

LICEO SCIENTIFICO “G.GALILEI”  
MACERATA

# MATERIALE DIDATTICO

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_S(\vec{E})}{\partial t} \right)$$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_S(\vec{B})}{\partial t}$$

# EQUAZIONI DI MAXWELL

*e*

# ONDE ELETTROMAGNETICHE

Prof. Angelo Angeletti

# INTRODUZIONE

Le equazioni di Maxwell rappresentano la sintesi matematica della teoria del campo elettrico e del campo magnetico. Questa sintesi ha consentito di descrivere in modo semplice fenomeni naturali apparentemente diversi tra di loro e di prevederne l'esistenza di nuovi; James Clerk Maxwell (1831 – 1879) [1] l'ha realizzata nella seconda metà del 1800 condensando in sole quattro equazioni la descrizione di fenomeni elettrici, magnetici e ottici[2]. L'attrazione e la repulsione tra le cariche elettriche e tra i magneti, la luce, le onde radio, i raggi X e molti altri fenomeni appaiono come manifestazioni di un'unica forza elettromagnetica e le quattro equazioni che verranno descritte nel seguito esprimono in forma matematica le proprietà di tale forza.

Il formalismo matematico che verrà utilizzato non è il migliore possibile, ma le conoscenze matematiche possedute non permettono di più.

Le equazioni di Maxwell sono state ottenute dallo sviluppo di equazioni già note. Le conoscenze sui fenomeni elettrici e magnetici, sulle quali Maxwell inizia a lavorare, sono racchiuse in tre leggi fondamentali.

1) La **legge di Coulomb** che esprime la forza agente tra cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  poste ad una distanza  $r$ :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

dalla quale si deduce la possibilità di descrivere il campo elettrico generato da una carica  $q$  mediante un vettore (intensità del campo elettrico) definito da:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ .  $\epsilon$  è la costante dielettrica e nel vuoto si indica con  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ .

2) La **legge di Ampère** che descrive l'intensità della forza  $\vec{F}$ , su di un tratto di filo conduttore di lunghezza  $\ell$ , con la quale interagiscono due fili paralleli percorsi da correnti elettriche  $I_1$  e  $I_2$  posti a distanza  $r$ :

$$\vec{F} = \frac{\mu I_1 I_2}{r} \ell$$

Tale forza, come si è visto, nasce dal campo magnetico che ciascun filo genera nello spazio che lo circonda [3].  $\mu$  è la permeabilità magnetica e nel vuoto è  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ . [4]

3) La legge di Faraday – Neumann – Lenz secondo la quale se varia il flusso del campo magnetico attraverso la superficie di un circuito si crea un campo elettrico la cui forza elettromotrice indotta (f.e.i.) è data da:

---

[1] Il Prof. Mario Cutolo, mio docente di Fisica 2 all'università di Camerino nel 1976-77, riteneva che Maxwell fosse il nome della contea dove il nostro nacque. Non che io abbia mai fatto grandi ricerche, ma non ho trovato da nessun'altra parte questa affermazione.

[2] Maxwell presentò le sue equazioni per la prima volta nel 1864 durante una riunione della Royal Society di Londra.

[3] Nella descrizione del campo magnetico si utilizza il vettore  $\vec{B}$  induzione del campo magnetico e si ricordi che in un filo rettilineo percorso da una corrente  $I$ , il modulo di  $B$  diminuisce con l'inverso della distanza  $r$  dal filo:  $B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$ .

[4] Salvo indicazioni diverse considereremo sempre campi elettrici e magnetici nel vuoto o nell'aria in cui sia la costante dielettrica, sia la permeabilità magnetica sono praticamente uguali.

$$f.e.i. = -\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$$

La reinterpretazione di Maxwell porta all'unificazione dei fenomeni elettrici e di quelli magnetici mediante un nuovo campo: il campo elettromagnetico. Questo nuovo concetto consente di prevedere l'esistenza delle onde elettromagnetiche, inglobando nella sua sintesi non solo l'elettricità e il magnetismo, ma anche l'ottica.

Verso la fine dell'Ottocento Heinrich Hertz (1857 – 1894) dimostra l'esistenza delle onde elettromagnetiche; poco dopo Guglielmo Marconi (1874 – 1937) trova un'applicazione pratica nel telegrafo senza fili ponendo le basi per l'attuale sviluppo delle telecomunicazioni.

Come si vedrà, la formulazione delle equazioni di Maxwell si fonda su due concetti: il flusso e la circuitazione.

Ogni campo vettoriale, come quello elettrico e quello magnetico, viene rappresentato con delle linee di campo, chiamate anche linee di forza le cui proprietà danno informazioni sui campi dei quali sono espressione. Il flusso e la circuitazione sono due grandezze che caratterizzano in modo univoco il campo vettoriale. Se consideriamo un qualunque campo di vettori  $\vec{v}$ , il flusso misura le linee del campo che attraversano una data superficie; in formula:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \sum \vec{v} \cdot \vec{\Delta S} = \sum v \Delta S \cos \theta. [^5]$$

La conoscenza del flusso permette di capire se il campo ha “sorgenti” o “pozzi”, ovvero se ci sono punti in cui il campo ha origine e punti in cui il campo finisce; infatti se consideriamo un qualunque campo di vettori e una qualunque superficie chiusa, un flusso nullo equivale a dire che tante sono le linee che entrano nella superficie quante sono quelle che escono e quindi non ci sono né “sorgenti” né “pozzi” di campo. Un flusso positivo o negativo è invece indicatore della presenza, rispettivamente, di una “sorgente” o di un “pozzo” di campo.

La circuitazione esprime la “vorticosità” delle linee del campo, cioè se esse sono aperte o si richiudono su se stesse. Se  $\vec{v}$  è un campo di vettori, la circuitazione di  $\vec{v}$  lungo una linea  $\ell$ , è:

$$C_\ell(\vec{v}) = \sum \vec{v} \cdot \vec{\Delta \ell} = \sum v \Delta \ell \cos \theta = \sum v_{\parallel} \Delta \ell.$$

---

[<sup>5</sup>] Nell'espressione il pallino ( $\bullet$ ) indica il prodotto scalare. Ricordo che se  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  sono due vettori, il prodotto scalare è un numero che si ottiene da:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori.

# LE EQUAZIONI DI MAXWELL

## Teorema di Gauss per il campo elettrico

Il flusso del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso una qualunque superficie chiusa  $S$  (detta anche superficie gaussiana),  $\Phi_S(\vec{E})$ , è direttamente proporzionale alla somma algebrica delle cariche in essa contenute:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum \vec{E} \cdot \vec{\Delta S} = \sum E \cdot \Delta S \cdot \cos \theta = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

## Teorema di Gauss per il campo magnetico

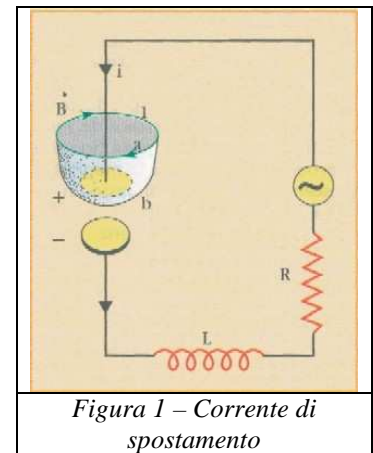
Il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  attraverso una qualunque superficie chiusa  $S$ ,  $\Phi_S(\vec{B})$ , è nullo:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \sum \vec{B} \cdot \vec{\Delta S} = \sum B \cdot \Delta S \cos \theta = 0$$

## Legge di Faraday – Neumann – Lenz

La circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa  $\ell$ ,  $C_\ell(\vec{E})$ , è uguale alla variazione del flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie  $S$  che ha la linea  $\ell$  come bordo:

$$C_\ell(\vec{E}) = - \frac{\Delta \Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$$



## Legge di Ampère – Maxwell

La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa  $\ell$ ,  $C_\ell(\vec{B})$ , è direttamente proporzionale alla somma della corrente di conduzione,  $I_C$ , e alla corrente di spostamento,  $I_S$ , concatenate con la linea  $\ell$ :

$$C_\ell(\vec{B}) = \mu_0 (I_C + I_S)$$

La corrente di spostamento [6] è proporzionale alla variazione nel tempo del flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie  $S$  che ha la linea  $\ell$  come bordo:

[6] Si consideri il circuito in figura 1; è evidente un assurdo: se consideriamo il percorso  $\ell$ , per il teorema di Ampère si ha che la circuitazione del campo magnetico lungo  $\ell$  è diversa da zero se consideriamo la superficie a, è invece zero se consideriamo la superficie b. Questo paradosso è stato risolto da Maxwell introducendo la corrente di spostamento. Mentre il condensatore si carica, tra le armature si crea un campo elettrico: il modulo dell'intensità del campo elettrico tra le armature di un condensatore è  $E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$ . Quando, in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , la carica viene modificata di una

quantità  $\Delta q$ , si determina anche una variazione del modulo dell'intensità del campo elettrico  $\Delta E = \frac{\Delta q}{\epsilon_0 A}$ . La variazione

di carica  $\Delta q$  è dovuta alla corrente uscente dal generatore e, poiché l'intensità di corrente è data da  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ , la variazione

di carica si può scrivere nella forma:  $\Delta q = I \Delta t$ , per cui la variazione del campo elettrico è  $\Delta E = \frac{I \Delta t}{\epsilon_0 A}$ . Risolvendo

$$I_S = \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}$$

La corrente di conduzione,  $I_C$ , concatenata è quella che attraversa una qualunque superficie che ha la linea  $\ell$  come bordo.

Riassumendo:

Teorema di Gauss per il campo elettrico	$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$
Teorema di Gauss per il campo magnetico	$\Phi_S(\vec{B}) = 0$
Legge di Faraday – Neumann – Lenz	$C_\ell(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$
Legge di Ampère - Maxwell	$C_\ell(\vec{B}) = \mu_0 (I_C + I_S)$

Come si è già accennato, una delle conseguenze delle equazioni di Maxwell è l'esistenza del campo elettromagnetico che si propaga per mezzo delle cosiddette onde elettromagnetiche, queste altro non sono che un fenomeno ondulatorio dovuto alla propagazione contemporanea di perturbazioni periodiche di un campo elettrico e di un campo magnetico che oscillano in piani tra di loro ortogonali: in altre parole le onde elettromagnetiche altro non sono che un campo elettrico e un campo magnetico che oscillano su piani perpendicolari e in fase tra di loro (cioè quando uno dei due campi è massimo, è massimo anche l'altro, quando uno è minimo è minimo anche l'altro). Più avanti dimostreremo che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è la velocità della luce.

Heinrich Rudolf Hertz (Amburgo, 22 febbraio 1857 – Bonn, 1° gennaio 1894) fu il primo che dimostrò l'esistenza delle onde elettromagnetiche con un apparato di sua costruzione, il dipolo hertziano, in grado di emettere onde radio, a confermare l'esistenza delle cosiddette onde hertziane ed a misurarne la velocità.

Consideriamo ora un campo elettrico o un campo, magnetico variabile in modo sinusoidale nel vuoto (o nell'aria), quel campo si propaga nel vuoto come un'onda elettromagnetica sinusoidale, vedi figura 2. Il vettore intensità del campo elettrico è in ogni istante perpendicolare al vettore induzione del campo magnetico e, quindi, l'onda elettrica è in ogni istante perpendicolare all'onda magnetica.

L'onda elettrica si può rappresentare matematicamente, come qualsiasi onda, nella forma:

quest'ultima equazione rispetto all'intensità di corrente  $I$ , si ottiene:  $I = \epsilon_0 A \frac{\Delta E}{\Delta t}$ , dove  $\frac{\Delta E}{\Delta t}$  è la rapidità di variazione nel tempo del modulo dell'intensità del campo elettrico tra le armature (per  $\Delta t \rightarrow 0$  è la derivata del campo elettrico fatta rispetto al tempo). Il termine  $A \frac{\Delta E}{\Delta t}$  è la variazione del flusso del campo elettrico e il risultato ottenuto nel caso del

condensatore, è generalizzabile e si scrive  $I_S = \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}$ , ovvero, una variazione del flusso del campo elettrico equivale a una corrente che Maxwell chiamò **corrente di spostamento**  $I_S$ . L'introduzione del concetto di corrente di spostamento permette di superare il paradosso in quanto il teorema di Ampère è ora valido anche per la superficie  $b$  in quanto la circuitazione del campo magnetico è dovuta non ad un movimento di cariche, ma alla variazione del flusso del campo elettrico.

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

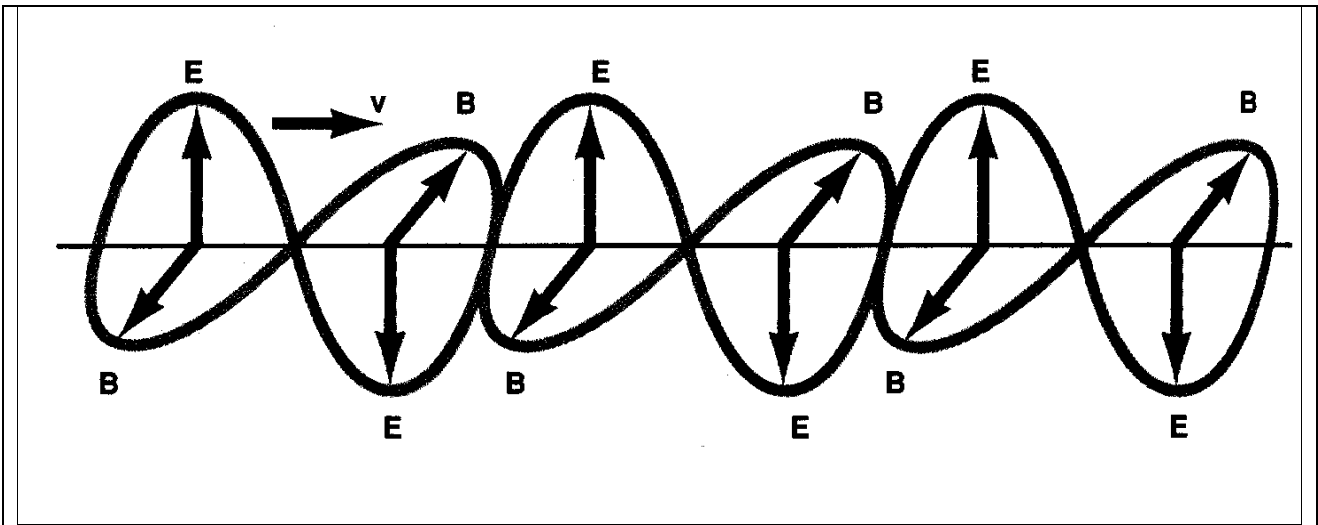


Figura 2 – Onda elettromagnetica sinusoidale

dove  $E_0$  è il valore massimo dell'intensità del campo elettrico ed è l'ampiezza dell'onda elettrica ed  $E$  è il valore dell'intensità del campo elettrico in una posizione  $x$  e a un istante  $t$  arbitrari. L'onda magnetica si può scrivere analogamente nella forma:

$$B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

dove  $B_0$  è il valore massimo dell'induzione magnetica ed è l'ampiezza dell'onda magnetica e  $B$  è il valore dell'induzione magnetica in una posizione  $x$  e ad un istante  $t$  arbitrari.  $k$  è il numero d'onda, dato da  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  mentre  $\omega$  è la pulsazione dell'onda, data da  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda,  $T$  è il suo periodo e  $f$  è la sua frequenza. È quindi logico supporre che debba esistere un gran numero di onde elettromagnetiche, che differiscono soltanto nella lunghezza d'onda e nella frequenza.

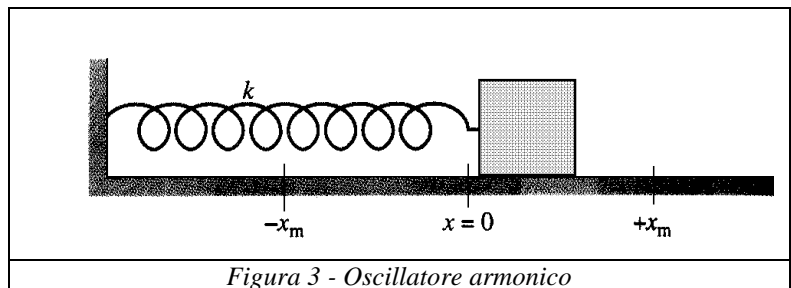
Quasi tutto ciò che si è detto riguardo alle onde è valido per le onde elettromagnetiche. Le onde elettromagnetiche si possono riflettere e trasmettere; vale il principio di sovrapposizione e quindi si possono sommare un numero arbitrario di onde elettromagnetiche; si possono produrre onde elettromagnetiche stazionarie e si osserva anche un effetto Doppler. La differenza principale tra le onde meccaniche e le onde elettromagnetiche è il mezzo di propagazione: all'epoca della loro scoperta si riteneva che dovessero propagarsi nell'etere, ma un esperimento fondamentale effettuato dai fisici americani Michelson e Morley alla fine dell'800 dimostrò che si possono propagare anche nel vuoto.

# OSCILLAZIONI MECCANICHE ED ELETTROMAGNETICHE

## OSCILLATORE MECCANICO

Consideriamo un sistema meccanico costituito da una massa  $m$  attaccata ad una molla di costante elastica  $k$  come in figura 3.

Spostando la massa dalla posizione di equilibrio  $x = 0$  alla posizione  $x = x_m$  e lasciata andare (sia questo l'istante  $t = 0$ , allora  $v = 0$ ), questa comincerà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio. Per il momento trascuriamo gli attriti.



La forza che causa il moto della massa è la forza elastica il cui modulo è  $F = -kx$ , quindi per la seconda legge della dinamica ( $F = ma$ ) possiamo scrivere:

$$1) \quad ma = -kx.$$

Ricordiamo che la posizione della massa  $x = x(t)$  è una funzione del tempo e dalle definizioni di velocità e di accelerazione, queste sono la derivata prima e seconda della posizione<sup>[7]</sup>; possiamo scrivere:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad e \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'equazione (1) può essere riscritta nella forma:

$$2) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

posto

$$3) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la (2) può essere scritta nella forma:

---

<sup>[7]</sup> Ricordiamo che la velocità media è, per definizione, il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo: sia quindi  $x = x(t)$  la legge oraria di un dato moto, consideriamo gli istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ , dalla definizione abbiamo  $v_m = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$  e questo altro non è che un rapporto incrementale. La velocità istantanea è per

definizione il limite per  $\Delta t$  che tende a zero della velocità media, ossia:  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ , quindi, se questo limite esiste è la derivata di  $x(t)$  nell'istante  $t$ . In fisica si usa spesso scrivere questa derivata con il simbolo  $v = \frac{d}{dt}x(t)$ , o più semplicemente  $v = \frac{dx}{dt}$ . In modo analogo, essendo l'accelerazione media il rapporto tra la

variazione della velocità e l'intervallo di tempo in cui è avvenuta, si ha  $a = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ , o più

semplicemente  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

$$4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x .$$

$\omega$  è detta pulsazione e ricordiamo che alla pulsazione è legato anche il periodo dell'oscillazione  $T$  mediante la relazione

$$5) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

La (2) è una equazione differenziale lineare del secondo ordine; tecniche matematiche permettono di ricavare la soluzione che, nella forma più generale, può essere scritta:

$$6) \quad x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

dove  $A$  e  $\varphi$  sono parametri legati alle condizioni iniziali di posizione e velocità. Nel nostro caso le condizioni sono  $x(0) = x_m$  e  $v(0) = 0$  e la soluzione è

$$7) \quad x(t) = x_m \cos \omega t$$

Lo studente verifichi che, qualunque siano i valori di  $A$  e  $\varphi$ , la (6) soddisfa la (2) se vale la (5) e che le condizioni iniziali portano alla (7).

Non essendoci attrito c'è conservazione dell'energia meccanica  $E(t)$  che in ogni istante è data dalla somma dell'energia potenziale elastica  $U(t) = \frac{1}{2}kx^2$  e dell'energia cinetica  $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$ .

Calcoliamo la velocità derivando la (7), si ha:  $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin \omega t$ . Si ricava (lo studente verifichi):

$$8) \quad E(t) = U(t) + K(t) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$$

dove è evidente che l'energia totale è costante e non dipende dal tempo ma solo dall'ampiezza dell'oscillazione. Nella figura 4(a) il grafico rappresenta l'energia potenziale  $U(t)$ , l'energia cinetica  $K(t)$  e l'energia totale  $E$  in funzione del tempo, nella figura 4(b) le stesse quantità sono rappresentate in funzione della posizione. Si noti che c'è una continua trasformazione di energia potenziale e di energia cinetica.

Consideriamo ora una situazione in presenza di attrito. Il moto dell'oscillatore sarà allora smorzato dalla presenza di una forza d'attrito (o forza di smorzamento)  $F_{sm}$  che è direttamente proporzionale alla velocità, ma ovviamente diretta in senso opposto, del tipo:

$$9) \quad F_{sm} = -bv$$

$b$  è detta costante di smorzamento. La seconda legge della dinamica si scrive:

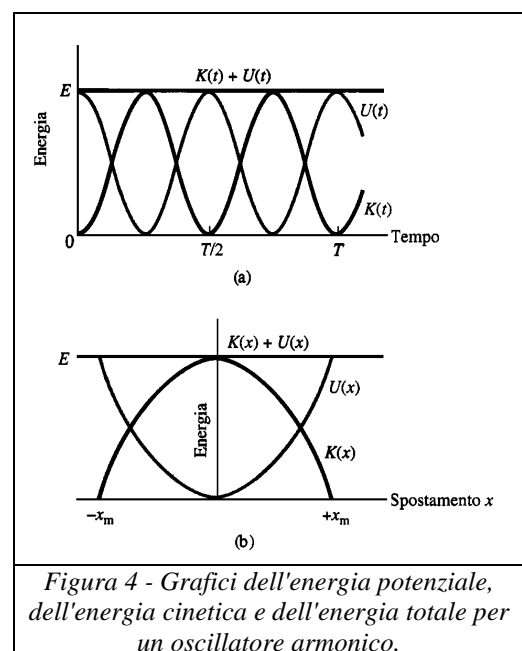


Figura 4 - Grafici dell'energia potenziale, dell'energia cinetica e dell'energia totale per un oscillatore armonico.



$$10) \quad ma = -kx - bv$$

che, utilizzando l'espressione differenziale di v e a, può essere scritta:

$$11) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

la cui soluzione è data da:

$$12) \quad x(t) = x_m e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega_{sm} t + \varphi)$$

dove, come sopra,  $x_m$  e  $\varphi$  dipendono dalle condizioni iniziali di posizione e velocità, mentre

$$13) \quad \omega_{sm} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

è la pulsazione dell'oscillatore smorzato.

Possiamo considerare la (12) come un'oscillazione in cui l'ampiezza  $A(t) = x_m e^{-\frac{bt}{2m}}$  è una funzione del tempo che tende a zero (vedi figura 5).

Se  $b = 0$  (assenza di smorzamento, cioè assenza d'attrito) la (13) si riduce alla (3) e la (12) alla (6).

Se lo smorzamento è piccolo cioè se  $b \ll \sqrt{2m}$  (per cui il termine  $b^2/4m^2$  è trascurabile) si ha ancora  $\omega_{sm} \approx \omega$ .

Per l'oscillatore smorzato l'energia meccanica non è costante, ma diminuisce nel tempo. Se lo smorzamento è piccolo  $E(t)$  si ottiene dalla (8) sostituendo  $A(t)$  al posto di  $x_m$  e si ha:

$$14) \quad E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}}$$

secondo la quale l'energia meccanica diminuisce nel tempo in modo esponenziale.

Se consideriamo la nostra massa che si muove in presenza di attrito ci troviamo in presenza di una cosiddetta *oscillazione libera*, questa dopo un certo tempo, a causa dello smorzamento, si ferma. È possibile però evitare ciò tirando la massa ritmicamente, abbiamo quindi *oscillazioni forzate*. Si ha a che fare in questo caso con due differenti pulsazioni: (1) la pulsazione *naturale* del sistema (che indicheremo con  $\omega_0$ ), quella cioè che assumerebbe se la massa fosse spostata dalla sua posizione di equilibrio e lasciata oscillare liberamente e, (2) la pulsazione della forza esterna che agisce sul sistema (che indicheremo con  $\omega$ ). Un oscillatore forzato oscillerà sempre alla pulsazione  $\omega$  della forza impressa, e il suo spostamento sarà

$$15) \quad x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

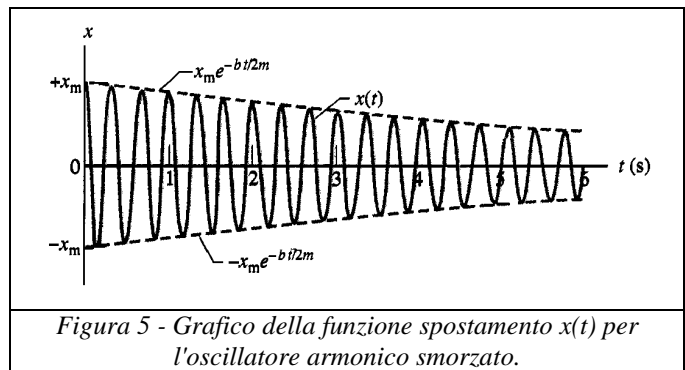


Figura 5 - Grafico della funzione spostamento  $x(t)$  per l'oscillatore armonico smorzato.

dove  $x_m$  è l'ampiezza delle oscillazioni. Il valore di  $x_m$ , in questa situazione, è una complessa funzione di  $\omega_0$  e di  $\omega$ . Il valore massimo della velocità delle oscillazioni si può descrivere più facilmente, la velocità raggiunge tale valore massimo quando si verifica la condizione di **risonanza** in cui è

$$16) \quad \omega = \omega_0$$

È questa la condizione che con una certa approssimazione rende massima anche l'ampiezza dell'oscillazione. È per questo motivo che se si spinge un'altalena ad un ritmo corrispondente alla sua pulsazione naturale, le ampiezze massime dello spostamento e della velocità raggiungeranno valori molto grandi. Se invece si spinge ad un ritmo diverso, più veloce o più lento, spostamenti e velocità massimi saranno minori.

## OSCILLATORE ELETTROMAGNETICO

Consideriamo il circuito di figura 6 (circuito LC) in cui sono presenti un condensatore di capacità  $C$ , sulle cui armature è presente una carica  $Q$ , e un'induttanza  $L$ . Chiudendo il circuito la carica fluisce dal condensatore creando una corrente che genera un campo magnetico nell'induttanza. In ogni istante, se trascuriamo la resistenza del circuito, l'energia totale del sistema è data dalla somma dell'energia del campo elettrico del condensatore

$$17) \quad E_c(t) = \frac{q^2}{2C}$$

e dell'energia del campo magnetico nell'induttanza

$$18) \quad E_L(t) = \frac{1}{2} Li^2;$$

questa si conserva ed è uguale all'energia iniziale del campo elettrico del condensatore

$$19) \quad E_c(0) = \frac{Q^2}{2C}.$$

Si ha:

$$20) \quad \frac{Q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} Li^2$$

Ricordando che la corrente è una funzione del tempo  $i = i(t)$ , che, per definizione, la corrente la è la quantità di carica che passa attraverso la sezione del conduttore nel tempo  $i = \frac{dq}{dt}$  e che

$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dq}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , derivando la (20) rispetto al tempo e semplificando si

$$\text{ottiene: } 0 = \frac{1}{C} \cdot \cancel{2} q \cancel{2} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} L \cdot \cancel{2} \cancel{2} \frac{di}{dt}$$

$$21) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{C}$$

che è formalmente identica alla (2) e ponendo

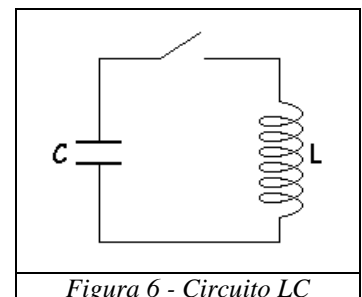


Figura 6 - Circuito LC

$$22) \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

la (21) può essere scritta nella forma:

$$23) \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q.$$

Quindi, per analogia, con la (4) e la (23) hanno la soluzione formalmente identica:

$$24) \quad q(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

dove A e  $\varphi$  sono parametri legati alle condizioni iniziali di carica e corrente. Nel nostro caso le condizioni sono  $q(0) = Q$  e  $i(0) = 0$  e la soluzione è

$$25) \quad q(t) = Q \cos \omega t.$$

che esprime come varia la carica sulle armature del condensatore. Derivando rispetto a t la (25) si ottiene l'espressione per la corrente nel circuito:

$$26) \quad i(t) = -\omega Q \sin \omega t.$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte sopra si può analizzare come varia l'energia del campo elettrico e quella del campo magnetico; si ha:

$$27) \quad E_C(t) = \frac{Q^2}{2C} \cos^2 \omega t$$

più l'energia del campo magnetico nell'induttanza

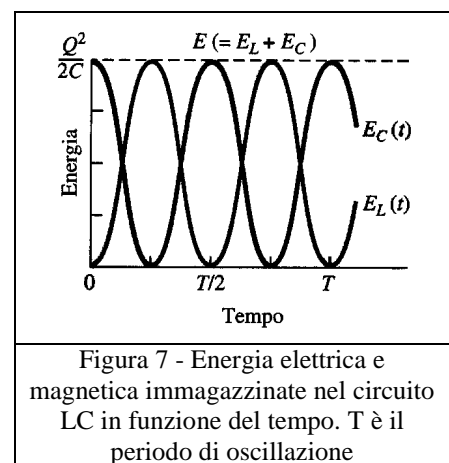
$$28) \quad E_L(t) = \frac{1}{2} L \omega^2 Q^2 \sin^2 \omega t = \frac{Q^2}{2C} \sin^2 \omega t.$$

La figura 5 mostra i grafici di  $E_C(t)$  e di  $E_L(t)$ . Si noti che:

- I valori massimi di  $E_C(t)$  e di  $E_L(t)$  sono uguali  $\left( = \frac{Q^2}{2C} \right)$ .
- In un qualunque istante la somma di  $E_C(t)$  e di  $E_L(t)$  è costante  $\left( = \frac{Q^2}{2C} \right)$ .
- Quando  $E_C(t)$  raggiunge il suo valore massimo,  $E_L(t)$  è uguale a zero e viceversa.

Se è presente una resistenza, in serie, si parla di circuito RLC. Con la resistenza l'energia del circuito non è più costante nel tempo, ma viene dissipata ad un ritmo la cui potenza è data da

$$29) \quad \frac{dE}{dt} = -Ri^2.$$



Per analizzare le oscillazioni di questo circuito scriviamo un'espressione per l'energia elettromagnetica totale  $E$  del circuito a un certo istante. Dato che la resistenza non immagazzina energia elettromagnetica, possiamo scrivere

$$30) \quad E = E_C + E_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} Li^2 .$$

Derivando e tenendo conto della (29), ordinando i termini, si ottiene:

$$31) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

che è l'equazione differenziale che descrive le oscillazioni smorzate in un circuito RLC ed è formalmente identica alla (11) per le oscillazioni meccaniche in presenza d'attrito. La soluzione si può scrivere nella forma:

$$32) \quad q(t) = Q e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega' t + \varphi)$$

in cui

$$33) \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

è la pulsazione dell'oscillatore smorzato.

Possiamo considerare la (32) come un'oscillazione in cui l'ampiezza,  $A(t) = Q e^{-\frac{Rt}{2L}}$ , è una funzione decrescente del tempo e che tende a zero. Si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte per l'oscillatore meccanico.

Se  $R = 0$  (assenza di smorzamento, cioè assenza resistenza) la (33) si riduce alla (22) e la (13) alla (25).

Se lo smorzamento è piccolo cioè se  $R \ll \sqrt{2L}$  (per cui il termine  $R^2/4L^2$  è trascurabile) si ha ancora  $\omega' \approx \omega$ . Per l'oscillatore smorzato l'energia elettromagnetica non è costante, ma diminuisce nel tempo. L'energia del campo elettrico del condensatore è data quindi da:

$$34) \quad E_C(t) = \frac{Q^2}{2C} e^{-\frac{Rt}{L}} \cos^2(\omega' t + \varphi) .$$

Questa equazione indica che l'energia del campo elettrico oscilla secondo un termine in coseno al quadrato e che l'ampiezza dell'oscillazione decresce esponenzialmente nel tempo. L'energia elettromagnetica nel circuito viene immagazzinata completamente nel condensatore quando  $E_C(t)$  raggiunge il massimo, cioè quando  $\cos^2(\omega' t + \varphi) = 1$ . Introducendo questa nella (34) si può ricavare l'espressione per l'energia totale:

$$35) \quad E(t) = \frac{Q^2}{2C} e^{-\frac{Rt}{L}} .$$

Abbiamo visto che sia nei circuiti liberi LC sia nei circuiti smorzati RLC (purché  $R$  sia sufficientemente piccola), una volta avviate, la carica e la corrente oscillano alla pulsazione

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ . Queste sono dette *oscillazioni libere* (libere da condizionamenti di f.e.m. esterne), e la pulsazione  $\omega$  è detta *pulsazione propria* del circuito.

I circuiti RLC perdono energia e quindi dopo un certo tempo le oscillazioni non sono più osservabili. Per mantenerle attive bisogna collegare il circuito ad un generatore di f.e.m. alternata e le oscillazioni della carica e della corrente sono chiamate *oscillazioni forzate*. Se indichiamo con  $\omega_g$  la pulsazione della f.e.m. esterna, allora qualunque sia la pulsazione propria  $\omega$  del circuito, le oscillazioni forzate di carica e corrente avvengono sempre alla pulsazione generatrice  $\omega_g$ .

Nelle oscillazioni forzate, l'ampiezza della corrente nel circuito è massima quando

$$36) \quad \omega_g = \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

è questa la frequenza di risonanza.

Per la produzione di onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda dell'ordine del metro ( $\lambda = 1 \text{ m}$ ) è necessario un dispositivo, riprodotto in figura 6, dove il cuore è un oscillatore LC che stabilisce una

pulsazione  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

Cariche e correnti in questo circuito variano sinusoidalmente a questa frequenza. Si deve prevedere una sorgente esterna per fornire l'energia atta a compensare sia le perdite per dissipazione termica del circuito sia l'energia trasportata via dall'onda elettromagnetica irradiata. L'oscillatore LC di figura 6 è accoppiato tramite un trasformatore e attraverso una linea di trasmissione ad un'antenna, che consiste essenzialmente in due sottili aste conduttrici. A causa di questo accoppiamento, la corrente variabile sinusoidalmente nell'oscillatore fa oscillare sinusoidalmente la carica lungo le aste dell'antenna alla pulsazione  $\omega$  dell'oscillatore LC. È questo il dispositivo che sta alla base della produzione delle onde elettromagnetiche mediante un dipolo oscillante.

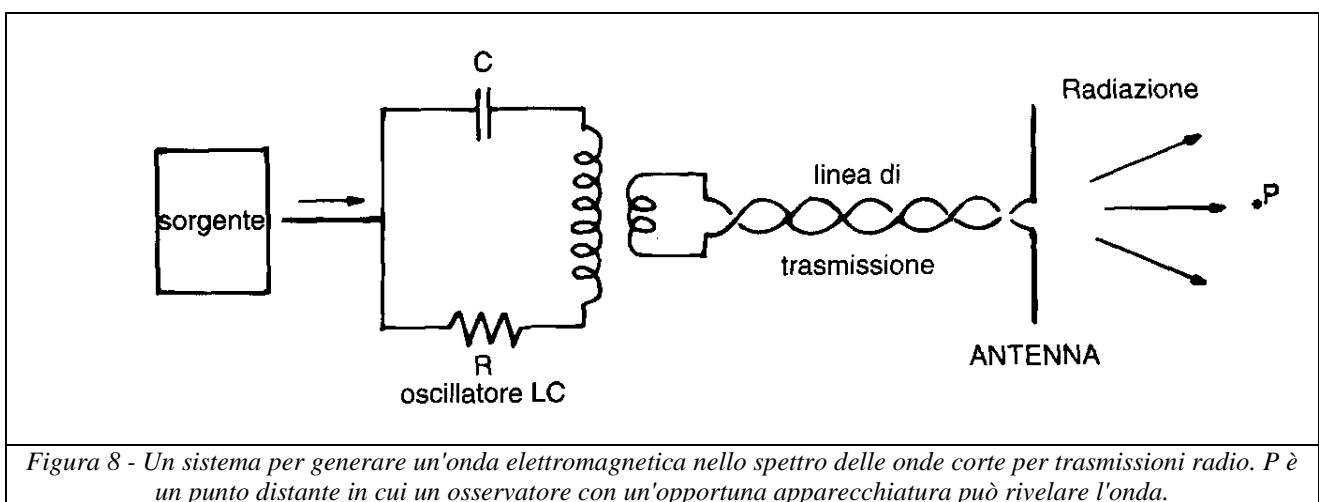


Figura 8 - Un sistema per generare un'onda elettromagnetica nello spettro delle onde corte per trasmissioni radio. P è un punto distante in cui un osservatore con un'opportuna apparecchiatura può rivelare l'onda.

## PRODUZIONE DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA MEDIANTE UN DIPOLO OSCILLANTE

Il campo elettrostatico di un dipolo è stato presentato nella figura 9(a) riprodotta nella pagina della pagina seguente. Come è noto, il campo elettrico di intensità  $E$  si origina dalla carica puntiforme

positiva e termina sulla carica puntiforme negativa. Che cosa accade a questo campo elettrico se si permette che le posizioni delle cariche che costituiscono il dipolo varino nel tempo?

La figura 9(b) rappresenta due tratti di filo conduttore collegati a una sorgente di corrente alternata. All'istante indicato, una carica positiva è fluita dalla sorgente di corrente alternata e si trova all'estremo inferiore del filo superiore. Mentre questa carica è fluita dalla sorgente, un'altra carica, che era inizialmente all'estremo superiore del filo inferiore è fluita nella sorgente di corrente alternata lasciando una carica negativa all'estremo superiore del filo inferiore. All'istante indicato, è stato prodotto un dipolo elettrico. Nella figura sono rappresentate soltanto due delle molte linee del campo elettrico che sono presenti nello spazio attorno al dipolo. Dopo un breve intervallo di tempo, la carica positiva è fluita fino al centro del filo superiore, mentre la carica negativa equivalente si trova nel centro del filo inferiore, come è indicato nella figura 9(c). La configurazione è ancora quella di un dipolo elettrico, ma la distanza tra le cariche va crescendo nel tempo e le due linee del campo elettrico rappresentate nella figura 9(b) si sono ingrandite al crescere della distanza tra le cariche, come è indicato nella figura 9(c). Nella figura 9(d), le cariche si sono arrestate istantaneamente agli estremi dei fili. Ora rappresentiamo soltanto una linea del campo elettrico, e la linea del campo elettrico del dipolo si è ingrandita. Nella figura 9(e) le cariche hanno invertito il verso del moto e si trovano di nuovo nel centro di ciascun filo. Il punto origine e il punto termine del campo elettrico cominciano ad avvicinarsi. Nella figura 9(f) le cariche si sono quasi riunite. Quando la f.e.m. alternata della sorgente assume il valore zero, la linea del campo elettrico si chiude su sé stessa, come è indicato nella figura 9(g), poiché non ci sono più cariche elettriche da cui il campo elettrico possa originarsi o su cui il campo elettrico possa terminare. Nella figura 9(h) la f.e.m. si è invertita e la carica positiva si trova ora all'estremo superiore del filo inferiore, mentre la carica negativa si trova all'estremo inferiore del filo superiore. Il verso della linea del campo elettrico si è invertito. Il processo illustrato nelle figure da 9(b) a 9(g) continua nelle figure da 9(i) a 9(m), ma con il verso della linea del campo elettrico invertito.

L'esame della figura non ha ancora fornito l'intero quadro della generazione di un'onda elettromagnetica. Il movimento verso l'alto della carica positiva nel filo superiore della figura 9(b) rappresenta una corrente in un filo conduttore. A tale corrente in un filo conduttore rettilineo è associato un campo magnetico, vedi figura 9(b). Nella figura è indicata anche l'induzione del campo magnetico con una crocetta X che denota il punto origine del vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  (la coda della freccia che lo rappresenta), il quale è perpendicolare al piano del foglio e orientato nel verso entrante nel piano. Il movimento verso il basso della carica negativa nel filo inferiore della figura 9(b) equivale al movimento di una carica positiva verso l'alto. Quindi, c'è un campo magnetico anche attorno al filo inferiore della figura 9(b), come è indicato. Nella figura 9(c), l'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  ha la stessa direzione orientata che ha nella figura 9(b). Nella figura 9(d), però, la carica si è arrestata istantaneamente all'estremo del filo. Poiché in questo punto la carica è in quiete, non c'è corrente e quindi non c'è campo magnetico attorno al filo. Mentre la carica sul filo superiore fluisce all'ingiù fino al centro del filo, la corrente fluisce verso il basso e quindi l'induzione del campo magnetico associato a questa corrente è ora orientata nel verso uscente dal piano del foglio, come è indicato dal punto circolettato nella figura 9(e), il quale denota il punto termine del vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  (la punta della freccia che lo rappresenta). L'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  continua a uscire dal piano del foglio nelle figure 9(f) e 9(g).

Nella figura 9(h), una carica negativa comincia a muoversi verso l'alto dall'estremo inferiore del filo superiore, mentre una carica positiva comincia a muoversi verso il basso dall'estremo superiore del filo inferiore. Il movimento di una carica negativa verso l'alto equivale al movimento di una carica positiva verso il basso. Perciò l'induzione del campo magnetico associato a questa corrente è orientata nel verso uscente dal piano del foglio a destra del dipolo come è indicato nella figura 9(h). L'induzione magnetica continua ad uscire dal piano del foglio fino alla figura 9(i). Nella figura 9(j), la carica si arresta istantaneamente agli estremi del filo e l'induzione magnetica si è annullata. Nella figura 9(k), la carica negativa sul filo superiore si muove verso il basso, mentre la carica positiva sul filo inferiore si muove verso l'alto. Questo movimento di cariche equivale a una corrente totale di intensità  $i$  che fluisce verso l'alto in entrambi i fili e quindi l'induzione del campo magnetico

associato a questa corrente è orientata nel verso entrante nel piano del foglio a destra del dipolo, come è indicato nella figura 9(k) e continua a esserlo nella figura 9(l). Nella figura 9(m), la corrente si è annullata istantaneamente e quindi si è annullata l'induzione magnetica. Perciò, un dipolo oscillante ha generato attorno a sé un campo elettrico variabile e un campo magnetico variabile. Questi campi sono rappresentati soltanto a destra del dipolo, ma esistono anche a sinistra del dipolo, e all'esterno del piano della figura, estendendosi simmetricamente verso l'esterno.

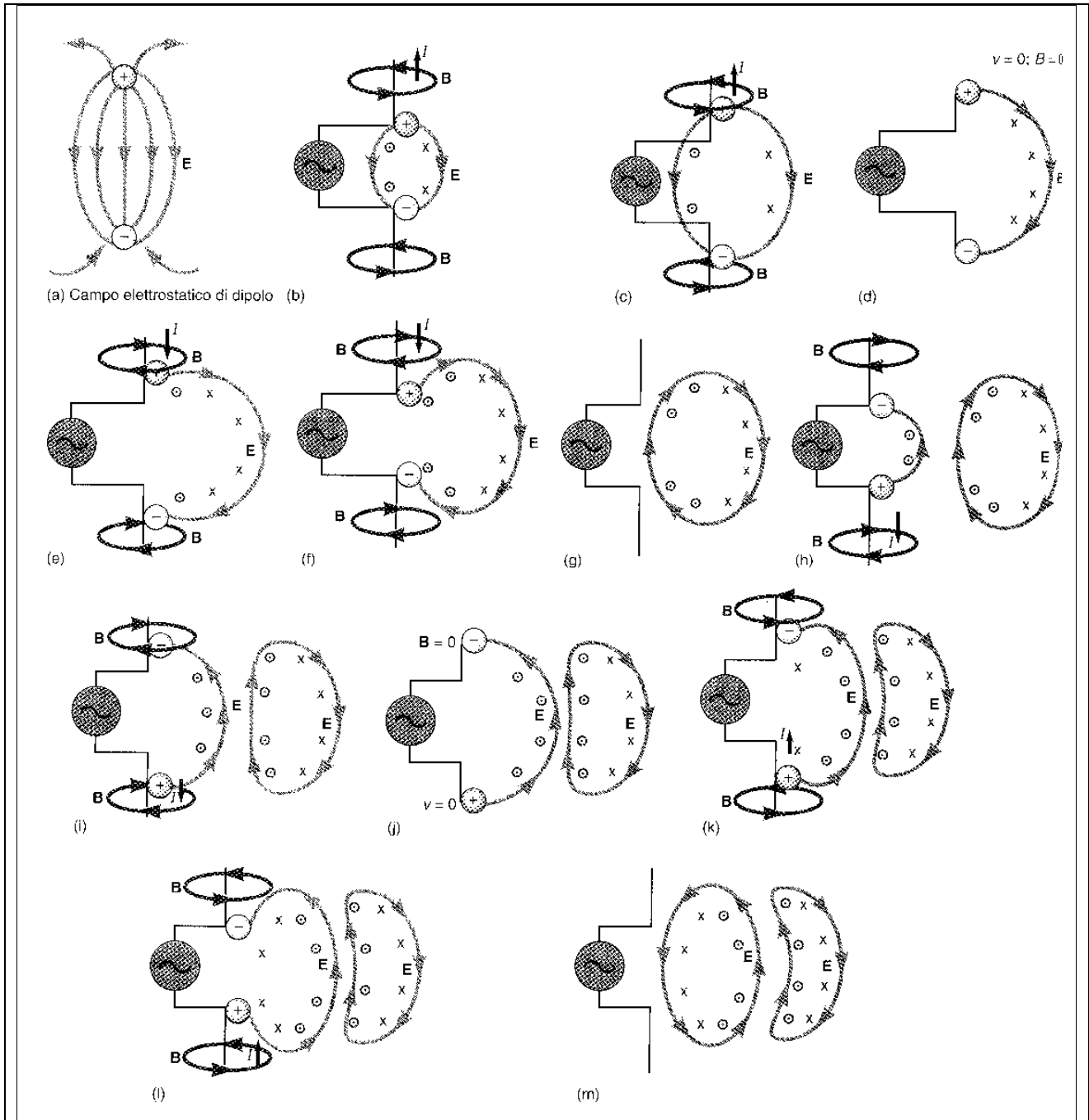


Figura 9 – Produzione di un'onda elettromagnetica mediante un dipolo oscillante

## VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

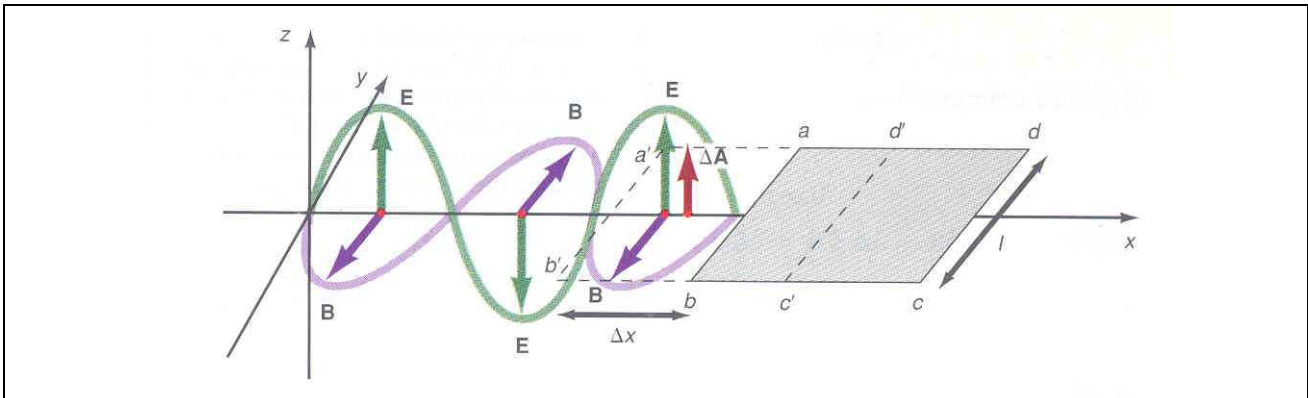


Figura 10 – Velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche

Consideriamo l'onda elettromagnetica che si propaga verso destra in figura 10; ad un certo istante l'onda comincia appena a propagarsi attraverso la spiria di filo conduttore abcd, giacente nel piano xy (supponiamo che la spiria abbia resistenza infinita e quindi la corrente di conduzione  $I_C$  sia nulla; per le considerazioni che faremo non è necessario che abcd sia una spiria reale, è sufficiente che sia una linea chiusa). Sebbene l'onda elettromagnetica si propaghi verso destra, si può considerare altrettanto validamente che l'onda sia in quiete e la spiria si muova verso sinistra alla stessa velocità  $v$ . Nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  la spiria avrà percorso uno spazio  $\Delta x$  verso sinistra, raggiungendo successivamente la posizione  $a'b'c'd'$ . Mentre la spiria si muove, il flusso elettrico concatenato con essa varia: applichiamo alla spiria il teorema di Ampère. Quindi, l'unica corrente presente nella spiria è la corrente di spostamento. Perciò,

$$37) \quad \sum B_{\parallel} \Delta l = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t}$$

La variazione del flusso elettrico concatenato con la spiria in moto è

$$38) \quad \Delta \Phi_E = E \Delta A \cos \theta.$$

Supponiamo che la variazione dell'area della spiria,  $\Delta A$ , sia tanto piccola quanto basta affinché l'intensità del campo elettrico  $E$  sia costante in tutta quella piccola area. Poiché il vettore  $\mathbf{E}$  e il vettore  $\Delta \mathbf{A}$  sono paralleli e concordi,

$$39) \quad E \Delta A \cos \theta = E \Delta A \cos 0 = E \Delta A$$

La variazione di area  $\Delta A$  è l'area del rettangolo  $aa'bb'$ , che è:

$$40) \quad \Delta A = l \Delta x$$

Introducendo i risultati delle equazioni (38), (39), (40) nell'equazione (37) per il teorema di Ampère, si ottiene

$$41) \quad \sum B_{\parallel} \Delta l = \mu_0 \epsilon_0 E \frac{\Delta A}{\Delta t} = \mu_0 \epsilon_0 E l \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Poiché la spiria si muove verso sinistra a velocità  $v$ , la distanza  $\Delta x$  è,



$$42) \quad \Delta x = v \Delta t$$

Sostituendo l'equazione (42) nell'equazione (41), si ottiene

$$43) \quad \sum B_{\parallel} \Delta l = \mu_0 \epsilon_0 E l \frac{v \Delta t}{\Delta t} = \mu_0 \epsilon_0 E l v$$

Consideriamo ora il primo membro dell' equazione (43) che esprime il teorema di Ampere e calcoliamo  $\sum B_{\parallel} \Delta l$  lungo la spira abcd. La somma  $\sum B_{\parallel} \Delta l$  lungo l'intera spira è uguale alla somma di  $B_{\parallel} \Delta l$  lungo i cammini ab, bc, cd e da. Cioè,

$$44) \quad \sum B_{\parallel} \Delta l = \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{ab} + \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{bc} + \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{cd} + \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{da}$$

Consideriamo ciascun termine separatamente.

1. Lungo il cammino ab B è costante e ha la stessa direzione orientata di  $\Delta l$  e quindi

$$45) \quad \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{ab} = \sum B \Delta l \cos 0 = \sum B \Delta l = B \sum \Delta l = B l$$

2. Lungo il cammino bc B è perpendicolare a  $\Delta l$  lungo il tratto del cammino bc che l'onda ha appena raggiunto e quindi

$$46) \quad \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{bc} = \sum B \Delta l \cos 90^\circ = 0$$

Lungo il tratto del cammino bc che l'onda non ha ancora raggiunto, B sarà nullo. Quindi,  $\sum (B_{\parallel} \Delta l)_{bc} = 0$  lungo l'intero cammino bc.

3. Lungo il cammino cd: l'onda non ha ancora raggiunto il cammino cd e quindi B = 0 lungo questo cammino; perciò,

$$47) \quad \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{cd} = 0$$

4. Lungo il cammino da: B è perpendicolare a  $\Delta l$  lungo quel tratto del cammino da che l'onda ha raggiunto e quindi

$$48) \quad \sum (B_{\parallel} \Delta l)_{da} = \sum B \Delta l \cos 90^\circ = 0$$

Lungo il tratto del cammino da che l'onda non ha ancora raggiunto, B sarà nullo. Quindi,  $\sum (B_{\parallel} \Delta l)_{da} = 0$  lungo l'intero cammino da.

Sostituendo le equazioni (45), (46), (47), (48) nell'equazione (44), che esprime il teorema di Ampère, si ottiene

$$49) \quad \sum B_{\parallel} \Delta l = Bl$$

Sostituendo l'equazione (49) nell'equazione (43) si ottiene

$$50) \quad Bl = \mu_0 \epsilon_0 Elv$$

da cui segue:

$$51) \quad B = \mu_0 \epsilon_0 Ev$$

Nella trattazione della legge di Faraday-Neumann si è già visto che la relazione tra B ed E è

$$52) \quad E = vB \text{ [}^8\text{]}$$

(vedi la seconda equazione della nota [7] in cui si è posto  $\theta = 90^\circ$  per cui  $\text{sen}\theta = 1$ )

Sostituendo l'equazione (52) nell'equazione (51), si ottiene

$$53) \quad B = \mu_0 \epsilon_0 v^2 B$$

Da cui si ottiene la velocità di propagazione dell'onda,  $v$ :  $1 = \mu_0 \epsilon_0 v^2$

$$54) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} .$$

L'equazione (54) dà la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica. Introducendo nell'equazione i valori di  $\epsilon_0$  e di  $\mu_0$ , si ottiene il seguente valore della velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica:

$$55) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2) [8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)]}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} .$$

Ma  $3,00 \cdot 10^8$  m/s è la velocità della luce, denotata di solito con il simbolo  $c$ . Quindi, un'onda elettromagnetica si propaga alla velocità della luce. Questo risultato indusse Maxwell a ipotizzare che la luce dovesse essere un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda e frequenza appropriate, una previsione confermata molte volte da allora in poi. Se si denota con  $c$  la velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica, l'equazione (22) diventa

$$56) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} .$$

---

[<sup>8</sup>] Nella determinazione dalle legge di Faraday – Neumann abbiamo visto che la forza che agisce su una carica  $q$  posta in un filo che si muove con velocità  $v$  in un campo di induzione magnetica  $B$  è data dell'espressione  $F = qvB\text{sen}\theta$  da

ciò si ricava che nel filo si viene a costituire un campo elettrico  $E$  dato da:  $E = \frac{F}{q} = vB\text{sen}\theta$  .

È da notare anche la semplice relazione che lega campo elettrico, induzione magnetica e velocità della luce:

$$57) \quad E = cB .$$

## DENSITA' DI ENERGIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO E INTENSITA' DELL'ONDA ELETTROMAGNETICA

Ricordando che la densità di energia del campo elettrico è data da

$$58) \quad u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

e che la densità di energia del campo magnetico

$$59) \quad u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

si può scrivere l'espressione per la densità di energia del campo elettromagnetico:

$$60) \quad u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{(E/c)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2$$

La (60) dice che l'energia dell'onda elettromagnetica è data per metà dal campo elettrico e per metà dal campo magnetico.

Un'altra grandezza di notevole interesse è l'intensità della radiazione elettromagnetica, definita come l'energia totale riferita all'unità di area della superficie su cui incide la radiazione e all'unità di tempo. Poiché l'energia riferita all'unità di tempo è la potenza, l'intensità della radiazione si può anche definire la potenza dell'onda elettromagnetica riferita all'unità di area della superficie su cui incide l'onda; perciò:

$$61) \quad [\text{intensità}] = \frac{[\text{energia totale}]}{[\text{area}][\text{tempo}]}$$

Una superficie di area  $A$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  viene investita da una quantità di energia data densità di energia moltiplicata per il volume  $V$  del cilindro di area di base  $A$  e altezza  $h = c\Delta t$ . Si ha quindi:

$$62) \quad [\text{intensità}] = \frac{uV}{A\Delta t} = \frac{uAc\Delta t}{A\Delta t} = uc = \epsilon_0 c E^2$$

Ad esempio la costante solare è l'intensità della radiazione solare incidente sulla regione superiore dell'atmosfera terrestre e vale  $1380 \text{ W/m}^2$ . In quella regione il valore medio del campo elettrico e

del campo magnetico sono:  $E = \sqrt{\frac{[\text{intensità}]}{\epsilon_0 c}} = 721 \text{ V/m}$  e  $B = \frac{E}{c} = 2,40 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ .

# LO SPETTRO ELETTROMAGNETICO

Abbiamo visto che le onde elettromagnetiche esistono e si propagano nel vuoto alla velocità della luce. L'onda elettrica è rappresentata dall'equazione  $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$  e il vettore intensità del campo elettrico  $\mathbf{E}$  dipende dalla lunghezza d'onda e dalla frequenza dell'onda. La lunghezza d'onda e la frequenza non sono indipendenti, ma sono legate dall'equazione fondamentale della propagazione per onde

$$63) \quad c = \lambda f$$

È evidente che deve esistere un intero gruppo di onde elettromagnetiche, le quali devono differire soltanto nella frequenza e nella lunghezza d'onda. Queste onde elettromagnetiche sono state osservate e oggi vengono classificate in sette categorie principali: radioonde, microonde, radiazione infrarossa, onde luminose (visibili), radiazione ultravioletta, raggi X e raggi  $\gamma$  (gamma). L'intero gruppo delle onde elettromagnetiche costituisce lo **spettro elettromagnetico**.

**Analizziamo** alcune proprietà di questi gruppi.

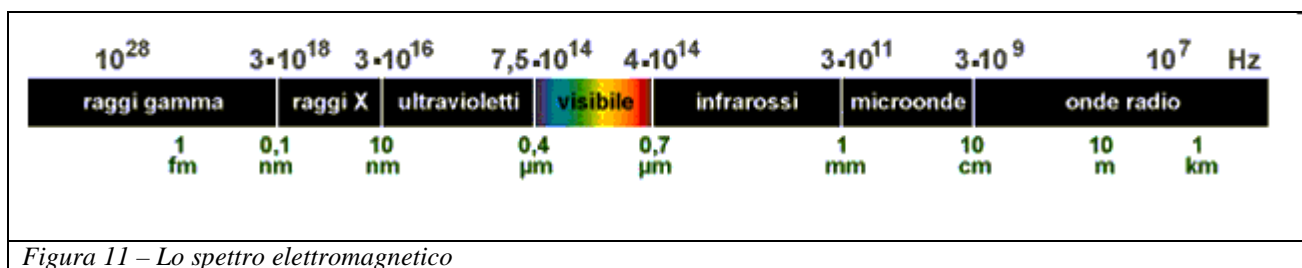


Figura 11 – Lo spettro elettromagnetico

## Radioonde.

Le radioonde vengono caratterizzate di solito con la loro frequenza e vengono chiamate così perché vengono utilizzate nelle trasmissioni radio-televisive.

Le radioonde AM (*amplitude modulated*, a modulazione di ampiezza) vengono emesse nell'intervallo di frequenze di 550 ÷ 1600 kHz.

Le radioonde FM (*frequency modulated*, a modulazione di frequenza) vengono emesse nell'intervallo di frequenze di 88 ÷ 108 MHz.

Le radioonde impiegate nella televisione vengono emesse nell'intervallo di frequenze di 44 ÷ 216 MHz. Le radioonde televisive UHF (*ultra-highfrequency*, frequenza ultra alta) vengono emesse nell'intervallo di frequenze di 470 ÷ 890 MHz.

## Microonde.

Le microonde sono così chiamate perché sono onde molto corte, comprese tra 1 m (frequenza di 300 MHz) e 1 mm (frequenza 300 GHz). Hanno molti utilizzi i principali dei quali sono: ponti radio ovvero trasmissione tra antenne paraboliche terrestri, a distanze fino a centinaia di km. Telefonia cellulare. Forno a microonde che utilizza un generatore per produrre microonde alla frequenza di circa 2,45 GHz per cuocere il cibo; il riscaldamento e la conseguente cottura è dovuto al fatto che le microonde causano un aumento dell'energia rotazionale delle molecole di alcune sostanze e in particolare dell'acqua, le molecole dell'acqua infatti hanno un momento di dipolo elettrico che ha la stessa energia delle microonde; dato che la materia organica è composta in prevalenza di acqua, il cibo può essere cucinato facilmente con questa tecnica. Radar. I protocolli di comunicazione senza fili, come il bluetooth e internet.

## Radiazione infrarossa.

La radiazione infrarossa, o infrarosso, viene caratterizzata di solito con la lunghezza d'onda: lo spettro infrarosso va da circa 700 nm a circa 1 mm.

Viene spesso associata con i concetti di "calore" e "radiazione termica", poiché gli oggetti a temperatura ambiente o superiore emettono spontaneamente radiazione in questa banda. La radiazione infrarossa viene usata in apparecchi di visione notturna; i sensori infrarossi convertono la radiazione in arrivo in un'immagine che può essere monocromatica oppure può essere usato un sistema di falsi colori per rappresentare le diverse temperature.

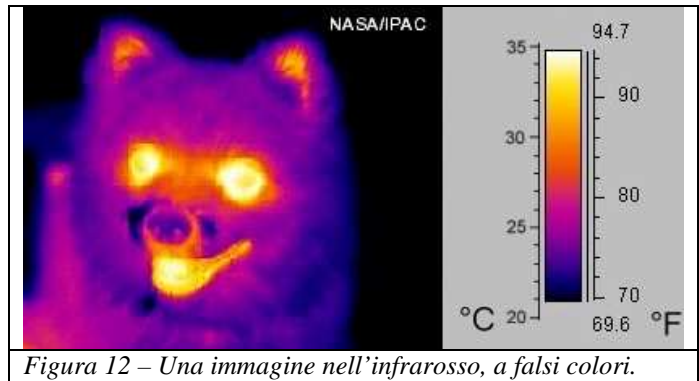


Figura 12 – Una immagine nell'infrarosso, a falsi colori.

Tra le applicazioni della radiazione infrarossa è la cosiddetta termografia.

Un utilizzo molto comune dell'infrarosso è come mezzo di trasmissione dati: nei telecomandi dei televisori (per evitare interferenze con le onde radio del segnale televisivo), tra computer portatili e fissi, palmari, telefoni cellulari e altri apparecchi elettronici.

### Onde luminose.

Le onde luminose, costituenti la luce propriamente detta, o visibile, occupano una regione molto piccola dello spettro elettromagnetico, la quale si estende da 380 nm a 720 nm. La lunghezza d'onda di 380 nm corrisponde al colore violetto, mentre la lunghezza d'onda di 720 nm corrisponde al colore rosso.

Colore	$\lambda$ nm ( $10^{-9}$ m)	f THz ( $10^{12}$ m)
Violetto	380 ÷ 455	789 ÷ 659
Blu	455 ÷ 492	659 ÷ 610
Verde	492 ÷ 577	610 ÷ 520
Giallo	577 ÷ 597	520 ÷ 503
Arancio	597 ÷ 622	503 ÷ 482
Rosso	622 ÷ 720	482 ÷ 417

Tabella 1 - Lunghezze d'onda della radiazione visibile

### Radiazione ultravioletta.

La radiazione ultravioletta, o ultravioletto, occupa la regione dello spettro elettromagnetico la quale si estende da circa 10 nm a circa 380 nm. È la radiazione ultravioletta proveniente dal Sole che causa eritemi da sole e cancro della pelle fortunatamente la maggior parte di questa radiazione viene assorbita dagli strati alti dell'atmosfera. In questa interazione tra radiazione e alta atmosfera vengono prodotti una grande quantità di ioni per cui tale zona viene chiamata *ionosfera*. I raggi ultravioletti trovano applicazioni nel campo della medicina soprattutto nei processi di sterilizzazione nei quali microrganismi, quali i batteri, vengono distrutti.

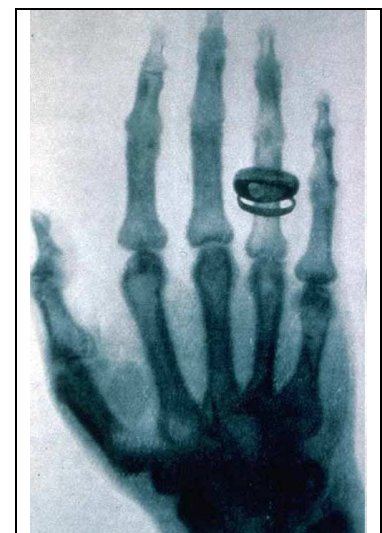


Figura 13 – Radiografia della mano della moglie di Röntgen eseguita da Röntgen stesso.

### Raggi X.

I raggi X sono onde elettromagnetiche molto energetiche. Sono stati scoperti dal fisico tedesco Konrad Röntgen nel 1885. Si formano di solito quando particelle cariche ad alta velocità si arrestano urtando contro la materia. La regione dello spettro elettromagnetico occupata dai raggi X si estende da circa 0,01 nm a circa 150 nm. Trovano largo uso nella diagnostica medica ad esempio per ottenere radiografie della struttura ossea. Anche i raggi X, a causa dei processi chimici che inducono, risultano in genere nocivi per gli organismi viventi e addirittura una lunga esposizione a questa radiazione può causare danni irreparabili.

### Raggi $\gamma$ .

I raggi  $\gamma$  (gamma) sono i più energetici tra tutte le onde elettromagnetiche e occupano la regione dello spettro elettromagnetico la quale si estende al di sotto di circa 0,1 nm, sovrapponendosi parzialmente alla regione dei raggi X dai quali differiscono principalmente nell'origine: i raggi  $\gamma$

vengono emessi da alcuni nuclei atomici oppure in alcune reazioni nucleari. Anche questa radiazione risulta nociva per gli esseri viventi in misura molto maggiore di quanto accade per i raggi X. Trovano applicazioni pratiche nel campo della medicina, dove, ad esempio sono impiegati per attaccare e distruggere cellule di origine tumorale.

Dallo spazio provengono onde elettromagnetiche di tutte le lunghezze d'onda e di tutte le frequenze. Il Sole o le stelle, per esempio, emettono radiazioni elettromagnetiche, ad intensità diverse, ma praticamente in tutte le frequenze. Fortunatamente l'atmosfera terrestre blocca la maggior parte di queste. Nella figura

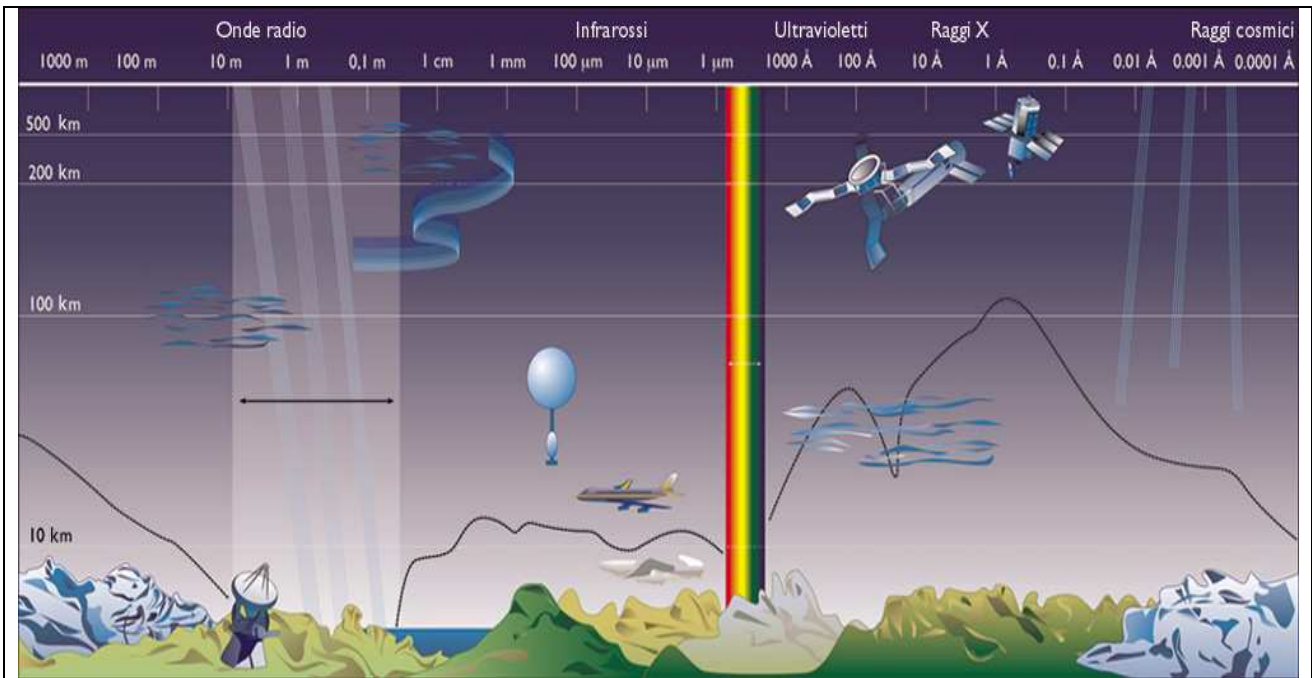


Figura 14 – Onde elettromagnetiche e assorbimento atmosferico.