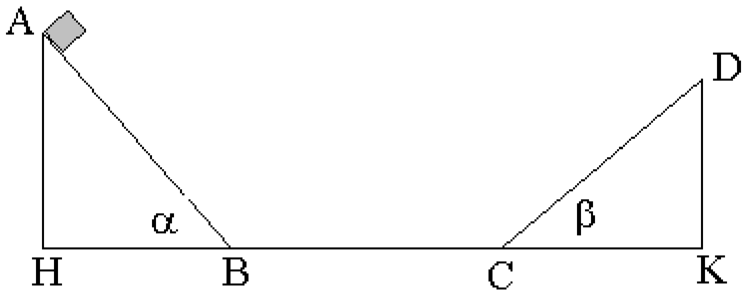
PROBLEMA 15

E’ dato il sistema di piani inclinati della figura qui sotto dove $\alpha = 35,0°$, $\beta = 40,0°$, AB = 2,00 m e BC = 1,50 m. Un corpo di massa m = 2,00 kg è posto in A e tra il corpo e il piano, lungo tutto il tratto ABCD, c’è attrito (coefficiente di attrito statico 0,500; coefficiente di attrito dinamico = 0,300). Stabilire

(a) se il corpo scivola lungo il piano inclinato;

(b) se il corpo riesce a salire lungo il tratto CD e in caso affermativo a che altezza arriva;

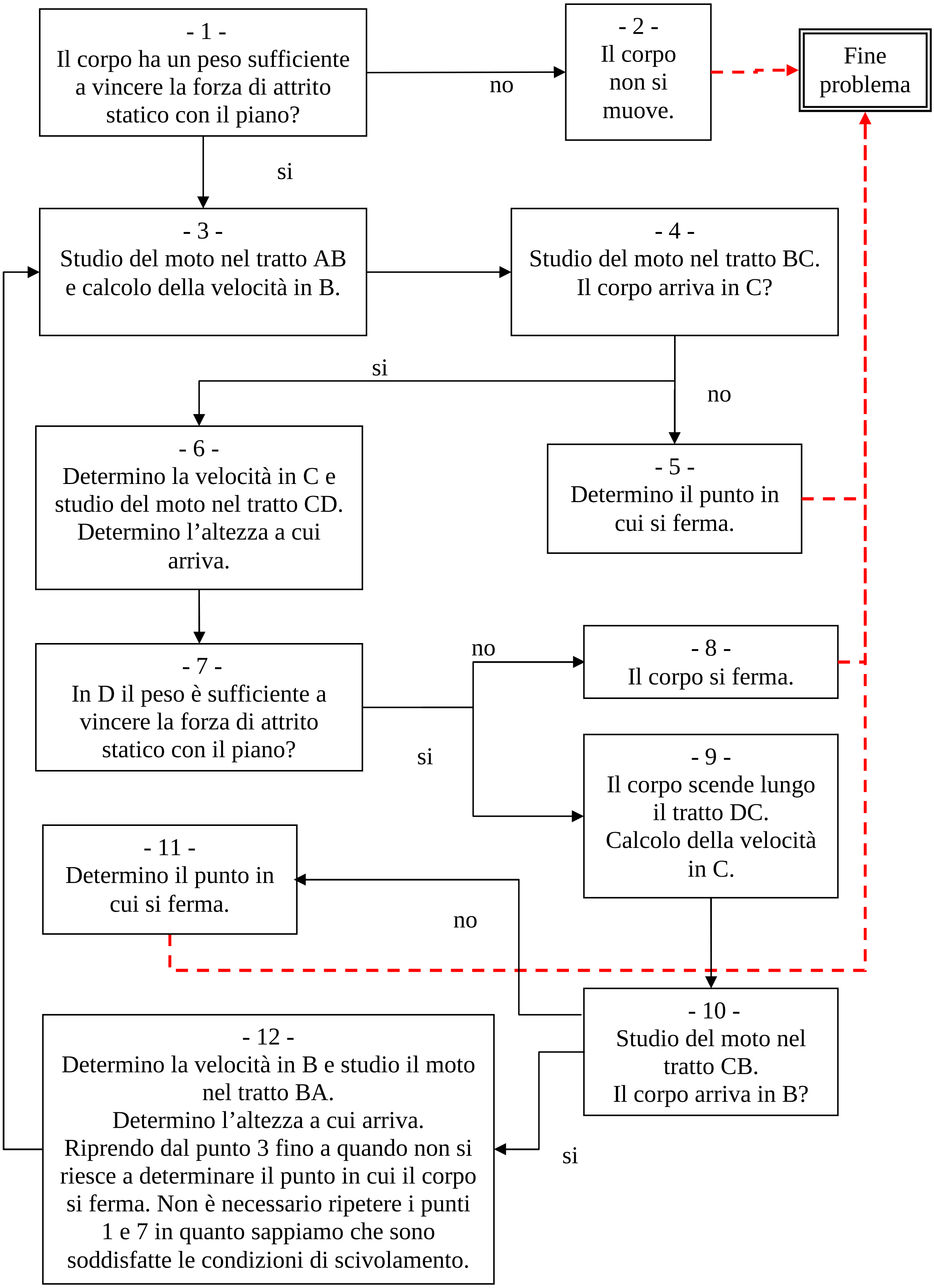
(c) in che punto il corpo si ferma definitivamente.



ATTENZIONE: nelle figure gli angoli e i segmenti non sono in scala con i valori assegnati, ma ciò non pregiudica la soluzione.

SOLUZIONE

Poiché il problema è abbastanza complesso ed è bene fare uno schema della soluzione:



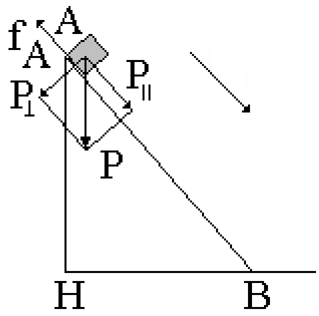
Risolviamo quindi punto per punto.

1) Vediamo se la massa ha un peso sufficiente per vincere la forza di attrito statico con il piano inclinato; affinché ciò avvenga deve essere $P_{\|} \geq f_{A,S}$ da cui segue, essendo $P_{\|} = mg \cdot sen\alpha$ e $f_{A,S} = \mu_S \cdot mg \cdot \cos\alpha$,

$$\cancel{mg} \cdot sen\alpha \geq \mu_S \cdot \cancel{mg} \cdot \cos\alpha$$

e quindi la condizione $tg\alpha \geq \mu_S$. Essendo $tg35,0° \approx 0,7$ il corpo inizia a scivolare lungo il tratto AB.

3) Applicando il secondo principio della dinamica si ha $F = P_{\|} - f_A$ da cui segue:



$$\cancel{m}a = \cancel{m}g \cdot sen\alpha - \mu_D \cdot \cancel{m}g \cdot \cos\alpha$$

e quindi:

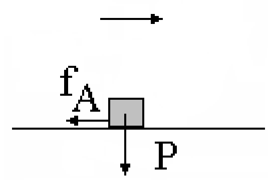
$$a = (sen\alpha - \mu_D \cos\alpha)g = 3,21 \text{ m/s}^2.$$

Lungo il tratto AB il moto è uniformemente accelerato e scegliendo un sistema di riferimento la cui l'origine coincida con A e il verso sia da A verso B, si hanno le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} s = 1,61t^2 \\ v = 3,21t \end{cases}.$$

Posto s uguale alla lunghezza del tratto AB, dalla prima equazione si ricava $2 = 1,61t^2$ e quindi il tempo per arrivare in B: t = 1,12 s. Quando la massa arriva in B, dalla seconda equazione, si ricava che la sua velocità è: $v_B = 3,21t = 3,21 \cdot 1,12 = 3,60$ m/s.

4) Sul tratto orizzontale BC il moto è decelerato per effetto dell'attrito e applicando il secondo principio della dinamica si ha che $F = -f_A$ da cui segue:



$$\cancel{m}a = -\mu_D \cdot \cancel{m}g$$

e quindi:

$$a = -\mu_D g = -2,94 \text{ m/s}^2.$$

Scegliendo un sistema di riferimento la cui l'origine coincida con B e il verso sia da B verso C, si hanno le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} s = v_B t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_B + at \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 3,60t - 1,47t^2 \\ v = 3,60 - 2,94t \end{cases}.$$

Quando il corpo arriva nel punto C, s = 1,50 m, quindi la prima equazione diventa: $1,5 = 3,60t - 1,47t^2$, ovvero

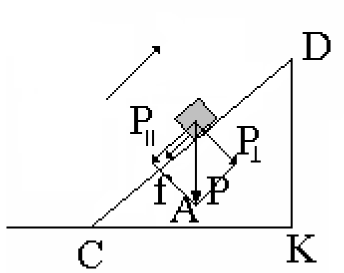
(*) $$1,47t^2 - 3,60t + 1,5 = 0$$

risolvendo

$$t = \frac{3,60 \pm \sqrt{3,60^2 - 4 \cdot 1,47 \cdot 1,5}}{2 \cdot 1,47} = \begin{cases} t_1 = 0,534s \\ t_2 = 1,91s \end{cases}$$

Si osservi che la seconda soluzione non è accettabile perché quando il corpo arriva in C, cioè dopo 0,534 s, il moto cambia e quindi le equazioni utilizzate perdono di significato.
Per $t = 0,534$ s si ha: $v_C = 3,60 - 2,94 \cdot 0,534 = 2,03$ m/s.[1]

Poiché in C il corpo ha ancora una velocità, inizierà a salire su per il secondo piano inclinato.



6) Applicando il secondo principio della dinamica al tratto CD, si ha che $F = -P_{\|} - f_A$ da cui segue:

$$\cancel{m}a = -\cancel{m}g \cdot \text{sen}\beta - \mu_D \cdot \cancel{m}g \cdot \cos\beta$$

e quindi:

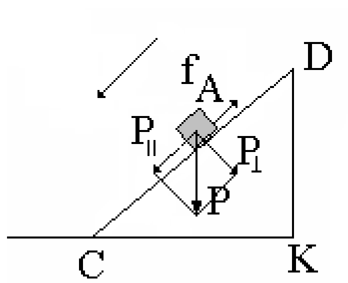
$$a = -(\text{sen}\beta + \mu_D \cos\beta)g = -8,55 \text{ m/s}^2.$$

Lungo il tratto CD il moto è quindi uniformemente decelerato e scegliendo un sistema di riferimento la cui l'origine coincida con C e il verso sia da C verso D, si hanno le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} s = v_C t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_C + at \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 2,03t - \frac{1}{2} \cdot 8,55t^2 \\ v = 2,03 - 8,55t \end{cases}.$$

Il corpo si ferma quando v = 0, quindi dopo un intervallo di tempo $t = \frac{2,03}{8,55} = 0,237$ s, ed ha percorso 0,241 m. L'oggetto arriva quindi ad un'altezza $h = s \cdot \text{sen}\beta = 0,241 \cdot \text{sen}40 = 0,155$ m.

7) A questo punto il corpo potrebbe fermarsi se la componente parallela del peso non superasse la forza di attrito statico, ma ripetendo il ragionamento del punto 1) ed essendo $\text{tg}40,0° = 0,839 > \mu_S = 0,500$, si deduce che esso scende.



9) Applicando il secondo principio della dinamica al tratto DC, si ha che $F = P_{\|} - f_A$ da cui segue:

$$\cancel{m}a = \cancel{m}g \cdot \text{sen}\beta - \mu_D \cdot \cancel{m}g \cdot \cos\beta$$

e quindi:

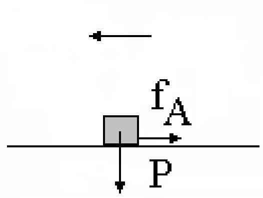
$$a = (\text{sen}\beta - \mu_D \cos\beta)g = 4,05 \text{ m/s}^2.$$

Lungo il tratto DC il moto è quindi uniformemente accelerato e scegliendo un sistema di riferimento la cui l'origine coincida con D e il verso sia da D verso C, si hanno le seguenti equazioni del moto

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} s = \frac{1}{2} \cdot 4,05t^2 \\ v = 4,05t \end{cases}.$$

[1] L'equazione (*) è una equazione di secondo grado in t e quindi o ammette due soluzioni reali e distinte, o due soluzioni reali e coincidenti o nessuna soluzione. Nel primo caso la massa arriva in C con velocità maggiore di zero ed inizia a salire lungo il piano inclinato, nel secondo caso arriva in C e si ferma, nel terzo caso NON arriva in C e quindi si ferma prima. In quest'ultimo caso bisogna risolvere l'equazione $0 = v_B + at$ per determinare l'istante in cui la massa si ferma e sostituendo il valore di t nell'equazione $s = v_B t + \frac{1}{2}at^2$ si ha la distanza da B in cui la massa si ferma.

Posto s uguale alla lunghezza del tratto DC, ovvero $s = 0,241$ m (vedi punto 6), dalla prima equazione si ricava il tempo che il corpo impiega, per arrivare in C, un tempo t = 0,345 s. In C, dalla seconda equazione, esso ha una velocità $v_C = 4,05t = 4,05 \cdot 0,345 = 1,40$ m/s.
Il corpo prosegue quindi il suo moto verso B.



10) Per stabilire se arriva in B applichiamo il secondo principio della dinamica nel tratto CB, ma quello che si ottiene anche intuitivamente è che l'accelerazione è la stessa di quando la massa sta attraversando il tratto BC in senso opposto, cioè

$$a = -\mu_D g = -2,94 \text{ m/s}^2.$$

Per determinare se il corpo arriva in B dobbiamo utilizzare le equazioni del moto:

$$\begin{cases} s = v_C t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_C + at \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} s = 1,40t - 1,47t^2 \\ v = 1,40 - 2,94t \end{cases}$$

Quando arriva al punto B, s = 1,50 m, quindi la prima equazione diventa: $1,5 = 1,40t - 1,47t^2$, ovvero

$$1,47t^2 - 1,40t + 1,5 = 0$$

risolvendo

$$t = \frac{1,40 \pm \sqrt{1,40^2 - 4 \cdot 1,47 \cdot 1,5}}{2 \cdot 1,47} = \frac{1,06 \pm \sqrt{-6,86}}{2,94} \text{ che è impossibile.}$$

Ciò significa che il corpo NON arriva in B (vedi nota 1).

11) Per determinare il punto X in cui si ferma la massa nell'equazione $v = v_C + at$ poniamo v = 0. Si ottiene $t = \frac{1,40}{2,94} = 0,476$ s. Sostituendo nella prima equazione del sistema otteniamo $s = 1,46 \cdot 0,476 - 1,47 \cdot 0,476^2 = 0,333$ m. Ovvero il corpo si ferma a 0,333 m da C.