedra, osserviamo che il valore ottenuto nella maggior parte delle misure è 139,2 cm e tenendo conto della sensibilità dello strumento possiamo scrivere (139,2±0,1) cm. L'errore relativo è quindi 0,0007, il che significa un errore percentuale di 0,07%. Se andiamo a calcolare l'errore relativo anche della misura di 149,2 cm (con lo stesso errore assoluto di 0,1 cm) otteniamo lo stesso 0,0007 (approssimando come detto sopra). Abbiamo quindi una misura altrettanto precisa, ma parecchio diversa dal risultato generale e quindi non buona.

Un aspetto di cui bisogna tenere conto quando si vuol ottenere una buona misura è quello degli errori sistematici: bisogna eliminarli tutti. Non esiste però un metodo infallibile per operare ciò: l'unica possibilità è quella di misurare la stessa grandezza con metodi di natura diversa e di **confrontare** i risultati così ottenuti.

Si dice che una misura è **accurata** se l'analisi delle possibili incertezze **sistematiche** ha mostrato che esse sono irrilevanti rispetto alle incertezze **accidentali**.

3) STIMA DELLE INCERTEZZE NELLE MISURE INDIRETTE

Riassumiamo, senza dimostrazioni, le regole per valutare le incertezze nelle misure indirette.

REGOLA 4

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare la somma $s = a + b = \bar{s} \pm \Delta s$.

Allora $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ **e** $\Delta s = \Delta a + \Delta b$

ovvero il valore medio di una somma è uguale alla somma dei valori medi e l'incertezza assoluta è uguale alla somma delle incertezze assolute delle grandezze.

Ovviamente la regola si estende anche al caso in cui dobbiamo fare la somma di più di due grandezze che date con l'incertezza: il valor medio è la somma dei valori medi e l'incertezza è la somma delle incertezze.

REGOLA 5

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare la differenza $d = a - b = \bar{d} \pm \Delta d$.

Allora $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ **e** $\Delta d = \Delta a + \Delta b$

ovvero il valore medio di una differenza è uguale alla differenza dei valori medi e l'incertezza assoluta è uguale alla somma delle incertezze assolute delle grandezze.

REGOLA 6

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare il prodotto $p = a \cdot b = \bar{p} \pm \Delta p$

Allora $\bar{p} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ **e** $E_r(p) = E_r(a) + E_r(b)$

ovvero il valore medio di un prodotto è uguale al prodotto dei valori medi e l'incertezza relativa è uguale alla somma delle incertezze relative delle grandezze; l'incertezza assoluta è data da:

$$\Delta p = E_r(p) \cdot \bar{p}$$

Nel caso del prodotto di due numeri con incertezza l'espressione dell'incertezza può essere scritta anche nella forma:

$$\Delta p = \bar{b} \cdot \Delta a + \bar{a} \cdot \Delta b$$

infatti:

$$\Delta p = E_r(p) \cdot \bar{p} = \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) \cdot \left(\bar{a} \cdot \bar{b} \right) = \frac{\Delta a}{\cancel{\bar{a}}} \cdot \left(\cancel{\bar{a}} \cdot \bar{b} \right) + \frac{\Delta b}{\cancel{\bar{b}}} \cdot \left(\bar{a} \cdot \cancel{\bar{b}} \right) = \bar{b} \cdot \Delta a + \bar{a} \cdot \Delta b$$

REGOLA 7

Se a e b sono due grandezze espresse con la loro incertezza:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a \quad \textbf{e} \quad b = \bar{b} \pm \Delta b$$

e si vuol calcolare il quoziente $q = \frac{a}{b} = \bar{q} \pm \Delta q$.

Allora $\overline{q} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ **e** $E_r(q) = E_r(a) + E_r(b)$

ovvero il valore medio di un quoziente è uguale al quoziente dei valori medi e l'incertezza relativa è uguale alla somma delle incertezze relative delle grandezze; l'incertezza assoluta è data da:

$$\Delta q = E_r(q) \cdot \overline{q}$$

REGOLA 8

Se a è una grandezza espressa con la sua incertezza:

$$a = \overline{a} \pm \Delta a$$

e n è un numero esatto e si vuol calcolare il prodotto tra n ed a $p = n \cdot a = \overline{p} \pm \Delta p$.

Allora $\overline{p} = n \cdot \overline{a}$ **e** $\Delta p = n \cdot \Delta a$

ovvero il valore medio del prodotto di un numero esatto per una grandezza con incertezza è dato del prodotto del numero esatto per il valore medio della grandezza e l'incertezza assoluta è data dal prodotto del numero esatto per l'incertezza assoluta della grandezza.

Si ha quindi:

$$n \cdot a = n \cdot \left(\overline{a} \pm \Delta a\right) = n \cdot \overline{a} \pm n \cdot \Delta a$$

REGOLA 9

Se a è una grandezza espressa con la sua incertezza:

$$a = \overline{a} \pm \Delta a$$

e n è un numero esatto e si vuol calcolare la potenza n-esima di a $p = a^n = \overline{p} \pm \Delta p$.

Allora $\overline{p} = \overline{a}^n$ **e** $E_r(p) = n \cdot E_r(a)$

ovvero il valore medio di una potenza è uguale alla potenza del valore medio e l'incertezza relativa è data dal prodotto dell'esponente per l'incertezza relativa sulla base.

$$\Delta p = E_r(p) \cdot \overline{p}$$

Si può dimostrare che $\Delta p = n \cdot \left(\overline{a}\right)^{n-1} \cdot \Delta a$; infatti $\Delta p = E_r(p) \cdot \overline{p} = n \cdot E_r(a) \cdot \overline{p} = n \cdot \frac{\Delta a}{\overline{a}} \cdot \overline{a}^n$ da cui semplificando si ottiene il risultato.

REGOLA 10

Se a è una grandezza espressa con la sua incertezza:

$$a = \overline{a} \pm \Delta a$$

e si vuol calcolare la radice n-esima di a $r = \sqrt[n]{a} = \overline{r} \pm \Delta r$.

Allora $\overline{r} = \sqrt[n]{\overline{a}}$ **e** $E_r(r) = \frac{1}{n} E_r(a)$

ovvero il valore medio di una radice è uguale alla radice del valore medio e l'incertezza relativa è data dal rapporto tra l'incertezza relativa al radicando e l'indice della radice.

$$\Delta r = E_r(r) \cdot \overline{r}$$

ESEMPI:

---

1) Supponiamo di voler calcolare la somma L di due lunghezze x = (4,00 ± 0,05) mm e y = (1,08 ± 0,01) mm. Dapprima calcoliamo $\overline{L}$:

$$\overline{L} = \overline{x} + \overline{y} = (4{,}00 + 1{,}08)\ \text{mm} = 5{,}08\ \text{mm}$$

Calcoliamo poi ΔL secondo la REGOLA 4

$$\Delta L = \Delta x + \Delta y = (0{,}05 + 0{,}01)\ \text{mm} = 0{,}06\ \text{mm}.$$

Il risultato è quindi:

$$L = (5{,}08 \pm 0{,}06)\ \text{mm}.$$

2) Si voglia calcolare il peso netto p del materiale contenuto in una cassa. Il peso lordo P e la tara t sono stati misurati direttamente: $P = (25{,}5 \pm 0{,}5)$ kg, $t = (1{,}2 \pm 0{,}1)$ kg.
Calcoliamo $\overline{p}$:

$$\overline{p} = \overline{P} + \overline{t} = (25{,}5 - 1{,}2)\ \text{kg} = 24{,}3\ \text{kg}.$$

Calcoliamo Δp secondo la REGOLA 5

$$\Delta p = \Delta P + \Delta t = (0{,}5 + 0{,}1)\ \text{kg} = 0{,}6\ \text{kg}.$$

Il risultato è quindi:

$$p = (24{,}3 \pm 0{,}6)\ \text{kg}.$$

3) Si voglia calcolare l'area A della superficie di tavolo le cui dimensioni sono: $a=(125{,}5\pm0{,}1)$cm, $b=(80{,}2\pm0{,}1)$cm.
Calcoliamo $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \overline{a} \cdot \overline{b} = (125{,}5 \cdot 80{,}2)\ \text{cm}^2 = 10.065{,}1\ \text{cm}^2.$$

Calcoliamo $E_r(A)$ secondo la REGOLA 6

$$E_r(A) = E_r(a) + E_r(b) = 0{,}1/125{,}5 + 0{,}1/80{,}2 = 0{,}00204$$

e quindi l'incertezza assoluta ΔA:

$$\Delta A = Er(A) \cdot \overline{A} = (0{,}00204 \cdot 10065{,}1)\ \text{cm}^2 = 20{,}5328\ \text{cm}^2 \approx 21\ \text{cm}^2.$$

Utilizzando la regola rapida

$$\Delta A = \overline{a} \cdot \Delta b + \overline{b} \cdot \Delta a = (125{,}5 \cdot 0{,}1 + 80{,}2 \cdot 0{,}1)\ \text{cm}^2 = 20{,}57\ \text{cm}^2 \approx 21\ \text{cm}^2.$$

Il risultato è quindi:

$$A = (10.065 \pm 21)\ \text{cm}^2 = (100{,}65 \pm 0{,}21)\ \text{dm}^2\ .$$

4) Si voglia calcolare la velocità v dell'esempio riportato nel paragrafo 1. Lo spazio è $s = (200{,}0 \pm 0{,}1)$ m e il tempo $t = (21{,}2 \pm 0{,}1)$ s.
Calcoliamo $\overline{v}$:

$$\overline{v} = \frac{\overline{s}}{\overline{t}} = \frac{200{,}0}{21{,}2}\text{m/s} = 9{,}433962\text{m/s}$$

(per ora lasciamo un discreto numero di cifre decimali).
Calcoliamo $E_r(v)$ secondo la REGOLA 7

$$E_r(v) = E_r(s) + E_r(t) = 0{,}1/200{,}0 + 0{,}1/21{,}2 \approx 0{,}00522$$

e quindi l'incertezza assoluta Δv:

$$\Delta v = E_r(v) \cdot \overline{v} = 0{,}00522 \cdot 9{,}433962\ \text{m/s} = 0{,}0492\ldots\ \text{m/s} \approx 0{,}05\ \text{m/s}.$$

Il risultato è:

$$v = (9{,}43 \pm 0{,}05)\ \text{m/s}.$$

5) Si voglia calcolare il perimetro p di un quadrato di lato $l = (12{,}5 \pm 0{,}1)$ cm. Per la regola 8 si ha:

$$p = 4 \cdot (12{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{cm} = [(4 \cdot 12{,}5) \pm (4 \cdot 0{,}1)]\ \text{cm} = (50{,}0 \pm 0{,}4)\ \text{cm}.$$

6) Si voglia calcolare il volume V di un cubo di lato $l = (3{,}5 \pm 0{,}1)$ cm. Calcoliamo $\overline{V}$:

$$\overline{V} = \overline{l}^3 = 3{,}5^3\ \text{cm}^3 = 42{,}875\ \text{cm}^3.$$

Calcoliamo $E_r(V)$ secondo la REGOLA 9

$$E_r(V) = 3 \cdot E_r(l) = 3 \cdot 0{,}1/3{,}5 \approx 0{,}0857$$

e quindi l'incertezza assoluta ΔV:

$$\Delta V = E_r(V) \cdot \overline{V} = 0{,}0857 \cdot 42{,}875\ \text{cm}^3 = 3{,}674\ldots\ \text{cm}^3 \approx 4\ \text{cm}^3.$$

Utilizzando la regola rapida:

$$\Delta V = 3 \cdot \overline{l}^2 \cdot \Delta l = 3 \cdot (3{,}5)^2 \cdot 0{,}1 = 3{,}675\ \text{cm}^3 \approx 4\ \text{cm}^3$$

Il risultato è:

$$V = (43 \pm 4)cm^3.$$

7) Si voglia calcolare il lato l di un quadrato la cui area A è data da A = (326 ± 1) cm^2. Calcoliamo $\bar{l}$:

$$\bar{l} = \sqrt{\bar{A}} = \sqrt{326}\ cm \approx 18,05547\ cm.$$

Calcoliamo $E_r(l)$ secondo la REGOLA 10

$$E_r(l) = E_r(A)/2 = (1/326)/2 \approx 0,0015337$$

e quindi l'incertezza assoluta Δl:

$$\Delta l = E_r(l) \cdot l = 0,0015337 \cdot 18,055\ cm = 0,02769...\ cm \approx 0,028\ cm.$$

Il risultato è:

$$l = (18,055 \pm 0,028)\ cm.$$

8) Se si vuol calcolare la lunghezza di una circonferenza di diametro d = (12,4 ± 0,1) cm, dobbiamo utilizzare la formula: $C = 2\pi r$ ovvero $C = \pi d$. Si deve quindi moltiplicare un numero con incertezza (d) per π che è anch'esso approssimato (si ricordi che π è un numero con infinite cifre dopo la virgola[2] e quindi per forza di cose lo dobbiamo approssimare). In genere si prende π = 3,14 assumendo quindi che la seconda cifra decimale è quella che contiene l'incertezza, sarebbe più corretto prendere π = (3,14 ± 0,01). Dovendo fare un prodotto, ci serve conoscere le incertezze relative; in questo caso $E_r(d)$ = 0,1/12,4 ≈ 0,00806 e $E_r(\pi)$ = 0,01/3,14 ≈ 0,00318. Si ha $\bar{C} = \pi \cdot \bar{d}$ = 38,936 cm.
$E_r(C) = E_r(d) + E_r(\pi)$ = 0,00806 + 0,00318 = 0,01124 e quindi $\Delta C = E_r(C) \cdot \bar{C}$ = 0,01124·38,936 cm = 0,437... cm ≈ 0,4 cm. Segue che C = (38,9 ± 0,4) cm.
Si osservi però che se prendiamo π con tre cifre decimali π = (3,142 ± 0,001), allora $E_r(\pi)$ = 0,001/3,142 ≈ 0,000318, $E_r(C) = E_r(d) + E_r(\pi)$ = 0,00806 + 0,000318 = 0,008378, $\bar{C} = \pi \cdot \bar{d}$ = 38,9608 cm, $\Delta C = E_r(C) \cdot \bar{C}$ = 0,008378·38,9608 ≈ 0,3 cm e quindi C = (39,0 ± 0,3) cm che è senz'altro più preciso del valore precedente.
Le cose migliorano ulteriormente se si prende π con ancor più cifre dopo la virgola. La regola pratica è che se prendiamo π con tutte le cifre che ci dà la calcolatrice (in genere sono 9 cifre dopo la virgola, π = 3,141592654) l'errore relativo è talmente piccolo che π può essere considerato un numero esatto e quindi nei calcoli utilizzare la regola 8.
Nel nostro caso: $C = \pi d = \pi(12,4 \pm 0,1)$ = (38,9557489 ± 0,314159265) cm ≈ (39,0 ± 0,3) cm.

La stessa cosa vale per $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc. che come π sono epressi con un numero infinito di cifre dopo la virgola.

ESERCIZI

3) Sono date le misure delle seguenti grandezze:
a = (30 ± 1)   b = (20 ± 1)   c = (13 ± 1)   d = (1,2 ± 0,1)   e = (16 ± 1)
Per ognuna di esse calcolare incertezza relativa e percentuale. Quale è più precisa? [R. $E_r(a)$ = 0,03 $E_\%(a)$ = 3%; $E_r(b)$ = 0,05 $E_\%(b)$ = 5%; $E_r(c)$ = 0,08 $E_\%(c)$ = 8%; $E_r(d)$ = 0,08 $E_\%(d)$ = 8%; $E_r(e)$ = 0,06 $E_\%(e)$ = 6%; a]

4) Utilizzando le regole date sopra, calcolate i valori delle grandezze:

a + b + c	a + b − c	a/d
(a - b)/d	3a	a/4
$\frac{e \cdot a}{d}$	$\frac{a^2}{(b+c)}$	$\sqrt{\frac{d \cdot (a-e)}{b-c}}$

(a, b, c, d, e sono le misure date nell'esercizio 3)

5) Calcolare incertezza relativa e percentuale nelle seguenti operazioni:
(35,2 ± 0,2)·(48,1 ± 0,3)   (3,25 ± 0,01)·(17,2 ± 0,2)   (428 ± 1)·(37,4 ± 0,3)   [R. (1693 ± 20)= (1,693 ± 0,020) ·10^3 ; (55,9 ± 0,8); (16000 ± 170)=(16,00 ± 0,17) ·10^3]

[2] π con cinquanta cifre dopo la virgola è 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

6) Usando le regole date sopra calcolate
(a) (6 ± 1) + 2(10 ± 2) - (30 ± 3)/3 (b) (6 ± 1)·(10 ± 2)
(c) (6 ± 1) / (30 ± 1) (d) $(10 \pm 1)^2$
[R. (a) (16 ± 6); (b) (60 ± 22); (c) (0,20 ± 0,04); (d) (100 ± 20)]

7) Sapendo che l = (7,8 ± 0,1) cm, determinare, con le loro incertezze: l^2, l^3, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{l^2}$, $\frac{1}{l^3}$, $\sqrt{l}$.

8) Il diametro di una sferetta misura d = (17,00 ± 0,01) mm. Calcolate, con la relativa incertezza, l'area della superficie ($A = 4\pi r^2$) e il volume ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$, ma ricordano che r = d/2 si può anche scrivere $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi}{6}d^3$). [R. A = (907,9 ± 1,1)mm^2; V = (2572 ± 5)mm^3]

9) Siano a = (73 ± 3) e b = (3,2 ± 0,1) le misure di due grandezze. Calcolate a + b e a - b. Cosa potete dire sulle incertezze di a + b e di a - b? [R. a + b = (76 ± 3); a - b = (70 ± 3)]

10) Calcolate $G = \frac{2(x+y)}{xy}$ e la relativa incertezza, dove x = (70 ± 2) e y = (143 ± 1). [R. 0,0426 ± 0,0021]

11) Sono date le misure di tre grandezze: x = (32,5 ± 0,3), y = (70,0 ± 0,1), z = (52,3 ± 0,7). Calcolate la grandezza $G = \frac{(3x+2y)}{z^2}$ con la sua incertezza. [R. 0,0868 ± 0,0026]

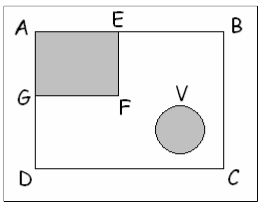
12) Calcolare il perimetro di un rettangolo i cui lati sono x = (4,00 ± 0,05) cm e y = (1,08 ± 0,01) cm. [R. (10,16 ± 0,12) cm]

13) Calcolare il peso netto p del materiale contenuto in una cassa sapendo che il peso lordo P e la tara t sono stati misurati direttamente e che P = (25,5 ± 0,1) kg, t = (1,2 ± 0,1) kg. [R. (24,3 ± 02) kg]

14) Calcolare l'area A della superficie del rettangolo di cui all'esercizio 12). [R. (4,32 ± 0,09) cm^2]

15) Calcolare l'area A della superficie di un cerchio di raggio r = (12,5 ± 0,1) cm. [R. (491 ± 8) cm^2]

16) Nella figura il rettangolo ABCD rappresenta un giardino nel quale è presente un'aiuola (il rettangolo AEFG) e una vasca V. E' noto che AB = (7,3 ± 0,1) m, BC = (5,6 ± 0,1) m, AE = (2,8 ± 0,1) m, AG = (3,7 ± 0,1) m e che la vasca ha un diametro d = (1,8 ± 0,1) m. Si calcoli la superficie calpestabile del giardino.



17) Un barattolo ha il diametro di base di D = (7,2 ± 0,2) cm ed è alto h = (12,5 ± 0,1) cm. In esso vengono immessi 175 pallini di piombo aventi diametro d = (3,0 ± 0,2) mm. Calcolare il volume che rimane libero. (Si ricordi che il volume del cilindro è dato da: $V_C = \pi r^2 h$. Se il problema assegna il valore del diametro, per evitare di introdurre ulteriori errori ricavando il raggio si possono utilizzare le seguenti formule: $V_C = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4}d^2 h$ e $V_S = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi}{6}d^3$)