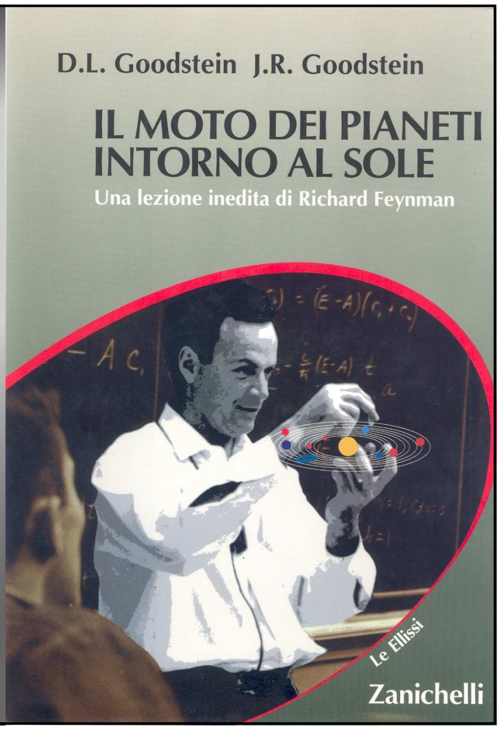
La legge della gravitazione universale di Newton e le leggi di Keplero



IL MOTO DEI PIANETI INTORNO AL SOLE

Una lezione di Richard Feynman

La lezione fu tenuta al Caltech (California Institute of Technology) il 13 marzo 1964.

La lezione si sviluppa nei seguenti punti:

1. un'introduzione storica al problema;
2. una descrizione di alcune proprietà geometriche di un ellisse;
3. dimostrazione di Newton che se un pianeta descrive un'orbita mediante una forza diretta verso il sole allora vale la seconda legge di Keplero;
4. dimostrazione di Feynman che ad uguali variazioni della velocità corrisponde una uguale variazione degli angoli nell'orbita;
5. dimostrazione di Feynman, usando le tecniche di Fano, che questi cambiamenti di velocità implicano che l'orbita sia ellittica;

6. discussione sugli esperimenti del Rutherford con la dispersione delle particelle di alfa e la scoperta del nucleo atomico.

L’IDEA

L’idea di fondo, suggerita a Newton dai lavori di Robert Hooke (1635 – 1703), è che il moto di un pianeta intorno al sole è dovuto alla competizione tra la tendenza del pianeta a muoversi a velocità costante lungo una linea retta, se non ci sono forze agenti su di esso, (principio di inerzia) e il moto dovuto alla forza di gravità che è diretta verso il Sole.

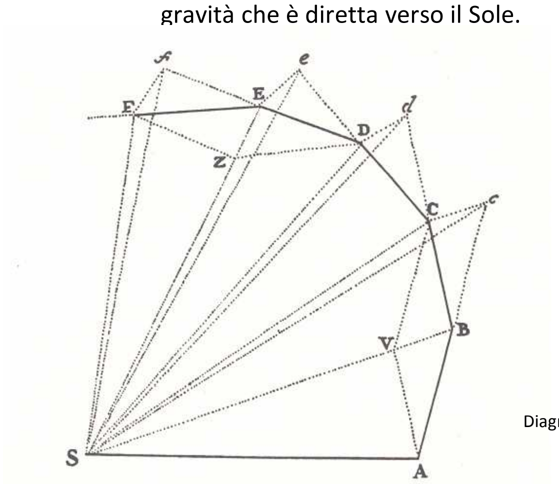


Diagramma di Newton

LE LEGGI DI NEWTON

1. Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.

2. Una forza impressa ad un corpo ne modifica il moto secondo la legge F = m·a, ovvero

$$F \sim \Delta v/\Delta t.$$

1. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

L'IDEA

In realtà questi effetti danno luogo ad un'orbita rappresentata da una curva regolare, ma per la sua analisi Newton la considerò come una spezzata (ABCDEF) formata da una serie di segmenti di retta dovuti all'inerzia interrotti da improvvisi cambiamenti di direzione dovuti all'applicazione della forza del sole per un tempo molto breve.

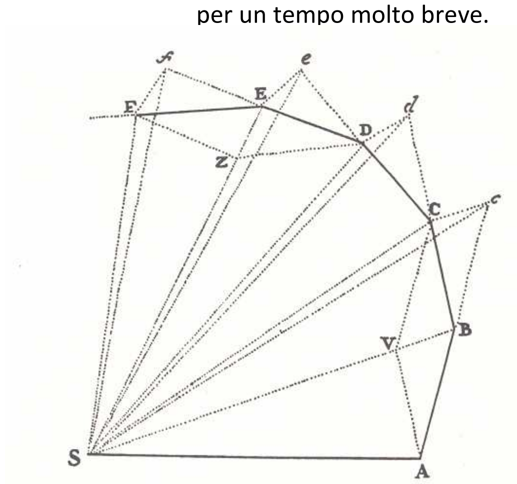
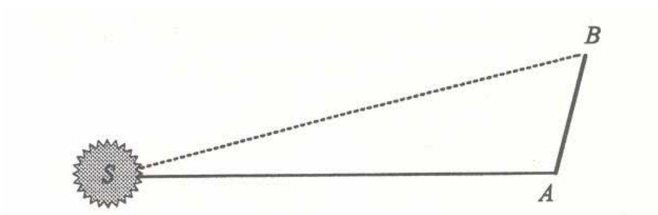


Diagramma di Newton

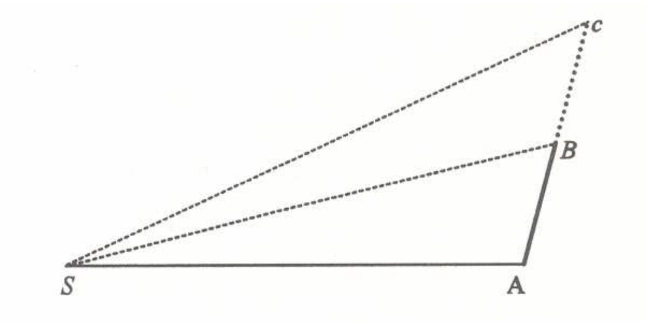
L'IDEA

In un certo intervallo di tempo il pianeta si muove da A fino a B, se non ci fosse alcuna forza ad agire su di esso.



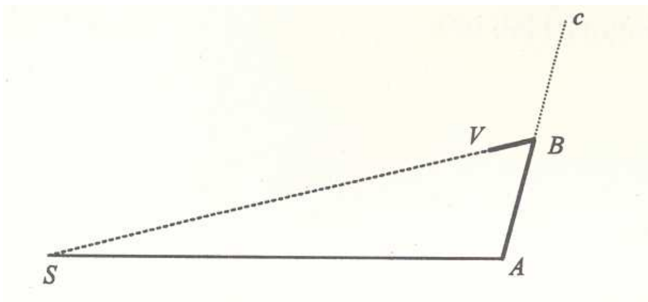
L’IDEA

In un intervallo successivo, di ugual durata, sempre se non ci fosse alcuna forza, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una ugual distanza Bc.



L’IDEA

Il sole esercita una forza, che agisce in realtà in modo continuo, che rappresentiamo con un impulso, applicato nel punto B, che dà origine ad una componente del moto diretta verso il sole, BV.

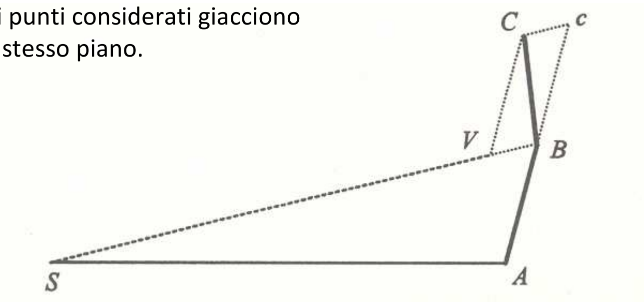


L’IDEA

Il moto dovuto alla combinazione dei due effetti è il segmento BC, diagonale del parallelogramma VBcC.

OSSERVAZIONI:

1) il segmento cC non è diretto verso il sole, ma è parallelo al segmento BV che invece è diretto verso il sole.
2) Tutti i punti considerati giacciono sullo stesso piano.

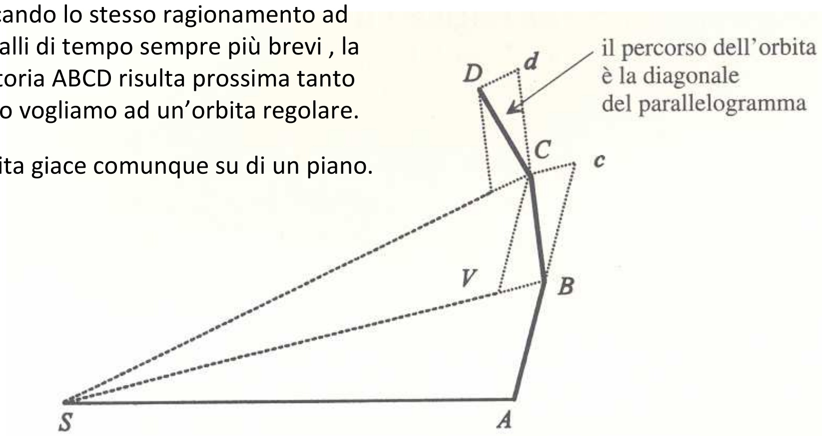


L’IDEA

Si può ripetere la stessa procedura ad ogni punto e il passo successivo la traiettoria avrà l’aspetto di figura.

Applicando lo stesso ragionamento ad intervalli di tempo sempre più brevi , la traiettoria ABCD risulta prossima tanto quanto vogliamo ad un’orbita regolare.

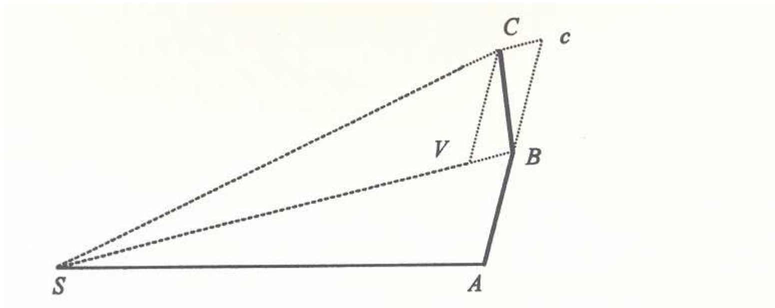
L’orbita giace comunque su di un piano.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Newton (e Feynman) dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

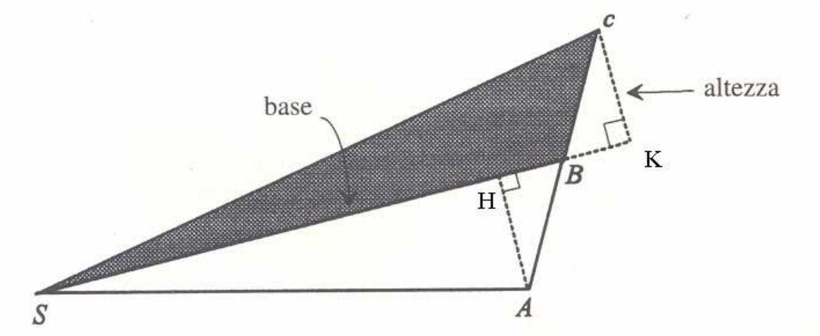
In altre parole il triangolo SAB e SBC hanno la stessa area.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Per fare ciò, per prima cosa dimostra che SAB ha la stessa area di SBc.

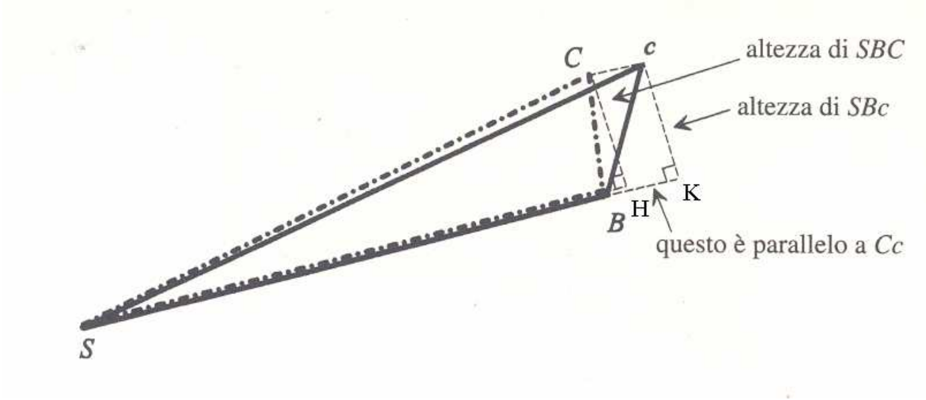
Infatti i due triangoli hanno la stessa base (SB) e altezze uguali in quanto i triangoli ABH e cBK sono uguali.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA’

Consideriamo ora i triangoli SBc e SBC. Essi hanno la stessa base SB e uguali altezze cK e CH, infatti essendo il segmento cC parallelo a SB (per costruzione), il quadrilatero HKcC è un rettangolo.

La linea che congiunge il sole con un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA’

Questo è un risultato molto importante per la fisica:

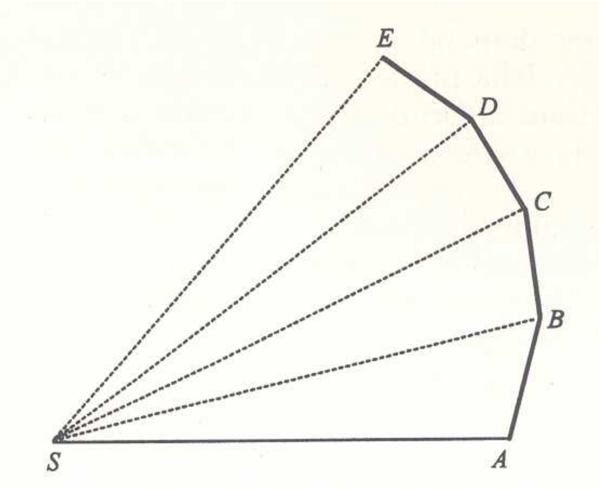
la forza che attrae il pianeta verso il sole cambia la traiettoria, ma non il valore dell’area spazzata.

Dopo Newton si è dimostrato che l’area è proporzionale al *momento angolare* del pianeta rispetto al sole.

Con un linguaggio più moderno abbiamo dimostrato che la forza che attrae il pianeta verso il sole non può modificare il momento angolare del pianeta.

LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA’

E’ ovvio che possiamo applicare lo stesso ragionamento ai successivi triangoli SCD, SDE, e così via. Essi sono i triangoli spazzati dal pianeta in tempi uguali. Siamo quindi riusciti a dimostrare la seconda legge di Keplero.



INTERLUDIO

Fin qui sono state utilizzate:

1) la prima legge di Newton,

2) parte della seconda legge di Newton (ogni cambiamento del moto avviene nella direzione della forza impressa),

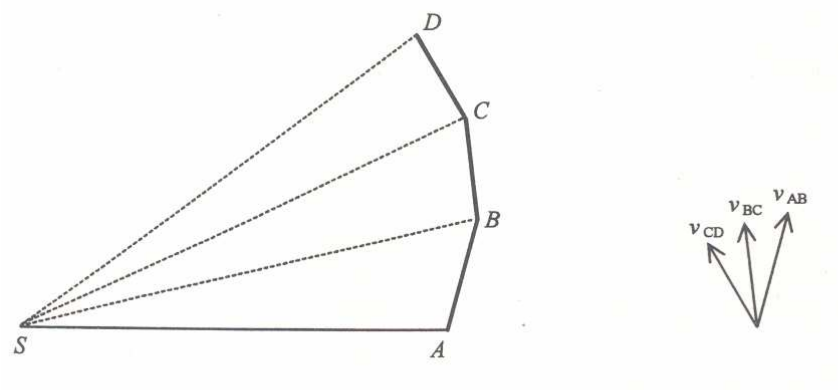
3) l’idea che la forza di gravità sul pianeta è diretta verso il sole.

Non è stato utilizzato il fatto che la forza di gravità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

In effetti nella sua lezione Feynman dimostra che dalla terza legge di Keplero si deduce che la forza di gravità va come l’inverso del quadrato della distanza.

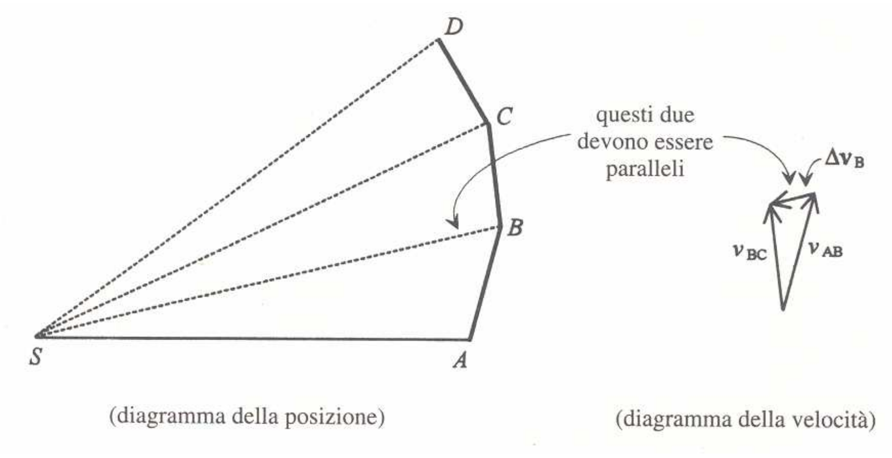
LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

In uguali intervalli di tempo, il pianeta si sposta da A a B, da B a C, e così via. Poiché il pianeta si sposta con velocità costante lungo i tratti AB, BC, ecc., allora possiamo rappresentare anche la velocità con frecce che hanno la stessa direzione degli spostamenti e lunghezze proporzionali ad essi.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

La variazione di velocità deve essere diretta verso il sole (dalla seconda legge di Newton) e quindi nella figura Δv_B è diretta nella stessa direzione di BS.

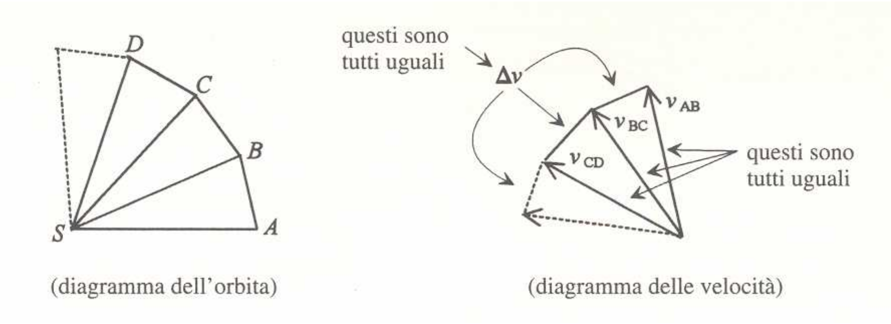


LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA’

Il più semplice degli esempi è quello in cui l’orbita è una circonferenza di raggio R.

La costruzione dell’orbita con il metodo utilizzato da Newton porta a dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza il cui raggio R è la distanza dal sole.

Anche le velocità sono tutte uguali così che le variazioni di velocità sono tutte identiche e il diagramma delle velocità corrisponde anch’esso ad un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *v*.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA’

Il valore della velocità è dato dalla distanza percorsa dal pianeta su tutta l’orbita diviso per il tempo che impiega a percorre l’orbita, ossia il periodo T.

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Ogni volta che il pianeta completa un’orbita, il diagramma delle velocità percorre anch’esso una circonferenza completa.

Quando la freccia della velocità completa un giro, la punta ha percorso una distanza $2\pi v$. La variazione della velocità in un intervallo di tempo Δt sarà data da:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Poiché la forza è proporzionale alla variazione della velocità sull'intervallo di tempo, abbiamo:

$$F \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{2\pi}{T} R\right) = (2\pi)^2 \frac{R}{T^2} \sim \frac{R}{T^2}$$

Ma essendo $F \sim 1/R^2$ si ha

$$\frac{R}{T^2} \sim \frac{1}{R^2}$$

E quindi

$T^2 \sim R^3$

LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Oggi la terza legge di Keplero la dimostriamo dicendo che, se consideriamo l'orbita di un pianeta intorno al Sole circolare e uniforme, allora la velocità v del pianeta la possiamo ricavare tenendo conto che l'accelerazione centripeta altro non è se non l'accelerazione di gravità verso il Sole:

$$\frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2}$$

Da cui segue: $v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$

Essendo anche: $v = \frac{2\pi R}{T}$

Si ricava: $\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{G\frac{M}{R}}$

E quindi:

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Una formulazione più precisa, valida per orbite ellittiche e per masse generiche m_1 e m_2, è:

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}}$$

LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA’

In realtà Feynman dimostra che dalla terza legge di Keplero deriva che la forza va come l’inverso del quadrato della distanza.

Come prima risulta:

$$F \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{2\pi}{T} R\right) = (2\pi)^2 \frac{R}{T^2} \sim \frac{R}{T^2}$$

Ma per la terza legge di Keplero

$T^2 \sim R^3$

Quindi:

$$\boxed{F \sim \frac{1}{R^2}}$$

INTERLUDIO

Sia Keplero sia Newton ci hanno dato tre leggi.

Le leggi di Keplero sono generalizzazioni dai risultati delle osservazioni celesti di Tycho Brahe.

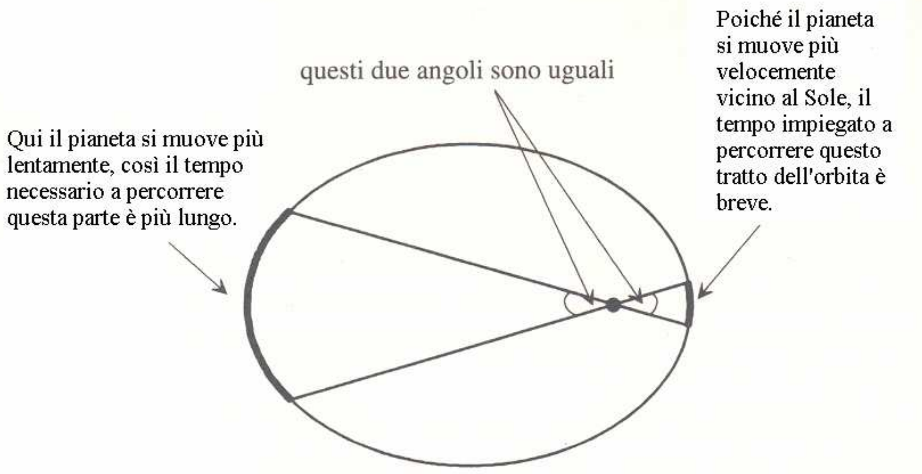
Le leggi di Newton sono delle affermazioni di principio sulle relazioni tra materia, forze e moto. Se il comportamento dedotto da queste affermazioni corrisponde a quanto si osserva in natura, allora le assunzioni sono probabilmente corrette e, come dice Einstein, possiamo dire di aver conosciuto “***i pensieri di Dio***”.

In campo planetario la verifica della correttezza delle affermazioni di Newton è data dal fatto che da esse deduciamo le leggi di Keplero.

Per stabilire quale tipo di moto planetario prevedono le sue leggi, Newton prima individuò la natura della forza di gravità (e per fare ciò si servì della seconda e della terza legge di Keplero), poi, facendo uso della gravità, dimostrò che le orbite dei pianeti sono delle ellissi.

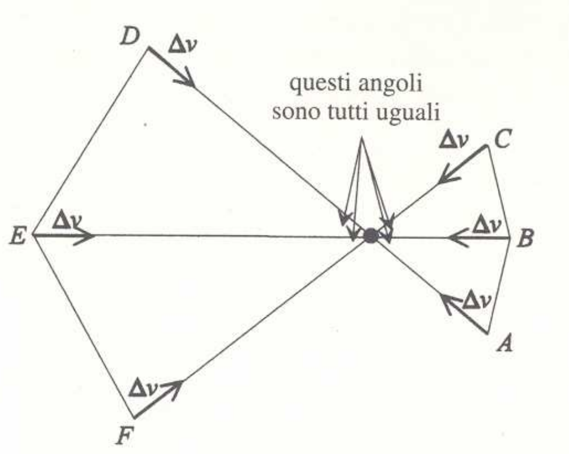
LA LEGGE DELLE ELLISSI

Nel seguito seguiremo la dimostrazione della legge delle ellissi data da Feynman.
Egli divide l'orbita in angoli uguali invece che in aree uguali.
La prima conclusione a cui arriva è che:
$\Delta t \sim$ (area spazzata) $\sim R^2$. Dove R è la distanza dal sole.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

In ogni punto posto sull'orbita (A, B, C, D, E, F e tutti i punti compresi tra questi) c'è una variazione Δv verso il sole.
Maggiore è la forza, maggiore è Δv; inoltre più è lungo l'intervallo di tempo Δt, maggiore è la variazione di velocità
$\Delta v \sim F \cdot \Delta t$



Essendo $F \sim 1/R^2$ e $\Delta t \sim R^2$,

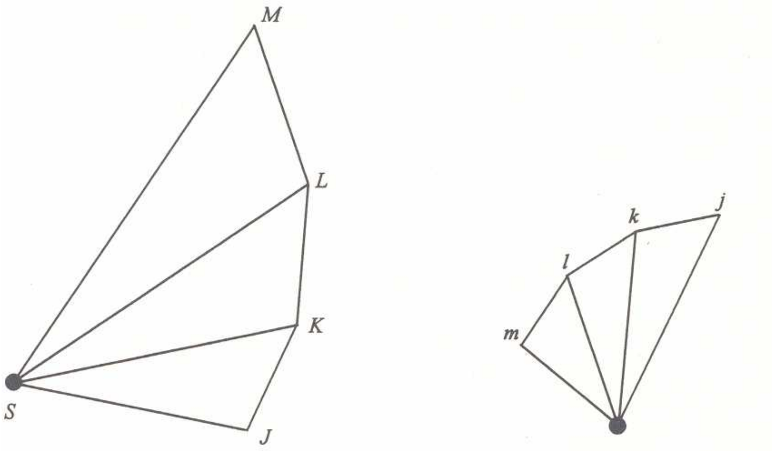
$\Delta v \sim (1/R^2) \cdot R^2 = 1$.

La variazione di velocità non dipende dalla distanza, ma è costante!!!

*"**Si verificano uguali variazioni di velocità quando l'orbita descrive angoli uguali.**"*

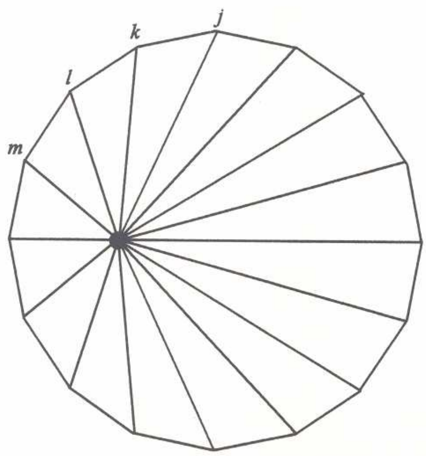
LA LEGGE DELLE ELLISSI

L'uso di angoli uguali fa si che i segmenti sull'orbita (JK, KL, LM) siano diversi e quindi anche le velocità (i segmenti che nel grafico di sinistra hanno per estremi j, k, l,m), ma le variazioni di velocità sono uguali (jk = kl = lm).
Inoltre i segmenti jk e KS, kl e LS, lm e MS sono paralleli in quanto la variazione di velocità è sempre diretta verso il sole (S).



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Poiché le linee KS, LS, MS, ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare, quindi inscritto in una circonferenza, anche se l'origine delle velocità non si trova al centro di questa.



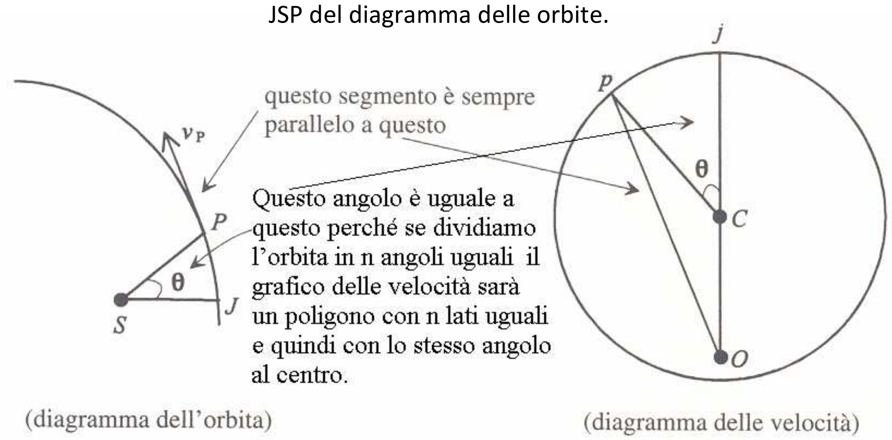
Se procediamo ora dividendo il diagramma dell'orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, che formino angoli fra loro uguali, ma sempre più piccoli, l'orbita viene a corrispondere sempre meglio a una curva liscia, e il diagramma delle velocità è un poligono regolare che si avvicina sempre più ad una circonferenza.

L'origine non è necessariamente al centro.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

A questo punto Feynman costruisce un diagramma dell'orbita con la prima posizione (J) che forma una linea orizzontale con il sole (S) e quindi nel corrispondente diagramma delle velocità il segmento Oj rappresenta la velocità in J, mentre Op quella in P.

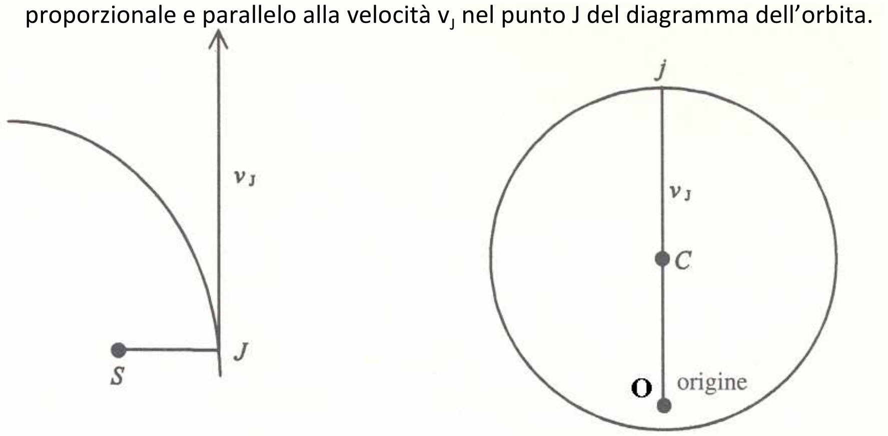
Egli fa notare che l'angolo jCp del diagramma delle velocità è uguale all'angolo JSP del diagramma delle orbite.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Possiamo ricostruire la forma dell'orbita sapendo che ogni orbita permessa dalle leggi di Newton e dalla forza di gravità deve avere per diagramma delle velocità una circonferenza.

Scegliamo quindi un punto qualsiasi all'interno della circonferenza diverso dal centro C. Questo punto sarà l'origine delle velocità. Il segmento Oj è proporzionale e parallelo alla velocità v_J nel punto J del diagramma dell'orbita.

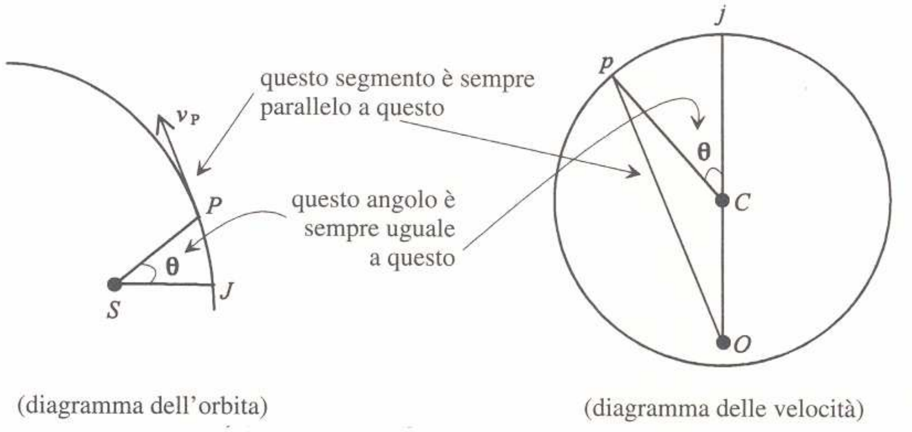


LA LEGGE DELLE ELLISSI

Tracciamo un segmento dall'origine ad un punto p qualsiasi della circonferenza, ad esso corrisponde un punto P sull'orbita, per il quale si ha:

• la linea dall'origine al punto p del diagramma delle velocità è parallela alla tangente al diagramma dell'orbita nel punto P;

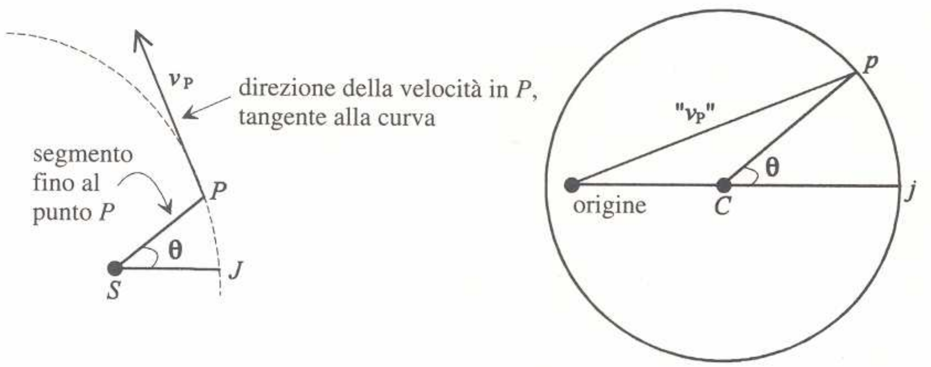
• l'angolo jCp è uguale all'angolo JSP.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Feynman fa ruotare il diagramma delle velocità di 90° in senso orario in modo che il lati dell'angolo θ risultino paralleli tra un diagramma e l'altro.
La linea indicata con "v_P", che era parallela alla velocità, ora è perpendicolare.

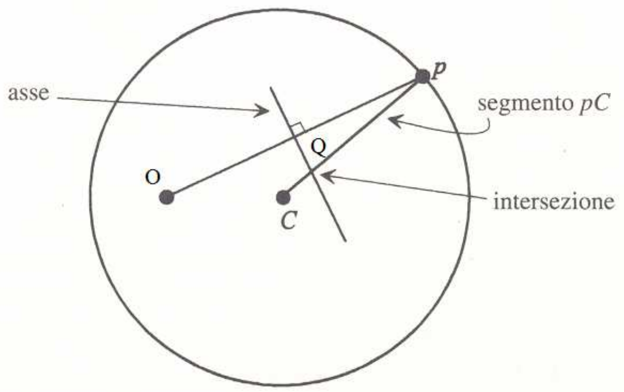
Dal diagramma delle velocità sappiamo la direzione del segmento che congiunge il sole al punto P e la direzione della tangente (la perpendicolare a "v_P"), ma non possiamo sapere con esattezza la posizione del punto P.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Si potrà tracciare la curva che gode di queste proprietà sulla diagramma delle velocità in modo tale che le dimensioni dell'orbita saranno del tutto arbitrarie, ma tutte le direzioni, e di conseguenza la forma, saranno giuste.

Per ottenere l'orbita costruiamo l'asse del segmento dall'origine a p (che è parallelo alla velocità in P) e il segmento congiungente il centro C con p.



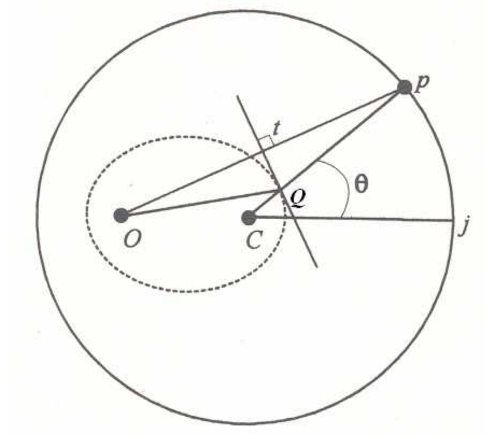
Il punto Q di intersezione tra queste due linee appartiene all'orbita.

Quando il punto p si muove sulla circonferenza, Q descrive l'orbita del pianeta.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

Si dimostra facilmente che il segmento Cp è uguale alla somma dei segmenti CP e OP, ma essendo tale segmento il raggio di una circonferenza si ha che qualunque sia p, e di conseguenza P:

OQ + CQ = Cp = costante.



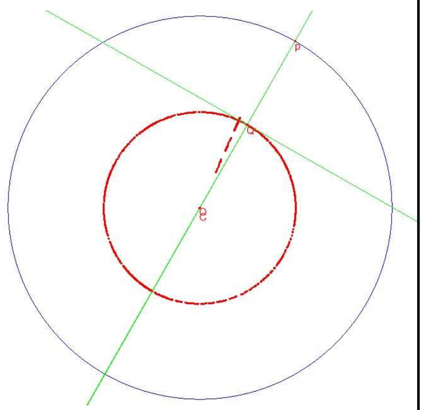
L'insieme dei punti Q del piano che hanno costante la somma delle distanze da due punti fissi è, per definizione, un'ellisse.

I due punti fissi (nel nostro caso O e C) sono i ***fuochi*** dell'ellisse.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

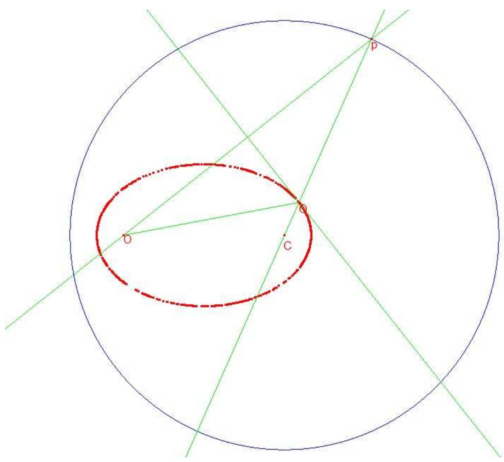
La forma dell’orbita dipende dalla posizione del punto O origine delle velocità.

Se O coincide con C, il centro del diagramma, i due fuochi dell’ellisse coincidono e il pianeta ha la stessa velocità in ogni punto dell’orbita che risulta essere una ***circonferenza***.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Più O e C sono vicini, più l’ellisse è vicina ad una circonferenza.
Più O e C sono lontani, più l’ellisse è allungata.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Se O è esterno alla circonferenza, l'orbita è un'***iperbole***.