Rappresentazioni grafiche ed elaborazione dei dati sperimentali

1 - INTRODUZIONE

Uno dei compiti del fisico è quello di ricavare le leggi della natura a partire dalla misura di grandezze fisiche. Con il termine grandezza fisica intendiamo “tutto ciò che può essere misurato”, perciò la misura è uno dei concetti fondamentali per la fisica.

Misurare significa “confrontare” una grandezza con una campione scelta come unità e il risultato di una misura è un numero, o meglio un intervallo di valori in quanto bisogna tener conto dell’incertezza insita in tutte le misure; come abbiamo già detto il risultato della misura di una grandezza G deve essere espresso da:

$$G = \left(\overline{G} \pm \Delta G\right) u$$

dove $\overline{G}$ è il valor medio della grandezza (può scaturire da un’unica misura o dalla media di più misure), ΔG è l’incertezza sulla misura (può essere dato dalla sensibilità dello strumento o da altre considerazioni) e u è l’unità di misura. Ricordiamo che questo significa che

$$\left(\overline{G} - \Delta G\right) u < G < \left(\overline{G} + \Delta G\right) u ,$$

ovvero che la grandezza *G* non viene data con un valore ben definito, ma con un intervallo di valori possibili.

In genere quando si cerca una legge che lega due grandezze si fa in modo che una dipenda dall’altra: per esempio la posizione di una pallina che cade da una certa altezza dipende del tempo che è passato da quando ha iniziato a cadere, oppure la massa di un oggetto di ferro dipende dal volume del corpo, ecc. Si individua quindi una grandezza indipendente (in genere indicata con *x*, oppure, se è il tempo, con *t*) e una dipendente (in genere indicata con *y* o altre lettere) e diciamo che *y* è funzione di *x* scrivendo $y = f(x)$.

Ricercare una legge fisica che lega due grandezze significa appunto cercare la funzione *f* e per fare ciò si procede attraverso una serie di passi e qui sotto vengono indicati quelli principali:

1 – Individuazione delle grandezze tra le quali si vuol cercare un legame: devono essere due.

2 – Misura delle grandezze e determinazione delle incertezze corrispondenti.

3 – Realizzazione di una tabella con i valori delle grandezze (con le incertezze e le unità di misura): per esempio, si supponga di aver individuato le grandezze *x* ed *y* (misurate rispettivamente in unità che chiameremo *u* e *v*) e di aver trovato i valori riportati nella tabella 1).

Tabella 1 - Esempio di dati sperimentali

x (*u*)	*y* (*v*)
0,9 ± 0,1	3,6 ± 0,1
2,7 ± 0,1	8,8 ± 0,2
3,5 ± 0,2	11,3 ± 0,2
4,1 ± 0,2	13,1 ± 0,3
5,3 ± 0,3	16,3 ± 0,3
6,5 ± 0,3	20,0 ± 0,4
7,4 ± 0,4	21,5 ± 0,4

4 – Rappresentazione grafica dei dati.

5 – Analisi dei dati (può essere fatta per via grafica o per via algebrica attraverso il calcolo) e determinazione della legge fisica.

In questi appunti vedremo essenzialmente le fasi 4 e 5, ma prima di procedere è opportuno ricordare alcune leggi fondamentali che dovrebbero essere conosciute dalla scuola media (che sono poi quelle che per il momento ci interessano e impareremo a determinare).

2 - LEGGI DI PROPORZIONALITA'

2.1 - La proporzionalità diretta.

Due grandezze, x ed y, si dicono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante

$$\frac{y}{x} = k$$

Consideriamo per esempio le grandezze *x* e *y* i cui valori sono dati nella tabella 2. Come si può facilmente verificare, il rapporto tra i valori della grandezza *y* e i corrispondenti valori della grandezza *x* danno sempre lo stesso valore (che indichiamo con la lettera *k*) *k* = 1,4. Concludiamo quindi dicendo che *x* e *y* sono direttamente proporzionali e possiamo scrivere

x	*y*
0,6	0,84
1,0	1,40
1,2	1,68
1,6	2,24
2,1	2,94

Tabella 2 - Proporzionalità diretta

(1) $$y = k \cdot x$$

con *k* = 1,4; oppure semplicemente $y = 1{,}4 \cdot x$.

Se riportiamo su di un grafico i valori della tabella 2, risulta che la linea che li unisce è un segmento (vedi figura 1), più in generale, la relazione (1), su di un piano cartesiano è rappresentata da una retta che passa per l'origine degli assi cartesiani (vedi figura 2).

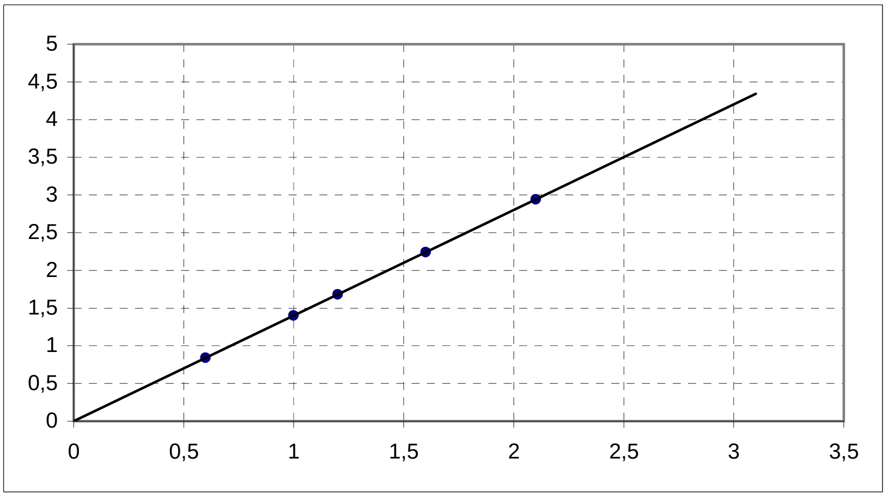


Figura 1 - Rappresentazione dei valori della tabella 2 con la retta che unisce tutti i punti

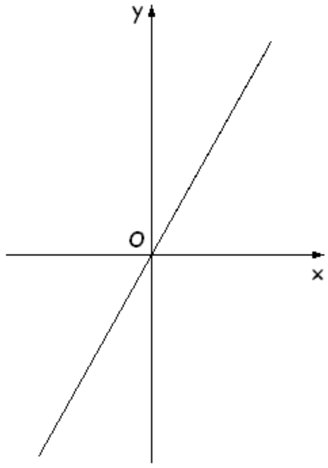


Figura 2 - Rappresentazione grafica della relazione *y* = *k*·*x*

La proporzionalità diretta è un caso particolare di **dipendenza lineare**.

Si dice che la grandezza y dipende linearmente dalla grandezza x (o, che è lo stesso, che tra y e x c'è una dipendenza lineare) se tra le due grandezze esiste una relazione del tipo

$$y = k \cdot x + q$$

con k e q valori costanti.

Se scriviamo la relazione nella forma equivalente:

$$y - q = k \cdot x$$

possiamo dire che c'è una proporzionalità diretta tra $y - q$ e x.

Consideriamo per esempio le grandezze *x* e *y* i cui valori sono dati nella tabella 3.

Come si può verificare: $y = 0{,}8 \cdot x + 0{,}5$.

Graficamente una legge di dipendenza lineare viene rappresen-

x	*y*
0,5	0,90
0,8	1,14
1,1	1,38
1,7	1,86
2,2	2,26

Tabella 3 - Dipendenza lineare

tata da una retta che non passa per l’origine degli assi (vedi figura 4).

Il valore q rappresenta l’ordinata del punto in cui la retta taglia l’asse y, mentre il valore di k rappresenta la pendenza della retta.

La determinazione delle costanti può essere fatta come segue: si calcolano le differenze Δx tra i valori delle x (0,8 - 0,5 = 0,3; 1,1 - 0,8 = 0,3; ecc.) e Δy tra i valori delle y (1,14 - 0,90 = 0,24; 1,38 - 1,14 = 0,24; ecc.); si ha quindi

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

e

$$q = y - k \cdot x$$

Nella tabella 6 riportiamo i risultati di tutti i calcoli.

x	y	Δx	Δy	$k = \Delta y / \Delta x$	$q = y - k \cdot x$
0,5	0,90	0,3	0,24	0,8	0,5
0,8	1,14	0,3	0,24	0,8	0,5
1,1	1,38	0,6	0,48	0,8	0,5
1,7	1,86	0,5	0,40	0,8	0,5
2,2	2,26				

Tabella 4 - Determinazione delle costanti nella dipendenza lineare

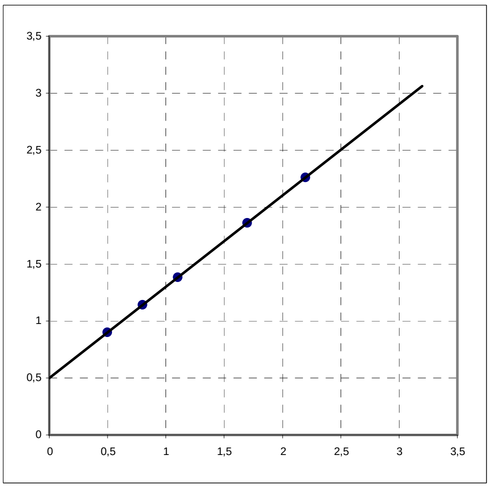


Figura 3 - Rappresentazione dei valori della tabella 4 con il tratto di parabola che unisce tutti i punti

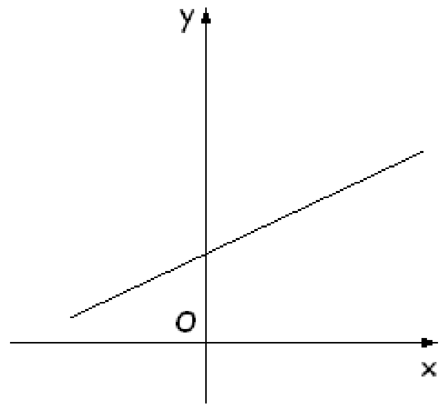


Figura 4 - Rappresentazione grafica della relazione $y = k \cdot x + q$.

2.2 - La proporzionalità inversa

Due grandezze, x ed y, si dicono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante.

$$x \cdot y = k$$

Consideriamo per esempio le grandezze x e y i cui valori sono dati nella tabella 5. Come si può facilmente verificare, il prodotto tra i valori delle due grandezze è sempre lo stesso (lo indichiamo con la lettera k): k = 6,0. Concludiamo quindi dicendo che x e y sono inversamente proporzionali e possiamo scrivere

x	y
1,2	5,00
1,5	4,00
1,6	3,75
2,4	2,50
4,8	1,25

Tabella 5 - Proporzionalità inversa

(2) $$y = \frac{k}{x}$$

con k = 6,0 o, più semplicemente $y = \frac{6,0}{x}$.

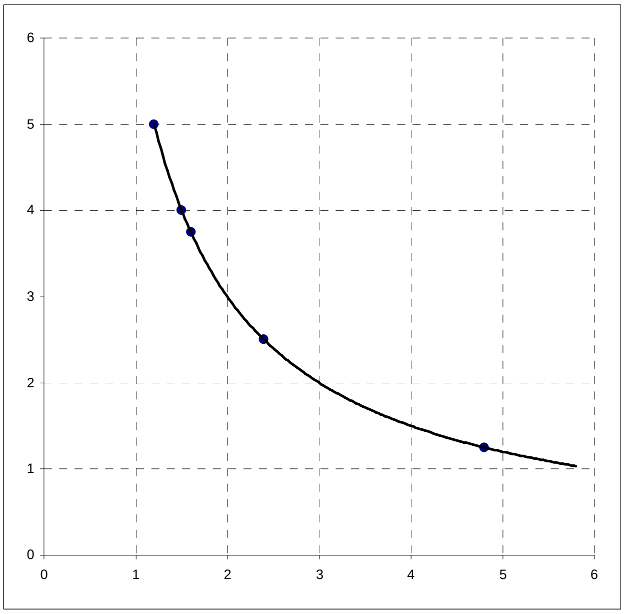


Figura 5 - Rappresentazione dei valori della tabella 5 con l'iperbole equilatera che unisce tutti i punti

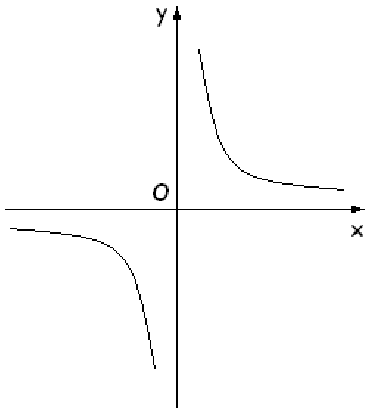


Figura 6 - Rappresentazione grafica della relazione $y = k/x$, con $k > 0$; il ramo di sinistra corrisponde a valori di $x < 0$.

2.3 - La proporzionalità quadratica.

Si dice che tra due grandezze, x ed y, c'è una proporzionalità quadratica se è costante il rapporto tra una di esse e il quadrato dell'altra.

$$\frac{y}{x^2} = k$$

x	y
0,6	0,18
0,8	0,32
1,4	0,98
2,0	2,00
2,2	2,42

Tabella 6 - Proporzionalità quadratica

Consideriamo per esempio le grandezze *x* e *y* i cui valori sono dati nella tabella 6. Come si può verificare, il rapporto tra i valori della grandezza *y* e i quadrati dei corrispondenti valori della grandezza *x* danno sempre lo stesso valore: k = 0,5. Concludiamo quindi dicendo che *y* è direttamente proporzionale al quadrato di *x* e possiamo scrivere

(3) $$y = k \cdot x^2$$

con k = 0,5; oppure $y = 0{,}5 \cdot x^2$.

Se riportiamo su di un grafico i valori della tabella 6, risulta che la linea che li unisce è un tratto di parabola (vedi figura 7), più in generale, la relazione (3), su di un piano cartesiano, è rappresentata da una parabola che passa per l'origine degli assi cartesiani e che ha la concavità rivolta verso l'alto (vedi figura 8).

Ovviamente esistono infiniti tipi di leggi matematiche, ma per il momento ci limitiamo a quelle esposte sopra perché sufficienti per comprendere molti fenomeni fisici. Quando se ne presenterà l'occasione ne introdurremo altre.

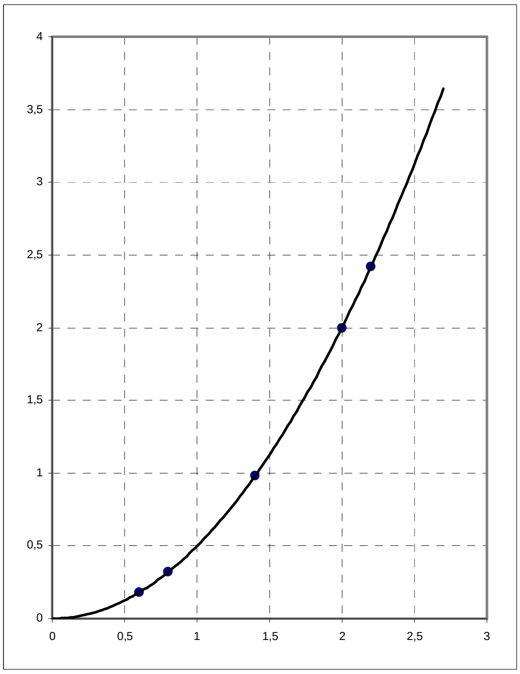
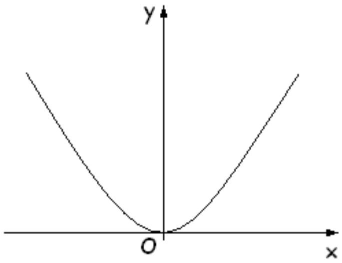
	

Figura 7 - Rappresentazione dei valori della tabella 6 con il tratto di parabola che unisce tutti i punti	Figura 8 - Rappresentazione grafica della relazione $y = k \cdot x^2$.

3 - UN ESEMPIO DI DETERMINAZIONE DI UNA LEGGE FISICA

Iniziamo con un primo esempio di determinazione di una legge fisica.

Tutti sappiamo che se prendiamo due pezzetti di uno stesso metallo e di diverso volume, quello più grande ha una massa maggiore. Vogliamo appunto provare che tra la massa e il volume di un metallo c'è una proporzionalità diretta. In altre parole vogliamo calcolare la densità δ di un certo metallo.

Questo è in effetti il lavoro che abbiamo fatto in laboratorio: abbiamo preso 4 serie di 10 cilindretti (una di ferro, una di rame, una di ottone, una di alluminio). I dieci cilindretti di ogni serie avevano lo stesso diametro, ma altezze diverse. Studenti diversi, con il calibro, hanno misurato diametro e altezza di uno stesso cilindretto arrivando a determinarne i valori con le relative incertezze. Per la massa si è utilizzata una bilancia elettronica che permette di apprezzare il centesimo di grammo. È stato quindi calcolato il volume di ogni cilindretto e, tenendo conto delle incertezze[1], abbiamo realizzato delle tabelle (di seguito riportiamo solo la tabella e i calcoli effettuati per i cilindretti di ferro).

m [g]	Δm [g]	V [cm^3]	ΔV [cm^3]	k [g/cm^3]	Δk [g/cm^3]	k-Δk [g/cm^3]	k+Δk [g/cm^3]
22,44	0,01	3,08	0,06	7,2857	0,1452	7,1405	7,4309
27,98	0,01	3,83	0,07	7,3055	0,1361	7,1694	7,4416
33,50	0,01	4,55	0,08	7,3626	0,1317	7,2309	7,4943
39,67	0,01	5,40	0,09	7,3463	0,1243	7,2220	7,4706
44,97	0,01	6,14	0,11	7,3241	0,1328	7,1913	7,4569
50,66	0,01	6,90	0,11	7,3420	0,1185	7,2235	7,4605
56,03	0,01	7,65	0,12	7,3242	0,1162	7,2080	7,4404
62,01	0,01	8,44	0,15	7,3472	0,1318	7,2154	7,4790
67,69	0,01	9,23	0,15	7,3337	0,1203	7,2134	7,4540
73,33	0,01	10,00	0,16	7,3330	0,1183	7,2147	7,4513

Tabella 7 - Determinazione della legge di proporzionalità tra peso e volume dei cilindretti di ferro

Per ogni cilindretto abbiamo quindi calcolato il rapporto tra il peso e il volume (nella tabella lo abbiamo indicato con k) e, sempre tenendo conto della propagazione delle incertezze abbiamo calcolato l'incertezza Δk[2]; si noti che nei calcoli abbiamo conservato più cifre decimali di quelle strettamente necessarie per migliorare la precisione del risultato[3]). A questo punto ci si è chiesti se i risultati ottenuti fossero compatibili, cioè se esistesse in intervallo di valori di k comune a tutti i cilindretti. A tal fine abbiamo calcolato gli intervalli (k-Δk, k+Δk) ed abbiamo osservato che l'intervallo (7,2309; 7,4309) è comune, quindi le misure sono compatibili.

[1] Per quanto riguarda la determinazione delle incertezze: più studenti hanno misurato le dimensioni dello stesso cilindretto e quindi fatto le medie e determinato le incertezze. Per il calcolo dell'incertezza sul volume abbiamo utilizzato le regole per la propagazione dell'errore in base alle quali si può dimostrare che se il diametro d è dato con un'incertezza Δd e l'altezza h con un'incertezza Δh, allora il volume è $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$ e l'incertezza $\Delta V = \frac{\pi}{4}\left(2 \cdot d \cdot h \cdot \Delta d + d^2 \cdot \Delta h\right)$.

[2] L'incertezza è data da: $\Delta k = \frac{V \cdot \Delta m + m \cdot \Delta V}{V^2}$, che scaturisce dalle regole di propagazione delle incertezze in un rapporto.

[3] In questi appunti i calcoli sono stati tutti effettuati con Excel e ciò permette di avere a disposizione parecchie cifre decimali.

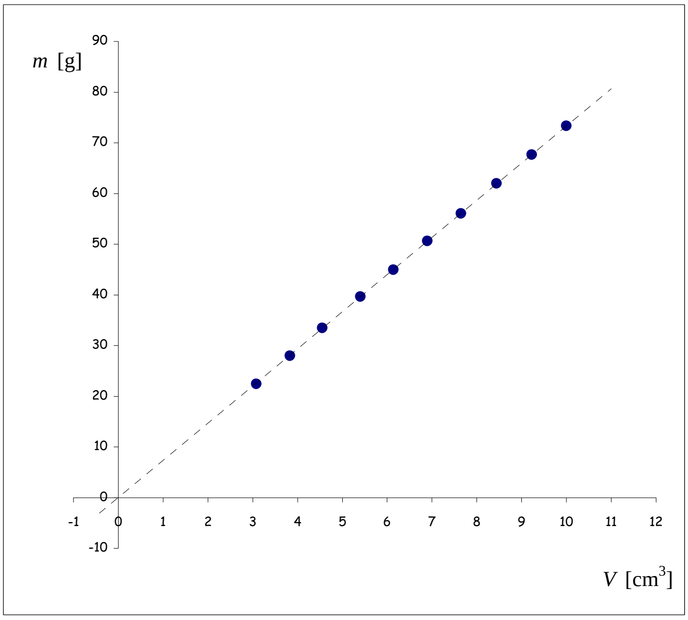
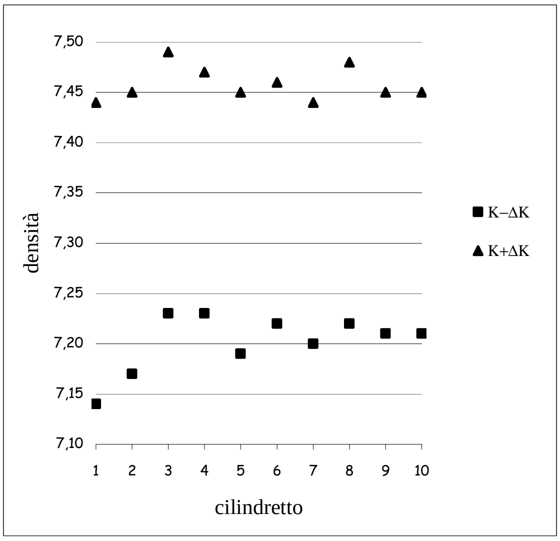
	

Figura 9 - Rappresentazione dei valori del peso e del volume della tabella 7. Come si può vedere anche graficamente la relazione è una proporzionalità diretta.	Figura 10 - Riportando in un grafico, per ogni cilindretto, il valore di k-Δk e di k+Δk, si può osservare che esiste un intervallo comune e che quindi le determinazioni di *k* (densità) sono compatibili.

Per stabilire il valore della densità del ferro abbiamo fatto la media di tutti i valori di *k*; per l'incertezza abbiamo calcolato la media dei valori di Δk. Il risultato ottenuto è:

$$\delta = (7{,}33 \pm 0{,}13)\ \mathrm{g/cm^3}.$$

Il risultato è buono in quanto l'incertezza è abbastanza piccola (1,8% circa). Gli stessi calcoli sono stati effettuati per gli altri cilindretti ottenendo lo stesso buoni risultati.

Possiamo quindi affermare che, ENTRO GLI ERRORI DI MISURA, TRA IL PESO E IL VOLUME DI QUESTI CILINDRETTI C'E' PROPORZIONALITA' DIRETTA.

C'è però da fare un'ultima osservazione molto importante. Sulla base del nostro risultato, possiamo affermare che la densità del ferro è (7,33 ± 0,13) g/cm^3 ? Purtroppo in qualunque libro di fisica troviamo che la densità del ferro è 7,86 g/cm^3 [4] del tutto incompatibile con il valore da noi trovato. In una situazione come questa è necessario rivedere tutte le misure e tutti i calcoli fatti; nonostante questo[5], nel nostro caso il risultato non è cambiato. Dobbiamo quindi concludere che i nostri cilindretti non sono di ferro puro.

[4] Ricordo che in questo caso, non essendo specificato l'errore, si deve intendere che esso cade sull'ultima cifra decimale, cioè (7,86 ± 0,01) g/cm^3.

[5] Ricordo che nel nostro caso abbiamo anche notato che i cilindretti erano leggermente smussati, ma che la quantità di volume che mancava era minore dell'errore calcolato nella misura del volume stesso e quindi non influente ai fini del risultato.

4 - RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI DATI SPERIMENTALI

Come è stato ricordato, i dati sperimentali sono affetti da incertezze e in una rappresentazione grafica si deve tener conto anche di queste. Tenendo presente che la misura con la sua incertezza rappresenta un intervallo di valori possibili, in un sistema di riferimento cartesiano i valori delle grandezze non definiranno un punto, ma un rettangolo all'interno del quale ci sono i possibili valori della coppia (x,y).

Per comprendere il procedimento rappresenteremo i dati della tabella (1).

Per avere dei grafici il più possibile precisi si devono usare dei fogli di carta millimetrata, una matita con una punta molto fine, una riga che abbia una lunghezza almeno pari alla diagonale del foglio di carta millimetrata, una gomma e materiale da disegno in genere.

Nella rappresentazione grafica dei dati procediamo come segue.

1 - **Orientare il foglio**

Dopo aver individuato qual è la variabile indipendente e quella dipendente predisponiamo il foglio in modo da riportare la variabile indipendente sull'asse orizzontale (detto anche asse delle ascisse) e la variabile dipendente sull'asse verticale (detto anche asse delle ordinate).

Poiché il foglio è rettangolare è necessario orientarlo (in orizzontale o in verticale) a seconda delle misure da rappresentare. In ciò ci si regola tenendo conto del principio generale secondo il quale il grafico deve essere il più grande possibile. Contando i centimetri del foglio di carta millimetrata della figura 11, vediamo che ce ne sono 25 in verticale e 17 in orizzontale, il numero dipende dalle dimensioni del foglio. Nel nostro esempio, visto che i valori della grandezza y arrivano fino a 21,5 mentre quelli della x fino a 7,4 conviene mettere il foglio in verticale e sul lato orizzontale (in basso) rappresenteremo la x, mentre su quello verticale (a sinistra) la y. Possiamo quindi assumere questa regola generale: ***rappresentiamo sul lato più lungo la grandezza che assume i valori maggiori***.

2 - **Definire la scala**

In genere le grandezze da rappresentare non hanno la stessa unità di misura e certamente non sono sempre centimetri; è quindi necessario stabilire a cosa corrisponde 1 cm sulla carta millimetrata, sia in orizzontale sia in verticale. Dobbiamo cioè definire il fattore di scala sia per l'asse x (lo indicheremo *fsx*), sia per l'asse y (lo indicheremo *fsy*). Nel nostro esempio significa indicare a quante unità u corrisponde 1 cm della carta millimetrata dell'asse x e a quante unità v corrisponde 1 cm dell'asse y della carta millimetrata.

Sia per l'asse x che per l'asse y vale la seguente proporzione:

$$\frac{\text{Valore massimo da rappresentare}}{\text{Numero cm}} = \frac{fs}{1\ \text{cm}}$$

Quando si valuta il massimo valore bisogna tener conto anche dell'incertezza.

Vediamo come procedere con il nostro esempio:

- rappresentiamo i valori di x sull'asse orizzontale e quelli di y su quello verticale
- orientiamo il foglio in modo che l'asse x stia sul lato più corto
- per l'asse x si ha: $\frac{7{,}8}{17\ \text{cm}} = \frac{fsx}{1\ \text{cm}}$ da cui segue: $fsx = \frac{7{,}8}{17}$ =0,45882... È sempre bene approssimare il *fs* ad un numero tipo 0,1; 0,2; 0,5 o addirittura alle unità, ma ***l'approssimazione deve essere fatta sempre per eccesso*** (se approssimiamo per difetto il valore massimo non entra nel foglio). Nel nostro caso conviene prendere *fsx* = 0,5.

Facendo i calcoli si può vedere facilmente che sull'asse y conviene *fsy* = 1.

Una volta individuati *fsx* e *fsy* è bene riportarli in un angolo del foglio di carta millimetrata (nella figura 11 in alto a sinistra).

3 - **Rappresentare i dati**

Dopo aver determinato i fattori di scala *fsx* e *fsy* è consigliabile costruire una nuova tabella dove i valori dei dati sperimentali siano espressi nei centimetri da riportare sulla carta millimetrata (tabella 8); se ne può fare a meno, ma bisogna stare molto attenti a rappresentare correttamente i valori.

Tabella 8 - Ricalcalo dei dati sperimentali per la rappresentazione grafica

x (cm)	y (cm)
1,8 ± 0,2	3,6 ± 0,1
5,4 ± 0,2	8,8 ± 0,2
7,0 ± 0,4	11,3 ± 0,2
8,2 ± 0,4	13,1 ± 0,3
10,6 ± 0,6	16,3 ± 0,3
13,0 ± 0,6	20,0 ± 0,4
14,8 ± 0,8	21,5 ± 0,4

Per ottenere a quanti centimetri sulla carta millimetrata corrisponde un dato valore di *x* o di *y* si usa la seguente proporzione:

Valore : Numero cm = *fs* : 1cm

I valori di *x* espressi in cm di carta millimetrata si ottengono quindi da

$$\text{Numero cm } x = \frac{\text{Valore } x}{fsx}$$

ossia dividendo quelli dati nella tabella 1 per *fsx*, cioè per 0,5 (in questo caso risultano quindi moltiplicati per 2), quelli di *y* (sempre espressi in centimetri di carta millimetrata) da

$$\text{Numero cm } y = \frac{\text{Valore } y}{fsy}$$

dividendo per *fsy*, cioè per 1 (in questo caso rimangono invariati). Per i risultati vedi tabella 8.

ATTENZIONE: ***Vanno trasformati anche i nuovi valori delle incertezze.***

È bene riportare sul lato sinistro del foglio millimetrato il nome della grandezza *y*, la sua unità di misura e i valori. In basso, la stessa cosa per la grandezza *x*.

Infine vanno riportati i valori sul foglio di carta millimetrata ricordando di rappresentare l'errore. Nella figura 11 si può vedere il risultato finale di queste operazioni. (Si eviti di tracciare troppe righe).

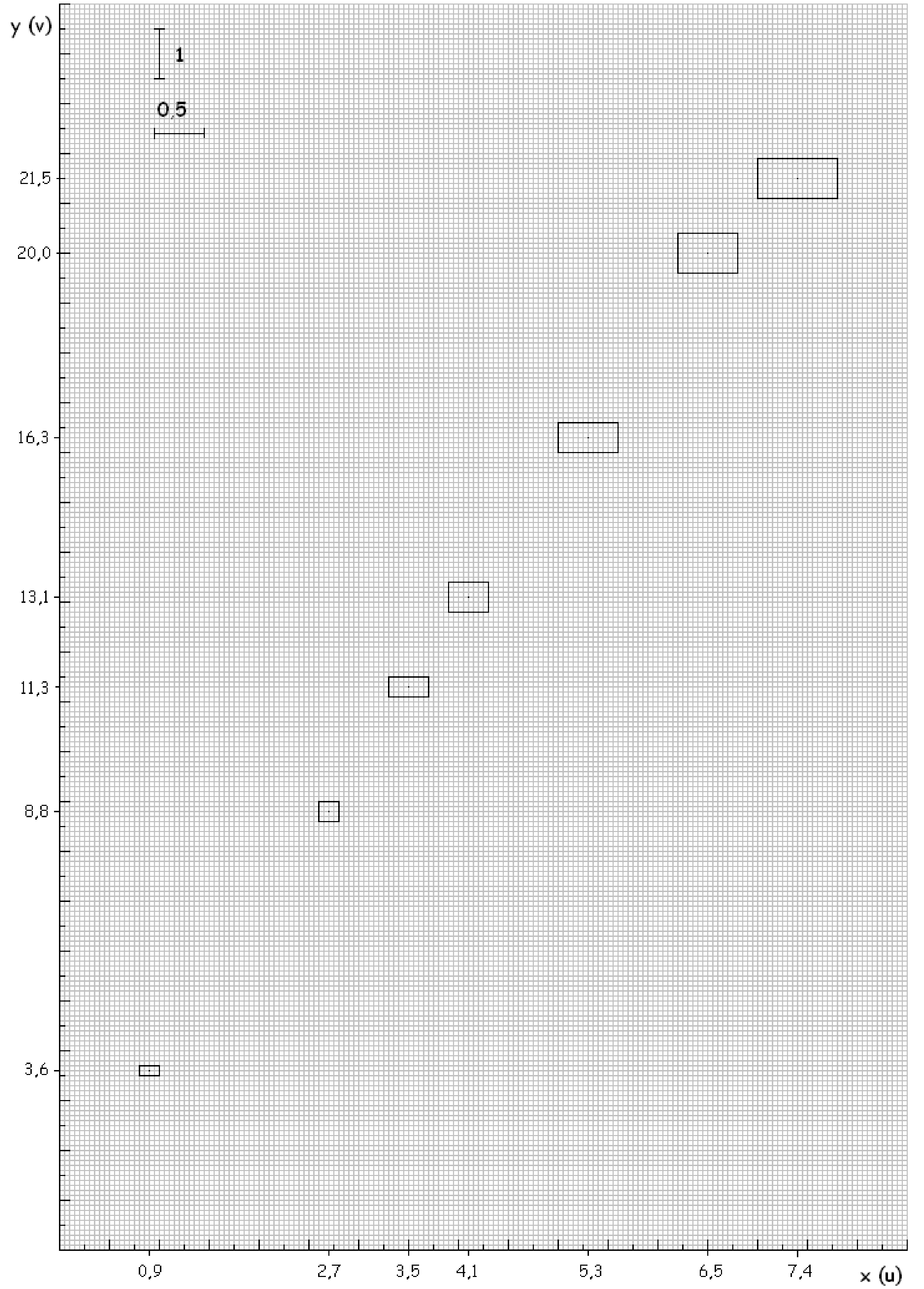


Figura 11 - Rappresentazione grafica dei dati sperimentali della tabella 1

5 - ANALISI GRAFICA DEI DATI E DETERMINAZIONE DELLA LEGGE FISICA

Il procedimento illustrato nel paragrafo precedente è valido in generale indipendentemente dal tipo di relazione che si ricerca. Il passo successivo è la determinazione di questa relazione; si può procedere in due modi: un modo grafico e un modo numerico (nel paragrafo 3 abbiamo già visto qualcosa). In questo paragrafo descriveremo il procedimento grafico, nel paragrafo successivo quello numerico[6].

5.1 - Proporzionalità diretta e dipendenza lineare.

La determinazione della proporzionalità diretta o della dipendenza lineare è simile, basta osservare che la proporzionalità diretta altro non è che una dipendenza lineare in cui $q = 0$. Ci riferiremo quindi solo alla dipendenza lineare.

Una prima analisi deve essere fatta "ad occhio", nel senso che bisogna stabilire, anche con l'aiuto di una riga, se attraverso i rettangoli disegnati passa una linea retta. Nel nostro caso si vede facilmente che i rettangoli dei dati si dispongono lungo una linea che però non passa per l'origine: tra la y e la x cercheremo quindi una dipendenza lineare, una relazione del tipo:

$$y = k \cdot x + q\,.$$

Un'altra considerazione da fare è che i nostri valori sono affetti da incertezza, quindi anche i valori di k e q dovranno essere determinati con le relative incertezze; cercheremo quindi:

$$k = \bar{k} \pm \Delta k \qquad \text{e} \qquad q = \bar{q} \pm \Delta q\,.$$

Per prima cosa, con la riga, bisogna individuare e disegnare le rette che, passando attraverso tutti i rettangoli (o se non è possibile tutti, la maggior parte di essi), hanno l'inclinazione massima (k_{MAX}) e quella minima (k_{MIN}). Queste incontrano l'asse y in due punti che sono rispettivamente q_{MIN} e q_{MAX} (vedi figura 11).

Dal grafico si ricava che: $q_{\mathrm{MIN}} = 0{,}4$ e $q_{\mathrm{MAX}} = 1{,}6$. Quindi possiamo ricavare q e la sua incertezza dalle relazioni:

$$\bar{q} = \frac{q_{\mathrm{MAX}} + q_{\mathrm{MIN}}}{2} = \frac{1{,}6 + 0{,}4}{2} = 1{,}0 \qquad \text{e} \qquad \Delta q = \frac{q_{\mathrm{MAX}} - q_{\mathrm{MIN}}}{2} = \frac{1{,}6 - 0{,}4}{2} = 0{,}6$$

Per la determinazione di k invece scegliamo due valori di x a piacere, li indichiamo con x_1 e x_2 (possono essere anche due dei valori assegnati); abbiamo scelto $x_1 = 1{,}0$ e $x_2 = 6{,}5$. Sul grafico troviamo i corrispondenti valori di y sia sulla retta che corrisponde a k_{MAX} (li indichiamo con y_1 e y_2 e nel nostro caso abbiamo $y_1 = 3{,}5$ e $y_2 = 20{,}4$) sia su quella che corrisponde a k_{MIN} (li indichiamo con y_3 e y_4 e abbiamo $y_3 = 4{,}2$ e $y_4 = 18{,}8$)[7]. I valori di k_{MAX} e k_{MIN} verranno ricavati dalle relazioni:

$$k_{\mathrm{MAX}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20{,}4 - 3{,}5}{6{,}5 - 1{,}0} = \frac{16{,}9}{5{,}5} = 3{,}0727\ldots$$ [8]

e

[6] Daremo dei metodi numerici che si basano su semplici calcoli alla portata di studenti del primo anno del liceo scientifico. Esistono delle tecniche matematiche molto più sofisticate che si basano su calcoli statistici alcune delle quali verranno illustrate in quarto o in quinto.

[7] Per determinare y_3 e y_4 non è necessario prendere gli stessi valori x_1 e x_2, si potrebbero prendere altri due valori x_3 e x_4. La scelta è dettata solo dalla convenienza.

[8] E' opportuno scrivere questi risultati parziali con un numero di cifre significative maggiore del necessario; alla fine del calcolo si faranno le approssimazioni necessarie.

$$k_{\text{MIN}} = \frac{y_4 - y_3}{x_2 - x_1} = \frac{18{,}8 - 4{,}2}{6{,}5 - 1{,}0} = \frac{14{,}6}{5{,}5} = 2{,}6545...$$

Da questi si ricava *k*:

$$\bar{k} = \frac{k_{\text{MAX}} + k_{\text{MIN}}}{2} = \frac{3{,}0727... + 2{,}6545...}{2} = 2{,}8636...$$

e

$$\Delta k = \frac{k_{\text{MAX}} - k_{\text{MIN}}}{2} = \frac{3{,}0727... - 2{,}6545...}{2} = 0{,}2091... \cdot\!\sim 0{,}21.$$

Concludiamo dicendo che la legge che lega i valori della tabella 1 è una dipendenza lineare del tipo:

$$y = k \cdot x + q$$

con

$k = (2{,}86 \pm 0{,}21)(v/u)$ e $q = (1{,}0 \pm 0{,}6)v$[9].

[9] Attenzione: sia *k* che *q* sono delle grandezze che hanno la loro unità di misura, durante i calcoli sono state omesse, ma alla fine vanno indicate. Per la precisione: *k*, essendo il rapporto di *y* diviso *x*, ha come unità di misura il rapporto dell'unità di misura di *y* diviso quella di *x*; *q* ha la stessa unità di misura di *y*.

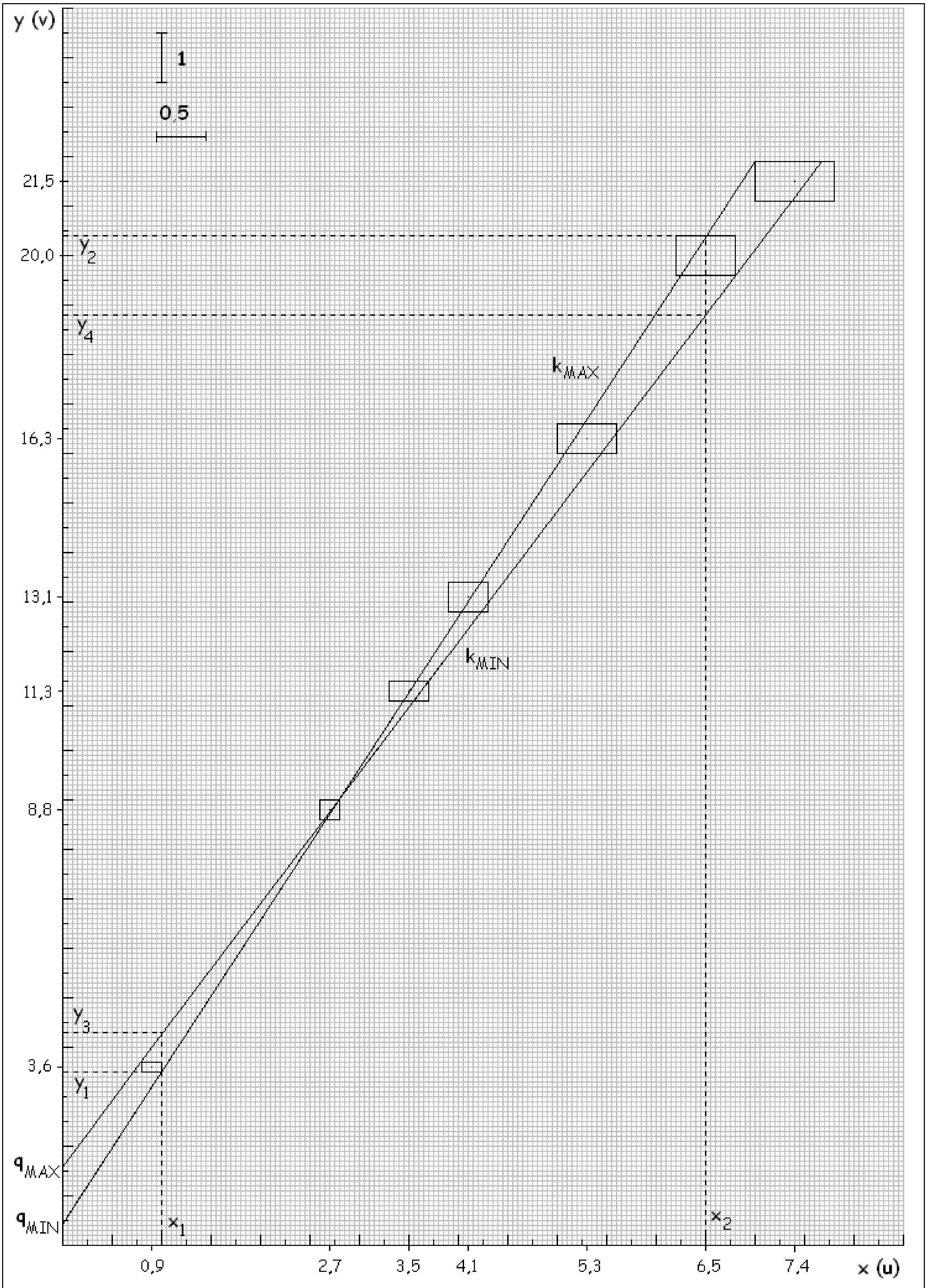


Figura 11 - Analisi dei dati della tabella 1

5.2 - Proporzionalità inversa.

Per la determinazione della legge di proporzionalità inversa mediante la rappresentazione grafica, si procede come segue.

Dopo avere stabilito graficamente che si tratta di una legge di proporzionalità inversa (il grafico "assomiglia" a un ramo di iperbole), si costruisce una tabella (vedi tabella 9) riportando i valori

Tabella 9 - Ricalcalo dei dati sperimentali per determinare la legge di proporzionalità inversa	
$z = 1/x$	y

Ovviamente della nuova variabile z devono essere calcolati anche gli errori Δz[10]. Si costruisce quindi il grafico y, z. Ricordando che stiamo cercando una legge del tipo $y = \frac{k}{x}$ e avendo posto $z = \frac{1}{x}$, si può quindi determinare una legge del tipo $y = k \cdot z$, cioè una proporzionalità diretta tra y e z. Procedendo nel modo illustrato nel paragrafo precedente si determina il valore di k e la sua incertezza.

5.3 - Proporzionalità quadratica.

Allo stesso modo si procede per determinare una legge di proporzionalità quadratica; con la differenza che, cercando una legge del tipo $y = k \cdot x^2$, si dovrà calcolare una tabella del tipo

Tabella 10 - Ricalcalo dei dati sperimentali per determinare la legge di proporzionalità quadratica	
$z = x^2$	y

Dopo aver calcolato i valori di $z = x^2$, vanno calcolate anche le incertezze Δz [11]. Si costruisce il grafico y, z e si cerca una legge del tipo $y = k \cdot z$, cioè una proporzionalità diretta tra y e z. Procedendo nel modo illustrato nel paragrafo 5.1 si determina il valore di k e la sua incertezza.

[10] Dalle regole della propagazione dell'errore si ricava che $\Delta z = \frac{\Delta x}{x^2}$.

[11] Dalle regole della propagazione dell'errore si ricava che $\Delta z = 2x\Delta x$.

6 - ANALISI NUMERICA DEI DATI E DETERMINAZIONE DELLA LEGGE FISICA

Come detto sopra l'analisi dei dati sperimentali può essere fatta anche per via numerica. Dopo aver rappresentato graficamente i dati ed aver individuato il tipo di relazione che meglio si adatta ad essi (proporzionalità diretta, inversa, quadratica o dipendenza lineare), si procede numericamente rielaborando i dati a partire dalle tabelle. Nel paragrafo 3 abbiamo già dato un esempio, in questo generalizzeremo il metodo.

Il computer, con un programma di foglio elettronico tipo Excel, aiuta notevolmente in questo lavoro, ma prima di impararne l'uso procederemo manualmente con degli esempi.

6.1 - Proporzionalità diretta e dipendenza lineare[12]

Riprendiamo la tabella 1 ed ampliamola aggiungendo quattro colonne. Nella prima mettiamo in valori degli scarti delle *x* (il secondo valore meno il primo: 2,7 - 0,9 = 1,8; il terzo meno il secondo: 3,5 - 2,7 = 0,8; ecc., ma volendo anche la differenza tra il terzo e il primo, ecc.), nella seconda i valori dei corrispondenti scarti delle *y* (il secondo valore meno il primo: 8,8 - 3,6 = 5,2; il terzo meno il secondo: 10,4 - 8,8 = 1,6; ecc.), che indichiamo *Dx* e *Dy*, nella terza i valori dei rapporti $k = \frac{Dy}{Dx}$. Quindi calcoliamo il valor medio di *k* facendo la media dei valori della quinta colonna e l'errore $\Delta k = \frac{k_{\text{MAX}} - k_{\text{MIN}}}{2}$. Nella sesta colonna mettiamo i valori di *q* calcolati con la relazione $q = y - \bar{k} \cdot x$ (il primo valore deriva dal calcolo: 3,6 - 2,8·0,9). Infine si fa la media tra tutti i valori della colonna 6 e si ottiene il valore medio di *q*. L'errore di *q* si calcola: $\Delta q = \frac{q_{\text{MAX}} - q_{\text{MIN}}}{2}$.

Tabella 11 - Determinazione semplificata della dipendenza lineare tra due grandezze fisiche

x	*y*	*Dx*	*Dy*	*k*	*q*
0,9 ± 0,1	3,6 ± 0,1	1,8	5,2	2,889	1,14
2,7 ± 0,1	8,8 ± 0,2	0,8	2,5	3,125	1,41
3,5 ± 0,2	11,3 ± 0,2	0,6	1,8	3,000	1,72
4,1 ± 0,2	13,1 ± 0,3	1,2	3,2	2,667	1,87
5,3 ± 0,3	16,3 ± 0,3	1,2	3,7	3,083	1,79
6,5 ± 0,3	20,0 ± 0,4	0,9	1,5	1,667	2,20
7,4 ± 0,4	21,5 ± 0,4				1,24
		valori medi		2,7	1,6
		incertezze		0,7	0,5

Nei calcoli è consigliabile utilizzare qualche cifra decimale in più, le approssimazioni vengono fatte alle fine. Nel caso in esame, dopo aver determinato Δ*k*, è stato scritto il valore di *k*. Successivamente sono stati calcolati i valori di *q*.

Come si può osservare i valori di *k* e *q* sono compatibili con quelli ricavati con il metodo grafico. Con tecniche di analisi statistica più sofisticate (la regressione lineare) si otterrebbe:

$$k = (2{,}81 \pm 0{,}07)(v/u) \quad \text{e} \quad q = (1{,}3 \pm 0{,}3)v$$

Il caso della proporzionalità diretta dà *q* = 0.

6.2 - Proporzionalità inversa

Si consideri la tabella di dati sperimentali data qui sotto. Il procedimento è identico a quello utilizzato per determinare il peso specifico dei cilindretti, riportato nel paragrafo 3 con la differenza

[12] Questo non è il modo migliore per arrivare alla determinazione della legge, ma è l'unico che al momento possiamo applicare. Gli altri presentano delle complessità di tipo matematico al di sopra delle conoscenze di uno studente di primo anno del Liceo Scientifico.

che invece di fare il rapporto tra le grandezze, bisogna fare il prodotto. Si completa quindi la tabella con il calcolo dei valori di k e di Δk. Le colonne con i valori di k-Δk e k+Δk servono per stabilire se le misure sono compatibili: il ragionamento è identico a quello già illustrato (nel caso dei valori della tabella 12 c'è compatibilità).

Per il valor medio di k facciamo la media tra tutti i valori ottenuti, per l'errore assoluto la media degli errori assoluti. Si ha quindi che la legge cercata è una legge di proporzionalità l'errore per averne una stima si ottiene che la legge è una proporzionalità inversa $y = \frac{k}{x}$ con k = 5,04 ± 0,05.

Tabella 12 - Determinazione della proporzionalità inversa.

x	Δx	y	Δy	$k = xy$	Δk[13]	k-Δk	k+Δk
1,81	0,01	2,79	0,01	5,050	0,046	5,004	5,096
2,24	0,01	2,23	0,01	4,995	0,045	4,950	5,040
2,89	0,01	1,75	0,01	5,058	0,046	5,012	5,104
3,70	0,01	1,37	0,01	5,069	0,051	5,018	5,120
4,07	0,01	1,23	0,01	5,006	0,053	4,953	5,059

5.3 - Proporzionalità quadratica

In laboratorio sono state fatte le seguenti misure relative al tempo che una pallina impiega a cadere da un'altezza h. Per ogni altezza fissata (misurata in metri) sono state fatte 5 misure del tempo di caduta con un cronometro elettronico (espresso in secondi). I valori ottenuti sono stati riportati nella tabella 13.

Tabella 13 - Dati di laboratorio della caduta di una pallina da varie altezze

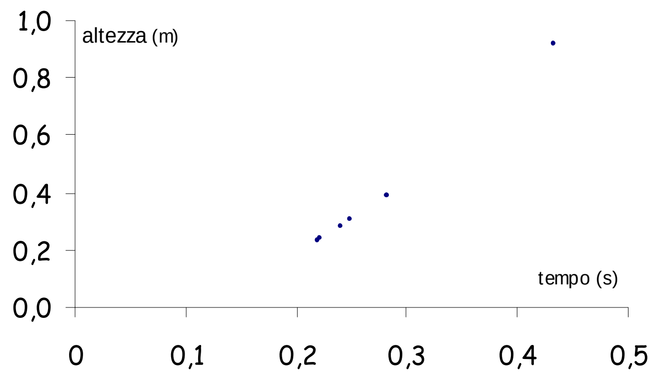
h	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
0,235	0,21893	0,21903	0,21899	0,21894	0,21895
0,241	0,22179	0,22176	0,22173	0,22177	0,22174
0,284	0,24100	0,24099	0,24098	0,24096	0,24099
0,305	0,24966	0,24973	0,24966	0,24969	0,24974
0,388	0,28154	0,28157	0,28154	0,28154	0,28163
0,391	0,28248	0,28250	0,28247	0,28245	0,28246
0,917	0,43270	0,43266	0,43270	0,43269	0,43269

Dalla tabella 13 è stata ricavata una seconda tabella (tabella 14) in cui i dati sono stati ridotti, ovvero sono state effettuate delle medie e stimati gli errori.

Tabella 14 - Dati ridotti della caduta di una pallina

h (m)		t (s)	
0,235	0,001	0,21897	0,00005
0,241	0,001	0,22176	0,00003
0,284	0,001	0,24098	0,00002
0,305	0,001	0,24970	0,00004
0,388	0,001	0,28156	0,00004
0,391	0,001	0,28247	0,00002
0,917	0,001	0,43269	0,00002

Figura 12 - Grafico relativo ai dati della tabella 14



[13] Si ricordi che essendo un prodotto $\Delta k = x\Delta y + y\Delta x$.

Per determinare la legge fisica che lega questi valori aggiungiamo delle colonne alla tabella (tabella 15). Dal grafico si intuisce che non può trattarsi di una relazione lineare perché è evidente che se $h = 0$, anche $t = 0$, né di una proporzionalità diretta o inversa, ricerchiamo quindi una proporzionalità quadratica e calcoliamo il rapporto h/t^2 (vedi tabella 15). Come si può osservare questi valori sono molto simili, calcoliamo gli errori relativi su h e su t, $E_r(h)$ e $E_r(t)$, e l'errore relativo su k [$E_r(k)= E_r(h)+2\ E_r(\mathrm{t})$]; infine calcoliamo l'errore assoluto Δk. Dalla media dei valori di k e di Δk otteniamo il risultato cercato: $k = (4{,}897 \pm 0{,}015)\ \mathrm{m/s^2}$.

Tabella 15 - Dati ridotti della caduta di una pallina e calcoli per determinare la costante di proporzionalità e l'incertezza

h (m)	Δh (m)	t (s)	Δt (s)	$k=h/t^2$ ($\mathrm{m/s^2}$)	$Er(h)$	$Er(t)$	$Er(k)$	Δk ($\mathrm{m/s^2}$)
0,241	0,001	0,22176	0,00003	4,900615	0,0041	0,000125	0,00442	0,02166
0,284	0,001	0,24098	0,00002	4,890535	0,0035	0,000083	0,00369	0,01805
0,305	0,001	0,2497	0,00004	4,891733	0,0033	0,000160	0,00360	0,01761
0,388	0,001	0,28156	0,00004	4,894291	0,0026	0,000142	0,00286	0,01400
0,391	0,001	0,28247	0,00002	4,900406	0,0026	0,000071	0,00270	0,01323
0,917	0,001	0,43269	0,00002	4,897964	0,0011	0,000046	0,00118	0,00578