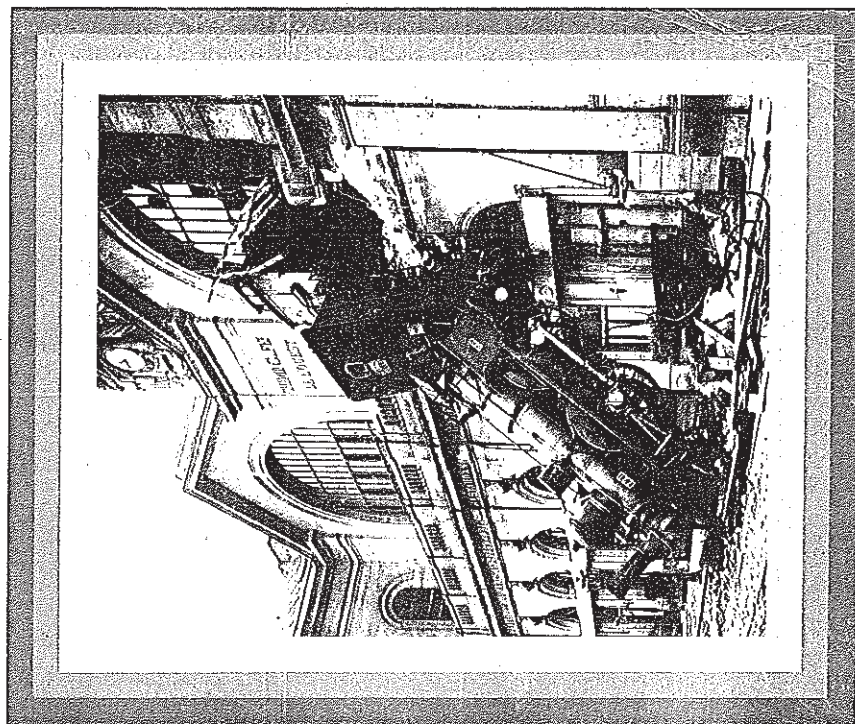


JOHN R. TAYLOR

INTRODUZIONE ALL'ANALISI DEGLI ERRORI

Lo studio delle incertezze nelle misure fisiche

ZANICHELLI



J. R. TAYLOR

INTRODUZIONE ALL'ANALISI DEGLI ERRORI

ZANICHELLI

L'autore

John R. Taylor — B. A. in matematica all'Università di Cambridge nel 1960, Ph. D. in fisica all'Università di California, a Berkeley, nel 1963 — ha insegnato alle Università di Cambridge e di Londra in Inghilterra; e poi a quelle di Princeton e del Colorado (dal 1966) negli Stati Uniti.

L'opera

Questo libro, destinato agli studenti che devono affrontare nei loro studi le «incertezze sperimentali», non richiede una conoscenza a priori della materia.

I primi due capitoli sviluppano oggetto e fini dell'analisi degli errori e la sua importanza nelle relazioni di laboratorio. I capitoli da 3 a 5 descrivono la propagazione degli errori, le nozioni statistiche di media e deviazione standard, e la distribuzione normale. Nel loro insieme i capitoli da 1 a 5 costituiscono la 1ª parte del libro, e forniscono una esposizione chiara di tutta l'analisi degli errori di solito necessaria in un corso introduttivo di laboratorio.

I capitoli da 6 a 12, costituenti la 2ª parte, sono brevi trattazioni di alcuni argomenti più avanzati, l'uno indipendente dall'altro e ciascuno in sé sufficiente: rigetto di dati, medie pesate, adattamento con i minimi quadrati, covarianza e correlazione, distribuzioni binomiali e di poisson e il test chi-quadrato.

Ricco di numerosi esempi desunti dalla realtà quotidiana, il testo offre anche, alla fine di ogni capitolo, una batteria di problemi, per la maggior parte discussi e risolti, poi, in appendice.

TAYLOR INTRODUZIONE ANALISI ERRORI

ISBN 88-08-03292-2



9 788808 032928

89 012345 (61B.3292)

Prezzo al pubblico L. 20 000

1. Descrizione preliminare dell'analisi degli errori

L'analisi degli errori è lo studio e il calcolo dell'incertezza nella misura. L'esperienza ha mostrato che nessuna misura, per quanto fatta con cura, può essere completamente libera da errori. Dal momento che l'intera struttura ed applicazione della scienza dipende dalle misure, è quindi di importanza fondamentale essere capaci di calcolare questi errori e di ridurli al minimo.

Nel primo capitolo noi descriviamo alcune semplici misure che illustrano l'inevitabile presentarsi degli errori sperimentali e mostrano la grande importanza di conoscere quanto essi sono grandi. Noi descriveremo (in alcuni semplici casi, almeno) come la grandezza degli errori sperimentali può essere realmente stimata, spesso per mezzo di poco più che il buon senso comune.

1.1. Errori come incertezze

Nella scienza la parola "errore" non implica il solito significato di "sbaglio" o "svista". "Errore" in una misura scientifica significa l'inevitabile incertezza che è presente in tutte le misure. Come tali gli errori non sono sbagli; non si possono evitare operando con molta cura. Il meglio che si possa fare è di assicurarsi che gli errori siano il più ragionevolmente piccoli possibile, e di avere qualche stima realistica di quanto essi sono grandi. La maggior parte dei libri introducono definizioni ulteriori di "errore", e noi discuteremo alcune di queste più avanti. Per il momento, comunque, noi useremo la parola "errore" esclusivamente nel senso di "incertezza" e tratteremo le due parole come interscambiabili.

1.2. Inevitabilità degli errori

Per illustrare l'inevitabile presentarsi degli errori, è sufficiente esaminare con cura qualsiasi misura di ogni giorno. Consideriamo per esempio un carpentiere che debba misurare l'altezza di un vano-porta per installare una porta. Come prima rozza misura egli potrebbe semplicemente guardare il vano-porta e stimare che esso è alto 210 cm. Questa rozza "misura" è certamente soggetta ad errore. Se richiesto, il carpentiere potrebbe esprimere questa incertezza ammettendo che l'altezza potrebbe essere compresa fra 205 e 215 cm.

Se egli volesse una misura più accurata dovrebbe usare un metro a nastro, e

potrebbe trovare che l'altezza è 211.3 cm. Questa misura è certamente più precisa della sua stima originale, ma è ovviamente ancora soggetta a qualche incertezza, dal momento che è impensabile che egli possa sapere che per esempio l'altezza è esattamente 211.3000 piuttosto che 211.3001 cm.

Ci sono varie ragioni per cui questa incertezza rimane, e molte le discuteremo in questo libro. Alcune di queste cause di errore potrebbero essere rimosse se il carpentiere ci mettesse abbastanza impegno. Per esempio una sorgente di errore potrebbe essere che la scarsa illuminazione rende difficile la lettura del metro a nastro; questo fatto potrebbe essere ovviato migliorando l'illuminazione. D'altra parte alcune sorgenti di errore sono intrinseche al processo di misura e non possono essere eliminate del tutto. Per esempio, supponiamo che il metro del carpentiere sia graduato in mezzi centimetri. Il limite superiore del vano-porta probabilmente non coinciderà esattamente con una delle incisioni che indicano i mezzi centimetri e, in questo caso, il carpentiere deve "stimare dove" cade il limite superiore del vano-porta fra due incisioni. Anche nel caso in cui il limite superiore coincide con una delle tacche, la tacca stessa è larga circa un millimetro; così egli deve stimare dove giace il limite superiore del vano-porta all'interno della tacca. In entrambi i casi in ultima analisi il carpentiere deve stimare dove giace il limite superiore della porta relativamente alle incisioni sul suo nastro, e questa necessità comporta qualche incertezza nella sua risposta.

Comprando un nastro migliore con incisioni più vicine e più fini, il carpentiere può ridurre il suo errore, ma non può eliminarlo completamente. Se egli diventasse ossessivamente determinato a trovare l'altezza della porta con la più grande precisione che è tecnicamente possibile, potrebbe comprare un costoso interferometro laser. Ma anche la precisione di un interferometro è limitata a distanze dell'ordine della lunghezza d'onda della luce (circa 0.5×10^{-6} metri). Benché ora il carpentiere sia in grado di misurare l'altezza con precisione fantastica, ancora non potrà determinare "esattamente" l'altezza del vano-porta.

Inoltre, mentre il nostro carpentiere si dà da fare per raggiungere una precisione via via più grande, incontrerà un importante problema di principio. Certamente troverà che la altezza è diversa in punti diversi. Anche nello stesso punto, troverà che l'altezza varia se variano temperatura ed umidità, o anche se egli accidentalmente toglie via un sottile strato di polvere. In altre parole, troverà che non esiste una cosa come "la" altezza del vano-porta. Questo genere di problema è chiamato un "problema di definizione" (l'altezza della porta non è una quantità ben definita) e gioca un ruolo importante in molte misure scientifiche.

Le esperienze del nostro carpentiere illustrano quello che è in genere vero. Nessuna quantità fisica (una lunghezza, un tempo, una temperatura, etc.) può essere misurata con completa certezza. Operando con cura, possiamo essere capaci di ridurre le incertezze finché esse sono estremamente piccole, ma eliminarle del tutto è impossibile.

Nelle misure di ogni giorno in genere non ci preoccupiamo di discutere degli errori. Talvolta semplicemente gli errori non ci interessano. Se diciamo che la distanza casa-scuola è 3 km, non importa (nella maggior parte dei casi) se questo significa "compresa fra 2.5 e 3.5 km" oppure "compresa fra 2.99 e 3.01 km". Spesso gli errori sono importanti, ma possono essere accettati istintivamente e senza considerazione esplicita. Quando il nostro carpentiere si accinge ad intagliare la porta, deve conoscere la sua altezza con un errore minore o uguale a un millimetro. Comunque, finché l'errore è così piccolo, la porta sarà costruita perfettamente (per tutti gli scopi pratici) e, per quello che riguarda il nostro carpentiere, l'analisi degli errori è finita.

1.3. Importanza di conoscere gli errori

Il nostro esempio del carpentiere che misura un vano-porta ha mostrato che le incertezze sono presenti in ogni misura. Ora consideriamo un esempio che mostri più chiaramente come sia di importanza fondamentale conoscere quanto esse siano grandi.

Supponiamo di dover affrontare un problema come quello che si dice sia stato risolto da Archimede. Dobbiamo trovare se una corona è fatta di oro a 18 carati, come viene dichiarato, oppure di una lega meno costosa. Seguendo Archimede, noi decidiamo di valutare la densità della corona, sapendo che la densità dell'oro a 18 carati e quella della lega sospettata sono rispettivamente.

$$\rho_{oro} = 15.5 \text{ gm/cm}^3$$

$$\rho_{lega} = 13.8 \text{ gm/cm}^3$$

Se noi potessimo misurare la densità ρ della corona, allora sarebbe possibile (come suggerisce Archimede) decidere se essa è realmente d'oro, confrontando la sua ρ con quelle note ρ_{oro} e ρ_{lega} .

Supponiamo di convocare due esperti per la misura della densità. Il primo esperto, A, potrebbe fare una rapida misura di ρ e concludere che la sua stima migliore per ρ è 15, e che ρ certamente è compreso fra 13.5 e 16.5 gm/cm³.

L'esperto B potrebbe impiegarci più tempo e concludere che la miglior stima per ρ è 13.9 e che essa è compresa nell'intervallo fra 13.7 e 14.1 gm/cm³. Le conclusioni dei nostri due esperti possono essere riassunte come mostrato in Tab. 1.1.

Tabella 1.1. Densità della corona (in gm/cm³).

Misure riportate	Esperto A	Esperto B
Miglior stima per ρ	15	13.9
Intervallo probabile per ρ	13.5-16.5	13.7-14.1

La prima cosa da notare in questi risultati è che, sebbene la misura di B sia molto più precisa, anche la misura di A è probabilmente corretta. Ciascun esperto stabilisce un intervallo all'interno del quale egli è convinto che ρ sia compreso, e questi intervalli si sovrappongono; così è del tutto possibile (ed in effetti è probabile) che entrambe le affermazioni siano corrette.

Il punto seguente da notare è che l'errore nella misura di A è così grande che il suo risultato è inutilizzabile. La densità dell'oro a 18 carati e quella della lega sono entrambe comprese nel suo intervallo, 13.5 ÷ 16.5 gm/cm³; così è impossibile trarre qualsiasi conclusione dalle misure di A. D'altra parte le misure di B indicano chiaramente che la corona non è genuina; la densità della lega sospetta, 13.8, giace confortevolmente all'interno dell'intervallo stimato da B, cioè 13.7 ÷ 14.1, ma quella dell'oro a 18 carati, 15.5, è ben al di fuori di esso. Evidentemente, perché le misure permettano di trarre una conclusione, gli errori sperimentali non devono essere troppo grandi. Comunque "non" è necessario che gli errori siano estremamente piccoli. Da questo punto di vista il

nostro esempio è tipico di molte misure scientifiche, in cui gli errori devono essere ragionevolmente piccoli (forse qualche percento del valore misurato), ma in cui una estrema precisione è spesso abbastanza inutile.

Dal momento che la nostra decisione dipende dall'affermazione di B che ρ giace fra 13.7 e 14.1 gm/cm³, è importante che B ci dia giustificazioni sufficienti per credere alla sua affermazione. In altre parole, lo sperimentatore deve giustificare l'intervallo di valori da lui stabilito. Questo punto è spesso trascurato dallo studente che inizia, il quale asserisce semplicemente che il suo errore era 1 mm, o 2 sec., o qualsivoglia, omettendo qualsiasi giustificazione. Senza una breve spiegazione di come l'errore è stato stimato, la asserzione è spesso inutile.

Il punto più importante riguardo alle misure dei nostri due esperti è questo: come la maggior parte delle misure scientifiche, esse sarebbero state entrambe inutili se non avessero incluso affermazioni realistiche sui loro errori. Infatti se noi conosciamo soltanto l'informazione della riga superiore della Tab. 1.1, non soltanto saremmo incapaci di trarre qualsiasi valida conclusione, ma potremmo proprio essere tratti in errore, dal momento che il risultato dell'esperto A (15) sembrerebbe suggerire che la corona è genuina.

1.4. Alcuni esempi

Gli esempi presentati nelle ultime due sezioni sono stati scelti perché danno una buona introduzione ad alcune delle principali caratteristiche dell'analisi degli errori. Essi non sono stati scelti per la loro importanza, e il lettore è scusato se pensa che siano un po' artefatti. È comunque facile pensare ad esempi che siano della più grande importanza in quasi tutti i rami della scienza applicata o di base.

Nelle scienze applicate, l'ingegnere che disegna una centrale nucleare di potenza deve conoscere le caratteristiche dei materiali e dei combustibili che intende usare. Il costruttore di un calcolatore tascabile deve conoscere le proprietà dei suoi vari componenti elettronici. In ciascun caso, qualcuno deve misurare i parametri richiesti; dopo averli misurati deve stabilire l'attendibilità delle sue misure, e questo richiede l'analisi degli errori. Gli ingegneri che lavorano sulla sicurezza di aeroplani, treni e automobili, devono rendersi conto delle incertezze nei tempi di reazione dei conducenti, delle distanze di frenata, ed in tante altre variabili; e trascurare di applicare l'analisi degli errori può portare ad incidenti come quello mostrato sulla copertina di questo libro. Anche in un campo meno scientifico, come la manifattura di stoffe, l'analisi degli errori, nella forma di "controllo di qualità", gioca un ruolo importante.

Nelle scienze di base, l'analisi degli errori ha un ruolo anche più fondamentale. Quando viene proposta una nuova teoria, essa deve essere verificata confrontandola con teorie più vecchie per mezzo di uno o più esperimenti per i quali la nuova teoria prevede risultati diversi da quelle più vecchie. In linea di principio, si tratta semplicemente di fare l'esperimento e si lascia che il risultato decida tra le teorie rivali. In pratica la situazione è complicata dall'inevitabile presenza delle incertezze sperimentali. Tutte queste devono essere accuratamente analizzate ed i loro effetti ridotti finché l'esperimento permette di scegliere quale teoria è accettabile. Cioè, i risultati sperimentali, con i loro errori, devono essere "consistenti" con le previsioni di una teoria e "inconsistenti" con quelle di tutte le altre alternative ragionevoli conosciute. Ovviamente il successo di tale procedimento dipende criticamente dal fatto che lo scienziato conosca bene l'analisi degli errori, e dalla sua abilità di convincere gli altri di questa sua conoscenza.

Un famoso esempio di questo genere di verifica di una teoria scientifica è la misura della deviazione della luce quando passa vicino al sole. Quando Einstein pubblicò la sua teoria generale della relatività nel 1916, mostrò che la teoria prevedeva che la luce proveniente da una stella dovesse essere deviata di un angolo $\alpha = 1.8''$ quando passava vicino al sole. La più semplice teoria classica prevederebbe propagazione rettilinea ($\alpha = 0$), mentre una teoria classica più accurata prevede (come Einstein stesso aveva mostrato nel 1911) una deviazione di un angolo $\alpha = 0.9''$. In linea di principio, tutto quello che era necessario era di osservare una stella quando essa era allineata col bordo del sole, e misurare l'angolo di deflessione. Se il risultato era $\alpha = 1.8''$, allora la relatività generale doveva essere accettata (almeno per questo fenomeno); se α fosse stato 0 oppure $0.9''$, allora la relatività generale sarebbe risultata sbagliata, e una delle teorie precedenti corretta.

In pratica, la misura della deflessione della luce da parte del sole era estremamente difficile, ed era possibile soltanto durante una eclissi solare. Nondimeno, nel 1919 essa fu misurata con successo da Dyson, Eddington e Davidson, i quali riportarono la loro migliore stima come $\alpha = 2''$, con il 95% di confidenza che essa fosse compresa nell'intervallo tra $1.7''$ e $2.3''$ ⁽¹⁾.

Ovviamente questo risultato era consistente con la relatività generale ed inconsistente con entrambe le teorie classiche.

Esso quindi diede un forte supporto alla teoria di Einstein della relatività generale.

A quel tempo questo risultato fu controverso. Molti suggerivano che gli errori erano stati malamente sottostimati, e che quindi l'esperimento non era conclusivo. Esperimenti successivi hanno teso a confermare la previsione di Einstein e a ribadire le conclusioni di Dyson, Eddington e Davidson. Il punto importante qui è che l'intera questione dipendeva dall'abilità degli sperimentatori di valutare realisticamente tutti i loro errori e di convincere chiunque altro di quello che essi avevano fatto.

Lo studente del primo corso di laboratorio non sarà di solito in grado di condurre verifiche definitive di nuove teorie. D'altra parte molti esperimenti nel primo corso sono allestiti per verificare teorie fisiche esistenti. Per esempio, la teoria di Newton della gravità prevede che i corpi cadano con accelerazione costante g (sotto condizioni appropriate), e lo studente può condurre degli esperimenti per verificare se questa previsione è corretta. A prima vista questo genere di esperimenti può sembrare artificiale e privo di significato, dal momento che le teorie ovviamente sono state verificate molte volte con molta maggior precisione di quello che è possibile in qualunque corso di insegnamento di laboratorio.

Nondimeno se lo studente capisce il ruolo fondamentale della analisi degli errori e accetta di fare la verifica più precisa possibile con la strumentazione a disposizione, tali esperimenti possono essere esercizi interessanti ed istruttivi.

1.5. La stima degli errori nella lettura di scale

Finora abbiamo considerato parecchi esempi che illustrano perché ogni misura è soggetta ad errori e perché è importante conoscere la loro grandezza.

D'altra parte non abbiamo ancora discusso come uno possa realmente valutare la grandezza di un errore. Infatti tale valutazione può essere piuttosto

¹ Questo riassunto semplificato è basato sull'articolo originale di Dyson, Eddington, e Davidson (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, 220A, 1920, 291). Ho convertito l'"errore probabile" originariamente quotato nell'intervallo di confidenza del 95%. Il significato preciso di tale intervallo di confidenza sarà stabilito nel Capitolo 5.

complicata, e questo è l'argomento principale del resto di questo libro. Fortunatamente, ci sono alcune semplici misure per cui è facile fare una stima ragionevole dell'errore, usando spesso poco più che il buon senso comune. Qui e nella Sezione 1.6 diamo due esempi di tali semplici misure. Una comprensione di questi esempi permetterà allo studente di cominciare ad usare l'analisi degli errori nei suoi esperimenti, e costituirà la base per i nostri futuri sviluppi.

Il nostro primo esempio è una misura fatta utilizzando una scala graduata, come il righello in Figura 1.1 o il voltmetro in Figura 1.2. Per misurare la lunghezza di una matita in Figura 1.1, dobbiamo dapprima allineare l'estremità inferiore della matita con lo zero del righello, e quindi decidere dove cade la punta sulla scala del righello. Per misurare il voltaggio in Figura 1.2, dobbiamo decidere dove punta l'ago sulla scala del voltmetro.

Se supponiamo che il righello e il voltmetro siano attendibili, allora in entrambi i casi il problema principale è di decidere dove un certo punto giace in relazione alle incisioni sulla scala. (Naturalmente, se vi è qualche possibilità che il righello e il voltmetro "non" siano attendibili, allora dovremo pure tenere conto di questo fatto).

Le incisioni del righello in Figura 1.1 sono piuttosto vicine fra loro (un millimetro l'una dall'altra). Uno sperimentatore potrebbe decidere a ragione che la lunghezza mostrata è indubbiamente più vicina a 36 mm che a 35 o a 37 mm., ma che una lettura più precisa non è possibile. Allora dovrebbe giungere a questa conclusione

la migliore stima della lunghezza = 36 mm,
intervallo probabile, da 35.5 fino a 36.5 mm. (1.1)

e dovrebbe dire che ha misurato la lunghezza al millimetro più vicino.

Questo tipo di conclusione - cioè che la grandezza giace più vicino a una certa divisione piuttosto che a una di quelle adiacenti - è del tutto comune. Per questa ragione, molti scienziati introducono la convenzione che l'affermazione $l = 36$ mm senza altra qualificazione si presuma che significhi che l è più

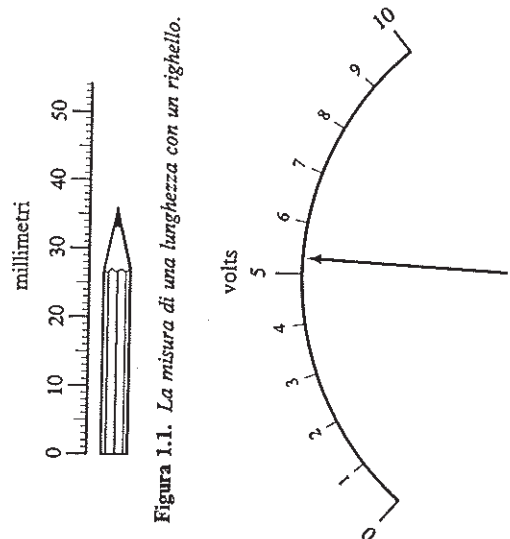


Figura 1.1. La misura di una lunghezza con un righello.

Figura 1.2. Una lettura su un voltmetro.

vicino a 36 piuttosto che a 35 o 37; cioè,

$$l = 36 \text{ mm}$$

significa

$$35.5 \text{ mm} \leq l \leq 36.5 \text{ mm}.$$

Nello stesso modo, un risultato come $x = 1.27$ senza altro errore definito dovrebbe significare che x giace tra 1.265 e 1.275. In questo libro non useremo questa convenzione; al contrario, indicheremo gli errori sempre esplicitamente. Nondimeno, è importante per lo studente conoscere questa convenzione, e sapere che essa si applica a qualunque numero fornito senza un errore. E specialmente importante conoscere questa convenzione in questa era di calcolatori tascabili, che spesso espongono molte cifre. Se uno studente copia ciecamente un numero come 123.456 dal suo calcolatore senza nessuna qualificazione, allora un suo lettore è autorizzato ad assumere che il numero in definitiva è corretto fino a sei cifre significative, il che è molto improbabile.

Le incisioni sul voltmetro mostrato in Figura 1.2 sono spaziate più largamente di quelle sul righello. Qui la maggior parte degli osservatori sarebbero d'accordo di poter identificare con facilità la divisione a cui l'ago è più vicino. Poiché la spaziatura è più grande, si può realisticamente stimare dove giace l'ago nello spazio fra due divisioni. Così una conclusione ragionevole per il voltaggio mostrato potrebbe essere

la miglior stima del voltaggio = 5.3 volts,
intervallo possibile, da 5.2 fino a 5.4 volts (1.2)

Il procedimento di valutare la posizione fra le incisioni di una scala è chiamato interpolazione. È una tecnica importante che può essere migliorata con la pratica.

Osservatori diversi potrebbero non essere d'accordo con le valutazioni precise date nelle Equazioni (1.1) e (1.2). In particolare uno potrebbe decidere di interpolare per la lunghezza in Figura 1.1, e misurarla con un errore più piccolo di quello dato nella Equazione (1.1). Ciò nonostante, poche persone negherebbero che le Equazioni (1.1) e (1.2) sono stime ragionevoli delle grandezze in gioco e dei loro errori probabili. Così vediamo che la stima approssimata degli errori è piuttosto facile quando l'unico problema è di localizzare un punto su una scala graduata.

1.6. La stima degli errori nelle misure ripetibili

Molte misure implicano errori che sono molto più difficili da stimare di quelli connessi con il localizzare un punto su una scala. Per esempio, quando misuriamo un intervallo di tempo utilizzando un cronometro, la principale sorgente di errore non è la difficoltà di leggere il quadrante, ma il nostro incognito tempo di reazione nel far partire e nel fermare l'orologio. Questo genere di incertezze possono talvolta essere stimate ragionevolmente, se possiamo ripetere la misura parecchie volte. Supponiamo, per esempio, di cronometrare il periodo di un lungo pendolo una volta e di ottenere come risultato 2.3 secondi. Da una sola misura non possiamo dire molto circa l'errore sperimentale. Ma se noi ripetiamo la misura e otteniamo 2.4 sec., allora possiamo immediatamente dire che l'errore è probabilmente dell'ordine di 0,1 sec. Se una

sequenza di quattro misure dà i risultati (in sec.),

$$2.3, 2.4, 2.5, 2.4 \quad (1.3)$$

allora possiamo cominciare a fare alcune stime piuttosto realistiche.

In primo luogo, è naturale assumere che la miglior stima del periodo è il "valore medio", 2.4 sec.²

In secondo luogo, sembra ragionevole assumere che il periodo corretto giace in qualche punto tra il valore minimo, 2.3, e il valore massimo, 2.5. Così possiamo ragionevolmente concludere che

$$\begin{aligned} \text{la migliore stima} &= \text{media} = 2.4 \text{ sec.} \\ \text{intervallo probabile,} & \text{ da } 2.3 \text{ fino a } 2.5 \text{ sec.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ogniquattro volte possiamo ripetere la stessa misura parecchie volte, lo spargimento dei nostri valori ci dà una indicazione preziosa dell'errore nelle nostre misure. Nei Capitoli 4 e 5, discuteremo metodi statistici per trattare tali misure ripetute. Sotto le condizioni corrette, questi metodi statistici danno una stima dell'errore più accurata di quelle che abbiamo trovato nella Equazione (1.4) usando solo il senso comune. Una trattazione più propriamente statistica ha anche il vantaggio di dare un valore oggettivo dell'errore, indipendente dal giudizio individuale dell'osservatore³. Nondimeno la stima nella (1.4) rappresenta una conclusione semplice e realistica partendo dalle quattro misure nella (1.3).

Non sempre si può fare assegnamento su misure ripetute come quelle nella (1.3) per rivelare gli errori. In primo luogo dobbiamo essere sicuri che la grandezza misurata sia realmente la "stessa" grandezza ogni volta. Supponiamo per esempio di misurare la forza di rottura di due spire supposte identiche rompendole (cosa che non possiamo fare più di una volta per ciascuna spira). Se otteniamo due risultati diversi, questa differenza "può" significare che le nostre misure erano affette da errore "oppure" che le due spire non erano realmente uguali. Di per se stessa, la differenza fra i due risultati non fa luce sull'attendibilità della nostra misura.

Anche quando possiamo essere sicuri che stiamo misurando la stessa grandezza ogni volta, misure ripetute non sempre riveleranno gli errori. Per esempio, supponiamo che l'orologio usato per misurare i tempi in (1.3) marciasse uniformemente con un anticipo del 5 per cento. Allora tutte le misure di tempo sarebbero troppo lunghe del 5 per cento, e nessun insieme di misure (con lo stesso orologio) per quanto ripetute rivelerebbe questo difetto. Errori di questo tipo, che influenzano tutte le misure nello stesso modo, sono chiamati errori "sistematici", e possono essere difficili da rivelare, come discuteremo nel Capitolo 4. Nel nostro esempio il rimedio dovrebbe essere di provare la bontà dell'orologio confrontandolo con uno più affidabile. Più in generale, dovrebbe essere chiaro che se si ha qualche motivo di dubitare dell'affidabilità di qualsiasi dispositivo di misura (un orologio, un metro a nastro, un voltmetro) si dovrebbe confrontarlo con un dispositivo che è noto essere più affidabile.

² Mostreteremo nel Capitolo 5 che la migliore stima basata su parecchie misure di una grandezza è praticamente sempre la media delle misure.

³ Inoltre una trattazione più propriamente statistica generalmente dà un errore più piccolo dell'intervallo compreso fra il più piccolo e il più grande dei valori osservati. Così, osservando le quattro misure di tempo nella (1.3), noi abbiamo stimato che il periodo è "probabilmente" in qualche punto fra 2.3 e 2.5 sec. I metodi statistici dei Capitoli 4 e 5 ci permetteranno di stabilire a un livello di confidenza del 70 per cento che esso giace nell'intervallo più piccolo da 2.36 a 2.44 sec.

Gli esempi discussi in questa e nella precedente Sezione mostrano che talvolta gli errori sperimentali possono essere stimati facilmente. D'altra parte, ci sono molte misure per le quali gli errori "non" sono così facilmente valutabili. Inoltre, alla fine vorremo dei valori più precisi per gli errori di quello che le semplici valutazioni finora discusse possono darci. Questi argomenti ci occuperanno dal Capitolo 3 in avanti. Nel Capitolo 2 assumeremo temporaneamente di sapere come stimare gli errori in tutte le grandezze di interesse, così da poter discutere qual è il miglior modo per ottenere una conclusione sperimentale.

2. Come rappresentare ed utilizzare gli errori

Ora abbiamo un'idea dell'importanza degli errori sperimentali e di come essi sorgano. Abbiamo anche visto come essi possano essere stimati in alcune semplici situazioni. In questo capitolo presentiamo alcuni concetti fondamentali e alcune regole dell'analisi degli errori, e diamo esempio del loro uso in alcuni esperimenti tipici in un laboratorio di fisica. Il nostro scopo principale è di familiarizzarvi con il vocabolario base dell'analisi degli errori e con il modo in cui essa è usata nell'introduzione al laboratorio. In seguito, all'inizio del Cap. 3, saremo pronti allo studio di come gli errori sono realmente calcolati.

Nelle Sezioni 2.1-2.3 definiremo parecchi concetti fondamentali dell'analisi degli errori e discuteremo alcune regole generali per stabilire le incertezze. Nelle Sezioni 2.4-2.6 discuteremo come queste idee possano essere usate in alcuni esperimenti tipici nell'introduzione al laboratorio di fisica. Finalmente, nelle Sezioni 2.7-2.9, introdurremo una ulteriore definizione fondamentale, quella di errore relativo, e discuteremo il suo significato.

2.1. Stima migliore \pm errore

Abbiamo visto che il modo corretto di fornire il risultato di qualunque misura è per l'operatore quello di dare la miglior stima della quantità in questione e l'intervallo all'interno della quale egli è confidente che essa si trovi. Per esempio, il risultato delle misure di tempo discusse nella Sez. 1.6 fu riportato come

$$\begin{aligned} \text{la miglior stima del tempo} &= 2.4 \text{ sec.} \\ \text{intervallo probabile,} & 2.3 - 2.5 \text{ sec.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Qui la stima migliore, 2.4 sec., giace nel punto di mezzo dell'intervallo stimato dei valori probabili, 2.3 - 2.5 sec., come è in tutti i nostri esempi. Questa relazione è ovviamente molto naturale, ed è quella che compete alla maggior parte delle misure. Essa permette di esprimere i risultati della misura in una forma molto compatta. Per esempio, la misura del tempo registrata in (2.1) è usualmente scritta come segue:

$$\text{valore misurato del tempo} = 2.4 \pm 0.1 \text{ sec.} \quad (2.2)$$

Questa singola equazione è esattamente equivalente alle due riportate in (2.1). In generale, il risultato di qualsiasi misura di una quantità x è scritta come

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{\text{best}} \pm \delta x \quad (2.3)$$

Questa affermazione significa, in primo luogo, che la miglior stima dello sperimentatore per la quantità in questione è il numero x_{best} , in secondo luogo, che egli è ragionevolmente confidente che la quantità giaccia in qualche punto tra $x_{\text{best}} - \delta x$ e $x_{\text{best}} + \delta x$. Il numero δx è chiamato l'"incertezza", o "errore", nella misura di x . È sempre conveniente definire positiva la quantità δx , così che $x_{\text{best}} + \delta x$ è sempre "il più alto" valore probabile della quantità misurata e $x_{\text{best}} - \delta x$ è "il più basso".

Noi abbiamo lasciato intenzionalmente il significato dell'intervallo, $x_{\text{best}} - \delta x$ fino a $x_{\text{best}} + \delta x$, in qualche modo vago, ma possiamo talvolta renderlo più preciso. In una semplice misura, come quella dell'altezza di un vano-porta, noi possiamo facilmente stabilire un intervallo $x_{\text{best}} - \delta x$ fino a $x_{\text{best}} + \delta x$ all'interno del quale noi siamo "assolutamente" certi che la quantità misurata si trovi. Sfortunatamente, nella maggior parte delle misure scientifiche è molto difficile fare tale affermazione. In particolare se vogliamo essere completamente certi che la quantità misurata si trovi tra $x_{\text{best}} - \delta x$ e $x_{\text{best}} + \delta x$, noi di solito dobbiamo scegliere un valore di δx che è troppo grande per essere utile. Per evitare questo, possiamo talvolta scegliere un δx per il quale siamo, per esempio, confidenti al 70 per cento che la reale quantità sia compresa tra $x_{\text{best}} - \delta x$ e $x_{\text{best}} + \delta x$. Comunque, ovviamente non possiamo fare questo senza una conoscenza dettagliata delle leggi statistiche che regolano il processo di misura. Ritorniamo a questo punto nel Capitolo 4. Per ora, accontentiamoci di definire l'errore δx in modo da essere "ragionevolmente certi" che la quantità misurata sia compresa tra $x_{\text{best}} - \delta x$ e $x_{\text{best}} + \delta x$.

2.2. Cifre significative

Vale la pena mettere in risalto parecchie regole fondamentali per il calcolo degli errori. In primo luogo, dal momento che la quantità δx è una stima di un errore, essa dovrebbe ovviamente non essere stabilita con troppa precisione. Se noi misuriamo l'accelerazione di gravità g , sarebbe assurdo dare un risultato come:

$$(g \text{ misurato}) = 9.82 \pm 0.02385 \text{ m/sec.}^2. \quad (2.4)$$

È impensabile che l'errore nella misura possa essere conosciuto fino a 4 cifre significative. Nel lavoro di alta precisione, gli errori sono talvolta dati con due cifre significative, ma per una introduzione al laboratorio noi possiamo stabilire la seguente regola (1):

Regola per valutare gli errori

Nell'introduzione al laboratorio, gli errori sperimentali dovrebbero di regola essere arrotondati ad un cifra significativa.

$$(2.5)$$

Così, se qualche calcolo porta l'errore $\delta g = 0.02385 \text{ m/sec.}^2$, questo dovrebbe essere arrotondato a $\delta g = 0.02 \text{ m/sec.}^2$, e la conclusione (2.4) dovrebbe

¹ Per comodità nei riferimenti a queste regole, esse sono state numerate sequenzialmente come le equazioni; alcune di esse contengono equazioni ed altre no.

essere riscritta come

$$(g \text{ misurato}) = 9.82 \pm 0.02 \text{ m/sec.}^2 \quad (2.6)$$

Un'importante conseguenza pratica di questa regola è che molti calcoli degli errori possono essere fatti a mente, senza l'aiuto di un calcolatore, o anche di carta e penna.

C'è soltanto una eccezione significativa alla regola in (2.5). Se la prima cifra nell'errore δx è un 1, allora può essere meglio tenere due cifre significative in δx . Per esempio supponiamo che qualche calcolo dia l'errore $\delta x = 0.14$. Arrotondare questo a $\delta x = 0.1$ comporterebbe la riduzione di un 40%, così si può arguire che è meglio tenere due cifre e valutare $\delta x = 0.14$. Lo stesso argomento potrebbe opportunamente essere applicato se la prima cifra è un 2, ma certamente no se è una cifra più grande.

Una volta che l'errore della misura è stato valutato, si deve anche considerare quali sono le cifre significative nel valore misurato. Una espressione come

$$\text{velocità misurata} = 6051.78 \pm 30 \text{ m/sec.} \quad (2.7)$$

è ovviamente ridicola. L'errore di 30 significa che la cifra 5 nel terzo posto di 6051.78 potrebbe realmente essere al minimo 2 o al massimo 8. Chiaramente le cifre seguenti 1, 7, e 8 non hanno significato, e dovrebbero essere arrotondate. Cioè, l'espressione corretta di (2.7) è

$$\text{velocità misurata} = 6050 \pm 30 \text{ m/sec.} \quad (2.8)$$

Chiaramente la regola generale è come segue.

Regola per valutare i risultati

L'ultima cifra significativa in qualunque risultato dovrebbe di solito essere dello stesso ordine di grandezza (nella stessa posizione decimale) dell'errore

(2.9)

Per esempio, il risultato 92.81 con un errore di 0.3 dovrebbe essere arrotondato a

$$92.8 \pm 0.3.$$

Se il suo errore è 3, allora lo stesso risultato dovrebbe essere arrotondato a

$$93 \pm 3,$$

e se l'errore è 30, allora il risultato dovrebbe essere

$$90 \pm 30$$

Comunque, i numeri che devono essere usati nei calcoli dovrebbero generalmente essere tenuti con una cifra significativa in più di quella che è richiesta nel risultato finale. Questo ridurrà le inaccurattezze introdotte arrotondando i

numeri. Alla fine del calcolo, il risultato dovrebbe essere arrotondato per rimuovere questa cifra extra, non significativa².

Notiamo che l'errore in qualunque grandezza misurata ha le stesse dimensioni della grandezza misurata stessa. È quindi più chiaro e più comodo scrivere le unità (m/sec², cm², etc) dopo sia il risultato che l'errore, come nelle Equazioni (2.6) e (2.8). Per la stessa ragione, se un numero misurato è così grande o piccolo da richiedere la "notazione scientifica" (cioè l'uso della forma 3×10^3 invece di 3.000), allora è più semplice e più chiaro porre il risultato e l'errore nella stessa forma. Per esempio, il risultato

$$\text{carica misurata} = (1.61 \pm 0.05) \times 10^{-19} \text{ coulombs}$$

è molto più facile da leggere e da capire in questa forma che se fosse scritto come

$$\text{carica misurata} = 1.61 \times 10^{-19} \pm 5 \times 10^{-21} \text{ coulombs.}$$

2.3. Discrepanza

Prima di affrontare la questione di come utilizzare gli errori nelle relazioni sperimentali, devono essere introdotti e definiti alcuni termini importanti. In primo luogo, se due misure della stessa grandezza sono in disaccordo, allora diciamo che vi è una "discrepanza". Numericamente definiamo la discrepanza tra le due misure come la loro differenza.

$$\text{discrepanza} = \text{differenza tra due valori misurati della stessa grandezza.} \quad (2.10)$$

È importante sottolineare che una discrepanza può essere o non essere significativa. Se due studenti misurano la stessa resistenza e ottengono i risultati

$$40 \pm 5 \text{ ohms}$$

$$42 \pm 8 \text{ ohms}$$

la discrepanza di 2 ohms è minore dei loro errori; così le due misure sono ovviamente consistenti. Qui dobbiamo dire che la discrepanza è "non significativa". D'altra parte, se i due risultati fossero stati

$$35 \pm 2 \text{ ohms}$$

² C'è più di una eccezione alla regola in (2.9). Se la cifra principale nell'errore è piccola (un 1 o forse un 2), allora può essere appropriato trattenere una cifra in più nella risposta finale. Per esempio, un risultato come

$$\text{lunghezza misurata} = 27.6 \pm 1 \text{ cm}$$

è del tutto accettabile, dal momento che si può arguire che arrotondarlo a 28 ± 1 cm comporterebbe sprecare dell'informazione.

45 ± 1 ohms

allora le due misure sarebbero chiaramente inconsistenti e la discrepanza di 10 ohms dovrebbe essere "significativa". In questo caso sarebbero necessari controlli accurati per scoprire cosa è stato fatto di sbagliato.

Nell'insegnamento di laboratorio, frequentemente si misurano grandezze (come c , la velocità della luce, o e , la carica dell'elettrone) che sono state accuratamente misurate molte altre volte in precedenza, e per le quali vi è un "valore accettato" molto accurato che è noto e pubblicato sui libri. Questo valore accettato, naturalmente, non è esatto, esso è il risultato di misure e , come tutte le misure, ha qualche errore. Nondimeno, in molti casi il valore accettato è molto più accurato di quello che lo studente può possibilmente raggiungere da solo. Per esempio, il valore correntemente accettato di c , la velocità della luce, è

$$(c \text{ accettato}) = 299.792.458 \pm 1 \text{ m/sec.} \quad (2.11)$$

Come ci si aspetta, questo valore "è" affetto da errore, ma l'errore è estremamente piccolo rispetto a quello che si può ottenere nella maggior parte dei laboratori didattici³⁾.

Sebbene vi siano molti esperimenti in cui si misura una grandezza il cui valore accettato è noto, ci sono poche misure per le quali "il vero risultato" è noto⁴⁾. Infatti il valore vero di una grandezza misurata non può mai essere conosciuto esattamente ed è, in effetti, difficile da definire. Nondimeno, è talvolta utile discutere la differenza tra qualche valore misurato e il corrispondente valore vero, e alcuni autori chiamano questa differenza l'"errore vero".

2.4. Confronto di valori misurati ed accettati

C'è molto poco significato ad effettuare una esperienza se poi non si trae qualche tipo di conclusione. Alcuni esperimenti possono avere principalmente risultati qualitativi - l'apparire di una figura di interferenza sulle increspature di una vasca piena d'acqua o il colore della luce trasmessa per mezzo di qualche sistema ottico - ma la grande maggioranza degli esperimenti porta a conclusioni "quantitative", cioè a stabilire dei risultati numerici. È allora importante riconoscere che stabilire "un singolo numero misurato è completamente privo di interesse". Affermare che la densità di qualche metallo è stata misurata come $9.3 \pm 0.2 \text{ gm/cm}^3$ o che la quantità di moto di un carrello è stata misurata come $0.051 \pm 0.004 \text{ kg.m/sec}$, sono, di per se stesse, prive di interesse. Una conclusione per essere interessante deve "confrontare due o più numeri": una misura con il valore accettato; una misura con un valore previsto teoricamente; oppure parecchie misure, per mostrare come esse sono correlate tra loro in accordo a qualche legge fisica. È in tale confronto di numeri che

³⁾ Questo non è sempre vero. Per esempio, se si osserva l'indice di rifrazione del vetro, si trovano valori che variano da 1.5 fino a 1.9 a seconda della composizione del vetro. In una esperienza per misurare l'indice di rifrazione di un pezzo di vetro la cui composizione è incognita, il valore "accettato" è quindi non più che una rozza guida al risultato atteso.

⁴⁾ Dal momento che il lettore potrebbe avere dei problemi a pensare ad uno di tali esperimenti, diamo un esempio. Se si misura il rapporto della circonferenza di un cerchio al suo diametro, il risultato vero è esattamente π . Ovviamente tali esperimenti sono molto inventati.

l'analisi degli errori è così importante. In queste e nelle prossime due sezioni, discuteremo tre tipici esperimenti per mostrare come gli errori stimati sono utilizzati per trarre una conclusione.

Forse il tipo più semplice di esperienza è una misura di una grandezza il cui valore accettato è noto.

Come abbiamo già discusso, questo è in qualche modo un esperimento artificiale, peculiare all'insegnamento del laboratorio. In esso si misura la grandezza, si stima l'errore sperimentale e alla fine si confrontano queste quantità con il valore accettato. Così un esperimento per misurare la velocità del suono nell'aria (a temperatura e pressione standard) potrebbe giungere alla conclusione che

$$\text{velocità misurata} = 329 \pm 5 \text{ m/sec} \quad (2.12)$$

confrontata con la

$$\text{velocità accettata} = 331 \text{ m/sec} \quad (2.13)$$

A questa conclusione numerica lo studente dovrebbe probabilmente aggiungere il commento che dal momento che la velocità accettata giace all'interno dell'intervallo stimato della velocità misurata, la misura è soddisfacente; e la sua relazione potrebbe essere completa.

Il significato dell'errore " δx " è che il valore corretto di x "probabilmente" giace tra $x_{\text{best}} - \delta x$ e $x_{\text{best}} + \delta x$; è certamente "possibile" che il valore corretto giaccia leggermente al di fuori di questo intervallo. Allora una misura può essere ritenuta soddisfacente anche se il valore accettato giace leggermente al di fuori dell'intervallo stimato del valore misurato. Per esempio un valore misurato di $325 \pm 5 \text{ m/sec}$ può essere considerato compatibile con il valore accettato di 331 m/sec . D'altra parte, se il valore accettato è molto al di fuori dell'intervallo misurato (discrepanza molto maggiore del doppio dell'errore, diciamo), allora vi sono buone ragioni per pensare che sia stato fatto qualcosa di sbagliato. Così lo sfortunato studente che trova

$$\text{velocità misurata} = 345 \pm 2 \text{ m/sec} \quad (2.14)$$

confrontata con la

$$\text{velocità accettata} = 331 \text{ m/sec} \quad (2.15)$$

deve verificare le sue misure e i calcoli per trovare che cosa ha sbagliato.

Sfortunatamente, rintracciare il suo errore può essere un lavoro noioso, dal momento che vi sono molte possibilità. Egli può aver fatto un errore nelle misure o nei calcoli che ha portato al risultato 345 m/sec . Può aver stimato il suo errore incorrettamente. (Il risultato $345 \pm 10 \text{ m/sec}$ sarebbe stato accettabile). Potrebbe star confrontando la sua misura con il valore accettato sbagliato. Per esempio, il valore accettato 331 m/sec è la velocità del suono a temperatura e pressione standard. Dal momento che la temperatura standard è 0°C , è possibile che la velocità misurata in (2.14) "non" sia stata misurata a temperatura standard. Infatti, se la misura fosse stata fatta a 20°C (cioè alla normale temperatura ambiente), allora il valore accettato corretto per la velocità del suono sarebbe 343 m/sec , e la misura sarebbe completamente accettabile.

Finalmente, e forse molto probabilmente, una discrepanza come quella tra (2.14) e (2.15) può indicare qualche nascosta sorgente di errore sistematico

(come un orologio la cui marcia è uniformemente lenta, come discusso nel Capitolo 1). La rivelazione di tali errori sistematici (quelli che costantemente spingono il risultato in una direzione) richiederà una verifica accurata della calibrazione di tutti gli strumenti e una revisione dettagliata di tutti i procedimenti.

2.5. Confronto di due misure

In molte esperienze si determinano due numeri che la teoria prevede dovrebbero essere uguali. Per esempio, la legge di conservazione della quantità di moto stabilisce che la quantità di moto totale di un sistema isolato è costante. Per provarlo, potremmo compiere una serie di esperimenti con due carrelli che si urtano quando si muovono lungo una rotaia priva di attrito. Potremmo misurare la quantità di moto totale dei due carrelli prima della collisione (p) e di nuovo dopo la collisione (p'), e quindi verificare se $p = p'$ entro gli errori sperimentali. Per una singola coppia di misure, il nostro risultato potrebbe essere

$$\text{quantità di moto iniziale } p = 1.49 \pm 0.04 \text{ kg. m/sec}$$

$$\text{quantità di moto finale } p' = 1.56 \pm 0.06 \text{ kg. m/sec.}$$

Qui l'intervallo in cui p probabilmente giace (1.45 - 1.53) "si sovrappone" all'intervallo in cui probabilmente giace p' (1.50 - 1.62). Allora questa misura è consistente con la conservazione della quantità di moto. Se, invece, i due intervalli probabili non fossero così vicini da sovrapporsi, allora la misura sarebbe non consistente con la conservazione della quantità di moto; e noi dovremmo verificare l'esistenza di errori nelle nostre misure o calcoli, oppure la presenza di errori sistematici, e la possibilità che alcune forze esterne (come la gravità o l'attrito) causino la variazione della quantità di moto del sistema.

Supponiamo di ripetere coppie simili di misure parecchie volte. Qual è il modo migliore di mostrare i nostri risultati? In primo luogo, è quasi sempre meglio registrare una sequenza di misure simili in una tabella, non come una serie di risultati distinti. In secondo luogo, il nostro errore spesso differisce molto poco da una misura all'altra. Per esempio, possiamo giungere alla conclusione che l'errore in tutte le misure del p iniziale è $\delta p \approx 0.04$ kg. m/sec, e che l'errore nel p' finale è $\delta p' \approx 0.06$ kg. m/sec. Se è così, un buon modo di mostrare le nostre misure sarà quello rappresentato in Tabella 2.1.

Tabella 2.1. Quantità di moto misurate (tutte in kg. m/sec).

p iniziale (± 0.04)	p' finale (± 0.06)
1.49	1.56
2.10	2.12
1.16	1.05
etc.	etc.

Per ciascuna coppia di misure, l'intervallo probabile di valore di p si sovrappone (o circa si sovrappone) all'intervallo di valori di p' . Se questo continua ad essere vero per tutte le misure, allora i nostri risultati possono essere dichiarati consistenti con la conservazione della quantità di moto.

Con un piccolo sforzo, possiamo mostrare i nostri risultati in un modo che rende la nostra conclusione ancora più chiara. Per esempio, la conservazione della quantità di moto richiede che la differenza $p-p'$ sia zero. Se noi aggiungiamo alla nostra tabella una colonna che mostra $p-p'$, allora le scritte in questa colonna dovrebbero tutte avere valori consistenti con zero. L'unica difficoltà con cui abbiamo a che fare è come calcolare l'errore nelle differenze $p-p'$. Questo può essere facilmente fatto. Supponiamo di avere fatto le misure

$$(p \text{ misurata}) = p_{\text{best}} \pm \delta p$$

$$(p' \text{ misurata}) = p'_{\text{best}} \pm \delta p'$$

I numeri p_{best} e p'_{best} sono le nostre migliori stime di p e p' . Allora la migliore stima per la differenza ($p-p'$) è ($p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}$). Per trovare l'errore in ($p-p'$), dobbiamo decidere sui più alti e più bassi valori probabili di ($p-p'$). Il più alto valore per ($p-p'$) risulterebbe se p avesse "il più grande" valore probabile, $p_{\text{best}} + \delta p$, allo stesso tempo in cui p' avesse "il più piccolo" suo valore probabile $p'_{\text{best}} - \delta p'$. Così il più alto valore probabile per $p-p'$ è

$$\text{valore massimo probabile} = (p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}) + (\delta p + \delta p') \quad (2.16)$$

Analogamente, il più basso valore probabile si ha quando p è il più piccolo ($p_{\text{best}} - \delta p$), ma p' è il più grande ($p'_{\text{best}} + \delta p'$). Questo dà

$$\text{valore minimo probabile} = (p_{\text{best}} - p'_{\text{best}}) - (\delta p + \delta p') \quad (2.17)$$

Combinando (2.16) e (2.17), vediamo che "l'errore nella differenza ($p-p'$) è la somma $\delta p + \delta p'$ degli errori originali". Per esempio se

$$p = 1.49 \pm 0.04 \text{ kg. m/sec}$$

$$p' = 1.56 \pm 0.06 \text{ kg. m/sec}$$

$$p-p' = -0.07 \pm 0.1 \text{ kg. m/sec.}$$

allora

Possiamo ora aggiungere una colonna in più per $p-p'$ alla Tabella 2.1, e arriviamo alla Tabella 2.2.

Tabella 2.2. Quantità di moto misurate (tutte in kg. m/sec.)

p iniziale (± 0.04)	p' finale (± 0.06)	differenza $p-p'$ (± 0.1)
1.49	1.56	-0.07
2.10	2.12	-0.02
1.16	1.05	-0.11
etc.	etc.	etc.

Si può ora giudicare con una occhiata se i nostri risultati sono consistenti con la conservazione della quantità di moto, verificando se i numeri nella colonna finale sono consistenti con zero (cioè, sono minori di, o confrontabili con, l'errore 0.1). Un altro modo di raggiungere lo stesso risultato potrebbe essere quello di tabulare i rapporti p'/p , che dovrebbero tutti essere consistenti con il valore $p'/p = 1$. (In questo caso avremmo bisogno di calcolare l'errore in p'/p , un problema che affronteremo nel Capitolo 3).

La nostra discussione dell'errore in $p-p'$ ovviamente si applica alla differenza di qualunque coppia di misure. Abbiamo quindi stabilito la seguente regola generale.

Errore in una differenza

Se le grandezze x e y sono misurate con gli errori δx e δy , e se i valori misurati di x e y sono utilizzati per calcolare la differenza $q = x - y$, allora "l'errore in q " è "la somma degli errori in x e in y ".

$$\delta q \approx \delta x + \delta y \quad (2.18)$$

Abbiamo utilizzato il simbolo di uguaglianza approssimata (\approx) per enfatizzare due punti. In primo luogo non abbiamo ancora una definizione precisa degli errori in gioco; così sarebbe assurdo dichiarare che δq è "esattamente" uguale a $\delta x + \delta y$. In secondo luogo vedremo nella Sezione 3.4 che l'errore δq è spesso in qualche modo minore di quello dato dalla (2.18); una stima migliore è la cosiddetta "somma quadratica" di δx e δy , definita nella (3.13). Così il simbolo " \approx " nella (2.18) è utilizzato per ricordare che rimpiazzeremo la (2.18) più avanti con una stima migliore.

Il risultato (2.18) è il primo di una serie di regole per la "propagazione degli errori". Quando calcoliamo una grandezza q in termini di grandezze misurate x e y , abbiamo bisogno di conoscere come gli errori in x e in y "si propagano" per causare errore in q . Daremo una discussione completa della propagazione degli errori nel Capitolo 3.

2.6. Verifica della proporzionalità con un grafico

Molte leggi fisiche implicano che una grandezza dovrebbe essere proporzionale ad un'altra. La legge di Hooke stabilisce che l'allungamento di una molla è proporzionale alla forza che la tende; la legge di Newton dice che l'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza totale applicata; e questi sono solo due fra innumerevoli esempi. Molti esperimenti nella didattica di laboratorio sono progettati per verificare questo genere di proporzionalità.

Quando una grandezza, y , è proporzionale a qualche altra, x , un grafico di y in funzione di x è una linea retta che passa per l'origine. Così si può verificare se y è proporzionale a x graficando i valori misurati di y in funzione di quelli di x e vedendo se i punti risultanti giacciono su una linea retta passante per l'origine. Poiché una linea retta è così facilmente riconoscibile, questo è un modo semplice ed efficace di verificare la proporzionalità.

Per illustrare questo uso dei grafici, immaginiamo un esperimento per verificare la legge di Hooke. Questa legge, solitamente scritta come $F = kx$, afferma che l'allungamento x di una molla è proporzionale alla forza F che la tira, $x = F/k$, dove k è la "costante di forza" della molla. Un modo semplice di verificare ciò è di sospendere la molla verticalmente e di attaccare ad essa varie

masse m . In questo caso la forza F è il peso mg del carico; così l'allungamento sarà

$$x = \frac{mg}{k} = \left(\frac{g}{k}\right) m \quad (2.19)$$

L'allungamento x sarà proporzionale al carico m , e un grafico di x in funzione di m sarà una linea retta attraverso l'origine.

Se misuriamo x per una varietà di diversi carichi m e grafichiamo le nostre misure di x e m , è piuttosto improbabile che i punti risultanti giacciono "esattamente" su una linea retta. Supponiamo per esempio di misurare l'allungamento x per otto diversi carichi m e di ottenere i risultati mostrati in Tabella 2.3. Questi valori sono graficati in Figura 2.1 (a), dove è pure riportata una possibile linea retta che passa attraverso l'origine e che è ragionevolmente vicina a tutti gli otto punti. Come ci aspettavamo gli otto punti non giacciono esattamente su nessuna linea. Il problema è se questo succede a causa degli errori sperimentali (come speriamo), o perché abbiamo fatto degli errori, o anche perché l'allungamento x "non" è proporzionale a m . Per decidere ciò dobbiamo considerare i nostri errori.

Al solito, le grandezze misurate, l'allungamento x e le masse m , sono soggette ad alcuni errori. Per semplicità supponiamo dapprima che le masse utilizzate siano note molto accuratamente, cosicché l'errore su m è trascurabilmente piccolo. Supponiamo, d'altra parte, che tutte le misure di x abbiano un errore di circa 0.3 cm (come indicato in Tabella 2.3). Per un carico di 200 gm, per esempio, l'allungamento sarà probabilmente nell'intervallo 1.1 ± 0.3 cm. Il nostro primo punto sperimentale sul grafico giace quindi sulla linea verticale $m = 200$ gm, in qualche punto tra $x = 0.8$ e $x = 1.4$ cm.

Tabella 2.3. Carico e allungamento

Carico m (gm)	200	300	400	500	600	700	800	900
(δm trascurabile)								
Allungamento x (cm)	1.1	1.5	1.9	2.8	3.4	3.5	4.6	5.4
($\delta x = 0.3$)								

Questo è indicato nella Figura 2.1 (b), dove abbiamo tracciato una "barra di errore" verticale attraverso ciascun punto per indicare l'intervallo nel quale esso probabilmente giace. Ovviamente dovremmo aspettarci di essere capaci di trovare una linea retta che passi attraverso l'origine e "attraverso o vicino a tutte le barre di errore". Nella Figura 2.1 (b) vi è una tale linea; così dovremmo concludere che i dati sui quali la Figura 2.1 (b) è basata sono consistenti con l'ipotesi di proporzionalità fra x e m .

Vediamo nella Equazione (2.19) che la pendenza del grafico di x in funzione di m è g/k . Misurando la pendenza della linea nella Figura 2.1 (b), possiamo allora trovare la costante k della molla. Disegnando la più ripida e la meno ripida fra le linee che sembrano attraversare i dati ragionevolmente bene, potremo anche trovare l'errore in questo valore per k (Vedi Problema 2.8).

Se la miglior linea retta non attraversa un'alta percentuale delle barre di errore, o se si discosta da qualcuna per una distanza grande (confrontata alla lunghezza delle barre di errore), allora i nostri risultati dovrebbero essere "inconsistenti" con l'ipotesi di x proporzionale a m . Questa situazione è illustrata in Figura 2.1 (c). Con i risultati mostrati in questo caso, dovremmo

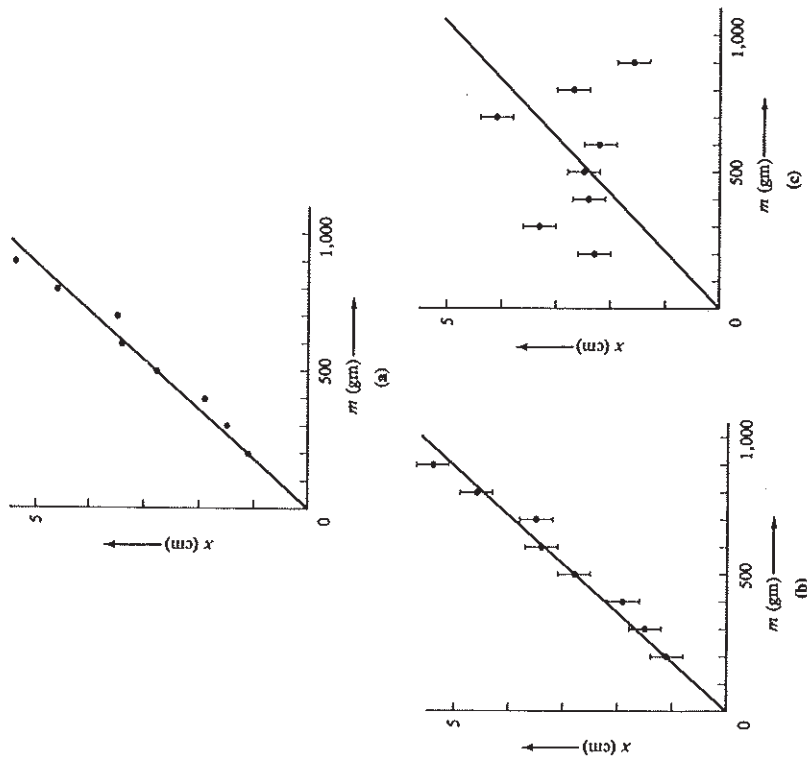


Figura 2.1. Tre grafici dell'allungamento x di una molla in funzione del carico m . (a) I dati della Tabella 2.3 senza le barre di errore. (b) Gli stessi dati con le barre di errore per mostrare le incertezze in x . (Gli errori su m sono assunti essere trascurabili). Questi dati sono consistenti con l'attesa proporzionalità di x e m . (c) Un diverso gruppo di dati, che sono inconsistenti col fatto che x è proporzionale a m .

fare una verifica delle nostre misure e calcoli (incluendo il calcolo degli errori) e considerare se vi è qualche motivo per cui x "non" è proporzionale a m .

Fino ad ora abbiamo supposto che vi sia un errore trascurabile su m (che è graficato lungo l'asse orizzontale), e che gli unici errori siano su x , come mostrato dalle barre verticali di errore. Se sia x che m sono soggetti ad errori apprezzabili, vi sono vari modi di rappresentarli. Il più semplice è di disegnare le barre di errore sia verticali che orizzontali attraverso ciascun punto, la lunghezza di ciascun braccio essendo uguale al corrispondente errore, come mostrato in Figura 2.2. Ciascuna croce in questo disegno corrisponde ad una misura di x e di m , con x probabilmente giacente nell'intervallo definito dalla barra verticale della croce, e m probabilmente in quella definita dalla barra orizzontale.

Una situazione leggermente più complicata si presenta quando ci si aspetta che una grandezza fisica sia proporzionale a qualche potenza di un'altra quantità. Consideriamo la distanza x percorsa da un corpo in un tempo t

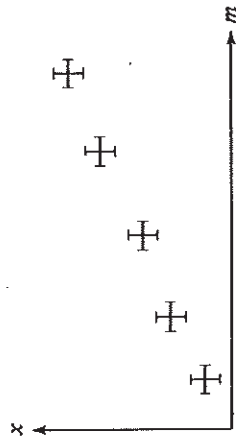


Figura 2.2. Misure con gli errori su x ed m possono essere rappresentate da croci fatte con una barra di errore per x e una per m .

quando cade liberamente. Questa distanza è $x = \frac{1}{2}gt^2$ ed è proporzionale al quadrato di t . Se noi grafichiamo x in funzione di t , i punti sperimentali dovrebbero giacere su una parabola. Comunque è difficile verificare visualmente se un insieme di punti giace o no su una parabola (o su qualsiasi altra curva eccetto una linea retta). Un procedimento molto migliore è di osservare che se $x \propto t^2$, allora un grafico di x in funzione di t^2 sarà una linea retta attraverso l'origine; e tale grafico ci permetterà di verificare se i dati sono o no consistenti con una linea retta, proprio come nell'esempio precedente. Similmente, se x è proporzionale a una funzione esponenziale e^{At} (dove A è qualche costante), allora un grafico di $\ln x$ in funzione di t sarà una linea retta; e tale grafico ci permetterà di verificare facilmente se $x \propto e^{At}$. (Discuteremo questo punto più avanti nel Capitolo 8).

Ci sono altri metodi per verificare la proporzionalità di due grandezze. Per esempio, se $x \propto m$, allora il rapporto x/m sarà costante. Si potrebbe semplicemente aggiungere, alla tabella dei valori di x e di m , una riga o una colonna extra che mostrano i rapporti x/m , e così verificare facilmente se questi rapporti sono costanti all'interno dei loro errori stimati. Ancora, con un calcolatore programmabile, si può scrivere un programma che automaticamente verificherà quanto bene un gruppo di dati si adatta a una linea retta. Comunque anche quando vengano usati altri metodi per verificare che $x \propto m$, è una eccellente idea fare anche una verifica grafica. Grafici come quelli di Figura 2.1 (b) e (c) mostrano chiaramente quanto bene le misure verificano le previsioni; e designare tali grafici ci aiuta a capire l'esperimento e le leggi fisiche in gioco.

2.7. Errori relativi

L'errore δx in una misura,

$$(x \text{ misurato}) = x_{\text{best}} \pm \delta x,$$

indica la attendibilità o precisione della misura. Comunque l'errore δx di per se stesso non ci racconta l'intera storia. Un errore di un centimetro in una distanza di un chilometro indicherebbe una misura insolitamente precisa, mentre un errore di un centimetro su una distanza di tre centimetri indicherebbe una stima piuttosto rozza. Ovviamente la bontà di una misura è indicata non solo dall'errore δx , ma anche dal rapporto $\delta x / x_{\text{best}}$ e questo ci porta a

considerare l'"errore frazionario", (o "incertezza frazionaria")

$$\text{errore frazionario} = \frac{\delta x}{|x_{best}|} \quad (2.20)$$

(L'errore frazionario è anche detto l'"errore relativo" o la "precisione"). In questa definizione, il simbolo $|x_{best}|$ denota il valore assoluto (5) di x_{best} . Per evitare confusione con l'errore relativo, l'errore δx è talvolta chiamato "errore assoluto".

Nella maggior parte delle misure serie, l'errore δx è molto più piccolo del valore misurato x_{best} . Dal momento che l'errore relativo $\delta x/|x_{best}|$ è quindi solitamente un numero piccolo, è spesso conveniente moltiplicarlo per 100 e quotarlo come l'"errore percentuale". Per esempio, la misura

$$\text{lunghezza } l = 50 \pm 1 \text{ cm} \quad (2.21)$$

ha un errore relativo

$$\frac{\delta l}{|l_{best}|} = \frac{1}{50} = 0.02$$

e un errore percentuale del 2 per cento. Così il risultato (2.21) può essere dato come

$$\text{lunghezza } l = 50 \text{ cm} \pm 2\%.$$

Notate bene che, mentre l'errore assoluto δl ha le stesse unità di misura di l , l'errore relativo $\delta l/|l_{best}|$ è una grandezza "adimensionale", senza unità. Tenere in mente questa differenza può aiutarvi ad evitare il comune errore di confondere l'errore assoluto con l'errore relativo.

L'errore relativo è una indicazione approssimata della qualità di una misura, qualunque sia la dimensione della grandezza misurata. Errori relativi del 10 per cento circa sono solitamente caratteristici di misure piuttosto rozze. (Una misura rozza di 10 centimetri potrebbe avere un errore di 1 centimetro; una misura rozza di 10 chilometri potrebbe avere un errore di 1 chilometro). Errori relativi del 1 o 2 per cento sono caratteristici di misure piuttosto accurate, e sono praticamente il meglio che si può ottenere in un corso introduttivo di laboratorio di fisica. Errori relativi molto minori dell'1 per cento sono usualmente difficili da raggiungere, e sono rari in un corso introduttivo di laboratorio.

Queste suddivisioni sono, naturalmente, estremamente schematiche. Alcune misure molto semplici possono avere errori relativi inferiori o uguali a 0.1 per cento con molta poca fatica. Con un buon metro a nastro una distanza di 10 metri può facilmente essere misurata con un errore di 1 centimetro, o circa 0.1 per cento; con un buon cronometro, un periodo di un'ora può essere facilmente

⁵ Il valore assoluto $|x|$ di un numero x è uguale a x quando x è positivo, ma è ottenuto omettendo il segno meno quando x è negativo. Usiamo il valore assoluto nella (2.20) per garantire che l'errore relativo, come l'errore δx stesso, sia sempre positivo, sia che x_{best} sia positivo o negativo. In pratica di solito si agguantano le cose in modo che i numeri misurati siano positivi, e il segno di valore assoluto nella (2.20) può essere ommesso.

misurato a meglio di un secondo, o 0.03 per cento. D'altra parte, per molte grandezze che sono molto difficili da misurare un errore del 10 per cento dovrebbe essere considerato come un trionfo sperimentale. Errori percentuali grandi quindi "non" significano che una misura è scientificamente inutile. Infatti, molte misure importanti nella storia della fisica avevano errori sperimentali del 10 per cento o più. Certamente vi è molto da imparare in un corso introduttivo di laboratorio di fisica da apparati sperimentali il cui errore minimo è di pochi per cento.

2.8. Cifre significative ed errori relativi

Il concetto di errore relativo è strettamente collegato alla nozione familiare di cifre significative. Infatti, il numero di cifre significative in una grandezza è una indicazione approssimativa dell'errore relativo in quella grandezza. Per esempio consideriamo i due numeri

$$510 \text{ e } 0.51$$

i quali sono entrambi stati certificati accurati fino a due cifre significative. Dal momento che 510 (con due cifre significative) significa

$$510 \pm 5 \text{ o } 510 \pm 1\%,$$

e 0.51 significa

$$0.51 \pm 0.005 \text{ o } 0.51 \pm 1\%,$$

vediamo che entrambi i numeri sono incerti all'1 per cento. In altre parole, l'affermazione che i numeri 510 e 0.51 hanno due cifre significative è equivalente a dire che essi sono incerti al 1 per cento. Nello stesso modo 510 con tre cifre significative dovrebbe avere un errore relativo di 0.1 per cento, e così via.

Sfortunatamente, questa utile connessione è soltanto approssimata. Il numero 110, dato con due cifre significative, significa

$$110 \pm 5 \text{ o } 110 \pm 5\%$$

mentre 910 (di nuovo con due cifre significative) significa

$$910 \pm 5 \text{ o } 910 \pm 0.5\%$$

Vediamo che l'errore relativo associato a 2 cifre significative varia da 0.5% a 5% a seconda della prima cifra del numero in questione. Per un riassunto vediamo la Tabella 2.4.

Tabella 2.4. Corrispondenza approssimata fra cifre significative e errori relativi.

Numero di cifre significative	Errore relativo corrispondente	
	è fra	
1	5% e 50%	10%
2	0.5% e 5%	1%
3	0.05% e 0.5%	0.1%

2.9. Moltiplicazione di due valori numerici di misure

Quella che è forse la più grande importanza degli errori relativi emerge quando iniziamo a moltiplicare valori numerici di misure l'uno con l'altro. Per esempio, per trovare la quantità di moto di un corpo, possiamo misurare la sua massa m e la sua velocità v , e quindi moltiplicarli per ottenere la quantità di moto $p = mv$. Sia m che v saranno soggetti ad errori, che dovremo stimare. Il problema quindi è di trovare l'errore in p che risulta dalle incertezze note su m e su v .

In primo luogo, per convenienza, riscriviamo la forma standard

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{\text{best}} \pm \delta x$$

in termini di errore relativo, come

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{\text{best}} \left(1 \pm \frac{\delta x}{x_{\text{best}}} \right). \quad (2.22)$$

Per esempio, se l'errore relativo è 3 per cento, allora dalla (2.22) vediamo che

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{\text{best}} \left(1 \pm \frac{3}{100} \right);$$

cioè un errore del 3 per cento significa che x probabilmente giace in qualche punto tra 0.97 volte x_{best} e 1.03 volte x_{best} .

$$(0.97) \times x_{\text{best}} \leq x \leq (1.03) \times x_{\text{best}}.$$

Vedremo che questo è un modo utile di rappresentare un valore numerico che ci accingiamo a moltiplicare.

Ritorniamo al nostro problema di calcolare $p = mv$, quando m e v sono stati misurati come

$$(m \text{ misurato}) = m_{\text{best}} \left(1 \pm \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} \right) \quad (2.23)$$

$$(v \text{ misurato}) = v_{\text{best}} \left(1 \pm \frac{\delta v}{v_{\text{best}}} \right) \quad (2.24)$$

Dal momento che m_{best} e v_{best} sono le nostre migliori stime per m e per v , la nostra migliore stima per $p = mv$ è

$$p_{\text{best}} = (\text{miglior stima per } p) = m_{\text{best}} v_{\text{best}}.$$

I massimi valori probabili di m e v sono dati da (2.23) e (2.24) con il segno più. Così il massimo valore probabile per $p = mv$ è

$$(\text{il massimo valore per } p) = m_{\text{best}} v_{\text{best}} \left(1 + \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} \right) \left(1 + \frac{\delta v}{v_{\text{best}}} \right) \quad (2.25)$$

Il minimo valore probabile per p è dato da una espressione analoga con due segni meno. Ora, il prodotto delle parentesi in (2.25) può essere moltiplicato

come

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} \right) \left(1 + \frac{\delta v}{v_{\text{best}}} \right) = \\ & = 1 + \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} + \frac{\delta v}{v_{\text{best}}} + \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} \frac{\delta v}{v_{\text{best}}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dal momento che i due errori relativi $\delta m/m_{\text{best}}$ e $\delta v/v_{\text{best}}$ sono numeri piccoli (pochi per cento, forse) il loro prodotto è estremamente piccolo. Quindi l'ultimo termine nella (2.26) può essere trascurato. Ritornando alla (2.25) troviamo

$$(\text{il massimo valore di } p) = m_{\text{best}} v_{\text{best}} \left(1 + \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} + \frac{\delta v}{v_{\text{best}}} \right).$$

Il minimo valore probabile è dato da una espressione analoga con due segni meno. Le nostre misure di m e v quindi portano a un valore di $p = mv$ dato da

$$(\text{valore di } p) = m_{\text{best}} v_{\text{best}} \left[1 \pm \left(\frac{\delta m}{m_{\text{best}}} + \frac{\delta v}{v_{\text{best}}} \right) \right].$$

Confrontando con la forma generale

$$(\text{valore di } p) = p_{\text{best}} \left(1 \pm \frac{\delta p}{p_{\text{best}}} \right),$$

vediamo che la miglior stima di p è $p_{\text{best}} = m_{\text{best}} v_{\text{best}}$ (come abbiamo già visto), e che l'errore relativo su p è la somma degli errori relativi su m e su v ,

$$\frac{\delta p}{p_{\text{best}}} = \frac{\delta m}{m_{\text{best}}} + \frac{\delta v}{v_{\text{best}}}.$$

Se, per esempio abbiamo fatto le seguenti misure per m e per v ,

$$m = 0.53 \pm 0.01 \text{ kg}$$

e

$$v = 9.1 \pm 0.3 \text{ m/sec},$$

allora la migliore stima per $p = mv$ è

$$p_{\text{best}} = m_{\text{best}} v_{\text{best}} = (0.53) \times (9.1) = 4.82 \text{ kg} \cdot \text{m/sec}.$$

Per calcolare l'errore su p , dobbiamo dapprima calcolare gli errori relativi

$$\frac{\delta m}{m_{\text{best}}} = \frac{0.01}{0.53} = 0.02 = 2\%$$

e

$$\frac{\delta v}{v_{\text{best}}} = \frac{0.3}{9.1} = 0.03 = 3\%.$$

L'errore relativo su p è quindi la somma:

$$\frac{\delta p}{p_{best}} = 2\% + 3\% = 5\%.$$

Se vogliamo conoscere l'errore assoluto su p , dobbiamo moltiplicare per p_{best} :

$$\delta p = \frac{\delta p}{p_{best}} \times p_{best} = 0.05 \times 4.82 = 0.241.$$

Quindi arrotondiamo p e p_{best} per dare il risultato finale

$$(\text{valore di } p) = 4.8 \pm 0.2 \text{ kg. m/sec.}$$

Le precedenti considerazioni si applicano a qualunque prodotto di due grandezze misurate. Abbiamo quindi scoperto la nostra seconda regola generale per la propagazione degli errori. Se misuriamo due grandezze e formiamo il loro prodotto, allora gli errori nelle due grandezze originali "si propagano" per causare un'incertezza nel loro prodotto. Questa incertezza è data dalla seguente regola.

Errore in un prodotto

Se x e y sono stati misurati con piccoli errori relativi $\delta x/|x_{best}|$ e $\delta y/|y_{best}|$, e se i valori misurati di x e di y sono usati per calcolare il prodotto $q = xy$, allora "l'errore relativo su q è la somma degli errori relativi su x e y ".

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \approx \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} \quad (2.27)$$

Abbiamo usato il segno di uguaglianza approssimata (\approx) nella (2.27) perché, proprio come con la regola per l'errore in una differenza, rimpiazzeremo la (2.27) con una regola più precisa più avanti. Bisogna mettere in risalto altre due caratteristiche di questa regola. In primo luogo, la derivazione della (2.27) richiede che gli errori relativi su x e y siano entrambi abbastanza piccoli da poter trascurare il loro prodotto. Questo è quasi sempre vero in pratica; così lo assumeremo sempre. Nondimeno, bisognerebbe ricordare che se gli errori relativi non sono molto più piccoli di 1, la regola in (2.27) non si applica. In secondo luogo, anche quando x e y hanno dimensioni differenti, l'Equazione (2.27) è dimensionalmente corretta, dal momento che tutti gli errori relativi sono adimensionali.

Nella fisica moltiplichiamo spesso numeri insieme; così la regola (2.27) per trovare l'errore in un prodotto sarà ovviamente un importante aiuto nell'analisi degli errori. Per il momento il nostro scopo principale è di mettere in risalto che l'errore in qualunque prodotto $q = xy$ è espresso molto semplicemente in termini degli errori relativi, come nella (2.27).

Problemi

Nota: La presenza di un asterisco indica che il problema è discusso, oppure la sua soluzione data, nella sezione Risposte alla fine del libro.

2.1 (Sezione 2.1). Nel Capitolo 1 un carpentiere riportava la sua misura dell'altezza di un vano-porta stabilendo che la sua miglior stima era 210 cm e che egli era confidente che l'altezza fosse compresa fra 205 e 215 cm. Riscrivere questo risultato nella forma standard $x_{best} \pm \delta x$. Fare lo stesso per le misure riportate nelle Equazioni (1.1), (1.2) e (1.4).

***2.2** (Sezione 2.2). Riscrivere i seguenti risultati nella loro forma più chiara, con un opportuno numero di cifre significative:

- altezza misurata = 5.03 ± 0.04329 metri;
- tempo misurato = 19.5432 ± 1 sec;
- carica misurata = $-3.21 \times 10^{-19} \pm 2.67 \times 10^{-20}$ coulombs;
- lunghezza d'onda misurata = $0.000000563 \pm 0.00000007$ metri;
- quantità di moto misurata = $3.267 \times 10^3 \pm 42$ gm. cm/sec.

***2.3** (Sezione 2.3).

- Uno studente misura la densità di un liquido cinque volte e ottiene i risultati (tutti in gm/cm³), 1.8, 2.0, 2.0, 1.9, 1.8. Qual è la miglior stima e l'errore basati sulle sue misure?
- Gli viene detto che il valore accettato è 1.85 gm/cm³. Qual è la discrepanza (fra la sua migliore stima e il risultato accettato)? Pensi che sia significativa?

2.4 (Sezione 2.5). Il tempo per dieci rivoluzioni di un piatto girevole è misurato annotando i tempi di partenza e di fermata con il contasecondi di un orologio da polso e sottraendoli. Se i tempi di partenza e di fermata sono incerti di ± 1 sec. ciascuno, qual è l'errore nel tempo per dieci rivoluzioni?

***2.5** (Sezione 2.5). In un esperimento per verificare la conservazione del momento angolare, uno studente ottiene i risultati mostrati in Tabella 2.5 per i momenti angolari iniziali e finali (L e L') di un sistema rotante. Aggiungere una colonna extra alla Tabella 2.5 per mostrare la differenza $L - L'$ e il suo errore. I risultati degli studenti sono consistenti con la conservazione del momento angolare?

Tabella 2.5. Momento angolare (in kg·m²/sec)

L Iniziale	L' Finale
3.0 ± 0.3	2.7 ± 0.6
7.4 ± 0.5	8.0 ± 1
14.3 ± 1	16.5 ± 1
25 ± 2	24 ± 2
32 ± 2	31 ± 2
37 ± 2	41 ± 2

2.6 (Sezione 2.5). Uno sperimentatore misura le masse M ed m di una automobile e di un rimorchio. Dà i suoi risultati nella forma standard $M_{best} \pm \delta M$ e $m_{best} \pm \delta m$. Quale dovrebbe essere la sua migliore stima per la massa totale $M + m$? Considerando quali sono i più grandi e i più piccoli valori probabili della massa totale, mostrare che il suo errore nella massa totale è proprio la somma di δM e δm . Esponete i vostri argomenti chiaramente; non scrivete soltanto la risposta.

2.7 (Sezione 2.6). Usando i dati del Problema 2.5, fare un grafico del momento angolare finale L' in funzione del momento angolare iniziale L per l'esperimento descritto. Includere le barre di errore verticale ed orizzontale. (Come per tutti i grafici, marcate i vostri assi chiaramente, includendo le scale. Usate carta da grafico. Scegliete scale tali che il vostro grafico riempia una porzione ragionevole del foglio e, in questo caso, siate sicuri di includere l'origine). Su quale curva dovrete aspettarvi che tutti i punti giacciono? I punti giacciono sulla curva attesa (all'interno degli errori sperimentali)?

*2.8 (Sezione 2.7). Se una pietra è lanciata verso l'alto con una velocità v , allora dovrebbe raggiungere l'altezza h che soddisfa all'equazione $v^2 = 2gh$. In particolare v^2 dovrebbe essere proporzionale ad h . Per verificare ciò uno studente misura v^2 e h per sette differenti lanci, con i risultati mostrati in Tabella 2.6.

(a) Fare un grafico di v^2 in funzione di h , includendo le barre di errore verticali ed orizzontali. (Come al solito, marcate i vostri assi, usate carta da grafico, scegliete la vostra scala opportunamente). Il vostro grafico è consistente con la previsione che $v^2 \propto h$?

Tabella 2.6. Altezze e velocità.

h in metri (± 0.05)	v^2 in m^2/sec^2
0.4	7 ± 3
0.8	17 ± 3
1.4	25 ± 3
2.0	38 ± 4
2.6	45 ± 5
3.4	62 ± 5
3.8	72 ± 6

(b) La pendenza del vostro grafico dovrebbe essere $2g$. Per trovare la pendenza, disegnare quella che sembra essere la migliore linea retta attraverso l'origine e tutti i punti, e quindi misurare la sua pendenza. Per trovare l'errore nella pendenza tracciare la retta più ripida e quella meno ripida che sembrano attraversare i dati ragionevolmente. Le pendenze di queste linee danno il valore probabile più grande e più piccolo della pendenza. I vostri risultati sono consistenti con il valore accettato $2g = 19.6 \text{ m/sec}^2$?

*2.9 (Sezione 2.6).

(a) In un esperimento con un pendolo semplice, uno studente decide di verificare se il periodo T è indipendente dalla ampiezza A (definita come il più grande angolo che il pendolo fa con la verticale durante le sue oscillazioni). Ottiene i risultati mostrati in Tabella 2.7. Disegnare un grafico di T in funzione di A . Considerate accuratamente la vostra scelta delle scale. Se avete qualche dubbio, disegnate due grafici, uno comprendente l'origine $A = 0$, $T = 0$, e uno in cui soltanto valori di T compresi tra 1.9 e 2.2 sec. sono mostrati. Dovrebbe lo studente concludere che il periodo è indipendente dall'ampiezza?

(b) Discuterete come le conclusioni alla parte (a) dovrebbero essere cambiate se tutti i valori misurati di T fossero stati incerti di ± 0.3 sec.

Tabella 2.7. Ampiezza e periodo di un pendolo

Ampiezza A (gradi)	Periodo T (sec)
5 ± 2	1.932 ± 0.005
17 ± 2	1.94 ± 0.01
25 ± 2	1.96 ± 0.01
40 ± 4	2.01 ± 0.01
53 ± 4	2.04 ± 0.01
67 ± 6	2.12 ± 0.02

2.10 (Sezione 2.7). Calcolare gli errori percentuali per le cinque misure riportate nel Problema 2.2. (Non dimenticate di arrotondare a un numero ragionevole di cifre significative).

2.11 (Sezione 2.7). Un metro rigido può essere letto con la precisione del mm; un microscopio mobile su rotella può essere letto con la precisione di 0.1 mm. Supponiamo di voler misurare una lunghezza di 2 cm con una precisione del 1 per cento. Si può farlo con il metro rigido? È possibile farlo con il microscopio?

*2.12 (Sezione 2.7). Per calcolare l'accelerazione di un carrello, uno studente misura la sua velocità iniziale e finale, v_i e v_f , e calcola la differenza $(v_f - v_i)$. I suoi dati in due prove separate (tutti in cm/sec) sono riportati in Tabella 2.8. Tutte quattro le misure hanno 1 per cento di errore.

Tabella 2.8. Velocità iniziali e finali.

	v_i	v_f
Prima prova	14.0	18.0
Seconda prova	19.0	19.6

(a) Calcolare gli errori assoluti in tutte quattro le misure; trovare la differenza $(v_f - v_i)$ ed il suo errore in ciascuna prova.

(b) Calcolare l'errore percentuale per ciascuno dei due valori $(v_f - v_i)$. (Le vostre risposte in questo caso, particolarmente per la seconda prova, illustrano i disastrosi risultati di misurare un numero piccolo facendo la differenza di due numeri molto più grandi).

2.13 (Sezione 2.8).

(a) La calcolatrice di uno studente fornisce il risultato 123123. Se lo studente decide che questo numero realmente ha solo tre cifre significative, quali sono il suo errore assoluto e il suo errore relativo?

(b) Fare lo stesso per il numero 0.123123.

(c) Fare lo stesso per il numero 321.321.

(d) Gli errori relativi giacciono nell'intervallo atteso per tre cifre significative?

*2.14 (Sezione 2.9).

(a) Uno studente misura due grandezze a e b con i risultati $a = 11.5 \pm 0.2$ cm e $b = 25.4 \pm 0.2$ cm. Egli ora calcola il prodotto $q = ab$. Trovare il

suo risultato, dando sia l'errore relativo che l'errore assoluto.

- (b) Ripetere la parte (a) per le misure $a = 10 \pm 1$ cm e $b = 27.2 \pm 0.1$ sec.
 (c) Ripetere la parte (a) con $a = 3.0$ piedi $\pm 8\%$ e $b = 4.0$ libbre $\pm 2\%$.

*2.15 (Sezione 2.9).

- (a) Uno studente misura due numeri x e y come

$$x = 10 \pm 1, \quad y = 20 \pm 1$$

Qual è la sua miglior stima per il loro prodotto $q = xy$? Usando i più grandi valori probabili per x e y (11 e 21) calcolare il più alto valore probabile di q . Analogamente trovare il più piccolo valore probabile di q , e quindi l'intervallo in cui q probabilmente giace. Confrontare i vostri risultati con quello dato dalle regole in (2.27).

- (b) Fare lo stesso per le misure

$$x = 10 \pm 8, \quad y = 20 \pm 15$$

Ricordare che la regola in (2.27) fu ricavata assumendo che gli errori relativi siano molto minori di 1.

2.16 (Sezione 2.9). Una ben nota regola stabilisce che quando due numeri sono moltiplicati fra loro, il risultato sarà realistico se verrà arrotondato al numero di cifre significative del meno preciso dei due numeri originali.

- (a) Usando la nostra regola in (2.27) e il fatto che le cifre significative corrispondono rozzamente all'errore relativo, provare che questa "ben nota regola" è "approssimativamente" valida. (Per essere concreti, trattare il caso in cui il numero meno preciso ha due cifre significative).
 (b) Mostrare con un esempio che il risultato può realmente in qualche modo essere meno preciso di quello che la "ben nota regola" suggerisce. (Questo è specialmente vero se si moltiplicano fra loro parecchi numeri).

3. Propagazione degli errori

La maggior parte delle grandezze fisiche non possono di solito essere misurate in una singola misura diretta, ma vengono invece determinate in due passi distinti. In primo luogo, occorre misurare una o più grandezze x, y, \dots , che "possono" essere misurate direttamente e dalle quali la grandezza che ci interessa può essere calcolata. In secondo luogo, utilizzando i valori misurati di x, y, \dots , si calcola la grandezza in questione. Per esempio, per trovare l'area di un rettangolo, di fatto si misurano la sua lunghezza l e la sua altezza h , e quindi si calcola la sua area A come $A = lh$. Analogamente, il modo più ovvio di trovare la velocità v di qualche corpo è quello di misurare la distanza percorsa, d , e il tempo impiegato, t , e quindi di calcolare v come $v = d/t$. Il lettore che ha speso qualche tempo in un corso introduttivo al laboratorio, non avrà problemi a pensare ad altri esempi, infatti basta poco per accorgersi che la maggior parte di tutte le misure interessanti comporta questi due passi distinti, di misura diretta seguita da calcolo.

Quando una misura comporta questi due passi, anche la stima dell'errore necessita di due passi. Dapprima occorre stimare gli errori nelle grandezze che sono misurate direttamente, e quindi trovare come questi errori "si propagano" attraverso i calcoli per produrre un errore nel risultato finale⁽¹⁾. Questa "propagazione degli errori" è il principale argomento di questo capitolo.

In realtà, abbiamo già discusso alcuni esempi di propagazione degli errori nel Capitolo 2. Nella Sezione 2.5 abbiamo discusso cosa accade quando due numeri x e y sono misurati ed i loro risultati utilizzati per calcolare la differenza $q = x - y$. Abbiamo trovato che l'errore in q è proprio la "somma" $\delta q \approx \delta x + \delta y$ degli errori in x e in y . Nella Sezione 2.9 abbiamo discusso il prodotto $q = xy$, e nel Problema 2.6 abbiamo discusso la somma $q = x + y$. Rivedremo questi casi nella Sezione 3.2. Nel resto di questo capitolo discuteremo casi più generali di propagazione degli errori e porteremo parecchi esempi.

Nella Sezione 3.1, prima di affrontare l'argomento della propagazione degli errori, discuteremo brevemente le stime degli errori nelle grandezze che sono misurate direttamente. Rivedremo i metodi discussi nel Capitolo 1, e quindi discuteremo alcuni ulteriori esempi di stima dell'errore nelle misure dirette.

All'inizio della Sezione 3.2 inizieremo la propagazione degli errori. Troveremo che praticamente tutti i problemi nella propagazione degli errori possono essere risolti utilizzando proprio tre semplici regole. Stabiliremo anche una singola regola più complicata che copre tutti i casi, e dalla quale le tre regole più semplici possono essere derivate.

¹ Nel Capitolo 4 discuteremo un altro modo in cui l'errore finale può talvolta essere stimato. Se tutte le misure possono essere ripetute parecchie volte, e se si è sicuri che tutti gli errori sono di tipo casuale, allora l'errore nella grandezza in gioco può essere stimato esaminando lo sparpigliamento nei risultati. Anche quando questo metodo è possibile, esso è solitamente meglio usato come una verifica sul procedimento a due passi discusso in questo capitolo.

Questo è un capitolo piuttosto lungo. Comunque il lettore può trascurare le ultime due sezioni senza perdita di continuità.

3.1. Incertezze nelle misure dirette

Quasi tutte le misure dirette comportano la lettura di una scala (su un righello, un orologio o un voltmetro, per esempio) o di un display digitale (su un orologio digitale o un voltmetro, per esempio). Alcuni dei problemi sulla lettura di una scala sono stati discussi nella Sezione 1.5. Talvolta le principali sorgenti di errore sono la lettura della scala e la necessità di interpolare tra le incisioni della stessa. In tali situazioni una stima ragionevole dell'errore è facilmente fatta. Per esempio, se si deve misurare qualche lunghezza l chiaramente definita con un righello graduato in millimetri, si può ragionevolmente decidere che la lunghezza può essere letta al millimetro più vicino ma non meglio. Qui l'errore δl dovrebbe essere $\delta l = 0.5$ mm. Se le incisioni della scala sono più distanti (come con mezzi centimetri), si può ragionevolmente decidere di leggere a un quinto di una divisione, per esempio. In ogni caso, gli errori associati con la lettura di una scala possono ovviamente essere stimati del tutto semplicemente e realisticamente.

Sfortunatamente ci sono frequentemente altre sorgenti di errore che sono molto più importanti delle difficoltà di lettura di una scala. Nel misurare la distanza fra due punti, il problema principale può essere quello di decidere dove questi due punti sono realmente. Per esempio, in un esperimento di ottica si può voler misurare la distanza q dal centro di una lente a qualche immagine focalizzata, come in Figura 3.1. In pratica, la lente è solitamente spessa parecchi millimetri, così che localizzare il suo centro sarà difficile; e se la lente viene montata su un supporto luminoso come spesso accade, allora localizzare il centro sarà ancora più difficile. Inoltre, l'immagine può apparire ben a fuoco in un intervallo di molti millimetri. Anche se l'apparato è montato su un banco ottico che è chiaramente graduato in millimetri, l'errore nella distanza dalla lente all'immagine potrebbe facilmente essere dell'ordine di un centimetro. Dal momento che questo errore sorge perchè i due punti non sono chiaramente definiti, questo genere di problema è chiamato un "problema di definizione".

Questo esempio illustra un serio pericolo nella stima di un errore. Se si guarda soltanto alle scale e si trascurano altre sorgenti di errore, si può sottovalutare l'errore totale molto malamente. Infatti l'errore più comune dello studente all'inizio è di trascurare alcune sorgenti di errore e quindi di «sottostimare» gli errori, spesso di un fattore 10 o più.

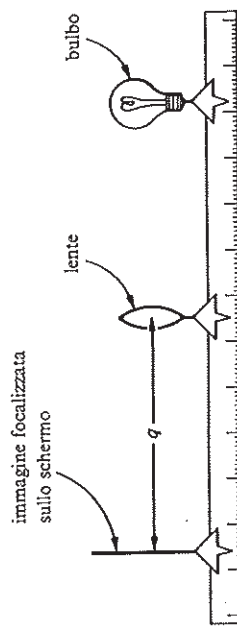


Figura 3.1. Un'immagine del bulbo luminoso sulla destra è focalizzata dalla lente sullo schermo alla sinistra.

Comunque è anche importante non "sovrastimare" gli errori. Uno sperimentatore che decida di giocare sul sicuro e di associare errori esagerati a tutte le misure, può evitare imbarazzanti inconsistenze, ma le sue misure possono non essere di utilità ad alcuno. Chiaramente l'ideale è di trovare tutte le possibili cause di errore e di stimare i loro effetti accuratamente, il che è solitamente non così difficile come si potrebbe supporre.

Leggere un display digitale è più facile che leggere una scala convenzionale. A meno che tale dispositivo non sia difettoso, esso mostrerà soltanto cifre significative. Un cronometro digitale che mostra i secondi con due posti decimali e un tempo t di 8.03 secondi deve (al peggio) significare che

$$t = 8.03 \pm 0.01 \text{ sec.}$$

A seconda di come il contatore lavora, l'errore può essere la metà. Cioè 8.03 può significare 8.03 ± 0.005 .

Il display digitale, anche più di una scala convenzionale, può dare una fuorviante impressione di accuratezza. Per esempio, si può usare un contatore digitale per misurare il tempo di caduta di un peso in un dispositivo di Atwood o similare. Se il cronometro presenta tre posti decimali e mostra un tempo $t = 8.036$ sec. allora apparentemente il tempo di caduta è

$$t = 8.036 \pm 0.001 \text{ sec.} \quad (3.1)$$

Comunque, lo studente accurato che ripeta l'esperimento sotto condizioni il più identiche possibili, può trovare che la seconda misura è

$$t = 8.113 \text{ sec.}$$

Una possibile spiegazione di questa discrepanza è che gli errori nella procedura di partenza variano le condizioni iniziali e quindi il tempo misurato di caduta. In ogni caso, è chiaro che l'accuratezza proclamata nella (3.1) è ridicolmente troppo buona. Giudicando dalle due misure fatte finora, un risultato più realistico dovrebbe essere

$$t = 8.07 \pm 0.05 \text{ sec.}$$

Questo esempio ci porta ad un altro punto menzionato nel Capitolo 1. Ogniqualvolta una misura può essere ripetuta, ciò dovrebbe usualmente essere fatto parecchie volte. Lo sparpagliamento risultante dei valori è spesso un buon indice degli errori, e la media dei valori è spesso certamente più attendibile di qualunque misura singola. Nei Capitoli 4 e 5 discuteremo la trattazione statistica di misure multiple. Qui desideriamo soltanto mettere in risalto che se una misura è ripetibile, essa dovrebbe essere ripetuta, sia per ottenere un risultato più realistico (mediando) e, ancora più importante, per dare qualche stima degli errori. Sfortunatamente, come fu anche menzionato nel Capitolo 1, ripetere una misura non sempre metterà in luce errori. Se la misura è soggetta a qualche errore sistematico, che spinge i risultati tutti nella stessa direzione (come un orologio la cui marcia è lenta), allora lo sparpagliamento dei risultati non rifletterà questo errore sistematico. Per eliminare tali errori sistematici occorre fare verifiche accurate della calibrazione e delle procedure seguite.

Infine vi è un altro genere di misura completamente differente, il cui errore può essere stimato facilmente. Alcuni esperimenti implicano il conteggio di eventi che occorrono casualmente, ma con una media nel tempo ben definita.

Per esempio in un campione di materiale radioattivo, ciascun nucleo individualmente decade a un istante casuale, ma vi è un numero medio definito di decadimenti per unità di tempo che ci aspettiamo di vedere nell'intero campione. Possiamo provare a misurare questo numero medio per unità di tempo, osservando quanti decadimenti occorrono all'interno di qualche intervallo definito come un minuto. (Questo si può fare, per esempio, usando un contatore Geiger per contare le particelle cariche emesse da ciascun nucleo quando decade). Supponiamo di trovare che γ decadimenti siano avvenuti dopo che abbiamo contato per un minuto. Poiché i decadimenti occorrono casualmente, non possiamo essere sicuri che γ sia realmente il numero medio di decadimenti atteso in un minuto. Il problema è, naturalmente, di quanto inesatto sia γ come misura del numero medio atteso di eventi.

Discuteremo la teoria di tali problemi di conteggio nel Capitolo 11, ma il risultato è marcatamente semplice e può essere anticipato fin d'ora. Se contiamo il numero di eventi in qualche intervallo di tempo T e otteniamo il risultato γ , allora, come una misura del numero medio atteso di eventi nel tempo T , il nostro risultato γ ha un errore di $\sqrt{\gamma}$. Cioè, la nostra conclusione (basata su questa unica osservazione) dovrebbe essere

$$(\text{numero medio di eventi nel tempo } T) = \gamma \pm \sqrt{\gamma} \quad (3.2)$$

Per esempio, se contiamo 15 decadimenti da un campione di uranio radioattivo in un minuto, dovremmo concludere che, in media, il nostro campione è soggetto a $15 \pm \sqrt{15}$, cioè 15 ± 4 , decadimenti al minuto.

3.2. Somme e differenze; prodotti e quozienti

Nel resto di questo capitolo supporremo di aver misurato una o più grandezze x, y, \dots , con gli errori corrispondenti $\delta x, \delta y, \dots$, e che ora desideriamo utilizzare i valori misurati di x, y, \dots per calcolare la grandezza di reale interesse q . Il calcolo di q è usualmente semplice; il problema che abbiamo bisogno di discutere è come gli errori $\delta x, \delta y, \dots$, si propagano attraverso il calcolo e portino a un errore δq nel valore finale di q .

Somme e differenze

Nel Capitolo 2 abbiamo discusso ciò che accade quando si misurano due grandezze x e y , e si calcola la loro somma, $x + y$, o la loro differenza, $x - y$. Per valutare l'errore nella somma o nella differenza, dovevamo soltanto decidere sui più alti e più bassi valori probabili. Il più alto ed il più basso dei valori probabili di x sono $x_{\text{best}} \pm \delta x$, e quelli di y sono $y_{\text{best}} \pm \delta y$. Quindi il più alto valore probabile di $x + y$ è

$$x_{\text{best}} + y_{\text{best}} + (\delta x + \delta y),$$

e il più basso valore probabile è

$$x_{\text{best}} + y_{\text{best}} - (\delta x + \delta y),$$

Così la miglior stima per $q = x + y$ è

$$q_{\text{best}} = x_{\text{best}} + y_{\text{best}}$$

ed il suo errore è

$$\delta q \approx \delta x + \delta y \quad (3.3)$$

Una argomentazione analoga (assicuratevi di poterla ricostruire) mostra che l'errore nella "differenza" $x - y$ è dato dalla stessa formula (3.3). Cioè l'errore sia nella somma $x + y$ che nella differenza $x - y$ è la "somma" $\delta x + \delta y$ degli errori in x e in y .

Se abbiamo parecchi numeri x, \dots, w che devono essere sommati o sottratti, allora l'applicazione ripetuta della (3.3) dà la seguente regola.

Incertezza nelle somme e nelle differenze

Se parecchie grandezze x, \dots, w sono misurate con incertezze $\delta x, \dots, \delta w$, ed i valori misurati utilizzati per calcolare

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w),$$

allora l'errore nel valore calcolato di q è la somma

$$\delta q \approx \delta x + \dots + \delta z + \delta u + \dots + \delta w,$$

di tutti gli errori originali.

In altre parole, quando si somma o si sottrae qualsiasi numero di grandezze, gli errori in quelle grandezze "si sommano" sempre. Come prima, utilizziamo il simbolo \approx per mettere in risalto che presto apporteremo dei miglioramenti a questa regola.

Esempio

Come un semplice esempio della regola in (3.4), supponiamo che uno sperimentatore mescoli insieme i liquidi di due recipienti, dopo aver misurato le masse separatamente da vuote e da piene, come segue:

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{massa del primo recipiente} + \text{contenuto} &= 540 \pm 10 \text{ gm;} \\ m_1 &= \text{massa del primo recipiente vuoto} &= 72 \pm 1 \text{ gm;} \\ M_2 &= \text{massa del secondo recipiente} + \text{contenuto} &= 940 \pm 20 \text{ gm;} \\ m_2 &= \text{massa del secondo recipiente vuoto} &= 97 \pm 1 \text{ gm.} \end{aligned}$$

Egli ora calcola la massa totale di liquido come

$$\begin{aligned} M &= M_1 - m_1 + M_2 - m_2 \\ &= (540 - 72 + 940 - 97) \text{ gm} = 1311 \text{ gm.} \end{aligned}$$

Secondo la regola nella (3.4), l'errore nel suo risultato è la somma delle quattro incertezze,

$$\delta M \approx \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = (10 + 1 + 20 + 1) \text{ gm} = 32 \text{ gm.}$$

Così il suo risultato finale (propriamente arrotondato) è

$$\text{massa totale di liquido} = 1310 \pm 30 \text{ gm.}$$

Notiamo che le incertezze molto più piccole nelle masse dei recipienti vuoti hanno dato un contributo trascurabile all'incertezza finale. Questo è un effetto importante che discuteremo più avanti. Con l'esperienza, lo studente può imparare ad identificare in anticipo quegli errori che sono trascurabili e che possono essere ignorati. Spesso questo può semplificare grandemente il calcolo degli errori.

Prodotti e quozienti

Nella Sezione 2.9 abbiamo discusso l'incertezza nel prodotto $q = xy$ delle due grandezze misurate. Abbiamo visto che, ammesso che gli errori relativi in gioco siano piccoli, l'errore "relativo" in $q = xy$ è la somma degli errori "relativi" in x e y . Piuttosto che rivedere la derivazione di questo risultato, discutiamo qui il caso analogo del quoziente $q = x/y$. Come vedremo, l'incertezza in un quoziente è data dalla stessa regola che per il prodotto; cioè, l'errore relativo su $q = x/y$ è uguale alla somma degli errori relativi in x e y .

Dal momento che gli errori nei prodotti e nei quozienti sono meglio espressi in termini di errori relativi, è conveniente introdurre una notazione rapida per questi ultimi. Ricordiamo che, se misuriamo qualche grandezza x come

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{\text{best}} \pm \delta x$$

nel solito modo, allora l'errore relativo in x è definito come

$$(\text{errore relativo in } x) = \frac{\delta x}{|x_{\text{best}}|}.$$

(Il valore assoluto nel denominatore rende l'errore relativo sempre positivo, da leggere e da scrivere, d'ora in poi lo abbrevieremo omettendo la scritta "best" e scrivendo

$$(\text{errore relativo in } x) = \frac{\delta x}{|x|}.$$

Il risultato della misura di qualsiasi grandezza x può essere espresso in termini del suo errore relativo $\delta x/|x|$ come

$$(\text{valore di } x) = x_{\text{best}} (1 \pm \delta x/|x|).$$

Allora il valore di $q = x/y$ può essere scritto come

$$(\text{valore di } q) = \frac{x_{\text{best}}}{y_{\text{best}}} \frac{1 \pm \delta x/|x|}{1 \pm \delta y/|y|}.$$

Il nostro problema è ora di trovare i valori probabili estremi del secondo fattore sulla destra. Questo fattore è massimo, per esempio, se il numeratore ha il suo valore più grande, $1 + \delta x/|x|$, e il denominatore ha il suo valore "più piccolo", $1 - \delta y/|y|$. Così il valore probabile più grande per $q = x/y$ è

$$(\text{il più grande valore di } q) = \frac{x_{\text{best}}}{y_{\text{best}}} \frac{1 + \delta x/|x|}{1 - \delta y/|y|} \quad (3.5)$$

L'ultimo fattore nella espressione (3.5) ha la forma $(1 + a)/(1 - b)$, dove i numeri a e b sono normalmente piccoli (cioè molto minori di 1). Esso può essere semplificato da due approssimazioni. In primo luogo poiché b è piccolo,

il teorema binomiale²) implica che

$$\frac{1}{(1-b)} \approx 1 + b \quad (3.6)$$

Allora

$$\frac{1+a}{1-b} = (1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab \approx 1 + a + b$$

dove, nella seconda linea, abbiamo trascurato il prodotto ab di due quantità piccole. Ritornando alla (3.5) e utilizzando queste approssimazioni, troviamo per il più grande valore probabile di $q = x/y$

$$(\text{il più grande valore di } q) = \frac{x_{\text{best}}}{y_{\text{best}}} \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \right).$$

Un calcolo simile mostra che il più piccolo valore probabile è dato da una espressione analoga con due segni meno. Combinando le due espressioni troviamo che

$$(\text{valore di } q) = \frac{x_{\text{best}}}{y_{\text{best}}} \left(1 \pm \left[\frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \right] \right).$$

Confrontando questo risultato con la forma standard,

$$(\text{valore di } q) = q_{\text{best}} \left(1 \pm \frac{\delta q}{|q|} \right),$$

vediamo che il miglior valore per q è $q_{\text{best}} = x_{\text{best}}/y_{\text{best}}$ come dovremmo aspettarci, e che l'errore relativo è

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \quad (3.7)$$

Concludiamo che quando dividiamo o moltiplichiamo due grandezze misurate x e y , l'errore relativo nel risultato è la somma degli errori relativi in x e in y , come nella (3.7). Se ora moltiplichiamo o dividiamo una serie di numeri, allora l'applicazione ripetuta di questo risultato porta alla seguente regola generale.

Incertezza nei prodotti e nei quozienti

Se parecchie grandezze x, \dots, w sono misurate con errori piccoli $\delta x, \dots, \delta w$ e i valori misurati sono utilizzati per calcolare

$$q = \frac{x \dots z}{u \dots w} \quad (3.8)$$

² Il teorema binomiale esprime $1/(1-b)$ come la serie infinita $1 + b + b^2 + \dots$. Se b è molto minore di 1, allora $1/(1-b) \approx 1 + b$ come nella (3.6). Il lettore che non ha familiarità con il teorema binomiale può trovare ulteriori dettagli nel Problema 3.7.

allora l'errore relativo nel valore calcolato di q è la somma,

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta w}{|w|},$$

degli errori relativi in x, \dots, w .

Brevemente, quando si moltiplicano o si dividono delle grandezze "gli errori relativi si sommano".

Esempio

Può capitare talvolta di dover trovare un valore per la lunghezza l di un oggetto senza poterla misurare direttamente, ma misurando altre tre lunghezze l_1, l_2, l_3 in termini delle quali

$$l = \frac{l_1 l_2}{l_3}$$

Supponiamo di effettuare un tale esperimento e di ottenere i risultati (in metri)

$$l_1 = 200 \pm 2, \quad l_2 = 5.5 \pm 0.1, \quad l_3 = 10.0 \pm 0.4$$

la nostra migliore stima per l è

$$l_{\text{best}} = \frac{200 \times 5.5}{10.0} = 110 \text{ m.}$$

Secondo la (3.8), l'errore relativo in questo risultato è la somma degli errori relativi in l_1, l_2, l_3 , che sono 1, 2, e 4 per cento. Così

$$\frac{\delta l}{l} \approx \frac{\delta l_1}{l_1} + \frac{\delta l_2}{l_2} + \frac{\delta l_3}{l_3} = (1 + 2 + 4) \% = 7\%$$

e il nostro risultato finale è

$$l = 110 \pm 8 \text{ m.}$$

Prodotto di una grandezza misurata per un numero esatto

Due importanti casi speciali della regola in (3.8) meritano di essere menzionati separatamente. In primo luogo, supponiamo di misurare una grandezza x , e quindi di utilizzare il nostro risultato per calcolare il prodotto $q = Bx$, dove il numero B "non ha errore". Per esempio, potremmo misurare il diametro di un cerchio e quindi calcolare la sua circonferenza, $c = \pi d$; oppure potremmo misurare lo spessore T di 100 identici fogli di carta e quindi calcolare lo spessore di un singolo foglio come $t = (1/100)T$. Secondo la regola nella (3.8), l'errore relativo in $q = Bx$ è la somma di quelli in B e x . Dal momento che $\delta B = 0$,

$$\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|}$$

Moltiplicando per $|q| = |Bx|$, troviamo che $\delta q = |B|\delta x$, e abbiamo la seguente utile regola.

Prodotto di una grandezza misurata per un numero esatto
Se la grandezza x è misurata con errore δx ed è utilizzata per calcolare il prodotto

$$q = Bx$$

dove B non ha errore, allora l'errore in q è proprio B volte quello in x .

$$\delta q = |B|\delta x. \quad (3.9)$$

Questa regola è specialmente utile quando si misura qualcosa che è estremamente piccolo, ma è disponibile molte volte assieme, come lo spessore di un foglio di carta o il tempo di rivoluzione di una ruota che gira rapidamente. Per esempio se misuriamo lo spessore T di 100 fogli di carta e otteniamo il risultato

$$\text{spessore di 100 fogli} = T = 3.3 \pm 0.1 \text{ cm,}$$

allora immediatamente segue che lo spessore t di un singolo foglio è

$$\begin{aligned} \text{spessore di un foglio} = t &= \frac{1}{100} T \\ &= 0.033 \pm 0.001 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Notiamo come questa tecnica (misurare lo spessore di parecchi fogli identici e quindi dividere per il loro numero) rende facilmente possibile una misura che altrimenti richiederebbe apparecchiature piuttosto sofisticate, ed inoltre fornisce un errore marcatamente piccolo. Naturalmente occorre essere sicuri che tutti i fogli siano ugualmente spessi.

Potenze

Il secondo caso speciale della regola in (3.8) riguarda il calcolo di una potenza di qualche grandezza misurata. Per esempio, potremmo misurare la velocità v di qualche corpo e quindi, per trovare l'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$, calcolare il quadrato v^2 . Dal momento che v^2 è proprio $v \times v$, segue dalla (3.8) che l'errore relativo in v^2 è "il doppio" dell'errore relativo in v . Più in generale, è chiaro dalla (3.8) che la regola generale per qualunque potenza è come segue.

Incertezza in una potenza

Se la grandezza x è misurata con errore δx , e il valore misurato utilizzato per calcolare la potenza

$$q = x^n,$$

(3.10)

allora l'errore relativo in q è n volte quello in x ,

$$\frac{\delta q}{|q|} = n \frac{\delta x}{|x|}$$

La nostra derivazione di questa regola richiede che n sia un intero positivo. In realtà, comunque, la regola si generalizza per includere "qualunque" esponente n . Vedi sotto la (3.26).

Esempio

Supponiamo che uno studente misuri g , l'accelerazione di gravità, misurando il tempo di caduta t di un sasso da una altezza h al suolo. Dopo aver misurato parecchi tempi, egli conclude che

$$t = 1.6 \pm 0.1 \text{ sec.}$$

e misura l'altezza h come

$$h = 14.1 \pm 0.1 \text{ m.}$$

Dal momento che h è dato dalla ben nota formula

$h = \frac{1}{2}gt^2$, egli ora calcola g come

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \times 14.1 \text{ m.}}{(1.6 \text{ sec})^2} = 11.0 \text{ m/sec}^2$$

L'errore in questo risultato può essere trovato utilizzando le regole già sviluppate. A questo scopo vogliamo conoscere gli errori relativi in ciascuno dei due fattori nell'espressione $g = 2h/t^2$ utilizzata per calcolare g . Il fattore 2 non ha errore. Gli errori relativi in h e in t sono

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{0.1}{14.1} = 0.7\%$$

$$\frac{\delta t}{t} = 6.3\%$$

Secondo la regola (3.10), l'errore relativo di t^2 è il doppio di quello su t . Allora, applicando la regola (3.8) per i prodotti e i quozienti alla formula $g = 2h/t^2$, troviamo l'errore relativo

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2 \frac{\delta t}{t} = 0.7\% + 2(6.3\%) = 13.3\% \quad (3.11)$$

e quindi l'errore

$$\delta g = (11.0 \text{ m/sec}^2) \times \frac{13.3}{100} = 1.4 \text{ m/sec}^2$$

Così il risultato finale del nostro studente

$$g = 11.0 \pm 1.4 \text{ m/sec}^2$$

Questo esempio mostra quanto semplice possa essere la stima degli errori. Esso mostra anche come l'analisi degli errori ci dice non solo la dimensione delle incertezze, ma anche cosa deve essere fatto per ridurre. In questo esempio è chiaro dalla (3.11) che il più grande contributo viene dalla misura del tempo. Se vogliamo un valore più preciso di g , allora è la misura di t che deve essere migliorata; qualunque tentativo per migliorare la misura di h costituirà uno sforzo inutile.

3.3. Errori indipendenti in una somma

Le regole che abbiamo finora trovato possono essere rapidamente riassunte: quando le grandezze misurate sono sommate o sottratte, "gli errori si sommano"; quando le grandezze misurate sono moltiplicate o divise, "gli errori relativi si sommano". In questa e nella prossima sezione, discuteremo come, sotto certe condizioni, le incertezze calcolate utilizzando queste regole possono essere più grandi del necessario. Specificatamente, vedremo che se gli errori originari sono "indipendenti" e "casuali", allora una stima più realistica (e più piccola) dell'errore finale è data da regole similari, nelle quali gli errori (o errori relativi) sono "sommati quadraticamente" (una procedura che definiremo brevemente).

Consideriamo dapprima di calcolare la somma, $q = x + y$, di due numeri x e y che sono stati misurati nella forma standard

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{\text{best}} \pm \delta x,$$

con una espressione simile per y . L'argomento utilizzato nell'ultima sezione fu come segue. In primo luogo, la miglior stima per $q = x + y$ è ovviamente $q_{\text{best}} = x_{\text{best}} + y_{\text{best}}$. In secondo luogo, dal momento che i più grandi valori probabili per x e y sono $x_{\text{best}} + \delta x$ e $y_{\text{best}} + \delta y$, il più alto valore probabile per q

$$x_{\text{best}} + y_{\text{best}} + \delta x + \delta y \quad (3.12)$$

Analogamente, il più piccolo valore probabile di q è

$$x_{\text{best}} + y_{\text{best}} - \delta x - \delta y.$$

Allora, abbiamo concluso, il valore di q probabilmente giace tra questi due numeri, e l'incertezza in q è

$$\delta q \approx \delta x + \delta y.$$

Per vedere perché questa formula è piuttosto una sovrastima di δq , consideriamo come potrebbe accadere che il reale valore di q sia uguale all'estremo più alto (3.12). Ovviamente questo accade se noi abbiamo sottostimato x dell'intero ammontare δx e sottostimato y dell'intero δy . E ovviamente è piuttosto improbabile che ciò possa accadere. Se x e y sono misurati indipendentemente e i nostri errori sono casuali per natura, allora vi è un 50 per cento di probabilità

che una "sottostima" di x sia accompagnata da una "sovrastima" di y , o viceversa. Chiaramente allora, la probabilità che noi sottostimiamo sia x che y dell'intero ammontare δx e δy è piuttosto piccola. Allora il valore $\delta q \approx \delta x + \delta y$ sovrastima il nostro errore probabile.

Che cosa costituisce allora una miglior stima di δq ? Questo dipende da cosa precisamente intendiamo per incertezza (cioè, cosa intendiamo con l'affermazione che q è "probabilmente" in qualche punto tra $q_{best} - \delta q$ e $q_{best} + \delta q$). Dipende anche da quali sono le leggi statistiche che governano i nostri errori nella misura. Nel Capitolo 5 discuteremo la distribuzione normale, o di Gauss, che descrive le misure soggette ad errori casuali. Vedremo che se le misure di x e y sono fatte indipendentemente, e sono entrambe governate dalla distribuzione normale, allora l'errore in $q = x + y$ è dato da

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (3.13)$$

Quando combiniamo due numeri elevandoli al quadrato, sommando i quadrati, e quindi facendo la radice quadrata, come nella (3.13) si dice che i numeri "sono sommati in quadratura". Così la regola riassunta in (3.13) può essere stabilita come segue: se le misure di x e y sono indipendenti e soggette soltanto ad incertezze casuali, allora l'incertezza δq nel valore calcolato di $q = x + y$ è "la somma in quadratura" o "somma quadratica" delle incertezze δx e δy .

È importante confrontare la nuova espressione (3.13) per l'errore in $q = x + y$ con la nostra vecchia espressione,

$$\delta q \approx \delta x + \delta y \quad (3.14)$$

In primo luogo la nuova espressione (3.13) è sempre più piccola della vecchia (3.14), come possiamo vedere da una semplice argomentazione geometrica. Per qualsiasi coppia di numeri positivi a e b , i numeri a , b , e $\sqrt{a^2 + b^2}$ sono i tre lati di un triangolo rettangolo (Figura 3.2). Poiché la lunghezza di qualunque lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due lati, segue che $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$ e quindi che (3.13) è sempre minore di (3.14).

Dal momento che l'espressione (3.13) per l'errore in $q = x + y$ è sempre minore della (3.14), si dovrebbe utilizzare sempre la (3.13) "quando" essa è applicabile. Comunque essa "non" è sempre applicabile. L'espressione (3.13) riflette la possibilità che una sovrastima in x possa essere controbilanciata da una sottostima in y o viceversa. È facile pensare a misure in cui questo non è possibile.

Supponiamo, per esempio, che $q = x + y$ sia la somma di due lunghezze x e y misurate con lo stesso metro di acciaio. Supponiamo inoltre che la principale sorgente di incertezza sia il nostro timore che il nastro sia stato progettato per un uso ad una temperatura diversa dalla nostra. Se non conosciamo questa

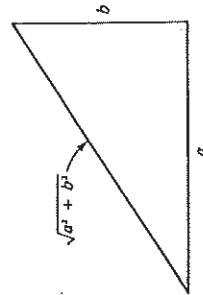


Figura 3.2. Poiché qualunque lato di un triangolo è minore della somma degli altri due, è sempre vero che $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$.

temperatura (e non abbiamo un altro metro affidabile per confronto), allora dobbiamo riconoscere che il nostro metro può essere più lungo o più corto della sua lunghezza calibrata, e quindi può fornire una lettura sotto o sopra stimata della lunghezza corretta. Si può ovviare facilmente a questo errore³). Comunque, il punto qui è che se il nastro è troppo lungo, allora "sottostimiamo sia x che y "; e se il nastro è troppo corto, "sovrastimiamo sia x che y ". Così non vi è possibilità per le cancellazioni che giustificavano l'uso della somma in quadratura per calcolare l'errore in $q = x + y$.

Proveremo più avanti (nel Capitolo 9) che, sia che i nostri errori siano o no indipendenti e casuali, l'errore in $q = x + y$ è "certamente non più grande" della somma semplice $\delta x + \delta y$:

$$\delta q \leq \delta x + \delta y \quad (3.15)$$

Cioè, la nostra vecchia espressione (3.14) per δq è realmente "un limite superiore" valido in tutti i casi. Se abbiamo qualche ragione per sospettare che gli errori in x e y "non" siano indipendenti e casuali (come nell'esempio della misura col metro di acciaio), allora non siamo giustificati ad utilizzare la somma quadratica (3.13) per δq . D'altra parte, il limite (3.15) garantisce che δq è certamente non peggiore di $\delta x + \delta y$, e la nostra linea di condotta più sicura è di utilizzare la vecchia regola

$$\delta q \approx \delta x + \delta y.$$

Spesso di fatto vi è poca differenza se si sommano gli errori in quadratura o direttamente. Per esempio, supponiamo che x e y siano lunghezze misurate con errori $\delta x = \delta y = 2$ mm. Se siamo sicuri che questi errori sono indipendenti e casuali, allora dovremmo stimare l'errore in $x + y$ come la somma in quadratura,

$$\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} = \sqrt{4 + 4} \text{ mm} = 2.8 \text{ mm} \approx 3 \text{ mm},$$

ma se sospettiamo che gli errori non siano indipendenti, allora dovremmo utilizzare la somma ordinaria,

$$\delta x + \delta y \approx (2 + 2) \text{ mm} = 4 \text{ mm}.$$

In molti esperimenti, la stima degli errori è così rozza che la differenza tra questi due risultati (3 mm. e 4 mm.) è priva di importanza. D'altra parte, talvolta la somma in quadratura è significativamente più piccola della somma ordinaria. Inoltre, piuttosto sorprendentemente, la somma in quadratura è talvolta più facile da calcolare della somma ordinaria. Vedremo esempi di questi effetti nella prossima sezione.

3.4. Ancora sugli errori indipendenti

Nell'ultima sezione abbiamo discusso come le incertezze indipendenti casuali in due grandezze x e y si propagano per causare una incertezza nella somma

³ Supponiamo, per esempio, che il nastro abbia un coefficiente di dilatazione $\alpha = 10^{-5}$ per grado, e che decidiamo che la differenza tra la temperatura di calibrazione e la nostra non sia più di 10 gradi. È allora improbabile che il metro sia lontano dalla sua lunghezza corretta più di 10^{-4} , o 0.01 per cento, e il nostro errore è allora 0.01 per cento.

$x + y$. Abbiamo visto che per questo tipo di incertezza i due errori dovrebbero essere sommati in quadratura. Si può naturalmente considerare il problema corrispondente per differenze, prodotti, e quozienti. Come proveremo più avanti, si può mostrare che in tutti i casi le nostre regole precedenti, (3.4) e (3.8), sono modificate solo nel senso che le somme degli errori (o errori relativi) sono rimpiazzate dalle somme quadratiche. Inoltre, proveremo che le vecchie espressioni (3.4) e (3.8) sono, in realtà, limiti superiori, che valgono sempre, sia che gli errori siano o no indipendenti e casuali. Così le versioni finali delle nostre due regole principali sono come segue:

Incertezza nelle somme e nelle differenze

Supponiamo che x, \dots, w siano misurate con errori $\delta x, \dots, \delta w$, e i valori misurati utilizzati per calcolare

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$$

Se gli errori in x, \dots, w sono noti essere "indipendenti e casuali", allora l'errore in q è la somma quadratica

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \dots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \dots + (\delta w)^2} \quad (3.16)$$

degli errori originari. In ogni caso, δq non è mai più grande della loro somma ordinaria,

$$\delta q \leq \delta x + \dots + \delta z + \delta u + \dots + \delta w. \quad (3.17)$$

Incertezza nei prodotti e nei quozienti

Supponiamo che x, \dots, w siano misurate con incertezza $\delta x, \dots, \delta w$, e i valori misurati utilizzati per calcolare

$$q = \frac{x \dots z}{u \dots w}$$

Se gli errori in x, \dots, w sono "indipendenti e casuali", allora l'errore relativo in q è la somma in quadratura degli errori relativi originali,

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2} \quad (3.18)$$

In ogni caso, non è mai più grande della loro somma ordinaria,

$$\frac{\delta q}{|q|} \leq \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta w}{|w|} \quad (3.19)$$

Notiamo che non abbiamo ancora giustificato l'uso della somma in quadratura per gli errori indipendenti e casuali. Abbiamo soltanto arguito che quando i vari errori sono indipendenti e casuali, vi è una buona probabilità di cancellazioni parziali di errori, e che l'incertezza risultante (o errore relativo) dovrebbe essere più piccola della semplice somma delle incertezze originali (o errori relativi); la somma in quadratura ha questa proprietà. Daremo una giustificazione più appropriata del suo uso nel Capitolo 5. I limiti (3.17) e (3.19) saranno dimostrati nel Capitolo 9.

Esempio

Come abbiamo già discusso, talvolta non vi è differenza significativa tra le incertezze calcolate per somma in quadratura e quelle calcolate per somma diretta. D'altra parte, vi è spesso una differenza significativa, e - abbastanza sorprendentemente - la somma in quadratura è spesso molto più semplice da calcolare. Per vedere come questo accade, consideriamo il seguente esempio.

Supponiamo di voler trovare l'efficienza di un motore elettrico in corrente continua utilizzandolo per sollevare una massa m fino ad una altezza h . Il lavoro compiuto è mgh , e l'energia elettrica erogata al motore è VI , dove V è il voltaggio applicato, I la corrente, e t il tempo per cui il motore lavora. L'efficienza è allora

$$\begin{aligned} \text{efficienza, } e &= \frac{\text{lavoro fatto dal motore}}{\text{energia erogata al motore}} \\ &= \frac{mgh}{VI} \end{aligned}$$

Supponiamo che m, h, V e I siano tutte misurate con l'accuratezza dell'1 per cento,

$$(\text{errore relativo per } m, h, V, \text{ e } I) = 1\%,$$

e che il tempo t abbia un errore del 5 per cento,

$$(\text{errore relativo per } t) = 5\%$$

(Naturalmente g è nota con incertezza trascurabile). Se ora calcoliamo l'efficienza e , allora, secondo la nostra vecchia regola ("gli errori relativi si sommano"), abbiamo un errore

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{e} &\approx \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta I}{I} + \frac{\delta t}{t} \\ &= (1 + 1 + 1 + 1 + 5)\% = 9\% \end{aligned}$$

D'altra parte, se siamo confidenti che i vari errori sono indipendenti e casuali, allora possiamo calcolare $\delta e/e$ con la somma quadratica e otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{e} &= \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2}\% \\ &= \sqrt{29}\% \approx 5\% \end{aligned}$$

Chiaramente la somma quadratica porta ad una stima significativamente più piccola per δe . Inoltre, si vedrà che, arrotondando a una cifra significativa, le incertezze in m , h , V , e I "non contribuiscono per nulla" all'incertezza in e calcolata in questo modo; cioè, a una cifra significativa, abbiamo trovato, (in questo esempio)

$$\frac{\delta e}{e} = \frac{\delta I}{I}$$

Questa sorprendente semplificazione si capisce facilmente. Quando i numeri sono sommati in quadratura, essi sono dapprima elevati al quadrato e poi sommati. Il processo di elevazione al quadrato esagera grandemente l'importanza dei numeri più grandi. Così, se un numero è 5 volte maggiore di ognuno degli altri (come nel nostro esempio), allora il suo quadrato è 25 volte quello degli altri, e possiamo usualmente trascurare gli altri del tutto.

Questo esempio mostra come è usualmente meglio, e spesso più facile, combinare gli errori in quadratura. L'esempio mostra anche qual è il tipo di problemi in cui gli errori "sono" indipendenti, e per i quali la somma in quadratura è giustificata. (Per il momento assumiamo come dato che gli errori siano casuali. Discuteremo questo più difficile punto nel Capitolo 4). Le cinque grandezze misurate (m , h , V , I e t) sono grandezze fisicamente distinte, con diverse unità e sono misurate con procedimenti completamente differenti. È piuttosto inconcepibile che le sorgenti di errore in una di queste grandezze siano correlate con quelle di qualche altra. Allora gli errori possono ragionevolmente essere trattati come indipendenti e combinati in quadratura.

3.5. Funzioni arbitrarie di una variabile

Noi ora sappiamo come gli errori, siano essi indipendenti o no, si propagano attraverso somme, differenze, prodotti, e quozienti. Comunque parecchi calcoli richiedono operazioni più complicate, come il calcolo di un seno, coseno, o radice quadrata, e avremo bisogno di conoscere come gli errori si propagano in questi casi.

Come esempio, potremmo immaginare di trovare l'indice di rifrazione n del vetro misurando l'angolo critico θ . È noto dall'ottica elementare che $n = 1/\sin\theta$. Se misuriamo l'angolo θ , è poi facile calcolare l'indice di rifrazione n . Ma dobbiamo poi decidere quale incertezza δn in $n = 1/\sin\theta$ risulta dall'incertezza $\delta\theta$ nella nostra misura di θ .

Più in generale, supponiamo di avere misurato una grandezza x nella forma standard $x_{best} \pm \delta x$, e di voler calcolare qualche funzione nota $q(x)$, come $q(x) = 1/\sin x$ oppure $q(x) = \sqrt{x}$. Un modo semplice di pensare a questo calcolo è di disegnare un grafico di $q(x)$ come in Figura 3.3. La miglior stima per $q(x)$ è, naturalmente, $q_{best} = q(x_{best})$, e i valori x_{best} e q_{best} sono mostrati collegati dalle linee solide nella Figura 3.3.

Per decidere sull'incertezza δq , impieghiamo l'argomento usuale. Il più grande valore probabile di x è $x_{best} + \delta x$; utilizzando il grafico, possiamo immediatamente trovare il più grande valore probabile di q , che è indicato come q_{max} .

Analogamente possiamo disegnare il più piccolo valore probabile, q_{min} , come mostrato. Se l'incertezza δx è piccola (come sempre supponiamo che sia), allora la sezione di grafico coinvolta in questa costruzione è approssimativamente retta, e si vede facilmente che q_{max} e q_{min} sono ugualmente spaziate su

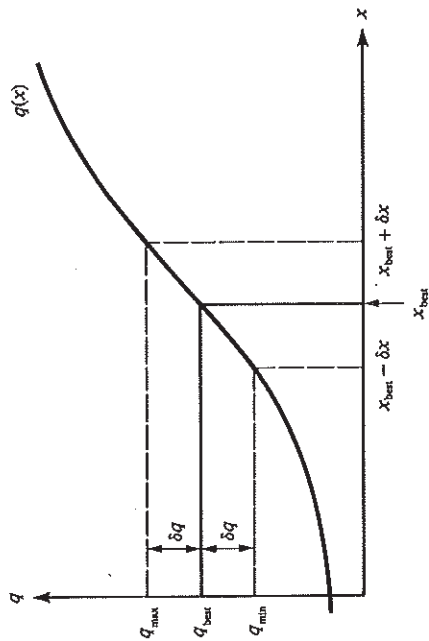


Figura 3.3. Grafico $q(x)$ in funzione di x . Se x è misurato come $x_{best} \pm \delta x$, allora la miglior stima per $q(x)$ è $q_{best} = q(x_{best})$. Il più grande e il più piccolo valore probabile di $q(x)$ corrispondono ai valori $x_{best} + \delta x$ di x .

entrambi i lati di q_{best} . L'incertezza δq può allora essere ottenuta dal grafico come l'uno o l'altra delle lunghezze mostrate, e abbiamo quindi trovato il valore di q nella forma standard $q_{best} \pm \delta q$.

Occasionalmente gli errori si calcolano proprio da un grafico come ora descritto. (Vedi Problema 3.10 per esempio). Di solito, comunque, la funzione $q(x)$ è nota esplicitamente — $q(x) = \sin x$ oppure $q(x) = \sqrt{x}$, per esempio — e l'incertezza δq può essere calcolata analiticamente. È chiaro dalla Figura 3.3 che

$$\delta q = q(x_{best} + \delta x) - q(x_{best}) \quad (3.20)$$

Ora, una approssimazione fondamentale del calcolo asserisce che, per qualunque funzione $q(x)$ e qualunque incremento sufficientemente piccolo u ,

$$q(x+u) - q(x) \approx \frac{dq}{dx}u$$

Così, ammesso che l'errore δx sia piccolo (come sempre assumiamo che sia), possiamo riscrivere la differenza nella (3.20) per ottenere

$$\delta q \approx \frac{dq}{dx}\delta x \quad (3.21)$$

Così, per trovare l'errore δq , dobbiamo calcolare la derivata dq/dx e moltiplicarla per l'errore δx .

La regola (3.21) non è del tutto nella sua forma finale. Essa è stata derivata per una funzione, come quella di Figura 3.3, la cui pendenza è positiva. Nella Figura 3.4 è mostrata una funzione con pendenza negativa. In questo caso il massimo valore probabile q_{max} ovviamente corrisponde al valore minimo, $x_{best} - \delta x$, di x , così che

$$\delta q = -\frac{dq}{dx}\delta x \quad (3.22)$$

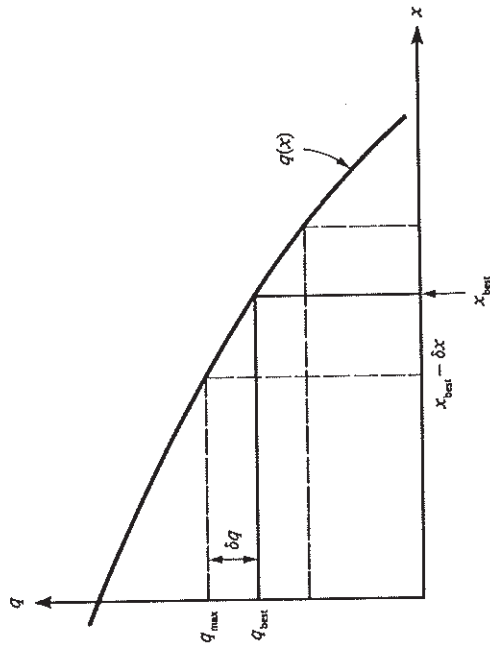


Figura 3.4. Se la pendenza di $q(x)$ è negativa, allora il massimo valore probabile di q corrisponde al valore minimo di x , e viceversa.

Dal momento che dq/dx è negativo, possiamo scrivere $-dq/dx$ come $|dq/dx|$, e abbiamo la seguente regola generale.

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x. \quad (3.23)$$

Incertezza in qualunque funzione di una variabile

Se x è misurato con errore δx ed è utilizzato per calcolare la funzione $q(x)$, allora l'errore δq è

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x.$$

Come semplice applicazione di questa regola, supponiamo di aver misurato un angolo θ come

$$\theta = 20 \pm 3 \text{ gradi},$$

e di voler trovare $\cos \theta$. La nostra miglior stima di $\cos \theta$ è, naturalmente, $\cos 20^\circ = 0.94$, e secondo la (3.23) l'incertezza è

$$\begin{aligned} \delta(\cos \theta) &= \left| \frac{d \cos \theta}{d\theta} \right| \delta \theta \\ &= |\sin \theta| \delta \theta \text{ (in rad.)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Abbiamo indicato che $\delta \theta$ deve essere espresso in radianti, perché la derivata di $\cos \theta$ è $-\sin \theta$ solo se θ è espresso in radianti. Riscriviamo $\delta \theta = 3^\circ$ come

$\delta \theta = 0.05$ rad; allora la (3.24) dà

$$\begin{aligned} \delta(\cos \theta) &= (\sin 20^\circ) \times 0.05 \\ &= 0.34 \times 0.05 \\ &= 0.02. \end{aligned}$$

Così il nostro risultato finale è

$$\cos \theta = 0.94 \pm 0.02.$$

Come secondo esempio della regola in (3.23) possiamo riderivare (e generalizzare) un risultato trovato nella Sezione 3.2. Supponiamo di misurare la grandezza x e poi di calcolare la potenza, $q(x) = x^n$ (dove n è qualunque numero noto fissato, positivo o negativo). Secondo la (3.23) l'errore risultante in q è

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x = |nx^{n-1}| \delta x.$$

Se dividiamo entrambi i membri di questa equazione per $|q| = |x^n|$, troviamo che

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}, \quad (3.25)$$

cioè, l'errore relativo in $q = x^n$ è n volte quello in x . Questa è proprio la regola (3.10) trovata in precedenza. Comunque il risultato qui è più generale, dal momento che n può ora essere qualunque numero. Per esempio se $n = \frac{1}{2}$, allora $q = \sqrt{x}$, e

$$\frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{2} \frac{\delta x}{|x|},$$

cioè l'errore relativo in \sqrt{x} è "la metà" di quello in x . Analogamente, l'errore relativo in $1/x = x^{-1}$ è lo stesso di quello in x .

Il risultato (3.25) è proprio un caso particolare della regola in (3.23). Comunque è sufficientemente importante da meritare una notazione separata come la seguente regola generale.

Incertezza in una potenza

Se x è misurato con incertezza δx ed è utilizzato per calcolare la potenza $q = x^n$ (dove n è un numero noto, fissato), allora l'errore relativo in q è $|n|$ volte quello in x .

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|} \quad (3.26)$$

3.6. La propagazione passo per passo

Abbiamo ora abbastanza mezzi per affrontare quasi qualunque problema nella propagazione degli errori. Qualunque calcolo può essere spezzettato in una

sequenza di passi, ciascuno dei quali involge uno dei seguenti tipi di operazioni: (1) somme e differenze; (2) prodotti e quozienti; (3) calcolo di una funzione di una variabile, come x^n , $\sin x$, e^x oppure $\ln x$. Per esempio potremmo calcolare

$$q = x(y - z \sin u) \quad (3.27)$$

dalle grandezze misurate x , y , z , e u nei seguenti passi: calcolare "la funzione" $\sin u$, quindi "il prodotto" di z e $\sin u$, poi "la differenza" di y e $z \sin u$, e finalmente "il prodotto" di x e $(y - z \sin u)$.

Conosciamo come le incertezze si propagano attraverso ciascuna di queste operazioni separate. Così, supposto che le varie grandezze in gioco siano indipendenti, possiamo calcolare l'incertezza nel risultato finale procedendo per passi dalle incertezze nella misura originale (*). Per esempio, se le grandezze x , y , z e u nella (3.27) sono state misurate con errori corrispondenti δx , ..., δu , allora potremmo calcolare l'errore in q come segue. Dapprima troviamo l'errore nella funzione $\sin u$; noto questo, troviamo l'errore nel prodotto $z \sin u$ e poi quello nella differenza $y - z \sin u$; finalmente, troviamo l'errore nel prodotto completo (3.27).

Prima di discutere alcuni esempi di questo calcolo passo-passo degli errori, mettiamo in risalto due punti generali. In primo luogo, dal momento che gli errori nelle somme o nelle differenze implicano errori assoluti (come δx), mentre quelli nei prodotti o quozienti implicano errori relativi (come $\delta x/x$), i nostri calcoli richiederanno qualche abilità nel passare da errori assoluti a relativi e viceversa, come vedremo.

In secondo luogo, una importante semplificazione di tutti questi calcoli è che (come abbiamo ripetutamente messo in risalto) gli errori raramente hanno bisogno di più di una cifra significativa. Quindi la maggior parte del calcolo può essere fatta molto rapidamente a mente, e molti errori più piccoli possono essere completamente trascurati. In un tipico esperimento che implica parecchie prove, può essere necessario fare un calcolo accurato su un foglio di tutta la propagazione degli errori per la prima prova. Una volta che questo è stato fatto, è spesso facile accorgersi che tutte le prove sono sufficientemente simili per cui nessun calcolo aggiuntivo è necessario o, al peggio, per le prove successive i calcoli della prima prova possono essere modificati a mente.

3.7. Esempi

In questa e nella prossima sezione tratteremo in dettaglio tre esempi del tipo di calcolo incontrato nel primo corso di laboratorio. Nessuno di questi esempi è particolarmente complicato; e, di fatto, pochi problemi in realtà sono molto più complicati di quelli trattati qui.

Misura di g con un pendolo semplice

Come primo esempio, supponiamo di misurare g , la accelerazione di gravità, usando un pendolo semplice. È ben noto che il periodo di tale pendolo è $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, dove l è la lunghezza del pendolo. Così se l e T vengono misurati,

* Discuteremo nella Sezione 3.9 perché questo procedimento passo-passo è talvolta insoddisfacente quando le varie grandezze non sono indipendenti, come con una funzione del tipo $q = x(y - x \sin y)$, dove x e y appaiono due volte. In questo caso un calcolo passo-passo dell'errore δq può talvolta portare ad una sovrastima di δq .

possiamo ricavare g da

$$g = 4\pi^2 l/T^2. \quad (3.28)$$

Questa relazione esprime g come il prodotto o quoziente di tre fattori, $4\pi^2$, l , T^2 . Se i vari errori sono indipendenti e casuali, l'errore relativo nel nostro risultato è proprio la somma quadratica degli errori relativi in questi fattori. Il fattore $4\pi^2$ non ha errore, e l'errore relativo in T^2 è il doppio che in T :

$$\frac{\delta(T^2)}{T^2} = 2 \frac{\delta T}{T}.$$

Così l'errore relativo nel nostro risultato per g sarà

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}. \quad (3.29)$$

Supponiamo di misurare il periodo T per un valore della lunghezza l e di ottenere i risultati (*)

$$l = 92.95 \pm 0.1 \text{ cm}, \\ T = 1.936 \pm 0.004 \text{ sec}.$$

La nostra miglior stima per g si ottiene facilmente dalla (3.28) come

$$g_{\text{best}} = \frac{4\pi^2 (92.95 \text{ cm})}{(1.936 \text{ sec})^2} = 979 \text{ cm/sec}^2.$$

Per trovare il nostro errore in g utilizzando la (3.29), dobbiamo conoscere gli errori relativi in l e T . Questi si possono facilmente calcolare (a mente) come

$$\frac{\delta l}{l} = 0.1\% \quad \text{e} \quad \frac{\delta T}{T} = 0.2\%.$$

Sostituendo nella (3.29), troviamo

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{(0.1\%)^2 + (2 \times 0.2\%)^2} \quad \% = 0.4\%;$$

quindi

$$\delta g = 0.004 \times 979 \text{ cm/sec}^2 \\ = 4 \text{ cm/sec}^2.$$

Così il nostro risultato finale, basato su queste misure, è

$$g = 979 \pm 4 \text{ cm/sec}^2.$$

* Sebbene a prima vista un errore $\delta T = 0.004$ sec. può sembrare irrealisticamente piccolo, tuttavia si può facilmente raggiungere misurando parecchie oscillazioni. Se si misura con una accuratezza di 0.1 sec., come è certamente possibile con un cronometro, allora misurando 25 oscillazioni si può trovare T entro 0.004 sec.

Se questo esperimento viene ora ripetuto (come dovrebbe essere la maggior parte di tali esperimenti) con differenti valori per i parametri, non sarà necessario ripetere i calcoli dell'errore in completo dettaglio. Con un piccolo sforzo, si possono facilmente registrare i vari valori di l , T e g ed i corrispondenti calcoli dell'errore tutti in una singola tabella (vedi Problema 3.13).

Indice di rifrazione utilizzando la legge di Snell

Se un raggio di luce passa dall'aria al vetro, allora gli angoli di incidenza (i) e rifrazione (r) sono definiti come in Figura 3.5 e sono in relazione fra loro tramite la legge di Snell, $\sin i = n \sin r$, dove n è l'indice di rifrazione del vetro. Così, se si misurano gli angoli i e r , si può calcolare l'indice di rifrazione n come

$$n = \sin i / \sin r. \tag{3.30}$$

L'errore in questo risultato è facilmente calcolato. Dal momento che n è il quoziente di $\sin i$ e $\sin r$, l'errore relativo in n è la somma quadratica

$$\frac{\delta n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\delta \sin i}{\sin i}\right)^2 + \left(\frac{\delta \sin r}{\sin r}\right)^2}, \tag{3.31}$$

di quelli in $\sin i$ e in $\sin r$. Per trovare l'errore relativo nel seno di qualunque angolo θ , notiamo che

$$\begin{aligned} \delta \sin \theta &= \left| \frac{d \sin \theta}{d \theta} \right| \delta \theta \\ &= |\cos \theta| \delta \theta \quad (\text{in rad.}) \end{aligned}$$

Così l'errore relativo è

$$\frac{\delta \sin \theta}{|\sin \theta|} = |\cot \theta| \delta \theta \quad (\text{in rad.}) \tag{3.32}$$

Supponiamo ora di misurare l'angolo r per una coppia di valori di i , e di ottenere i risultati mostrati nelle prime due colonne di Tabella 3.1 (con tutte le misure affette da un errore di ± 1 grado, o 0.02 radianti). Il calcolo di $n = \sin i / \sin r$ è facilmente compiuto come mostrato nelle successive tre colonne di Tabella 3.1. L'errore in n può allora essere trovato come nelle ultime tre colonne; gli errori relativi in $\sin i$ e $\sin r$ sono calcolati utilizzando la (3.32), e finalmente quello in n è trovato utilizzando la (3.31).

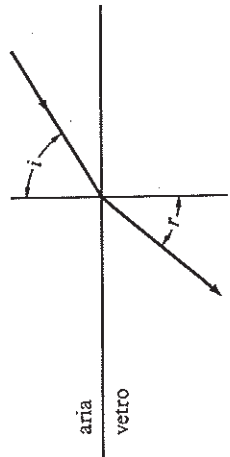


Figura 3.5. Gli angoli di incidenza, i , e di rifrazione, r , quando un raggio di luce passa dall'aria al vetro.

Tabella 3.1. Calcolo dell'indice di rifrazione.

i (gradi)	r (gradi)	$\sin i$	$\sin r$	n	$\frac{\delta \sin i}{ \sin i }$	$\frac{\delta \sin r}{ \sin r }$	$\frac{\delta n}{n}$
± 1	± 1						
20	13	0.342	0.225	1.52	5%	8%	9%
40	23.5	0.643	0.399	1.61	2%	4%	5%

Prima di fare una serie di misure come le due mostrate in Tabella 3.1, pensate accuratamente al modo migliore di riportare i dati e i calcoli. Una tabella ordinata come la Tabella 3.1 rende più facile la registrazione dei dati e riduce il pericolo di errori nei calcoli. Risulta anche più facile per chi la legge da capire e da verificare.

3.8. Un esempio più complicato

I due esempi appena dati sono tipici di molti esperimenti del laboratorio introduttivo di fisica. Comunque, alcuni esperimenti richiedono calcoli più complessi. Come esempio di un tale esperimento, discutiamo qui la misura dell'accelerazione di un carrello che scende lungo un piano inclinato⁶.

Accelerazione di un carrello su un piano inclinato

Consideriamo un carrello che scende lungo un piano inclinato di pendenza θ come in Figura 3.6. L'accelerazione attesa è $g \sin \theta$, se misuriamo θ , possiamo facilmente calcolare l'accelerazione attesa ed il suo errore (Problema 3.15). Possiamo misurare l'accelerazione effettiva, a , misurando il tempo che occorre al carrello per passare davanti alle due fotocellule, come mostrato, ciascuna connessa ad un cronometro. Se il carrello ha una lunghezza l e impiega il tempo t_1 a passare davanti alla prima fotocellula, la sua velocità in quel punto è $v_1 = l/t_1$. Nello stesso modo, $v_2 = l/t_2$. (Strettamente parlando, queste velocità sono le velocità "medie" del carrello mentre passa davanti alle due fotocellule.

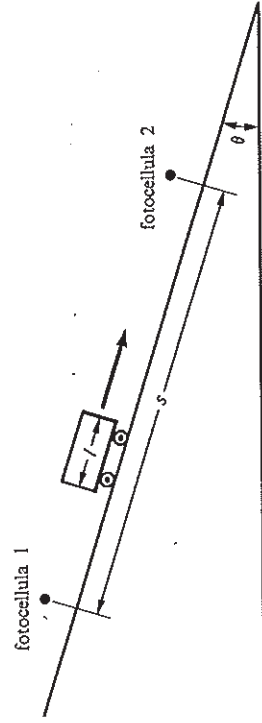


Figura 3.6. Un carrello scende lungo un piano inclinato con inclinazione θ . Ciascuna fotocellula è connessa con un cronometro per misurare il tempo che il carrello impiega ad oltrepassarla.

⁶ Il lettore che lo desidera può tralasciare questa sezione senza perdita di continuità, oppure può tornare a studiarla in connessione con il Problema 3.15.

Comunque, finché l è piccolo, la differenza fra le velocità medie ed istantanee è trascurabile). Se la distanza fra le fotocellule è s , allora la ben nota formula $v_2^2 = v_1^2 + 2as$ implica che

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = \left(\frac{l^2}{2s}\right) \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}\right). \quad (3.33)$$

Utilizzando questa formula e i valori misurati di l , s , t_1 e t_2 , si può facilmente trovare l'accelerazione osservata ed il suo errore.

Un insieme di dati per questa esperienza (dove i numeri fra parentesi sono gli errori percentuali corrispondenti, come potete facilmente verificare) era come segue:

$$\begin{aligned} l &= 5.0 \pm 0.05 \text{ cm} && (1\%) \\ s &= 100.0 \pm 0.2 \text{ cm} && (0.2\%) \\ t_1 &= 0.054 \pm 0.001 \text{ sec} && (2\%) \\ t_2 &= 0.031 \pm 0.001 \text{ sec} && (3\%) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Da questi dati possiamo calcolare immediatamente il primo fattore nella (3.33) come $l^2/2s = 0.125 \text{ cm}$. Dal momento che gli errori relativi in l ed s sono 1 e 0.2 per cento, quello in $l^2/2s$ è

$$\sqrt{(2 \times 1)^2 + (0.2)^2} \% = 2\%.$$

(Notiamo come l'errore in s non dia un contributo apprezzabile e potrebbe essere stato ignorato). Allora

$$l^2/2s = 0.125 \text{ cm} \pm 2\% \quad (3.35)$$

Per calcolare il secondo fattore nella (3.33) ed il suo errore, procediamo per passi. Dal momento che l'errore relativo in t_1 è 2 per cento, quello in $1/t_1^2$ è 4 per cento. Così, dal momento che $t_1 = 0.054 \text{ sec}$,

$$1/t_1^2 = 343 \pm 14 \text{ sec}^{-2}$$

Nello stesso modo, l'errore relativo in $1/t_2^2$ è 6 per cento e

$$1/t_2^2 = 1041 \pm 62 \text{ sec}^{-2}.$$

Sottraendo (e combinando gli errori in quadratura), troviamo

$$\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} = 698 \pm 64 \text{ sec}^{-2} \quad (9\%). \quad (3.36)$$

Infine, secondo la (3.33), l'accelerazione richiesta è il prodotto di (3.35) e (3.36). Moltiplicando fra loro (e combinando gli errori relativi in quadratura), otteniamo

$$\begin{aligned} a &= (0.125 \text{ cm} \pm 2\%) \times (698 \text{ sec}^{-2} \pm 9\%) \\ &= 87.3 \text{ cm/sec}^2 \pm 9\% \end{aligned}$$

oppure

$$a = 87 \pm 8 \text{ cm/sec}^2 \quad (3.37)$$

Il risultato potrebbe ora essere confrontato con l'accelerazione attesa $g \sin \theta$, se essa fosse stata calcolata.

Quando i calcoli che portano alla (3.37) vengono analizzati con cura, emergono parecchi aspetti interessanti. In primo luogo, l'errore percentuale del 2 per cento nel fattore $l^2/2s$ è completamente sommerso dall'errore percentuale del 9 per cento in $(1/t_2^2) - (1/t_1^2)$. Se ulteriori calcoli sono necessari per le prove successive, gli errori in l e s possono allora essere trascurati (purché si faccia una rapida verifica per vedere se essi sono ancora privi di importanza).

Un altro punto importante dei nostri calcoli è il modo in cui le incertezze percentuali del 2 e 3 per cento in t_1 e t_2 crescono quando calcoliamo $1/t_1^2$, $1/t_2^2$, e la differenza $(1/t_2^2) - (1/t_1^2)$, in modo che l'incertezza finale è del 9 per cento. Questa crescita risulta in parte per l'elevazione al quadrato e in parte dal fare la differenza di numeri grandi. Possiamo immaginare di estendere l'esperimento per verificare la costanza di a dando al carrello un impulso iniziale, cosicché la velocità v_1 e v_2 siano entrambe più grandi. Se facessimo questo, i tempi t_1 e t_2 diventerebbero più piccoli, e gli effetti ora descritti sarebbero peggiori (vedi Problema 3.15).

3.9. Formula generale per la propagazione degli errori (*)

Finora abbiamo stabilito tre regole principali per la propagazione degli errori: quella per le somme e differenze; quella per i prodotti e quozienti; e quella per funzioni arbitrarie di una variabile. Nelle ultime tre sezioni abbiamo visto come il calcolo di una funzione complicata possa spesso essere spezzato in passi, e l'incertezza nella funzione calcolata passo-passo usando le nostre tre semplici regole.

In questa sezione finale diamo una regola generale dalla quale tutte le tre precedenti possono essere derivate, e con la quale qualunque problema nella propagazione degli errori può essere risolto. Sebbene questa formula sia solitamente piuttosto scomoda da usare, essa è utile teoricamente. Inoltre, ci sono alcuni problemi nei quali, invece di calcolare l'incertezza in passi come nelle ultime tre sezioni, è meglio fare il calcolo in un passo per mezzo della formula generale.

Per illustrare il genere di problema per il quale il calcolo a un passo è preferibile, supponiamo di misurare tre grandezze x , y , z , e di dover calcolare una funzione come

$$q = \frac{x+y}{x+z} \quad (3.38)$$

nella quale una variabile appare più di una volta (x in questo caso). Se dovessimo calcolare l'errore δq in passi, allora dovremmo dapprima calcolare gli errori nelle due somme $x+y$ e $x+z$, e poi quello nel loro quoziente. Procedendo in questo modo, ci sfuggirebbe completamente la possibilità che gli errori nel numeratore dovuti agli errori in x possano, in qualche misura,

* Il lettore può partecipare la lettura di questa sezione senza serie perdite di continuità. Il materiale ivi descritto non è utilizzato fino alla Sezione 5.6.

cancellare gli errori nel denominatore dovuti agli errori in x . Per capire come questo possa accadere, supponiamo che x, y, z siano tutti numeri positivi, e consideriamo cosa accade se la nostra misura di x è soggetta a errore.

Se noi "sovrastimiamo" x , allora "sovrastimiamo" sia $x + y$ che $x + z$, e (in qualche misura) queste sovrastime si cancellano l'un l'altra quando calcoliamo $(x + y)/(x + z)$. Analogamente, se "sottostimo" di x porta a "sottostime" sia di $x + y$ che di $x + z$, che di nuovo si cancellano quando formiamo il quoziente. In entrambi i casi, un errore in x è sostanzialmente cancellato dal quoziente $(x + y)/(x + z)$, e il nostro calcolo passo-passo perde completamente queste cancellazioni.

Quando una funzione coinvolge la stessa grandezza più di una volta, come nella (3.38), alcuni degli errori possono cancellarsi fra loro (un effetto chiamato talvolta "compensazione degli errori"). Se ciò è possibile, allora un calcolo passo-passo dell'errore può sovrastimare l'errore finale. L'unico modo di evitare ciò è di calcolare l'incertezza in un passo usando il metodo che ora svilupperemo⁶.

Supponiamo dapprima di misurare due grandezze x e y , e poi di calcolare qualche funzione $q = q(x, y)$. Questa funzione potrebbe essere semplice come $q = x + y$ oppure più complicata, del tipo $q = (x^3 + y) \sin(xy)$. Per una funzione $q(x)$ di una "singola" variabile, abbiamo arguito che la miglior stima per x è il numero x_{best} , quindi la miglior stima per $q(x)$ è $q(x_{\text{best}})$. In seguito abbiamo arguito che i valori probabili estremi di x (cioè il più grande e il più piccolo) sono $x_{\text{best}} \pm \delta x$, e i valori estremi corrispondenti di q sono allora

$$q(x_{\text{best}} \pm \delta x). \quad (3.39)$$

Infine abbiamo usato l'approssimazione

$$q(x + u) \approx q(x) + \frac{dq}{dx} u \quad (3.40)$$

(per qualunque incremento piccolo u) per riscrivere i valori probabili estremi (3.39) come

$$q(x_{\text{best}}) \pm \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x, \quad (3.41)$$

dove il valore assoluto permette la possibilità che dq/dx possa essere negativo. Il risultato (3.41) significa che $\delta q \approx |dq/dx| \delta x$.

Quando q è una funzione di due variabili, $q(x, y)$, l'argomento è molto simile. Se x_{best} e y_{best} sono le stime migliori per x e y , allora ci aspettiamo che la stima migliore per q sia

$$q_{\text{best}} = q(x_{\text{best}}, y_{\text{best}})$$

nel solito modo. Per stimare l'incertezza in questo risultato, dobbiamo generalizzare l'approssimazione (3.40) per una funzione di due variabili. La generaliz-

⁶ Talvolta una funzione che comprende una variabile più di una volta può essere riscritta in una forma diversa che non la comprenda. Per esempio, $q = xy - xz$ può essere riscritta come $q = x(y - z)$. Nella seconda forma l'incertezza δq può essere calcolata in passi senza pericolo di sovrastima.

zazione richiesta è

$$q(x + u, y + v) \approx q(x, y) + \frac{\partial q}{\partial x} u + \frac{\partial q}{\partial y} v, \quad (3.42)$$

dove u e v sono qualunque incremento piccolo in x e y , e $\partial q/\partial x$ e $\partial q/\partial y$ sono le cosiddette "derivate parziali" di q rispetto a x e a y . Cioè $\partial q/\partial x$ è il risultato della differenziazione di q rispetto a x mantenendo y fissato, e viceversa per $\partial q/\partial y$. (Per ulteriore discussione delle derivate parziali, vedi Problemi 3.16 e 3.17).

I valori probabili estremi per x e y sono $x_{\text{best}} \pm \delta x$ e $y_{\text{best}} \pm \delta y$. Se li inseriamo nella (3.42) e ricordiamo che $\partial q/\partial x$ e $\partial q/\partial y$ possono essere sia positivi che negativi, troviamo, per i valori estremi di q ,

$$q(x_{\text{best}}, y_{\text{best}}) \pm \left(\left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y \right). \quad (3.43)$$

Questo significa che l'errore in $q(x, y)$ è

$$\delta q \approx \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y. \quad (3.43)$$

Prima di discutere varie generalizzazioni di questa nuova regola, merita applicarla per riderivare alcuni casi familiari. Supponiamo, per esempio, che

$$q(x, y) = x + y; \quad (3.44)$$

cioè, q è proprio la somma di x e y . Le derivate parziali sono entrambe uno,

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = 1 \quad (3.45)$$

e così, secondo la (3.43),

$$\delta q \approx \delta x + \delta y \quad (3.46)$$

Questa è proprio la regola familiare che l'incertezza in $x + y$ è la somma delle incertezze in x e y .

Analogamente, se q è il prodotto $q = xy$, si può verificare che la (3.43) implica la regola familiare che l'errore relativo in q è la somma degli errori relativi in x e y (vedi Problema 3.18).

La regola in (3.43) può essere generalizzata in vari modi. Il lettore non sarà sorpreso di venire a sapere che quando le incertezze δx e δy sono indipendenti e casuali, la somma (3.43) può essere rimpiazzata da una somma in quadratura. Se la funzione q dipende da più di due variabili, allora semplicemente aggiungiamo un termine extra per ciascuna variabile extra. Questo ci porta alla seguente regola generale (la cui giustificazione più appropriata apparirà nei Capitoli 5 e 9).

Incertezza in una funzione di parecchie variabili

Supponiamo che x, \dots, z siano misurate con incertezze $\delta x, \dots, \delta z$, e i valori misurati utilizzati per calcolare la funzione $q(x, \dots, z)$. Se le incertezze in x, \dots, z sono indipendenti e casuali, allora l'incertezza in q è

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta z\right)^2} \quad (3.47)$$

In ogni caso, essa non è mai più grande della somma ordinaria

$$\delta q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \dots + \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right| \delta z \quad (3.48)$$

Forse il punto più utile di questa regola generale è che possiamo derivare da essa tutte le nostre precedenti regole per la propagazione degli errori (vedi Problema 3.18). L'uso diretto della regola generale è usualmente piuttosto scomodo in pratica, ed è solitamente più semplice, se possibile, procedere passo-passo utilizzando le nostre più semplici regole precedenti. Comunque, se la funzione $q(x, \dots, z)$ contiene qualche variabile più di una volta, allora ci possono essere errori che si compensano; se è così, un calcolo passo-passo può sovrastimare l'errore finale, ed è meglio calcolare δq in un passo usando la (3.47) o la (3.48) direttamente.

Problemi

Nota: Un asterisco accanto al numero del problema indica che il problema è discusso, oppure che è dato il suo risultato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

*3.1 (Sezione 3.1). Si chiede a due studenti di misurare il numero di particelle α emesse per unità di tempo da un certo campione di sostanza radioattiva. Lo studente A conta per due minuti, e osserva 32 particelle α ; lo studente B conta per un'ora, e osserva 786 particelle α . (Il campione decade così lentamente che il numero atteso di particelle emesse per unità di tempo può essere assunto costante durante le misure).

(a) Utilizzare l'Equazione (3.2) per calcolare l'incertezza nel risultato dello studente A, 32, per il numero di particelle emesso in due minuti.

(b) Qual è l'incertezza nel risultato dello studente B, 786, per il numero di particelle in un'ora?

(c) Ciascuno divide il suo conteggio per il numero di minuti per trovare il decadimento per minuto. Quali sono i loro risultati e le loro incertezze? (Sebbene l'incertezza nel numero di B sia più grande di quella nel numero di A, l'incertezza nel numero di particelle emesse in un minuto è molto più piccola che nel caso di A; cioè contando per un tempo più lungo, si ottiene un risultato più preciso per il numero di particelle emesse nell'unità di tempo, proprio come ci si aspetterebbe).

3.2 (Sezione 3.2). Uno studente esegue le seguenti misure:

$$\begin{aligned} a &= 5 \pm 1 \text{ cm;} \\ b &= 18 \pm 2 \text{ cm;} \\ c &= 12 \pm 1 \text{ cm;} \\ t &= 3.0 \pm 0.5 \text{ sec.;} \\ m &= 18 \pm 1 \text{ gm.} \end{aligned}$$

Utilizzando le regole in (3.4) e (3.8), calcolare le seguenti grandezze, con i loro errori ed i loro errori relativi: $a + b + c$, $a + b - c$, $4a$, $b/2$ (dove 4 e 2 non hanno errore), e mb/t .

*3.3 (Sezione 3.2). Utilizzando le regole in (3.4) e (3.8), calcolare i seguenti:

- $(5 \pm 1) + (8 \pm 2) - (10 \pm 4)$;
- $(5 \pm 1) \times (8 \pm 2)$;
- $(10 \pm 1)/(20 \pm 2)$;
- $2\pi(10 \pm 1)$.

In (d) i numeri 2 e π non hanno errore.

*3.4 (Sezione 3.2). Con un buon cronometro e un po' di pratica, si possono misurare intervalli di tempo che vanno da circa un secondo fino a molti minuti con un'incertezza di 0.1 sec. Supponiamo di voler trovare il periodo τ di un pendolo con $\tau \approx 0.5$ sec. Se misuriamo il tempo di una oscillazione, avremo un errore di circa il 20 percento; ma misurando il tempo di parecchie oscillazioni successive, possiamo fare molto meglio, come le seguenti domande illustrano. (a) Se misuriamo il tempo di cinque oscillazioni successive e otteniamo 2.4 ± 0.1 sec., qual è il nostro risultato finale per τ , con il suo errore assoluto e percentuale? [Ricordare la regola in (3.9)].

(b) Qual è il risultato se misuriamo 20 oscillazioni e otteniamo 9.4 ± 0.1 sec.?

(c) L'errore in τ potrebbe essere migliorato indefinitamente misurando il tempo di più e più oscillazioni?

3.5 (Sezione 3.2). Se t è stato trovato essere $t = 8.0 \pm 0.5$ sec., quali sono i valori e gli errori di t^2 , $1/t$, e $1/t^3$?

*3.6 (Sezione 3.2). Un visitatore di un castello medievale decide di misurare la profondità di un pozzo gettando un sasso e misurando il suo tempo di caduta. Trova che il tempo di caduta è $t = 3.0 \pm 0.5$ sec. Cosa conclude circa la profondità del pozzo?

3.7 (Sezione 3.2). Il teorema binomiale stabilisce che per qualunque numero n e qualsiasi x con $|x| < 1$,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

(a) Mostrare che se n è un intero positivo, questa serie infinita termina (cioè ha soltanto un numero finito di termini). Scrverla esplicitamente per il caso $n = 2$ e $n = 3$.

(b) Scrivere la serie binomiale per il caso $n = -1$. Questo dà una serie infinita per $1/(1+x)$; quando x è piccolo, i primi due termini di questa

serie infinita danno una buona approssimazione,

$$1/(1+x) \approx 1-x,$$

come stabilito in (3.6). Calcolare queste due espressioni per ciascuno dei valori $x = 0.5, 0.1, 0.01$, e per ognuno calcolare la percentuale per cui l'approssimazione $(1-x)$ differisce dal valore esatto $1/(1+x)$.

*3.8 (Sezione 3.3). Uno studente misura quattro lunghezze:

$$a = 50 \pm 5, \quad b = 30 \pm 3, \quad c = 40 \pm 1, \quad d = 7.8 \pm 0.3$$

(tutte in cm), e calcola le tre somme $a+b$, $a+c$, $a+d$. Trovare gli errori risultanti quando gli errori originari "non" sono indipendenti ("gli errori si sommano" come in (3.14)), e anche quando è noto che gli errori sono indipendenti e casuali ("gli errori si sommano in quadratura", come in (3.13)). Assumendo che gli errori occorrono con una sola cifra significativa, in quali casi il secondo errore (quello su b , c , o d) può essere completamente trascurato?

3.9 (Sezione 3.4). Ripetere il Problema 3.2 supponendo che tutte le incertezze siano indipendenti e casuali, cioè usando la somma in quadratura come nelle regole (3.16) e (3.18) per la propagazione degli errori⁹.

*3.10 (Sezione 3.5). Nella fisica nucleare l'energia di una particella subatomica può essere misurata in vari modi. Un modo è misurare quanto rapidamente una particella viene arrestata da un ostacolo come un pezzo di piombo, e quindi di utilizzare grafici pubblicati di energia in funzione del coefficiente di assorbimento. La Figura 3.7 mostra un tale grafico per i fotoni (particelle di

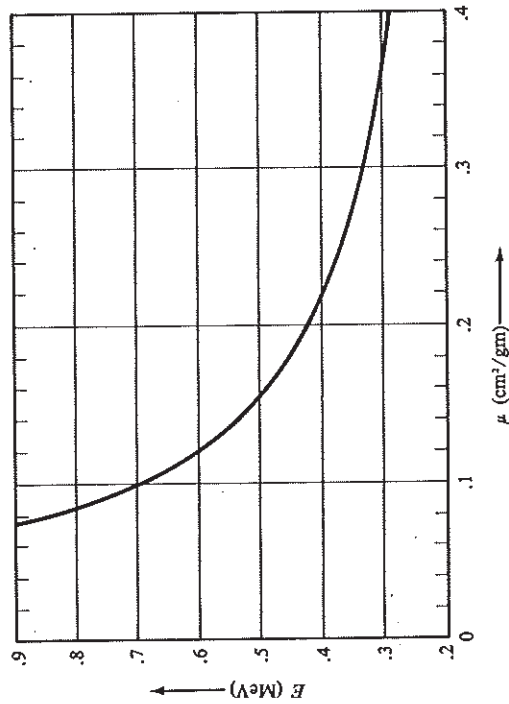


Figura 3.7. L'energia E in funzione del coefficiente di assorbimento μ per i fotoni nel piombo.

⁹ La somma in quadratura può spesso essere fatta a mente con sufficiente accuratezza. Quando si utilizza un calcolatore, notare che la conversione da coordinate rettangolari a polari calcola automaticamente $\sqrt{x^2 + y^2}$ per qualsiasi x e y dati.

luce) nel piombo. L'asse verticale riporta l'energia dei fotoni E in MeV (milioni di elettronvolts); e l'asse orizzontale riporta il coefficiente di assorbimento corrispondente μ in cm^2/gm . (Non occorre qui conoscere la definizione precisa di questo coefficiente; è semplicemente un'utile misura di quanto rapidamente il fotone è fermato nel piombo). Da questo grafico si può ovviamente trovare l'energia E di un fotone, una volta noto il suo coefficiente di assorbimento μ .

(a) Uno studente osserva un fascio di fotoni (tutti con la stessa energia) e trova che il loro coefficiente di assorbimento nel piombo è $\mu = 0.10 \pm 0.01$ cm^2/gm . Utilizzando il grafico, trovare qual è l'energia E dei fotoni e l'errore δE . (Può essere utile disegnare sul grafico le linee che congiungono i vari punti di interesse, come è stato fatto nella Figura 3.3).

(b) Quali conclusioni dovrebbe aver tratto lo studente se $\mu = 0.22 \pm 0.01$ cm^2/gm ?

*3.11 (Sezione 3.5).

(a) Un angolo θ è misurato come 125 ± 2 gradi, e il suo valore è utilizzato per calcolare $\sin \theta$. Usando la regola in (3.23), calcolare $\sin \theta$ e il suo errore.

(b) Se a è misurato come $a_{\text{ver}} \pm \delta a$, e questo valore è utilizzato per calcolare $f(a) = e^a$, quali sono f e δf ? Se $a = 3.0 \pm 0.1$, quali sono e^a ed il suo errore?

(c) Ripetere l'intera parte (b) per la funzione $f(a) = \ln a$.

3.12. (Sezione 3.6). Calcolare le seguenti grandezze in passi come descritto nella Sezione 3.6. (Assumere che tutti gli errori siano indipendenti e casuali).

- (a) $(12 \pm 1) \times [(25 \pm 3) - (10 \pm 1)]$
 (b) $\sqrt{16 \pm 4 + (3.0 \pm 0.1)^2}$ (2.0 ± 0.1)
 (c) $(20 \pm 2)e^{-(1.0 \pm 0.1)}$

3.13 (Sezione 3.7). Rivedere la discussione del pendolo semplice nella Sezione 3.7. In un esperimento reale, si dovrebbe misurare il periodo T per varie diverse lunghezze l , e quindi ottenere vari diversi valori di g per confronto. Con un piccolo sforzo, si possono organizzare tutti i dati e i calcoli in modo che essi appaiano in una singola conveniente tabella, come in Tabella 3.2. Utilizzando la Tabella 3.2 (o qualche altro arrangiamento che voi preferiate), calcolare g ed il suo errore δg per le quattro coppie di dati riportati. Commentare la variazione di δg quando l diventa più piccolo. (I risultati dati per la prima coppia di dati vi permetteranno di verificare il vostro metodo di calcolo).

Tabella 3.2. Trovare g con un pendolo.

l (cm)	T (sec)	g (cm/sec ²)	$\delta l/l$ (%)	$\delta T/T$ (%)	$\delta g/g$ (%)	risultato $g \pm \delta g$
± 1	$\pm .001$	980	.1	.05	.14	980 ± 1.4
93.8	1.944					
70.3	1.681					
45.7	1.358					
21.2	0.922					

*3.14. (Sezione 3.7). Rivedere la misura dell'indice di rifrazione del vetro nella Sezione 3.7. Utilizzando una tabella analoga alla Tabella 3.1, calcolare

l'indice di rifrazione n ed il suo errore relativo per i dati in Tabella 3.3. Commentare la variazione nell'errore. (Tutti gli angoli sono misurati in gradi; i è l'angolo di incidenza, r quello di rifrazione).

Tabella 3.3. Dati sull'indice di rifrazione (in gradi).

$i(\pm 1)$	10	20	30	50	70
$r(\pm 1)$	6	13	19	29	38

3.15. (Sezione 3.8). Rivedere l'esperimento della Sezione 3.8 nella quale un carrello rotola lungo un piano inclinato di pendenza θ .

(a) Se le ruote del carrello sono lisce e leggere, allora l'accelerazione attesa è $g \sin \theta$. Se θ è misurato come $\theta = 5.4 \pm 0.1$ gradi, qual è l'accelerazione attesa ed il suo errore?

Tabella 3.4. Esperimento sull'accelerazione⁽¹⁰⁾.

t_1 (sec)	t_2 (sec)	1	1	1	1	1	a
$\pm .001$	$\pm .001$	t_1^2	t_2^2	$\frac{1}{t_2^2}$	$\frac{1}{t_1^2}$	$\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}$	(cm/sec ²)
$.54 \pm 2\%$	$.031 \pm 3\%$	343 ± 14	1040 ± 62	698 ± 64	87 ± 8		
.038	.027						
.025	.020						

(b) Se l'esperimento è ripetuto, dando al carrello vari impulsi alla sommità del piano inclinato, allora, come al solito, i dati e tutti i calcoli possono essere riportati in una singola tabella, come in Tabella 3.4. Utilizzando l'Equazione (3.33) per l'accelerazione (e lo stesso valore $l^2/2s = 0.125 \text{ cm} \pm 2$ percento come prima), calcolare a e δa per i dati riportati. I risultati sono consistenti con l'attesa costanza di a , e con l'atteso valore $g \sin \theta$ della parte (a)? Varrebbe la pena spingere il carrello più forte per verificare la costanza di a a velocità ancora più elevate? Spiegare.

*3.16 (Sezione 3.9). La derivata parziale $\partial q/\partial x$ di $q(x, y)$ è ottenuta differenziando q rispetto a x mentre si suppone $y = \text{costante}$. Scrivere le derivate parziali $\partial q/\partial x$ e $\partial q/\partial y$ per le tre funzioni

- (a) $q(x, y) = x + y$,
 (b) $q(x, y) = xy$,
 (c) $q(x, y) = x^2 y^3$.

*3.17 (Sezione 3.9). L'approssimazione fondamentale utilizzata nella Sezione 3.9 mette in relazione il valore della funzione q nel punto $(x + u, y + v)$ a quello nel punto vicino (x, y) :

$$q(x + u, y + v) \approx q(x, y) + \frac{\partial q}{\partial x} u + \frac{\partial q}{\partial y} v \quad (3.49)$$

¹⁰ La prima riga di dati è quella già utilizzata nella Sezione 3.8. Le prime due colonne mostrano i tempi misurati t_1 e t_2 . L'incertezza in tutte queste misure è 0.001 sec, che può essere convertita immediatamente in un errore percentuale per ciascun tempo.

quando u e v sono piccoli. Verificare esplicitamente che questa è una buona approssimazione per le tre funzioni del Problema 3.16. Cioè, per ciascuna di queste tre funzioni, scrivere entrambi i membri dell'Equazione (3.49) esattamente, e mostrare che essi sono approssimativamente uguali quando u e v sono piccoli. Per esempio, se $q(x, y) = xy$, allora la parte sinistra dell'Equazione (3.49) è

$$(x + u)(y + v) = xy + uy + xv + uv$$

Come voi mostrerete, la parte destra della (3.49) è

$$xy + yu + xv.$$

Se u e v sono piccoli, allora uv può essere trascurato nella prima espressione, e le due espressioni sono approssimativamente uguali.

3.18 (Sezione 3.9)

(a) Per la funzione $q(x, y) = xy$, scrivere le derivate parziali $\partial q/\partial x$ e $\partial q/\partial y$. Supponiamo di misurare x e y con incertezza δx e δy , e quindi calcoliamo $q(x, y)$. Utilizzando le regole generali in (3.47) e (3.48), scrivere l'incertezza δq sia per il caso in cui δx e δy sono indipendenti e casuali, sia per quello in cui non lo sono. Dividere per $|q| = |xy|$, e far vedere che si ricavano le semplici regole (3.18) e (3.19) per l'errore relativo in un prodotto.

(b) Ripetere la parte (a) per la funzione $q(x, y) = x^2 y^m$, dove n ed m sono numeri noti, fissati.

(c) Cosa diventano le Equazioni (3.47) e (3.48) quando $q(x)$ dipende soltanto da una variabile?

*3.19 (Sezione 3.9). Se misuriamo tre grandezze indipendenti x, y, z , e calcoliamo una funzione come $q = (x + y)/(x + z)$, allora, come discusso all'inizio della Sezione 3.9, un calcolo passo-passo dell'incertezza in q può sovrastimare l'incertezza δq .

(a) Consideriamo i valori misurati $x = 20 \pm 1$, $y = 2$, $z = 0$; e, per semplicità, supponiamo che δy e δz siano trascurabili. Calcolare l'incertezza δq correttamente, utilizzando la regola generale in (3.47) e confrontare il risultato con quello che avreste ottenuto se avreste calcolato δq in passi.

(b) Fare lo stesso per i valori $x = 20 \pm 1$, $y = -40$, $z = 0$. Spiegare ogni differenza fra le parti (a) e (b).

4. Analisi statistica degli errori casuali

partire il cronometro, e così sottostimare il tempo di una rotazione, o possiamo ritardare di più nel fermarlo, e così sovrastimare il tempo. Dal momento che ciascuna possibilità è ugualmente probabile, il segno dell'effetto è "casuale". Se ripetiamo la misura parecchie volte, alcune volte sovrastimeremo ed alcune volte sottostimeremo. Così il nostro tempo di reazione variabile si manifesterà come una variazione dei risultati trovati. Analizzando lo sparpagliamento nei risultati statisticamente, possiamo ottenere una stima molto realistica di questo genere di errore.

D'altra parte, se il nostro cronometro marcia costantemente lento, allora tutti i nostri tempi saranno sottostimati, e la ripetizione delle misure (con lo stesso cronometro) non rivelerà questa sorgente di errore. Questo genere di errore è chiamato "sistemico", perché esso spinge i nostri risultati sempre nella stessa direzione. (Se il cronometro marcia lentamente, noi sottostimiamo sempre, se il cronometro marcia rapidamente, noi sovrastimiamo sempre). Gli errori sistematici non possono essere scoperti dal tipo di analisi statistica che stiamo trattando qui.

Come secondo esempio di errori casuali e sistematici, supponiamo di dover misurare qualche lunghezza ben definita con un righello. Una sorgente di incertezza sarà la necessità di interpolare tra le tacche della scala; e questa incertezza è probabilmente casuale. (Quando si interpola, abbiamo verosimilmente la stessa probabilità di sovrastimare come di sottostimare). Ma c'è anche la possibilità che il nostro righello si sia deformato; e questa sorgente di incertezza dovrebbe essere probabilmente sistematica. (Se il righello si è allungato, noi sottostimiamo sempre; se si è accorciato, noi sovrastimiamo sempre).

Proprio come in questi due esempi, praticamente tutte le misure sono soggette sia ad incertezze casuali che sistematiche. Non dovrete avere difficoltà a trovare altri esempi. In particolare, notate che le comuni sorgenti di incertezze casuali sono piccoli errori di giudizio dell'osservatore (come quando si interpola), piccoli disturbi dell'apparato (come vibrazioni meccaniche), problemi di definizione, e parecchi altri. Forse la causa più ovvia di errore sistematico è l'errata calibrazione degli strumenti, come il cronometro che marcia lento, il regolo che si è allungato, o uno strumento che è azzerato impropriamente.

La distinzione fra errori casuali e sistematici non è sempre netta. Per esempio, se muovete la testa da un lato all'altro mentre siete di fronte ad un certo strumento (come un orologio ordinario), la lettura sull'orologio cambia. Questo effetto è chiamato "parallasse", e significa che uno strumento può essere letto correttamente soltanto se vi mettete esattamente di fronte ad esso. Anche se voi siete uno sperimentatore accurato, non potete sempre posizionare i vostri occhi "esattamente" di fronte allo strumento; di conseguenza le vostre misure avranno una piccola incertezza dovuta alla parallasse, e questa incertezza sarà probabilmente casuale. D'altra parte, uno sperimentatore non accurato che pone uno strumento da un lato della sua sedia e dimentica di preoccuparsi della parallasse, introdurrà un errore sistematico in tutte le sue letture. Così lo stesso effetto, parallasse, può produrre incertezze casuali in un caso, e incertezze sistematiche in un altro.

La trattazione degli errori casuali è del tutto diversa da quella degli errori sistematici. I metodi statistici descritti nelle seguenti sezioni danno una stima realistica delle incertezze casuali, e, come vedremo, forniscono un procedimento ben definito per ridurle. D'altra parte, le incertezze sistematiche sono difficili da valutare, ed anche da rivelare. Lo scienziato esperto deve imparare a prevenire le possibili sorgenti di errore sistematico, e ad accertarsi che tutti gli errori sistematici siano molto minori della precisione richiesta. Comportarsi

Abbiamo visto che uno dei nostri modi migliori di valutare l'affidabilità di una misura è di ripeterla parecchie volte e di esaminare i diversi valori ottenuti. In questo capitolo e nel Capitolo 5 descriviamo i metodi statistici per analizzare le misure in questo modo.

Come già accennato, non tutti i tipi di incertezze sperimentali possono essere valutate da un'analisi statistica basata su misure ripetute. Per questa ragione gli errori sono classificati in due gruppi: gli errori "casuali", che "possono" essere trattati statisticamente; e gli errori "sistematici", che non possono. Questa distinzione è descritta nella Sezione 4.1. Per la maggior parte di questo capitolo, noi limitiamo la nostra attenzione agli errori casuali. Nella Sezione 4.2 introduciamo, senza giustificazione formale, due importanti definizioni riferite ad una serie di valori misurati x_1, \dots, x_N , di una qualche singola grandezza x . In primo luogo definiamo la "media" \bar{x} di x_1, \dots, x_N . Sotto opportune condizioni, la media \bar{x} è la miglior stima di x basata sui valori misurati x_1, \dots, x_N . In seguito definiamo la "deviazione standard" di x_1, \dots, x_N . Essa è denotata σ_x , e caratterizza l'incertezza media nei singoli valori misurati x_1, \dots, x_N . Nella Sezione 4.3 diamo un esempio dell'uso della deviazione standard.

Nella Sezione 4.4 introduciamo l'importante nozione di "deviazione standard della media". Essa è denotata $\sigma_{\bar{x}}$ e caratterizza l'incertezza nella media \bar{x} assunta come la miglior stima per x . Nella Sezione 4.5 diamo alcuni esempi della deviazione standard della media. Infine, nella Sezione 4.6 torniamo allo spinoso problema degli errori sistematici.

In nessun punto in questo capitolo tentiamo di dare una giustificazione completa dei metodi descritti. Il nostro principale scopo è di introdurre le formule fondamentali e di descrivere come esse sono utilizzate. Nel Capitolo 5 daremo giustificazioni più appropriate, basate sull'importante idea della curva di distribuzione normale.

4.1. Errori casuali e sistematici

Le incertezze sperimentali che possono essere rivelate ripetendo le misure sono chiamate errori "casuali"; quelle che non possono essere rivelate in questo modo sono chiamate errori "sistematici". Per illustrare questa distinzione, consideriamo alcuni esempi. Supponiamo in primo luogo di misurare il periodo di rotazione del piatto di un giradischi che ruota in modo stazionario. Una sorgente di errore sarà il nostro tempo di reazione nel far partire e nel fermare il cronometro. Se il nostro tempo di reazione fosse sempre esattamente lo stesso, questi due ritardi si cancellerebbero l'un l'altro. In pratica, comunque, il nostro tempo di reazione varierà. Possiamo ritardare di più nel far

così richiederà, per esempio, di confrontare gli strumenti con gli standard accettati, e correggerli o comprarne di migliori se necessario. Sfortunatamente, nei primi corsi di laboratorio di fisica, tali verifiche sono possibili raramente; così la trattazione degli errori sistematici è spesso rozza. Discuteremo ciò più avanti, nella Sezione 4.6. Per ora tratteremo esperimenti nei quali tutte le sorgenti di errore sistematico sono state identificate e rese più piccole della precisione richiesta.

4.2. La media e la deviazione standard

Supponiamo di dover misurare qualche grandezza x , e di aver identificato tutte le sorgenti di errore sistematico e di averle ridotte ad un livello trascurabile. Dal momento che tutte le sorgenti restanti di incertezza sono casuali, dovremmo essere capaci di rivelarle ripetendo la misura parecchie volte. Potremmo, per esempio, fare la misura cinque volte e trovare i risultati

$$71, 72, 72, 73, 71 \quad (4.1)$$

(dove, per convenienza, abbiamo ommesso qualsiasi unità).

La prima domanda che ci poniamo è la seguente: dati i cinque valori misurati (4.1), cosa dovremmo prendere come la nostra migliore stima x_{best} della grandezza x ? Sembra ragionevole che la nostra miglior stima sia la "media" \bar{x} dei cinque valori trovati, e nel Capitolo 5 proveremo che questo è usualmente vero. Cioè

$$\begin{aligned} x_{best} &= \bar{x} \\ &= \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} \\ &= 71.8 \end{aligned} \quad (4.2)$$

In questo caso la seconda linea è semplicemente la definizione della media \bar{x} per i numeri in questione⁽¹⁾.

Più generalmente supponiamo di fare N misure della grandezza x (utilizzando sempre lo stesso apparato e la stessa procedura), e troviamo N valori

$$x_1, x_2, \dots, x_N \quad (4.3)$$

Di nuovo, la miglior stima per x è solitamente la media di x_1, \dots, x_N . Cioè

$$x_{best} = \bar{x}, \quad (4.4)$$

¹ In quest'epoca di calcolatori tascabili, merita forse puntualizzare che una media come la (4.2) si calcola facilmente a mente. Dal momento che tutti i numeri contengono il settanta, lo stesso deve essere vero per la media. Tutto ciò che resta da fare è far la media dei numeri 1, 2, 2, 3, 1 che risulta ovviamente $\frac{9}{5} = 1.8$, e il nostro risultato è $x = 71.8$.

dove

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nell'ultima linea abbiamo introdotto l'utile notazione sigma, secondo cui

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_i x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N,$$

la seconda e terza espressione sono abbreviazioni comuni, che useremo quando non vi è rischio di far confusione.

Il concetto di media è certamente familiare alla maggior parte dei lettori. Il nostro concetto successivo, quello di "deviazione standard" è probabilmente meno noto. La deviazione standard delle misure x_1, \dots, x_N è una stima della "incertezza media delle misure x_1, \dots, x_N ", ed è ottenuta come segue.

Tabella 4.1. Calcolo delle deviazioni.

Numero della prova, i	Valore misurato, x_i	Deviazione $d_i = x_i - \bar{x}$
1	71	-0.8
2	72	0.2
3	72	0.2
4	73	1.2
5	71	-0.8
	$\bar{x} = 71.8$	$\bar{d} = 0.0$

Dato che la media \bar{x} è la nostra miglior stima della grandezza x , è naturale considerare la differenza $x_i - \bar{x} = d_i$. Questa differenza, spesso chiamata la "deviazione" (o residuo) di x_i da \bar{x} , si dice "quanto la misura x_i differisce dalla media \bar{x} ". Se le deviazioni $d_i = x_i - \bar{x}$ sono tutte molto piccole, allora le nostre misure sono tutte vicine fra loro, e sono presumibilmente molto precise. Se alcune delle deviazioni sono grandi, allora le nostre misure non sono ovviamente molto precise.

Per essere sicuri di capire il significato della deviazione, calcoliamo le deviazioni per l'insieme delle cinque misure riportato in (4.1). Esse possono essere elencate come mostrato in Tabella (4.1). Notiamo che le deviazioni non sono (ovviamente) tutte della stessa grandezza; d_i è piccolo se succede che la misura x_i è vicina a \bar{x} , ma d_i è grande se x_i è lontano da \bar{x} . Notiamo anche che alcuni dei d_i sono positivi e alcuni negativi, dal momento che alcuni degli x_i sono più grandi della media \bar{x} , ed alcuni sono più piccoli.

Per stimare l'attendibilità media delle misure x_1, \dots, x_5 , potremmo naturalmente provare a fare la media delle deviazioni d_i . Sfortunatamente, come un'occhiata alla Tabella (4.1) ci mostra, la media delle deviazioni è zero. Di fatto, questo sarà vero per qualsiasi insieme di misure x_1, \dots, x_N , dal momento

che la definizione di media \bar{x} assicura che $d_i = x_i - \bar{x}$ è talvolta positivo e talvolta negativo, in modo tale che $\bar{d} = 0$ (vedi Problema 4.3). Ovviamente, allora, la media delle deviazioni non è un modo utile di caratterizzare l'attendibilità delle misure x_1, \dots, x_N .

Il modo migliore di evitare questo inconveniente, è di "elevare al quadrato" tutte le deviazioni, che formeranno un insieme di numeri "positivi", e poi mediare questi numeri². Se noi facciamo la radice quadrata del risultato, otteniamo una grandezza con le stesse unità di x stesso. Questo numero è chiamato la "deviazione standard" di x_1, \dots, x_N , ed è denotato σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4.6)$$

Con questa definizione, la deviazione standard può essere descritta come la deviazione "quadratica media" (o R.M.S.) delle misure x_1, \dots, x_N . Essa si rivela un utile modo di caratterizzare l'affidabilità delle misure. (Come discuteremo brevemente, la definizione (4.6) viene talvolta modificata rimpiazzando il denominatore N con $N-1$).

Per calcolare la deviazione standard σ_x come definito dalla (4.6), dobbiamo calcolare le deviazioni d_i , elevarle al quadrato, mediare questi quadrati, e poi estrarre la radice quadrata del risultato. Per le cinque misure di Tabella 4.1, potremmo calcolare σ_x come in Tabella 4.2.

Tabella 4.2. Calcolo della deviazione standard.

Numero della prova, i	Valore misurato, x_i	Deviazione $d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
1	71	-.8	.64
2	72	.2	.04
3	72	.2	.04
4	73	1.2	1.44
5	71	-.8	.64
	$\bar{x} = 71.8$		$\sum d_i^2 = 2.80$

Sommando i numeri d_i^2 nella quarta colonna di Tabella 4.2 e dividendo per 5, otteniamo la grandezza σ_x^2 (spesso chiamata la "varianza" delle misure),

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum d_i^2 = \frac{2.80}{5} = 0.56 \quad (4.7)$$

Estraendo la radice quadrata, troviamo la deviazione standard

$$\sigma_x \approx 0.7 \quad (4.8)$$

Così l'incertezza media delle cinque misure 71, 72, 72, 73, 71 è circa 0.7.

Sfortunatamente, c'è una definizione alternativa della deviazione standard.

² Un'altra possibilità sarebbe di prendere i valori assoluti $|d_i|$ e mediarli; ma la media di d_i^2 si rivela essere molto più utile. La media di $|d_i|$ è talvolta (impropriamente) chiamata la "deviazione media".

Ci sono argomenti teorici per rimpiazzare il fattore N (in 4.6) con $(N-1)$ e definire la deviazione standard σ_x di x_1, \dots, x_N come

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.9)$$

Non tenteremo qui di dimostrare che la definizione (4.9) di σ_x è migliore della (4.6), eccetto che per dire che la nuova definizione "migliorata" è ovviamente un po' più grande della vecchia (4.6), e questo corregge una tendenza della (4.6) a sottostimare l'incertezza nelle misure x_1, \dots, x_N , specialmente se il numero di misure N è piccolo. Si può capire questa tendenza considerando il caso estremo (ed assurdo) in cui $N = 1$ (cioè, facciamo soltanto una misura). In questo caso la media \bar{x} è uguale alla nostra unica lettura x_1 , e l'unica deviazione è automaticamente zero. Allora la definizione (4.6) dà il risultato assurdo $\sigma_x = 0$. D'altra parte, la definizione (4.9) dà 0/0; cioè con la definizione (4.9), σ_x non è definito, il che rispecchia correttamente la nostra totale ignoranza della incertezza dopo una sola misura. La definizione (4.6) è talvolta chiamata "deviazione standard della popolazione", e (4.9) "deviazione standard del campione".

La differenza fra le due definizioni (4.6) e (4.9) è quasi sempre numericamente insignificante. Si dovrebbe sempre ripetere una misura molte volte (almeno cinque, e preferibilmente molte di più). Anche se facciamo soltanto cinque misure ($N = 5$), la differenza fra $\sqrt{N} = 2.2$ e $\sqrt{N-1} = 2$, è per la maggior parte degli scopi, insignificante. Per esempio, se ricalcoliamo la deviazione standard (4.8) utilizzando la definizione "migliorata" (4.9), otteniamo $\sigma_x = 0.8$ invece di 0.7, una differenza non molto importante. Nondimeno, occorre sapere che esistono entrambe le definizioni. È probabilmente sempre meglio usare la definizione più prudente (cioè più grande) (4.9), ma, in ogni caso, in una relazione di laboratorio si dovrebbe sempre riportare chiaramente quale definizione è stata usata, in modo che il lettore possa verificare i calcoli.

4.3. La deviazione standard come l'incertezza in una singola misura

Abbiamo detto che la deviazione standard σ_x caratterizza l'incertezza media delle misure x_1, \dots, x_N da cui è stata calcolata. Nel Capitolo 5 giustificheremo ciò, dimostrando la seguente più precisa affermazione. Se le nostre misure sono distribuite normalmente, e se noi ripetessimo la nostra misura di x molte volte in più (sempre usando lo stesso apparato sperimentale), allora circa il 70 per cento delle nostre misure³ giacerebbe all'interno di una distanza σ_x da entrambi i lati di \bar{x} ; cioè il 70 per cento delle nostre misure dovrebbe trovarsi nell'intervallo $\bar{x} \pm \sigma_x$.

Possiamo riscrivere questo risultato come segue. Supponiamo, come prima, di ottenere i valori x_1, \dots, x_N e di calcolare \bar{x} e σ_x . Se poi facciamo un'altra misura (usando lo stesso apparato), vi è una "probabilità" del 70 per cento che la nuova misura si trovi entro σ_x da \bar{x} . Ora, se il numero originale N di misure

³ Come vedremo, il numero esatto è 68.72 ... per cento, ma è ovviamente assurdo definire questo tipo di numero così precisamente.

era grande, allora \bar{x} dovrebbe essere una stima molto affidabile del valore vero di x . Possiamo allora dire che "vi è un 70 per cento di probabilità che una singola misura (effettuata con la stessa apparecchiatura) differisca meno di σ_x dal valore vero". Chiaramente σ_x ha lo stesso significato che abbiamo usato per il termine "incertezza" nei capitoli precedenti. Se facciamo una misura di x usando questo apparato, allora l'incertezza associata con questa misura può essere presa come $\delta x = \sigma_x$; e con questa scelta noi siamo sicuri al 70 per cento che la nostra misura è entro δx del risultato corretto.

Per illustrare l'applicazione di questi concetti, supponiamo che ci venga data una scatola piena di molle simili e che ci si chieda di misurare le loro costanti k . Potremmo misurare tali costanti caricando ciascuna molla ed osservando l'allungamento risultante o, forse meglio, appendendo una massa a ciascuna molla e misurando il tempo delle sue oscillazioni. Qualunque metodo abbiamo scelto, dobbiamo determinare k e la sua incertezza δk per ciascuna molla, ma sarebbe irrimediabilmente dispersivo ripetere le nostre misure molte volte per ciascuna molla. Invece ragioniamo come segue. Se misuriamo k per la prima molla parecchie volte (diciamo 10 o 20), allora la media di queste misure dovrebbe dare una buona stima di k per la prima molla. Più importante in questo caso, la deviazione standard σ_k di queste 10 o 20 misure ci fornisce una stima dell'incertezza nel nostro metodo per la misura di k . Ammesso che le nostre molle siano tutte ragionevolmente simili e che usiamo lo stesso metodo per misurare ciascuna, possiamo ragionevolmente aspettarci la stessa incertezza in ogni misura (*). Così per ogni molla successiva dobbiamo fare soltanto una misura, e possiamo immediatamente affermare che l'incertezza δk è la deviazione standard σ_k misurata per la prima molla, con un 70 per cento di confidenza che il nostro risultato sia entro σ_k del valore corretto.

Per illustrare questi concetti numericamente, possiamo immaginare di fare 10 misure sulla prima molla e di ottenere i seguenti valori misurati di k (in newtons/metro):

$$86, 85, 84, 89, 86, 88, 88, 85, 83, 85 \quad (4.10)$$

Da questi possiamo immediatamente calcolare $\bar{k} = 85.9 \text{ N/m}$ e, usando la definizione (4.9),

$$\sigma_k = 1.9 \text{ N/m} \quad (4.11)$$

$$\approx 2 \text{ N/m} \quad (4.12)$$

L'incertezza in una qualunque delle misure di k è allora circa 2 N/m . Se ora misuriamo la seconda molla e otteniamo il risultato $k = 71 \text{ N/m}$, possiamo senza ulteriore sforzo assumere $\delta k = \sigma_k = 2 \text{ N/m}$, e affermare con il 70 per cento di confidenza che k giace nell'intervallo

$$k \text{ per la seconda molla} = 71 \pm 2 \text{ N/m} \quad (4.13)$$

4.4. La deviazione standard della media

Se x_1, \dots, x_N sono i risultati di N misure della stessa grandezza x , allora, come abbiamo visto, la nostra miglior stima per la grandezza x è la loro media, \bar{x} .

* Se alcune molle sono molto diverse dalla prima, allora la nostra incertezza nel misurarle sarebbe diversa. Così se le molle differiscono, dobbiamo verificare la nostra incertezza facendo molte misure per ciascuna delle molle differenti.

Abbiamo anche visto che la deviazione standard σ_x caratterizza l'incertezza media delle singole misure x_1, \dots, x_N . Comunque il nostro risultato $x_{\text{best}} = \bar{x}$ rappresenta una combinazione giudiziosa di tutte le N misure, e vi è motivo di pensare che esso sarà più affidabile di qualunque altra delle misure considerate separatamente. Nel Capitolo 5 dimostreremo che ciò è vero; l'incertezza nel risultato finale $x_{\text{best}} = \bar{x}$ risulta essere la deviazione standard $\sigma_{\bar{x}}$ "divisa per \sqrt{N} ". Questa grandezza è chiamata "la deviazione standard della media", ed è denotata $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N} \quad (4.14)$$

(Altri nomi comuni per questa grandezza sono "errore standard" e "errore standard della media"). Così, basandoci sugli N valori misurati x_1, \dots, x_N , possiamo stabilire il nostro risultato finale per il valore di x come

$$(\text{valore di } x) = x_{\text{best}} \pm \delta x$$

dove $x_{\text{best}} = \bar{x}$, la media di x_1, \dots, x_N , e δx è la deviazione standard della media,

$$\delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N} \quad (4.15)$$

Come esempio, consideriamo le dieci misure riportate in (4.10). Esse erano le dieci misure della costante k di una molla. Come già abbiamo visto, la media di questi valori è $\bar{k} = 85.9 \text{ N/m}$ e la deviazione standard è $\sigma_k = 1.9 \text{ N/m}$. Allora la deviazione standard della media è

$$\sigma_{\bar{k}} = \sigma_k / \sqrt{10} = 0.6 \text{ N/m} \quad (4.16)$$

e il nostro risultato finale, basato su queste dieci misure, dovrebbe essere che la molla ha

$$k = 85.9 \pm 0.6 \text{ newtons/metro} \quad (4.17)$$

Quando date un risultato come questo, è importante stabilire chiaramente cosa sono i numeri - cioè la media e la deviazione standard della media - in modo che il lettore sia in grado di giudicare il loro significato.

Un punto importante della deviazione standard della media, $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$, è il fattore \sqrt{N} nel denominatore. La deviazione standard σ_x rappresenta l'incertezza media nelle singole misure x_1, \dots, x_N . Così se noi dovessimo fare alcune misure in più (usando la stessa tecnica) la deviazione standard σ_x non cambierebbe apprezzabilmente. D'altra parte, la deviazione standard della media, $\sigma_{\bar{x}} / \sqrt{N}$, dovrebbe diminuire lentamente quando aumentiamo N . Questo è proprio ciò che dovremmo aspettarci. Se facciamo più misure prima di calcolare una media, dovremmo naturalmente aspettarci che il risultato sia più affidabile, e questo è proprio ciò che il denominatore \sqrt{N} in (4.15) garantisce. Ciò fornisce un modo ovvio di migliorare la precisione delle vostre misure.

Sfortunatamente, il fattore \sqrt{N} cresce piuttosto lentamente all'aumentare di N . Per esempio, se volessimo migliorare la nostra precisione di un fattore 10 semplicemente aumentando il numero di misure N , dovremo aumentare N di un fattore 100 - una prospettiva scoraggiante, come minimo! Inoltre per il

momento stiamo trascurando gli errori sistematici, ed essi "non" si riducono all'aumentare del numero di misure. Così, in pratica, se volete migliorare la vostra precisione apprezzabilmente, probabilmente dovrete migliorare la vostra tecnica piuttosto che fare assegnamento semplicemente sull'aumento del numero di misure.

4.5. Esempi

Come una prima, semplice applicazione della deviazione standard della media, immaginiamo di dover misurare molto accuratamente l'area A di un piatto rettangolare di circa $2.5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Dapprima ci procuriamo il miglior strumento di misura disponibile, che potrebbe essere un calibro, poi facciamo parecchie misure della lunghezza l e della larghezza b del piatto. Per tener conto delle irregolarità dei lati, facciamo le nostre misure in parecchie posizioni diverse, e per tener conto dei piccoli difetti dello strumento, usiamo parecchi calibri diversi (se disponibili). Potremmo fare dieci misure ciascuno di l e b , e ottenere i risultati riportati in Tabella 4.3.

Tabella 4.3. Lunghezza e larghezza (in mm).

	Valori misurati	Media	SD	SDOM
l	24.25, 24.26, 24.22, 24.28, 24.24 24.25, 24.22, 24.26, 24.23, 24.24	$\bar{l} = 24.245$	$\sigma_l = .019$	$\sigma_T = .006$
b	50.36, 50.35, 50.41, 50.37, 50.36 50.32, 50.39, 50.38, 50.36, 50.38	$\bar{b} = 50.368$	$\sigma_b = .024$	$\sigma_F = .008$

Usando i dieci valori osservati di l , possiamo rapidamente calcolare la media \bar{l} , la deviazione standard σ_l , e la deviazione standard della media σ_T , come riportato nelle colonne intestate media, SD, e SDOM. Nello stesso modo possiamo calcolare \bar{b} , σ_b e σ_F . Prima di fare qualunque ulteriore calcolo, si dovrebbero esaminare questi risultati per vedere se appaiono ragionevoli. Per esempio le due deviazioni standard σ_l e σ_b si suppone che siano l'incertezza media nelle misure di l e di b . Dal momento che l e b sono state misurate esattamente nello stesso modo, sarebbe piuttosto sorprendente se σ_l e σ_b differissero significativamente l'una dall'altra, o da quella che noi giudichiamo essere un'incertezza ragionevole per le misure.

Dopo che ci siamo convinti che i risultati sono ragionevoli, possiamo finire rapidamente i nostri calcoli. La nostra miglior stima per la lunghezza è la media \bar{l} e la nostra incertezza è σ_T ; così il nostro valore finale per l è

$$l = 24.245 \pm 0.006 \text{ mm (o } 0.025\%),$$

il numero fra parentesi essendo l'errore relativo. Analogamente, il nostro valore per b è

$$b = 50.368 \pm 0.008 \text{ mm (o } 0.016\%).$$

Infine la nostra migliore stima per l'area $A = lb$ è il prodotto di questi valori, con un errore relativo dato dalla somma quadratica di quelli in l e in b

(assumendo che gli errori siano indipendenti):

$$\begin{aligned} A &= (24.245 \text{ mm} \pm 0.025\%) \times (50.368 \text{ mm} \pm 0.016\%) \\ &= 1221.17 \text{ mm}^2 \pm 0.03\% \\ &= 1221.17 \pm 0.4 \text{ mm}^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Per arrivare al risultato (4.18) per A , abbiamo calcolato le medie \bar{l} e \bar{b} , ciascuna con un'incertezza uguale alla deviazione standard della sua media. Abbiamo poi calcolato l'area A come il prodotto di \bar{l} e \bar{b} , e abbiamo trovato l'incertezza con la propagazione degli errori. Potremmo aver proceduto in maniera differente. Per esempio, potremmo aver moltiplicato il primo valore misurato di l con il primo valore di b per ottenere un primo risultato per A . Continuando in questo modo potremmo aver calcolato dieci risultati per A , e poi aver sottoposto questi dieci risultati all'analisi statistica, calcolando \bar{A} , σ_A , e infine σ_T . Comunque se gli errori in l e in b sono indipendenti e casuali, e se facciamo abbastanza misure, questo procedimento alternativo produrrà lo stesso risultato del primo (5) (può essere mostrato).

Come secondo esempio, consideriamo un caso in cui non si può convenientemente applicare un'analisi statistica alle misure dirette, ma si può farlo ai risultati finali. Supponiamo di voler misurare la costante k di una molla misurando i tempi delle oscillazioni di una massa m fissata alla sua estremità. È ben noto dalla meccanica elementare che il periodo di tali oscillazioni è $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Così misurando T ed m possiamo ricavare k come

$$k = 4\pi^2 m/T^2 \quad (4.19)$$

Il modo più semplice di trovare k è di prendere una singola massa m accuratamente nota, e fare parecchie misure accurate di T . Comunque per varie ragioni può essere più interessante misurare T per varie "differenti" masse m . (Per esempio, in questo modo potremmo verificare che $T \propto \sqrt{m}$, come pure misurare k). Potremmo allora ottenere un insieme di letture come quelle nelle prime due linee di Tabella 4.4.

Tabella 4.4. Misura della costante k di una molla.

massa m (kg)	.513	.581	.634	.691	.752	.834	.901	.950
periodo T (sec)	1.24	1.33	1.36	1.44	1.50	1.59	1.65	1.69
$k = 4\pi^2 m/T^2$	13.17	12.97	etc.					

Ovviamente non ha senso mediare le varie masse differenti nella linea in alto (né i tempi nella seconda linea), dal momento che essi "non" sono misure differenti della stessa grandezza. Né possiamo imparare qualcosa circa l'incertezza nelle nostre misure confrontando i diversi valori di m . D'altra parte possiamo combinare ciascun valore di m con il suo corrispondente periodo T e calcolare k , come nella linea finale della Tabella 4.4. I nostri risultati per k "sono" tutte misure della stessa grandezza, e così possono essere soggette ad analisi statistica. In particolare la nostra miglior stima per k è la media, $k = 13.16 \text{ N/m}$, e la nostra incertezza è la deviazione standard della media.

⁵ Vi è una certa illogicità nella seconda procedura, dal momento che non vi è particolare motivo di associare la prima misura di l con la prima misura di b . Potremmo invece aver misurato l otto volte e b 12 volte; allora non potremmo accoppiare i valori. Così il nostro primo procedimento è logicamente preferibile.

$\sigma_T = 0.06 N/m$ (vedi Problema 4.12). Così il risultato finale, basato sui dati di Tabella 4.4, è

$$\text{costante della molla } k = 13.16 \pm 0.06 N/m \quad (4.20)$$

Se avessimo preso delle stime ragionevoli delle incertezze nelle nostre misure originali di m e di T , potremmo anche aver stimato l'incertezza in k utilizzando la propagazione degli errori, partendo da queste stime per δm e δT . In questo caso, sarebbe una buona idea confrontare le incertezze finali in k ottenute con i due metodi.

4.6. Errori sistematici

Nelle ultime sezioni, abbiamo preso per garantito che tutti gli errori sistematici fossero stati ridotti ad un livello trascurabile, prima di aver iniziato misure serie. Qui affrontiamo di nuovo la spiacevole possibilità che vi siano errori sistematici apprezzabili. Nell'esempio ora discusso, potremmo aver misurato m con una bilancia che legga consistentemente alto o basso, oppure il nostro cronometro può avere una marcia consistentemente veloce o lenta. Nessuno di questi errori sistematici si evidenzierà nel confronto dei nostri vari risultati per la costante della molla k . Come risultato, la deviazione standard della media, σ_k , può essere vista come la "componente casuale" $\delta k_{casuale}$ dell'incertezza δk , ma essa non è certamente l'incertezza totale, δk . Il nostro problema è di decidere come stimare "la componente sistematica" $\delta k_{sistematica}$ e quindi come combinare $\delta k_{casuale}$ e $\delta k_{sistematica}$ per ottenere l'incertezza completa δk .

Non vi è una semplice teoria che ci dica cosa dobbiamo fare circa gli errori sistematici. In realtà, l'unica teoria degli errori sistematici è che essi devono essere identificati e ridotti fino a diventare molto minori della precisione richiesta. Comunque in un corso di laboratorio questo è spesso impossibile per spesso impossibile confrontare uno strumento con un altro migliore per correggerlo, e a maggior ragione comprare un nuovo strumento per rimpiazzarne uno inadeguato. Per questa ragione in alcuni corsi di laboratorio, si stabilisce una regola che, in assenza di informazioni più specifiche, si dovrebbe considerare che gli strumenti abbiano qualche definita incertezza sistematica. Per esempio si potrebbe decidere che tutti i cronometri abbiano una incertezza sistematica fino a 0.5 percento, tutte le bilance fino all'1 percento, tutti i voltmetri e amperometri fino al 3 percento, e così via.

Date regole di questo genere, ci sono vari modi possibili di procedere. Nessuno di questi può in realtà essere giustificato rigorosamente, e noi descriviamo qui un possibile approccio. Nell'ultimo esempio in Sezione 4.5, la costante k della molla $k = 4\pi^2 m/T^2$ fu trovata misurando una serie di valori di m ed i corrispondenti valori di T . Come già ricordato, un'analisi statistica di vari risultati per k fornisce la componente casuale di δk come

$$\delta k_{casuale} = \sigma_k = 0.06 N/m \quad (4.21)$$

Supponiamo ora che ci sia stato detto che la bilancia usata per misurare m e l'orologio per T abbiano incertezze sistematiche fino all'1 percento e 0.5 percento rispettivamente. Possiamo allora ricavare la componente sistematica di δk con la propagazione degli errori, essendo l'unico dubbio se combinare gli errori in quadratura o direttamente. Dal momento che gli errori in m e T sono sicuramente indipendenti, e qualche cancellazione è allora possibile, è proba-

bilmente ragionevole usare la somma quadratica per ottenere (6)

$$\frac{\delta k_{sistematico}}{k} = \sqrt{\left(\frac{\delta m_{sistematico}}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T_{sistematico}}{T}\right)^2} \quad (4.22)$$

$$= \sqrt{1 + 1} \% = 1.4\% \quad (4.23)$$

e quindi

$$\delta k_{sistematico} = (13.16 N/m) \times 0.014 = 0.18 N/m \quad (4.24)$$

Dal momento che ora abbiamo la stima sia per la componente casuale che per quella sistematica di δk , l'unico problema restante è di combinarle per ottenere δk stesso. Si può arguire che esse dovrebbero essere combinate in quadratura, per ottenere l'incertezza totale

$$\delta k = \sqrt{(\delta k_{casuale})^2 + (\delta k_{sistematico})^2} \quad (4.25)$$

$$= \sqrt{(0.06)^2 + (0.18)^2} \approx 0.2 N/m \quad (4.26)$$

In questo esempio le incertezze sistematiche dominano completamente quelle casuali.

L'espressione (4.25) per δk non può in realtà essere giustificata rigorosamente. Né il significato del risultato è chiaro; per esempio, probabilmente non possiamo affermare di avere il 70 percento di confidenza che il vero risultato giaccia nell'intervallo $k \pm \delta k$. Nondimeno, l'espressione fornisce almeno una stima ragionevole della nostra incertezza totale, dato che il nostro apparato sperimentale ha incertezze sistematiche che non siamo capaci di eliminare. In particolare, vi è un aspetto importante rispetto al quale il risultato (4.25) è realistico ed istruttivo. Abbiamo visto nella Sezione 4.4 che la deviazione standard della media σ_T si approssima a zero al crescere del numero N delle misure. Questo risultato suggeriva che, se si ha la pazienza di fare un numero enorme di misure, si possono ridurre le incertezze indefinitamente, senza dovere migliorare l'apparato sperimentale o la tecnica. Vediamo ora che ciò non è realmente vero. Aumentando N possiamo ridurre la componente "casuale" $\delta k_{casuale} = \sigma_k$ indefinitamente. Ma ogni apparato sperimentale ha "qualche" incertezza sistematica, che "non" viene ridotta all'aumentare di N . È chiaro dalla (4.25) che si guadagna poco da un'ulteriore riduzione di $\delta k_{casuale}$ dato che $\delta k_{casuale}$ è più piccolo di $\delta k_{sistematico}$. In particolare il δk totale non può mai essere minore di $\delta k_{sistematico}$. Questo conferma semplicemente quello che già abbiamo supposto, che in pratica una grande riduzione dell'incertezza richiede miglioramenti nelle tecniche o nell'apparato sperimentale per ridurre sia gli errori casuali che quelli sistematici in ciascuna singola misura.

⁶ Il dover usare la somma quadratica o quella ordinaria in realtà dipende da cosa significa l'affermazione che la bilancia "ha una incertezza sistematica fino all'1 percento". Se ciò significa che l'errore è "certamente" non più dell'1 percento (e analogamente per l'orologio) allora è appropriata la somma diretta, e $\delta k_{sistematico}$ è allora "certamente" non maggiore del 2 percento. D'altra parte potrebbe essere che un'analisi di tutte le bilance nel laboratorio abbia mostrato che esse seguono una distribuzione normale, con l'affidabilità del 70 percento di esse di essere migliori dell'1 percento (e analogamente gli orologi). In questo caso possiamo usare la somma in quadratura come nella (4.2) con il solito significato del 70 percento di confidenza.

Problemi

Nota. La presenza di un asterisco accanto al numero del problema indica che il problema è discusso, oppure che è dato il suo risultato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

*4.1 (Sezione 4.2). Uno studente misura una grandezza x cinque volte, con i risultati

$$5, 7, 9, 7, 8.$$

Calcolare la media \bar{x} e la deviazione standard σ_x . (Fate il calcolo voi stessi; non premete i tasti della vostra calcolatrice! Dite quale definizione di σ_x usate).

4.2. (Sezione 4.2). Calcolare la media e la deviazione standard delle dieci misure riportate in (4.10). (I risultati sono dati nel testo; ma è importante che "facciate" realmente i calcoli da voi stessi. Dovete decidere come dare un aspetto ordinato ai vostri calcoli; una possibilità è mostrata in Tabella 4.2).

*4.3. (Sezione 4.2). La media \bar{x} di N grandezze x_1, \dots, x_N , è definita come la loro somma divisa per N ; cioè $\bar{x} = (\sum x_i)/N$. La deviazione di x_i è la differenza $d_i = x_i - \bar{x}$. Mostrare chiaramente che la media delle deviazioni d_1, \dots, d_N è automaticamente zero.

Se non siete familiari con il simbolo \sum , può aiutarvi fare questo problema sia senza che con il simbolo. Per esempio, scrivete la somma $\sum (x_i - \bar{x})$ come $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_N - \bar{x})$, e raggruppate di nuovo.

*4.4 (Sezione 4.2). Per calcolare la deviazione standard σ_x di N misure x_1, \dots, x_N , occorre la somma $\sum (x_i - \bar{x})^2$. Provare che questa somma può essere riscritta come

$$\sum [(x_i - \bar{x})^2] = [\sum (x_i)^2] - N\bar{x}^2 \quad (4.27)$$

(Questo è un buon esercizio sull'uso del simbolo \sum . Il risultato è molto utile in pratica, ed è quello che tutte le calcolatrici tascabili usano per calcolare σ_x .)

4.5 (Sezione 4.2). Ricalcolare la deviazione standard nel Problema 4.1 utilizzando l'identità (4.27).

4.6 (Sezione 4.3). Uno studente misura il periodo di un pendolo tre volte e ottiene i risultati 1.6, 1.8, 1.7 (tutti in sec.). Quali sono la media e la deviazione standard? (Usare la definizione (4.9) della deviazione standard). Se lo studente fa una quarta misura, qual è la probabilità che questa nuova misura giaccia al di fuori dell'intervallo 1.6 - 1.8 sec? (Ovviamente questi numeri sono scelti "opportunitamente". Nel Capitolo 5 vedremo come risolvere questo genere di problema anche quando non lo sono).

*4.7 (Sezione 4.3).

(a) Calcolare la media \bar{t} e la deviazione standard σ_t delle seguenti trenta misure di un periodo t (tutte in sec.). Vi occorre una calcolatrice, ma risparmierete la fatica di premere un mucchio di tasti se riconoscerete che occorre meditare soltanto le ultime due cifre, e se spostate il punto decimale di due posti a destra prima di fare i calcoli. Se la vostra

calcolatrice non calcola automaticamente le deviazioni standard, probabilmente dovrete usare l'identità (4.27).

$$\begin{aligned} &8.16, 8.14, 8.12, 8.16, 8.18, 8.10, 8.18, 8.18, 8.18, 8.18, 8.24 \\ &8.16, 8.14, 8.17, 8.18, 8.21, 8.12, 8.12, 8.17, 8.06, 8.10 \\ &8.12, 8.10, 8.14, 8.09, 8.16, 8.16, 8.21, 8.14, 8.16, 8.16, 8.13 \end{aligned}$$

(b) Abbiamo visto che dopo molte misure possiamo aspettarci che circa il 70 per cento di tutti i valori giacciono entro σ_t di \bar{t} (cioè all'interno dell'intervallo $\bar{t} \pm \sigma_t$). Nel Capitolo 5 mostriamo che possiamo anche aspettarci che circa il 95 per cento di tutti i valori giacciono entro $2\sigma_t$ di \bar{t} (cioè all'interno dell'intervallo $\bar{t} \pm 2\sigma_t$). Per le misure della parte (a), circa quante dovrete aspettarvi che giacciono "al di fuori" dell'intervallo $\bar{t} \pm \sigma_t$?
Quante lo fanno? Rispondete alle stesse domande per quanto riguarda il numero al di fuori di $\bar{t} \pm 2\sigma_t$.

4.8 (Sezione 4.4). Calcolare la deviazione standard della media per le cinque misure del Problema 4.1. Quale dovrebbe essere il risultato finale dello studente, con la sua incertezza, per \bar{x} ?

*4.9 (Sezione 4.4). Basandosi sulle trenta misure nel Problema 4.7, quale dovrebbe essere la vostra miglior stima per il periodo in questione e la sua incertezza, assumendo che tutte le incertezze siano casuali?

4.10 (Sezione 4.4). Dopo aver misurato la velocità del suono u parecchie volte, uno studente conclude che la deviazione standard σ_u delle misure è $\sigma_u = 10$ m/sec. Assumendo che gli errori siano tutti casuali, lo studente può raggiungere una precisione desiderata facendo un numero sufficiente di misure e mediando. Quante misure sono necessarie per ottenere un'incertezza finale di ± 3 m/sec? Quante per un'incertezza di soltanto 0.5 m/sec?

*4.11 (Sezione 4.5). Nella Tabella 4.3 sono riportate dieci misure sia della lunghezza l che della larghezza b di un rettangolo utilizzate per calcolare l'area $A = lb$. Se le misure fossero fatte in coppie (una di l e una di b), allora sarebbe naturale moltiplicare ciascuna coppia insieme per ottenere un valore di A : il primo l per il primo b per ottenere il primo valore di A ; e così via. Calcolare i dieci valori risultanti di A ; la media, \bar{A} ; la deviazione standard σ_A ; e la deviazione standard della media, $\sigma_{\bar{A}}$. Confrontate i vostri risultati per A e σ_A con il risultato (4.18) ottenuto calcolando le medie \bar{l} e \bar{b} , e poi calcolando A come $\bar{l}\bar{b}$, con un'incertezza data dalla propagazione degli errori. (Per un numero grande di misure, i due metodi dovrebbero accordarsi).

4.12 (Sezione 4.5) Completare i calcoli della costante della molla k nella Tabella 4.4. Poi calcolare k e la sua incertezza (cioè σ_k).

*4.13 (Sezione 4.6)

(a) Uno studente misura la velocità del suono come $u = f\lambda$, dove f è la frequenza mostrata sul quadrante di un oscillatore audio, e λ è la lunghezza d'onda misurata localizzando parecchi massimi in una colonna d'aria risonante.

Dal momento che ci sono parecchie misure di λ , esse possono essere analizzate statisticamente; e lo studente conclude che $\lambda = 11.2 \pm 0.5$ cm. Vi è soltanto una misura di $f = 3000$ Hz (fornita dall'oscillatore) e lo

studente non ha modo di giudicare la sua affidabilità. L'istruttore dice che l'oscillatore è "certamente affidabile all'1 per cento"; allora lo studente assume un errore sistematico dell'1 per cento in f (ma nessuno in λ). Qual è il risultato dello studente per u e la sua incertezza? Il possibile errore sistematico dell'1 per cento dovuto alla calibrazione dell'oscillazione è importante?

(b) Se la misura dello studente è stata $\lambda = 11.2 \pm 0.1$ cm, e la calibrazione dell'oscillatore fosse affidabile al 3 per cento, quale dovrebbe essere stato il risultato? L'errore sistematico è importante?

5. La distribuzione normale

In questo capitolo continuiamo la nostra discussione sull'analisi statistica delle misure ripetute. Nel Capitolo 4 abbiamo introdotto gli importanti concetti di media, deviazione standard e deviazione standard della media; abbiamo visto il loro significato ed alcune delle loro applicazioni. In questo capitolo forniamo la giustificazione teorica per questi concetti statistici e diamo le prove di parecchi risultati che sono stati affermati senza dimostrazione nei capitoli precedenti.

Il primo problema nella discussione di misure che vengono ripetute molte volte è di trovare un modo conveniente di trattare e mostrare i molti valori ottenuti. Un metodo conveniente è di usare una "distribuzione" o "istogramma", come descritto nella Sezione 5.1. Nella Sezione 5.2 introduciamo la nozione di "distribuzione limite", la distribuzione dei risultati che si dovrebbe ottenere se il numero delle misure diventasse infinitamente grande. Nella Sezione 5.3 definiamo la "distribuzione normale" o "distribuzione di Gauss", che descrive la distribuzione limite dei risultati per qualunque misura soggetta a molti piccoli errori casuali.

Una volta che le proprietà matematiche della distribuzione normale siano state capite, possiamo dimostrare facilmente parecchi risultati importanti. Nella Sezione 5.4 dimostriamo che, come anticipato nel Capitolo 4, circa il 70 per cento di tutte le misure (tutte di una stessa grandezza e tutte utilizzando la stessa tecnica) dovrebbero giacere all'interno di una deviazione standard dal valore vero. Nella Sezione 5.5 dimostriamo il risultato, utilizzato fin dal Capitolo 1, che se facciamo N misure x_1, x_2, \dots, x_N della stessa grandezza x , allora la nostra miglior stima x_{best} basata su questi valori è la media $\bar{x} = \sum x_i/N$. Nella Sezione 5.6 giustifichiamo l'uso della somma in quadratura quando si propagano errori che sono indipendenti e casuali. Nella Sezione 5.7 dimostriamo che l'incertezza della media \bar{x} , quando utilizzata come la miglior stima di x , è data dalla deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{N}$, come affermato nel Capitolo 4. Infine, nella Sezione 5.8 discutiamo come assegnare una confidenza numerica ai risultati sperimentali.

La matematica utilizzata in questo capitolo è un po' più avanzata di quella usata finora. Comunque, il lettore che segua accuratamente la discussione sulla distribuzione normale nella Sezione 5.3 (facendo i calcoli con foglio e matita se necessario) dovrebbe essere in grado di seguire la maggior parte degli argomenti senza troppa difficoltà.

5.1. Istogrammi e distribuzioni

Dovrebbe essere chiaro che una seria analisi statistica di un esperimento ci richiede di fare molte misure. Così il nostro primo problema è di escogitare

metodi adeguati per registrare e mettere in evidenza un gran numero di valori misurati. Supponiamo, per esempio, di dover fare dieci misure di qualche lunghezza x . Per esempio, x potrebbe essere la distanza da una lente a un'immagine formata dalla lente. Potremmo ottenere i valori (tutti in cm)

$$26, 24, 26, 28, 23, 24, 25, 24, 26, 25 \quad (5.1)$$

Scritti in questo modo, questi dieci numeri sono scarsamente istruttivi, e se registrassimo molte più misure in questo modo, il risultato sarebbe una giungla confusa di numeri. Ovviamente occorre un sistema migliore.

Come primo passo possiamo riorganizzare i numeri (5.1) in ordine crescente,

$$23, 24, 24, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 26, 28 \quad (5.2)$$

In seguito, piuttosto che registrare le tre letture 24, 24, 24, 24, possiamo semplicemente registrare che abbiamo ottenuto il valore 24 tre volte. In altre parole, possiamo registrare i "diversi" valori di x ottenuti, insieme con il "numero" di volte in cui ciascun valore è stato trovato, come in Tabella 5.1.

Tabella 5.1.

diversi valori, x_k	23	24	25	26	27	28
numero di volte, n_k	1	3	2	3	0	1

Qui abbiamo introdotto la notazione x_k ($k = 1, 2, \dots$) per denotare i vari diversi valori trovati: $x_1 = 23$, $x_2 = 24$, $x_3 = 25$, e così via. E n_k ($k = 1, 2, \dots$) denota il numero di volte in cui il corrispondente valore x_k è stato trovato: $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, e così via.

Se registriamo misure come in Tabella 5.1, allora possiamo riscrivere la definizione della media \bar{x} in un modo che si dimostra più conveniente. Dalla nostra vecchia definizione sappiamo che

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{N} \\ &= \frac{23 + 24 + 24 + 24 + 24 + 25 + 25 + \dots + 28}{10} \end{aligned} \quad (5.3)$$

E questo è lo stesso di

$$\bar{x} = \frac{23 + (24 \times 3) + (25 \times 2) + \dots + 28}{10}$$

o, in generale

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k n_k}{N} \quad (5.4)$$

Nella forma originale (5.3), noi sommiamo su "tutte" le misure fatte; nella (5.4) noi sommiamo su tutti i "diversi" valori ottenuti, moltiplicando ciascun valore per il numero di volte che è occorso. È ovvio che queste due somme sono la

stessa cosa, ma la forma (5.4) si dimostra più utile quando facciamo un grande numero di misure. Una somma come quella in (5.4) è talvolta chiamata una "somma pesata", ciascun valore x_k essendo "pesato" per il numero di volte di occorrenza, n_k . Per ulteriore informazione, notiamo che se sommiamo tutti i numeri n_k , allora otteniamo il numero totale di misure fatte, N . Cioè

$$\sum_k n_k = N \quad (5.5)$$

(Per esempio, per la Tabella 5.1 questa relazione asserisce che la somma dei numeri dell'ultima linea è 10).

I concetti degli ultimi due paragrafi possono essere espressi in un modo che è spesso più conveniente. Invece di dire che il risultato $x = 24$ è stato ottenuto tre volte, possiamo dire che $x = 24$ è stato ottenuto in $\frac{3}{10}$ di tutte le nostre misure.

In altre parole, invece di usare n_k , il "numero" di volte in cui il risultato x_k occorre, introduciamo la frazione

$$F_k = \frac{n_k}{N} \quad (5.6)$$

che è la "frazione" delle nostre N misure che hanno dato il risultato x_k . Si dice che le frazioni F_k specificano la "distribuzione" dei nostri risultati, dal momento che descrivono come le nostre misure sono "distribuite" fra i diversi possibili valori.

In termini delle frazioni F_k , possiamo riscrivere la formula (5.4) per la media \bar{x} nella forma compatta

$$\bar{x} = \sum_k x_k F_k \quad (5.7)$$

Cioè, la media \bar{x} è proprio la somma pesata di tutti i diversi valori x_k ottenuti, con ciascun x_k pesato dalla frazione di volte di occorrenza, F_k .

Il risultato (5.5) implica che

$$\sum_k F_k = 1. \quad (5.8)$$

Cioè, se sommiamo le frazioni F_k per tutti i possibili risultati x_k , dobbiamo ottenere 1. Qualunque insieme di numeri la cui somma è 1 è detta essere "normalizzata", e la relazione (5.8) è quindi chiamata "condizione di normalizzazione".

La distribuzione delle nostre misure può essere evidenziata graficamente in un "istogramma", come in Figura 5.1. Questo è proprio un grafico di F_k in funzione di x_k , con i diversi valori misurati x_k riportati lungo l'asse orizzontale, e la frazione di volte in cui ciascun x_k è stato ottenuto indicata dall'altezza della barra verticale disegnata sopra x_k . (Si può anche graficare n_k in funzione di x_k , ma per i nostri scopi il grafico di F_k in funzione di x_k è più conveniente). Dati riportati in istogrammi come questo possono essere compresi rapidamente e facilmente, come sanno molti scrittori di giornali e riviste.

Un istogramma come quello in Figura 5.1 può essere chiamato un "istogramma a barre", dal momento che la distribuzione dei risultati è indicata dalle altezze delle barre verticali sopra gli x_k . Questo genere di istogramma è appropriato quando i valori x_k sono ordinatamente spazati, con valori interi.

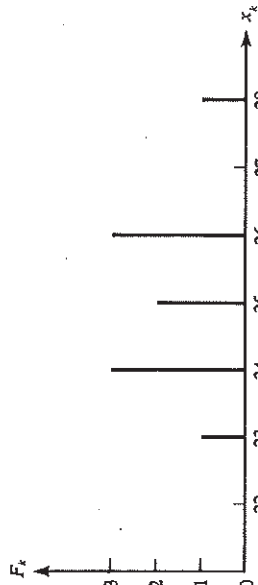


Figura 5.1. Istogramma per le dieci misure di una lunghezza x . L'asse verticale mostra la frazione di volte F_k in cui ciascun valore x_k è stato osservato.

(Per esempio, le votazioni degli studenti a un esame sono usualmente interi, e sono convenientemente rappresentati con un istogramma a barre). Comunque, la maggior parte delle misure non forniscono risultati precisi interi, dal momento che la maggior parte delle grandezze fisiche ha un intervallo continuo di valori possibili. Per esempio, piuttosto che le dieci lunghezze riportate nell'Equazione (5.1), è molto più probabile che otteniate dieci valori come

$$26.4, 23.9, 25.1, 24.6, 22.7, 23.8, 25.1, 23.9, 25.3, 25.4 \quad (5.9)$$

Un istogramma a barre di questi dieci valori dovrebbe consistere di dieci barre separate, tutte della stessa altezza, e fornirebbe tutto sommato poca informazione. Date delle misure come quelle in (5.9), la cosa migliore è dividere la serie di valori in un numero conveniente di "intervalli" e di contare quanti valori cadono in ciascun "intervallo". Per esempio potremmo contare il numero di misure (5.9) comprese tra $x = 22$ e 23 , tra $x = 23$ e 24 , e così via. I risultati di questo conteggio sono mostrati in Tabella 5.2. (Se succede che una misura cada esattamente sul limite tra due intervalli, allora bisogna decidere dove porla. Una scelta semplice e ragionevole è di assegnare metà misura a ciascuno dei due intervalli).

Tabella 5.2.

Intervallo	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28
Eventi per intervallo	1	3	1	4	1	0

I risultati in Tabella 5.2 possono essere messi in grafico e otteniamo quello che chiamiamo "istogramma a intervalli", come mostrato in Fig. 5.2. In questo grafico la frazione di misure che cadono in ciascun intervallo è indicata dall'area del rettangolo disegnato sopra l'intervallo. Così il rettangolo ombreggiato sopra l'intervallo da $x = 23$ a $x = 24$ ha area $0.3 \times 1 = 0.3$, indicando che $\frac{3}{10}$ di tutte le misure sono cadute in questo intervallo. In generale denotiamo la larghezza dell'intervallo kesimo con Δ_k . (Di solito queste larghezze sono tutte uguali, anche se non devono necessariamente esserlo). L'altezza f_k del rettangolo disegnato sopra questo intervallo è scelta in modo tale che l'area

$f_k \Delta_k$ sia

$$f_k \Delta_k = \text{frazione di misure nell'intervallo kesimo}$$

In altre parole, in un istogramma ad intervalli l'area $f_k \Delta_k$ del rettangolo kesimo ha lo stesso significato dell'altezza F_k della barra kesima in un istogramma a barre.

Un po' di attenzione è necessaria nella scelta della larghezza Δ_k degli intervalli per un istogramma. Se gli intervalli sono troppo larghi, allora tutte le letture (o quasi tutte) cadranno in un solo intervallo e l'istogramma sarà un singolo rettangolo privo di interesse. Se gli intervalli sono troppi stretti, allora pochi di essi conterranno più di una lettura, e l'istogramma consisterà in un grande numero di stretti rettangoli tutti circa della stessa altezza. Chiaramente la larghezza dell'intervallo deve essere scelta in modo tale che vi siano parecchie letture in ciascuno di parecchi intervalli. Così quando il numero totale di misure N è piccolo, dovremo scegliere i nostri intervalli relativamente larghi; ma se aumentiamo N , allora è solitamente possibile scegliere intervalli più stretti.

5.2. Distribuzioni limite

Nella maggior parte degli esperimenti, se si aumenta il numero di misure, allora l'istogramma comincia ad assumere qualche semplice forma definita. Ciò è chiaramente visibile nelle Figure 5.3 e 5.4, che mostrano 100 e 1000 misure della stessa grandezza di Figura 5.2. Dopo 100 misure, l'istogramma è diventato con un singolo picco, ed è approssimativamente simmetrico. Con 1000 misure abbiamo potuto dimezzare la dimensione dell'intervallo e l'istogramma è diventato più liscio e regolare.

Queste tre figure illustrano un'importante proprietà della maggior parte delle misure. Quando il numero di misure si avvicina all'infinito, la loro distribuzione si avvicina a qualche curva continua, definita. Quando ciò accade, la curva continua è chiamata la "distribuzione limite". Così per le misure di Figura 5.2-5.4 la distribuzione limite sembra essere simile alla curva simmetrica a forma di campana che è stata sovrapposta in Figura 5.4.

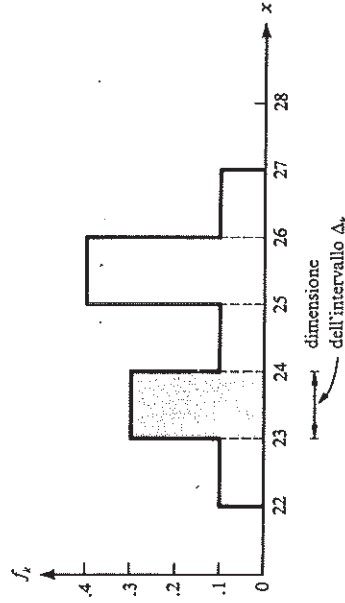


Figura 5.2. L'istogramma ad intervalli mostra la frazione di misure di x che cadono negli "intervalli" 22-23, 23-24, e così via. L'area del rettangolo sopra ciascun intervallo dà la frazione di misure che cadono in quell'intervallo. Così l'area del rettangolo ombreggiato è 0.3, indicando che $\frac{3}{10}$ di tutte le misure giacciono tra 23 e 24.

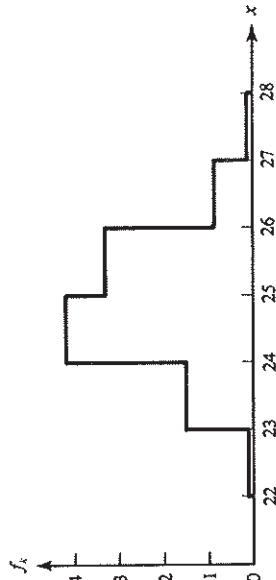


Figura 5.3. Istogramma per 100 misure della stessa grandezza di Figura 5.2.

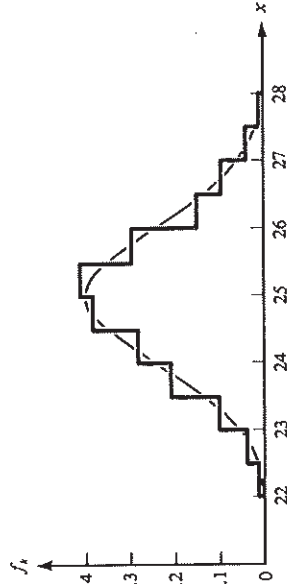


Figura 5.4. Istogramma per 1000 misure della stessa grandezza di Figura 5.3. La curva tratteggiata è la distribuzione limite.

Si dovrebbe mettere in risalto che la distribuzione limite è una costruzione teorica, che non può mai essa stessa essere misurata esattamente. Più misure facciamo, e più il nostro istogramma si avvicina alla distribuzione limite. Ma soltanto se noi facciamo infinite misure e usassimo intervalli infinitamente stretti, otterremmo realmente la distribuzione limite stessa. Nondimeno, vi è un'evidenza indubbia che quasi tutte le misure abbiano una distribuzione limite, alla quale il nostro istogramma si avvicina sempre più man mano che aumentiamo il numero di misure.

Una distribuzione limite, come la curva liscia in Figura 5.4, definisce una funzione che chiamiamo $f(x)$. Il significato di questa funzione è mostrato dalla Figura 5.5. All'aumentare del numero di misure della grandezza x , il nostro istogramma eventualmente diventerà indistinguibile dalla curva limite $f(x)$. Allora la frazione di misure che cadono in qualunque piccolo intervallo

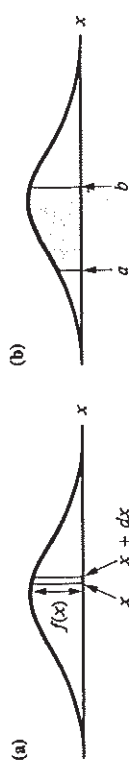


Figura 5.5. Una distribuzione limite $f(x)$. (a) Dopo molte misure la frazione che cade fra x e $x + dx$ è l'area $f(x)dx$ della stretta striscia. (b) La frazione che cade fra $x = a$ e $x = b$ è l'area ombreggiata.

compreso tra x e $x + dx$ è uguale all'area $f(x)dx$ della striscia ombreggiata in Figura 5.5 (a):

$$f(x)dx = \text{frazione di misure che cadono tra } x \text{ e } x + dx \quad (5.10)$$

Più in generale, il numero di misure che cadono tra due qualsivoglia valori a e b è l'area totale sotto il grafico tra $x = a$ e $x = b$ (Figura 5.5 (b)). Quest'area è proprio l'"integrale definito" di $f(x)$. Così abbiamo l'importante risultato che

$$\int_a^b f(x)dx = \text{frazione di misure che cadono tra } x = a \text{ e } x = b \quad (5.11)$$

È importante capire il significato delle due affermazioni (5.10) e (5.11). Entrambe ci dicono la frazione di misure che ci aspettiamo di trovare in qualche intervallo, dopo avere fatto "un numero molto grande di misure". Un altro modo molto utile di dire ciò è che $f(x)dx$ è la "probabilità" che una singola misura di x dia un risultato compreso fra x e $x + dx$.

$$f(x)dx = \text{probabilità che una misura dia un risultato compreso fra } x \text{ e } x + dx \quad (5.12)$$

Analogamente, l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ ci dice la probabilità che una misura cada tra $x = a$ e $x = b$. Siamo arrivati alla seguente importante conclusione: se conosciamo la distribuzione limite $f(x)$ per la misura di una data grandezza x con una data strumentazione, allora dovremmo conoscere la probabilità di ottenere un risultato in qualsiasi intervallo $a \leq x \leq b$.

Dal momento che la probabilità totale di ottenere un risultato in qualunque punto tra $-\infty$ e $+\infty$ deve essere uno, la distribuzione limite $f(x)$ deve soddisfare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (5.13)$$

Questa identità è l'analogo della somma normalizzata (5.8), $\sum_k F_k = 1$, ed una funzione $f(x)$ che soddisfi la (5.13) è detta "normalizzata".

Il lettore può essere messo in imbarazzo dai limiti $\pm \infty$ nell'integrale (5.13). Essi non significano che noi realmente ci aspettiamo di ottenere risultati da $-\infty$ a $+\infty$. È vero il contrario. In qualunque esperimento reale le misure cadono tutte in qualche piccolo ben definito intervallo. Per esempio, le misure di Figura 5.4 giacciono tutte tra $x = 21$ e $x = 29$. Anche dopo infinite misure, la frazione di quelle che giacciono al di fuori dell'intervallo compreso fra $x = 21$ e $x = 29$ dovrebbe essere completamente trascurabile. In altre parole, $f(x)$ è essenzialmente zero al di fuori di questo intervallo, e non vi è differenza fra l'integrale (5.13) calcolato da $-\infty$ a $+\infty$ oppure da 21 a 29. Dal momento che generalmente non sappiamo quali sono questi limiti finiti, è più conveniente lasciarli come $\pm \infty$.

Se la misura che si considera è molto precisa, allora tutti i valori ottenuti saranno molto vicini al valore reale di x ; così l'istogramma dei risultati, e quindi la distribuzione limite sarà stretta e piccata, come la linea solida in figura 5.6. Se la misura è di bassa precisione, allora i valori trovati saranno sparpagliati, e la distribuzione sarà larga e bassa, come la curva tratteggiata in figura 5.6.

La distribuzione limite $f(x)$, per la misura di una data grandezza x , utilizzando una data apparecchiatura, descrive come dovrebbero essere distribuiti i risultati dopo molte, molte misure. Così, se conosciamo $f(x)$, potremmo calcolare il valor medio \bar{x} che si dovrebbe trovare dopo molte misure. Abbiamo visto nella (5.7) che la media di qualunque numero di misure è la somma di tutti i diversi valori x_k , ciascuno pesato per la frazione di volte in cui è stato ottenuto,

$$\bar{x} = \sum_k x_k f_k \quad (5.14)$$

Nel presente caso abbiamo un numero enorme di misure con distribuzione $f(x)$. Se dividiamo l'intero intervallo di valori in piccoli intervalli compresi tra x_k e $x_k + dx_k$, allora la frazione di valori in ciascun intervallo è $F_k = f(x_k) dx_k$, e al limite per cui tutti gli intervalli vanno a zero, (5.14) diventa

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (5.15)$$

Ricordiamo che questa formula ci dà la media \bar{x} attesa dopo un numero infinitamente grande di prove.

Analogamente possiamo calcolare la deviazione standard σ_x ottenuta dopo molte misure. Dal momento che stiamo trattando con il limite $N \rightarrow \infty$, non fa differenza quale definizione di σ_x usiamo, l'originale (4.6) o la "migliorata" (4.9) con N rimpiazzato da $N-1$. In ogni caso, quando $N \rightarrow \infty$, σ_x^2 è la media della deviazione al quadrato $(x - \bar{x})^2$. Così esattamente le stesse argomentazioni che ci hanno portato alla (5.15), ci danno ora, dopo molte prove,

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \quad (5.16)$$

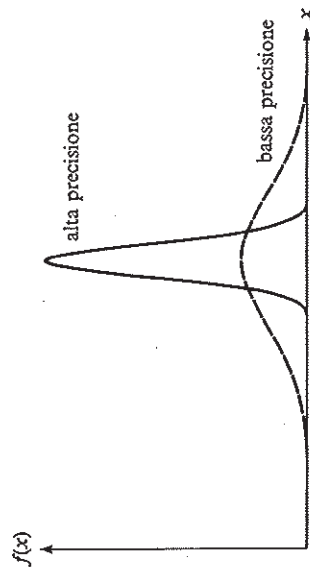


Figura 5.6. Due distribuzioni limite, una per una misura ad alta precisione, l'altra per una misura a bassa precisione.

5.3. La distribuzione normale

Diversi tipi di misure hanno diverse distribuzioni limite. Non tutte le distribuzioni limite hanno la forma simmetrica a campana illustrata in Sezione 5.2. (Per esempio, le distribuzioni binomiale e di Poisson discusse nei Capitoli 10 e 11 sono solitamente non simmetriche). Nondimeno, si trova che una gran quantità di misure hanno una curva simmetrica a campana come distribuzione limite. Di fatto, dimostreremo nel Capitolo 10 che se una misura è soggetta a molte piccole sorgenti di errori casuali e trascurabili errori sistematici, allora i valori misurati saranno distribuiti su una curva a campana, e questa curva sarà centrata sul valore vero di x , come in Figura 5.7. Nel resto di questo capitolo ci occuperemo di misure con questa proprietà.

Se le nostre misure hanno errori sistematici apprezzabili, allora "non" dovremmo aspettarci che la distribuzione limite sia centrata sul valore vero. Gli errori casuali spingono con la stessa probabilità le nostre letture sopra o sotto il valore vero. Se tutti gli errori sono casuali, dopo molte misure ci saranno tante osservazioni al di sopra del valore vero quante al di sotto, e la nostra distribuzione dei risultati sarà allora centrata sul valore vero. Ma un errore sistematico (come un metro a nastro che si è allungato, o un orologio che marcia lento) spinge tutti i valori in una direzione, e così spinge la distribuzione dei valori osservati fuori centro dal valore vero. In questo capitolo assumiamo che la distribuzione sia centrata sul valore vero. Ciò equivale ad assumere che tutti gli errori sistematici siano stati ridotti ad un livello trascurabile.

Dobbiamo ora porci una domanda che finora abbiamo evitato di affrontare. Qual è il "valore vero" di una grandezza fisica? Questa è una domanda difficile, alla quale non vi è una risposta semplice, soddisfacente. Dal momento che è ovvio che nessuna misura può determinare esattamente il valore vero di una variabile continua (una lunghezza, un tempo, etc.), non è ancora chiaro che il vero valore di tale grandezza esista. Nondimeno, è molto conveniente assumere che ogni grandezza fisica abbia un valore vero; e noi faremo questa ipotesi.

Possiamo pensare che il valore vero di una grandezza sia quel valore al quale ci si avvicina sempre più facendo più e più misure, sempre più accuratamente. Come tale, il "valore vero" è un'idealizzazione, analoga al punto matematico che non ha dimensione o alla retta che non ha spessore; e, come questi, è un'utile idealizzazione. Spesso denoteremo i valori veri delle grandezze misurate x, y, \dots, z , con le corrispondenti lettere maiuscole, X, Y, \dots, Z . Se le misure di x sono soggette a molti piccoli errori casuali, ma a

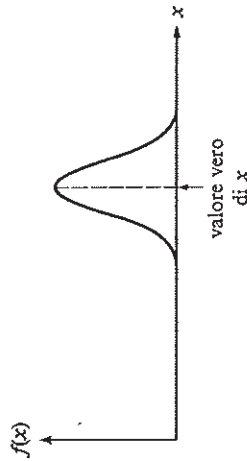


Figura 5.7. La distribuzione limite per una misura che è soggetta a molti piccoli errori casuali. La distribuzione ha la forma di una campana ed è centrata sul valore vero della grandezza misurata x .

trascurabili errori sistematici, allora la loro distribuzione sarà una curva simmetrica a campana, centrata sul valore vero X .

La funzione matematica che descrive la curva a campana è chiamata la "distribuzione normale" o "funzione di Gauss"⁽¹⁾.

Il prototipo di questa funzione è

$$e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (5.17)$$

dove σ è un parametro fisso che chiameremo "parametro di larghezza". Il lettore deve familiarizzare con le proprietà di questa funzione.

Quando $x = 0$, la funzione di Gauss (5.17) è uguale a uno. La funzione è simmetrica attorno a $x = 0$, dal momento che ha lo stesso valore per x e per $-x$. Quando x si allontana dallo zero in ognuna delle due direzioni, $x^2/2\sigma^2$ aumenta, rapidamente se σ è piccolo, più lentamente se σ è grande. Allora, come x si allontana dall'origine, la funzione (5.17) diminuisce e tende a zero. Così l'aspetto generale della funzione di Gauss (5.17) è come quella mostrata in Figura 5.8. Il disegno spiega il nome "parametro di larghezza" per σ , dal momento che la forma a campana è larga se σ è grande, e stretta se σ è piccolo.

La funzione di Gauss (5.17) è una curva a campana centrata su $x = 0$. Per ottenere una curva a campana centrata attorno a qualche altro punto $x = X$, rimpiazziamo semplicemente x nella (5.17) con $x - X$. Così la funzione

$$e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} \quad (5.18)$$

ha il suo massimo per $x = X$ e diminuisce simmetricamente da ambo i lati di $x = X$, come in Figura 5.9.

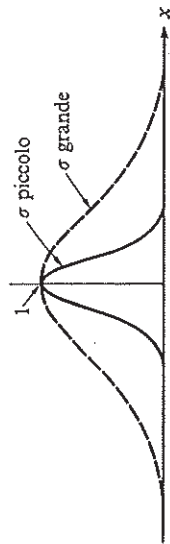


Figura 5.8. La funzione di Gauss (5.17) ha forma a campana ed è centrata su $x = 0$. La curva è larga se il parametro di larghezza σ è grande, è stretta se σ è piccolo.

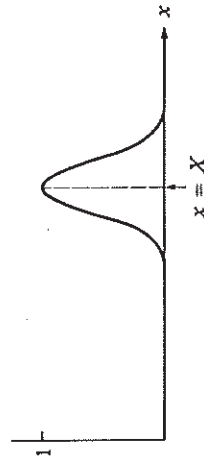


Figura 5.9. La funzione di Gauss (5.18) ha forma a campana ed è centrata in $x = X$.

¹ Altri nomi comuni per la funzione di Gauss sono: la funzione Gaussiana (o Gaussiana), la funzione normale densità, e la funzione normale degli errori. L'ultimo di questi nomi è piuttosto sfortunato, dal momento che il nome "funzione degli errori" è spesso usato per l'integrale della funzione di Gauss (come discuteremo nella Sezione 5.4).

La funzione (5.18) non è ancora nella sua forma finale per descrivere una distribuzione limite, perché ogni distribuzione deve essere "normalizzata" cioè deve soddisfare la condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (5.19)$$

Per far ciò poniamo

$$f(x) = Ne^{-(x-X)^2/2\sigma^2} \quad (5.20)$$

(La moltiplicazione per il fattore N non cambia la forma, né sposta il massimo da $x = X$). Dobbiamo poi scegliere il "fattore di normalizzazione" N in modo che $f(x)$ sia normalizzata come in (5.19). Ciò necessita di qualche manipolazione elementare degli integrali, che diamo in qualche dettaglio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ne^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx \quad (5.21)$$

Per calcolare questo tipo di integrale, è sempre una buona idea cambiare le variabili per semplificare l'integrale. Così possiamo porre $x - X = y$ (nel qual caso $dx = dy$) e otteniamo

$$= N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy \quad (5.22)$$

In seguito possiamo porre $y/\sigma = z$ (nel qual caso $dy = \sigma dz$), e otteniamo

$$= N\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \quad (5.23)$$

L'integrale ottenuto è uno degli integrali standard della fisica matematica. Può essere calcolato con metodi elementari, ma i dettagli non sono particolarmente illuminanti; così diamo semplicemente il risultato⁽²⁾:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi} \quad (5.24)$$

Ritornando alla (5.21) e (5.23), troviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = N\sigma\sqrt{2\pi}$$

Dal momento che questo integrale deve essere uno, dobbiamo scegliere il fattore di normalizzazione N in modo che $N = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

² Per una derivazione, vedi, per esempio, Hugh D. Young "Statistical Treatment of Experimental Data" (McGraw Hill, 1962), Appendix D.

Concludiamo che la funzione distribuzione di Gauss, o normale, correttamente normalizzata è

$$f_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.25)$$

Notiamo che abbiamo aggiunto i pedici X e σ , per indicare il centro e la larghezza della distribuzione. La funzione $f_{X,\sigma}(x)$ descrive la distribuzione limite dei risultati in una misura di una grandezza x il cui valore vero è X , se la misura è soggetta soltanto ad errori casuali. Tutte le misure la cui distribuzione limite è data dalla funzione di Gauss (5.25) si dice che sono "distribuite normalmente".

Esploreremo in breve il significato del parametro larghezza σ . È già chiaro che un piccolo valore di σ dà una distribuzione fortemente piccata, corrispondente ad una misura precisa; mentre un grande valore di σ dà una distribuzione allargata, corrispondente ad una misura a bassa precisione. In Figura 5.10 mostriamo due esempi di distribuzione di Gauss con diversi centri X e larghezze σ . Notiamo come il fattore σ nel denominatore della (5.25) garantisca che una distribuzione più stretta (σ più piccolo) è automaticamente più alta al suo centro, come deve essere perché l'area totale sotto la curva sia uno.

Abbiamo visto nella Sezione 5.2 che la conoscenza della distribuzione limite per una misura ci permette di calcolare il valor medio \bar{x} atteso dopo un gran numero di prove. Secondo la (5.15) la media attesa dopo molte prove è

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (5.26)$$

Se la distribuzione limite è la distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ centrata sul valore vero X , allora il suo integrale può essere calcolato. Prima di fare ciò, notiamo che è piuttosto ovvio che la media x dopo molte prove sarà X , poiché la simmetria della funzione di Gauss attorno a X implica che quanti risultati cadranno ad una certa distanza al di sopra di X altrettanti cadranno ad una uguale distanza al di sotto di X . Così la media dovrebbe essere X .

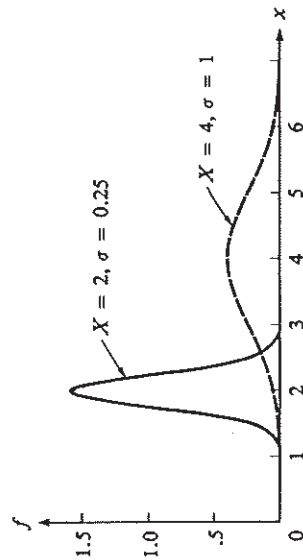


Figura 5.10. Due distribuzioni normali, o di Gauss.

Possiamo calcolare la (5.26) per la distribuzione di Gauss come segue:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,\sigma}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned} \quad (5.27)$$

Se facciamo il cambio di variabili $y = x - X$, allora $dx = dy$ e $x = y + X$. Così l'integrale (5.27) diventa la somma di due termini,

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy + X \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy \right) \quad (5.28)$$

Il primo integrale è esattamente zero, dal momento che il contributo da ogni punto y è cancellato esattamente da quello del punto $-y$. Il secondo integrale è l'integrale di normalizzazione incontrato in (5.22), ed ha il valore $\sigma\sqrt{2\pi}$. Questo si semplifica con il $\sigma\sqrt{2\pi}$ nel denominatore e resta il risultato atteso

$$\bar{x} = X \quad (5.29)$$

dopo molte prove. In altre parole, se le misure sono distribuite secondo la distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$, allora, dopo molte, molte prove, il valore medio \bar{x} è il valore vero X , su cui la funzione di Gauss è centrata.

Il risultato (5.29) dovrebbe essere esattamente vero solo se potessimo fare infinite misure. La sua utilità pratica è che se facciamo un grande (ma finito) numero di prove, allora la nostra media sarà "vicino" ad X .

Un'altra grandezza interessante da calcolare è la "deviazione standard" σ_x dopo un grande numero di prove. Secondo la (5.16) essa è data da

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f_{X,\sigma}(x) dx \quad (5.30)$$

Questo integrale si calcola facilmente. Rimpiazziamo \bar{x} con X , facciamo le sostituzioni $x - X = y$ e $y/\sigma = z$, e infine integriamo per parti per ottenere il risultato (vedi Problema 5.6).

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 \quad (5.31)$$

dopo molte prove. In altre parole, il parametro larghezza della funzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ è proprio la deviazione standard che dovremmo ottenere dopo aver fatto molte misure. Questa è, ovviamente, la ragione per cui la lettera σ è utilizzata per il parametro larghezza e spiega perché σ è spesso chiamata la deviazione standard della distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$. Comunque, strettamente parlando, σ è la deviazione standard attesa solo dopo un "numero infinito" di prove. Se facciamo un numero finito di misure (10 o 20, diciamo) di x , allora la deviazione standard osservata dovrebbe essere una approssimazione di σ , ma non abbiamo ragione di pensare che sia "esattamente" σ . Nella Sezione 5.5 considereremo ulteriormente cosa si può dire sulla media e la deviazione standard dopo aver fatto un numero finito ragionevole di prove.

5.4. La deviazione standard come il limite di confidenza del 68 per cento

La distribuzione limite $f(x)$ per la misura di qualche grandezza x ci dice la probabilità di ottenere un dato valore di x . Specificamente, l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

è la probabilità che una misura dia un risultato nell'intervallo $a \leq x \leq b$. Se la distribuzione limite è la funzione di Gauss $f_{x,\sigma}(x)$, allora questo integrale può essere calcolato. In particolare, possiamo ora calcolare la probabilità (discussa nel Capitolo 4) che una misura cada entro una deviazione standard σ del valore vero X . Questa probabilità è

$$P(\text{entro } \sigma) = \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f_{x,\sigma}(x) dx \tag{5.32}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} e^{-(x-x')^2/2\sigma^2} dx \tag{5.33}$$

Questo integrale è illustrato in Figura 5.11. Può essere semplificato nel modo ormai familiare sostituendo $(x - X)/\sigma = z$. Con questa sostituzione, $dx = \sigma dz$ e i limiti di integrazione diventano $z = \pm 1$. Allora

$$P(\text{entro } \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-z^2/2} dz \tag{5.34}$$

Prima di discutere l'integrale (5.34), notiamo che potremmo aver trovato ugualmente la probabilità per un risultato entro 2σ di X , o entro 1.5σ di X . Più in generale, potremmo calcolare P (entro $t\sigma$), che significa "la probabilità per un risultato entro $t\sigma$ di X ", dove t è qualunque numero positivo. Questa probabilità è data dall'area in Figura 5.12, e un calcolo identico a quello che ha condotto alla (5.34) dà (Problema 5.7)

$$P(\text{entro } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2/2} dz \tag{5.35}$$

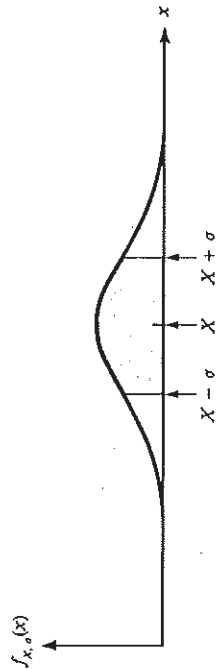


Figura 5.11. L'area ombreggiata tra $X \pm \sigma$ è la probabilità di una misura entro una deviazione standard di X .

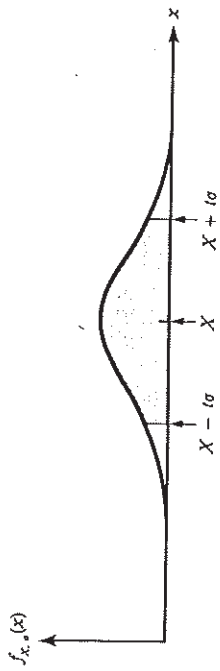


Figura 5.12. L'area ombreggiata tra $X \pm t\sigma$ è la probabilità di una misura entro t deviazioni standard di X .

L'integrale (5.35) è un integrale standard della fisica matematica, ed è spesso chiamato la "funzione degli errori", denotata $\text{erf}(t)$, o l'"integrale normale degli errori". Non può essere valutato analiticamente, ma può essere facilmente calcolato con una calcolatrice tascabile. In Figura 5.13 è graficato come una funzione di t , e alcuni valori sono tabulati. Una tabella più completa può essere trovata in Appendice A alla fine del libro. (Vedi anche Appendice B, che mostra un integrale diverso, ma strettamente connesso).

In primo luogo notiamo dalla Figura 5.13 che la probabilità che una misura cada entro una deviazione standard del risultato vero è il 68 per cento, come fu anticipato nel Capitolo 4 (dove si disse che era "circa il 70 per cento"). Se citiamo la deviazione standard come la nostra incertezza in tale misura (cioè, scriviamo $x = X_{\text{ver}} \pm \delta x$ e assumiamo $\delta x = \sigma$), allora possiamo essere confidenti al 68 per cento di essere entro σ dal risultato corretto.

Possiamo anche vedere in Figura 5.13 che la probabilità P (entro $t\sigma$) si avvicina rapidamente al 100 per cento all'aumentare di t . La probabilità che una misura cada entro 2σ è 95.4 per cento; quella per 3σ è 99.7 per cento. Per esprimere questi risultati in un altro modo, la probabilità che una misura cada "al di fuori" di una deviazione standard è piuttosto apprezzabile (32 per cento),

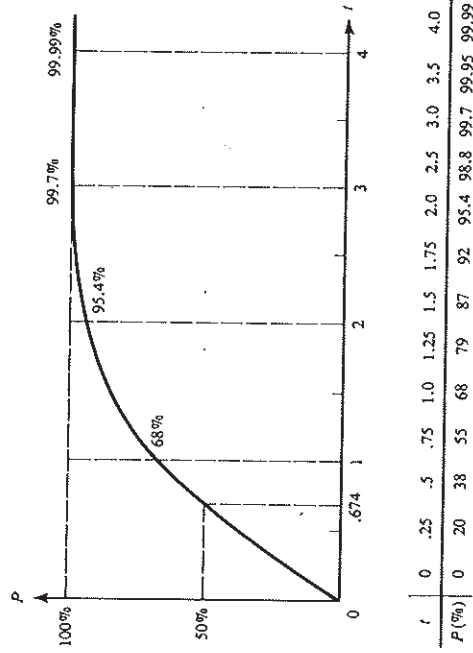


Figura 5.13. La probabilità P (entro $t\sigma$) che una misura di x cada entro t deviazioni standard del valore vero $x = X$. Due nomi comuni per questa funzione sono l'"integrale normale degli errori" e la "funzione degli errori", $\text{erf}(t)$.

che cada al di fuori di 2σ è molto più piccola (4.6 per cento), e che si trovi al di fuori di 3σ è estremamente piccola (0.3 per cento).

Non vi è naturalmente niente di sacro attorno al numero 68 per cento; esso è precisamente la confidenza associata con la deviazione standard σ . Un'alternativa alla deviazione standard è il cosiddetto "errore probabile", P.E., che è definito come quella distanza per cui vi è un 50 per cento di probabilità di una misura tra $X \pm$ P.E. Si può vedere dalla Figura 5.13 che (per una misura che è distribuita normalmente) l'errore probabile è

$$\text{P.E.} \approx 0.67 \sigma$$

Alcuni sperimentatori preferiscono assumere l'errore probabile, P.E., come l'incertezza nelle loro misure. Nondimeno la deviazione standard σ è la scelta più popolare, dal momento che le sue proprietà sono così semplici.

5.5. Giustificazione della media come la miglior stima

Nelle ultime tre sezioni abbiamo discusso la "distribuzione limite $f(x)$ ", la distribuzione che si dovrebbe ottenere da un numero infinito di misure di una grandezza x . Se $f(x)$ fosse nota, allora potremmo calcolare la media \bar{x} e la deviazione standard σ ottenute dopo infinite misure, e almeno per la distribuzione normale dovremmo anche conoscere il valore vero, X . Sfortunatamente, non conosciamo mai la distribuzione limite. In pratica abbiamo un numero finito di valori misurati ($5, 0, 10, 0$ forse 50),

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

e il nostro problema è di arrivare alla "miglior stima" di X e σ , basandoci sugli N valori misurati.

Se le misure seguissero una distribuzione normale $f_{X,\sigma}(x)$ e se conoscessimo i parametri X e σ , allora potremmo calcolare la probabilità di ottenere i valori x_1, \dots, x_N che sono stati realmente ottenuti. Così, la probabilità di ottenere una lettura vicino a x_1 , in un piccolo intervallo dx_1 , è

$$P(x \text{ compreso fra } x_1 \text{ e } x_1 + dx_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2} dx_1 \quad (5.36)$$

In pratica non siamo interessati alla dimensione dell'intervallo dx_1 (né al fattore $\sqrt{2\pi}$); così abbreviamo a

$$P(x_1) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_1 - X)^2/2\sigma^2} \quad (5.37)$$

Ci riferiamo alla (5.37) come alla probabilità di ottenere il valore x_1 , sebbene strettamente parlando è la probabilità di ottenere un valore in un intervallo vicino a x_1 , come in (5.36).

La probabilità di ottenere la seconda lettura x_2 è

$$P(x_2) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_2 - X)^2/2\sigma^2} \quad (5.38)$$

e possiamo analogamente scrivere tutte le probabilità terminando con

$$P(x_N) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-(x_N - X)^2/2\sigma^2} \quad (5.39)$$

Le equazioni (5.37)-(5.39) danno la probabilità di ottenere ciascuna delle letture x_1, \dots, x_N , calcolate in termini della distribuzione limite assunta $f_{X,\sigma}(x)$. La probabilità di osservare l'intero insieme di N letture è proprio il prodotto di queste probabilità separate³,

$$P_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_N)$$

o

$$P_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2/2\sigma^2} \quad (5.40)$$

È molto importante capire il significato delle varie grandezze nella (5.40). I numeri x_1, \dots, x_N sono i risultati effettivi delle N misure; così x_1, \dots, x_N sono numeri noti, fissati. La grandezza $P_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N)$ è la probabilità di ottenere gli N risultati x_1, \dots, x_N calcolata in termini di X e σ , il valore vero di x e il parametro larghezza della sua distribuzione. I numeri X e σ "non" sono noti; vogliamo trovare le migliori stime per X e σ basandoci sulle osservazioni date x_1, \dots, x_N . Abbiamo aggiunto i pedici X e σ alla probabilità (5.40) per mettere in risalto che essa dipende dai valori (incogniti) di X e σ .

Poiché i valori reali di X e σ sono incogniti, potremmo immaginare di utilizzare i valori X' e σ' per calcolare la probabilità $P_{X',\sigma'}(x_1, \dots, x_N)$. Se in seguito scegliamo due nuovi valori, X'' e σ'' , e troviamo che la probabilità corrispondente $P_{X'',\sigma''}(x_1, \dots, x_N)$ è più grande, allora dovremmo naturalmente considerare i nuovi valori, X'' e σ'' , come stime migliori per X e σ . Continuando in questo modo possiamo immaginare di cercare quei valori di X e σ che rendono $P_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N)$ il più grande possibile, e questi valori dovrebbero essere considerati come le migliori stime per X e σ .

Questo plausibile procedimento per trovare le migliori stime per X e σ è chiamato dagli statistici il "principio di massima verosimiglianza". Può essere descritto brevemente come segue.

Date le N misure osservate x_1, \dots, x_N , le stime migliori per X e σ sono quei valori per i quali gli osservati x_1, \dots, x_N sono più probabili. Cioè, le migliori stime per X e σ sono quei valori per cui $P_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N)$ è massima, dato che

$$P_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2/2\sigma^2} \quad (5.41)$$

Utilizzando questo principio, possiamo facilmente trovare la migliore stima per il valore vero di X . Ovviamente la (5.41) è "massima" se la somma nell'esponente è "minima". Così la miglior stima per X è quel valore di X per

³ Stiamo utilizzando il ben noto risultato che la probabilità di parecchi eventi indipendenti è il prodotto delle loro probabilità separate. Per esempio, la probabilità di ottenere "testa" gettando una moneta $\frac{1}{2}$ e di ottenere un "sei" gettando un dado è $\frac{1}{6}$. Allora la probabilità di ottenere una

"testa" e un "sei" è $\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$.

cui

$$\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2 / \sigma^2 \quad (5.42)$$

è minima. Per calcolare questo minimo, differenziamo rispetto a X e poniamo la derivata uguale a zero, ottenendo

$$\sum_{i=1}^N (x_i - X) = 0$$

o

$$X = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (\text{miglior stima}) \quad (5.43)$$

Cioè, la "miglior stima" per il valore vero X è la media delle nostre N misure, $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i / N$, un risultato che abbiamo assunto senza dimostrazione fin dal Capitolo 1.

Trovare la miglior stima per σ , la larghezza della distribuzione limite, è un po' difficile, dal momento che la probabilità (5.41) è una funzione più complicata di σ . Dobbiamo differenziare la (5.41) rispetto a σ , e porre la derivata uguale a zero. (Lasciamo i dettagli al lettore; vedi problema 5.10). Questo dà il valore di σ che rende massima la (5.41), e che è quindi la miglior stima per σ , cioè

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - X)^2} \quad (\text{miglior stima}) \quad (5.44)$$

Il valore vero X è incognito. Così, in pratica, dobbiamo rimpiazzare X nella (5.44) con la nostra miglior stima per X , cioè la media \bar{x} . Questo porta a stimare

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (5.45)$$

In altre parole, la nostra stima per la larghezza σ della distribuzione limite è la deviazione standard degli N valori osservati, x_1, \dots, x_N , come definita originariamente in (4.6).

Il lettore può essere rimasto sorpreso che la stima (5.45) sia la stessa della nostra definizione originale (4.6), usando N , della deviazione standard, invece della nostra definizione "migliorata", usando $N-1$. In effetti, nel passare dalla miglior stima (5.44) all'espressione (5.45), abbiamo reso plausibile una sottigliezza piuttosto elegante. La miglior stima (5.44) implica il valore vero X , mentre in (5.45) abbiamo rimpiazzato X con \bar{x} (la nostra miglior stima per X). Ora, questi numeri non sono generalmente gli stessi, e si vede facilmente che il numero (5.45) è "sempre minore di", o al massimo uguale a, (5.44) (*). Così nel passare dalla (5.44) alla (5.45) abbiamo consistentemente "sottostimato" la

* Se consideriamo la (5.44) come una funzione di X , allora abbiamo proprio visto che questa funzione è minima per $X = \bar{x}$. Così (5.45) è sempre minore o uguale di (5.44).

larghezza σ . È piuttosto facile stimare l'ammontare di cui la (5.45) è minore della (5.44), sebbene qui non lo faremo. Il risultato è che la migliore approssimazione per σ non è la (5.45) stessa, ma è ottenuta moltiplicando la (5.45) per circa $\sqrt{N/(N-1)}$. Così la nostra conclusione finale è che la miglior stima per la larghezza σ è la deviazione standard "migliorata" dei valori misurati x_1, \dots, x_N ,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{miglior stima}) \quad (5.46)$$

Può essere bene fare una pausa e rivedere la storia piuttosto complicata che abbiamo spiegato finora. In primo luogo, se le misure di x sono soggette soltanto ad errori casuali, allora la loro distribuzione limite è la funzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$, centrata sul valore vero X e con larghezza σ . La larghezza σ è il limite di confidenza del 68 per cento, cioè vi è un 68 per cento di probabilità che una misura cada entro una distanza σ del valore vero X . In pratica, né X né σ sono noti. Invece conosciamo i nostri N valori misurati x_1, \dots, x_N , dove N è tanto grande quanto il nostro tempo e la nostra pazienza ci hanno permesso di renderlo. Basandoci su questi N valori misurati, la nostra miglior stima del valore vero X si è mostrato che è la media $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i / N$, e la nostra miglior stima della larghezza σ è la deviazione standard di x_1, \dots, x_N , come definita in (5.46). Nella Sezione 5.7 discuteremo l'attendibilità di \bar{x} come la miglior stima per X , in un modo analogo potremmo discutere l'attendibilità di σ_x come la miglior stima per σ , ma qui non lo faremo.

Tutti i risultati delle ultime due sezioni dipendono dall'assunzione che le nostre misure siano distribuite normalmente (**). Sebbene questa sia un'ipotesi ragionevole, è difficile che si verifichi in pratica, e talvolta non è esattamente vera. Se è questo il caso, dobbiamo mettere in risalto che, anche quando la distribuzione di misure "non" è normale, essa è sempre "approssimativamente" normale, e si possono con sicurezza usare i concetti di questo capitolo, almeno con buona approssimazione.

5.6. Giustificazione della somma in quadratura

Possiamo ora tornare a un problema discusso nel Capitolo 3, la propagazione degli errori. Abbiamo affermato allora, senza dimostrazione formale, che quando gli errori sono indipendenti e casuali, essi possono essere combinati in quadratura secondo certe regole standard, sia le "regole semplici" in (3.16) e (3.18), o la regola generale in (3.47), che comprende le regole "semplici" come casi particolari. Siamo ora pronti a giustificare questo uso della somma in quadratura.

Il problema della propagazione degli errori sorge quando misuriamo una o più grandezze x, \dots, z , tutte con incertezze, e poi utilizziamo i nostri valori misurati per calcolare qualche grandezza $q(x, \dots, z)$. Il problema principale è, naturalmente, di valutare l'incertezza nel nostro risultato per q . Se le grandezze x, \dots, z sono soggette soltanto ad errori casuali, allora saranno distribuite normalmente con parametri di larghezza (***) $\sigma_x, \dots, \sigma_z$, che noi assumiamo siano le incertezze associate ad ogni singola misura delle grandezze corrispondenti. Il

** E che gli errori sistematici siano stati ridotti ad un livello trascurabile.

*** Quando trattiamo parecchie differenti grandezze misurate x, \dots, z , utilizziamo i pedici x, \dots, z per distinguere i parametri di larghezza delle loro distribuzioni limite. Così σ_x denota la larghezza della distribuzione di Gauss $f_{x,\sigma}(x)$ per le misure di x , e così via.

problema da affrontare ora è questo: conoscendo le distribuzioni delle misure di x, \dots, z cosa possiamo dire circa la distribuzione dei valori di q ? E in particolare, quale sarà la larghezza della distribuzione dei valori di q ?

Grandezza misurata sommata ad una costante numerica

Cominciamo col considerare due casi speciali molto semplici. Dapprima, supponiamo di misurare una grandezza x e di procedere al calcolo della quantità

$$q = x + A \tag{5.47}$$

dove A è qualche numero fissato senza incertezza (come $A = 1, 0, \pi$). Supponiamo che le misure di x siano normalmente distribuite attorno al valore vero X , con larghezza σ_x , come in Figura 5.14 (a). Allora la probabilità di ottenere un qualunque valore x (in un piccolo intervallo dx) è $f_{x,\sigma_x}(x)dx$ o

$$\text{(probabilità di ottenere il valore } x) \propto e^{-\frac{1}{2}(x - X)^2 / \sigma_x^2} \tag{5.48}$$

Il nostro problema è di dedurre la probabilità di ottenere qualunque valore q della grandezza definita dalla (5.47). Ora, dalla (5.47) è chiaro che $x = q - A$ e quindi che

$$\text{(probabilità di ottenere il valore } q) = \text{(probabilità di ottenere } x = q - A)$$

La seconda probabilità è data dalla (5.48), e così

$$\begin{aligned} \text{(probabilità di ottenere il valore } q) &\propto e^{-\frac{1}{2}(q - A - X)^2 / 2\sigma_x^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(q - (X + A))^2 / 2\sigma_x^2} \end{aligned} \tag{5.49}$$

Il risultato (5.49) mostra che i valori calcolati di q sono normalmente distribuiti, e sono centrati sul valore $X + A$, con larghezza σ_x , come mostrato in Figura 5.14 (b). In particolare l'incertezza in q è la stessa (cioè σ_x) di quella in x , proprio come la nostra regola in 3.16 avrebbe previsto.

Grandezza misurata moltiplicata per una costante numerica

Come secondo semplice esempio, supponiamo di misurare x e calcolare la grandezza

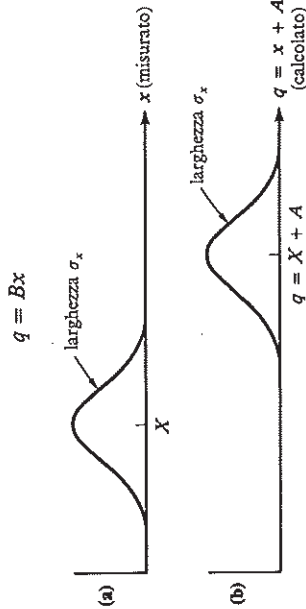


Figura 5.14. Se i valori misurati di x sono normalmente distribuiti con centro $x = X$ e larghezza σ_x , allora i valori calcolati di $q = X + A$ (con A fissato e noto) saranno normalmente distribuiti con centro $q = X + A$ e la stessa larghezza σ_x .

dove B è un numero fissato (come $B = 2$ o $B = \pi$). Se le misure di x sono normalmente distribuite, allora, ragionando esattamente come prima, concludiamo che⁽⁷⁾

(probabilità di ottenere un valore q) \propto (probabilità di ottenere $x = q/B$)

$$\begin{aligned} &\propto \exp \left[-\left(\frac{q}{B} - X\right)^2 / 2\sigma_x^2 \right] \\ &= \exp \left[-\frac{(q - BX)^2}{2B^2\sigma_x^2} \right]. \end{aligned} \tag{5.50}$$

In altre parole, i valori di $q = BX$ saranno distribuiti normalmente, con centro in $q = BX$ e con larghezza $B\sigma_x$, come mostrato in Figura 5.15. In particolare, l'incertezza in $q = BX$ è B volte quella in X , come la nostra regola in (3.18) avrebbe previsto.

Somma di due grandezze misurate

Come primo esempio non banale di propagazione degli errori, supponiamo di misurare due grandezze indipendenti x e y , e di calcolare la loro somma $x + y$. Supponiamo che le misure di x e y siano normalmente distribuite attorno ai loro valori veri X e Y , con larghezze σ_x e σ_y , come nelle Figure 5.16 (a) e (b), e cercheremo di trovare la distribuzione dei valori calcolati di $x + y$. Quello che troveremo è che i valori di $x + y$ sono normalmente distribuiti, e il loro centro è il valore vero $X + Y$, e che la larghezza della loro distribuzione è

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

come in Figura 5.16 (c). In particolare, questo giustifica la regola del Capitolo 3, che se x e y sono soggetti soltanto ad incertezze indipendenti casuali, allora l'incertezza in $x + y$ è la somma quadratica delle incertezze separate in x e y .

Per semplificare la nostra algebra, assumiamo dapprima che i valori veri X e Y siano entrambi zero. In questo caso la probabilità di ottenere un particolare

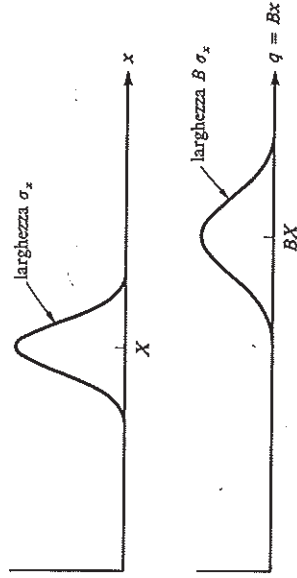


Figura 5.15. Se i valori misurati di x sono normalmente distribuiti con centro $x = X$ e larghezza σ_x , allora i valori calcolati di $q = BX$ (con B fissato e noto) saranno normalmente distribuiti con centro BX e larghezza $B\sigma_x$.

⁷ Qui introduciamo la notazione alternativa $\exp(z)$ per la funzione esponenziale, $\exp(z) = e^z$. Quando l'esponente z diventa complicato, la notazione "exp" è più conveniente da battere a macchina o stampare.

valore di x è

$$P(x) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (5.51)$$

e quella di y è

$$P(y) \propto \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (5.52)$$

Il nostro problema ora è di calcolare la probabilità di ottenere un particolare valore di $x + y$. In primo luogo osserviamo che, dal momento che x e y sono misurati indipendentemente, la probabilità di ottenere qualunque x e y dati è proprio il prodotto di (5.51) e (5.52):

$$P(x, y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right] \quad (5.53)$$

Conoscendo la probabilità di ottenere qualunque x e y , possiamo ora calcolare la probabilità per ogni dato valore di $x + y$. Il primo passo è di riscrivere l'esponente in (5.53) in termini della variabile che ci interessa, $x + y$. Ciò può essere fatto utilizzando l'identità (che il lettore può facilmente verificare)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} &= \frac{(x+y)^2}{A+B} + \frac{(Bx - Ay)^2}{AB(A+B)} \\ &= \frac{(x+y)^2}{A+B} + z^2 \end{aligned} \quad (5.54) \quad (5.55)$$

Nella seconda linea abbiamo introdotto l'abbreviazione z^2 per il secondo termine sulla destra della (5.54), dal momento che il suo valore non ci interessa in alcun modo.

Se sostituiamo la (5.55) nella (5.53), sostituendo A con σ_x^2 e B con σ_y^2 , otteniamo

$$P(x, y) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} - \frac{z^2}{2}\right] \quad (5.56)$$

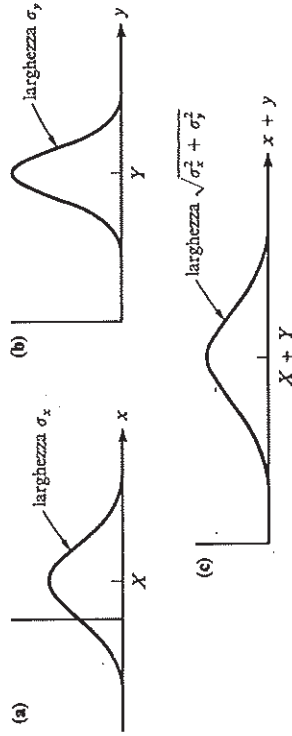


Figura 5.16. Se le misure di x e y sono indipendenti e normalmente distribuite con centri X e Y e larghezza σ_x e σ_y , allora i valori calcolati di $x + y$ sono normalmente distribuiti con centro $X + Y$ e larghezza $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

Questa probabilità di ottenere dati valori di x e y può essere vista come la probabilità di ottenere dati valori di $x + y$ e z . Così possiamo riscrivere la (5.56) come

$$P(x + y, z) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right] \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \quad (5.57)$$

Infine, quello che vogliamo è la probabilità di ottenere un dato valore di $x + y$, "indipendentemente dal valore di z ". Questo si ottiene sommando, o piuttosto integrando, la (5.57) su tutti i possibili valori di z , cioè

$$P(x + y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x + y, z) dz \quad (5.58)$$

Quando integriamo la (5.57) rispetto a z , il fattore $\exp(-z^2/2)$ dà $\sqrt{2\pi}$, e noi troviamo

$$P(x + y) \propto \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right] \quad (5.59)$$

Questo mostra che i valori di $x + y$ sono normalmente distribuiti con larghezza $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ come anticipato.

La nostra dimostrazione è completa quando i valori veri di x e y sono entrambi zero, $X = Y = 0$. Se X e Y sono diversi da zero, possiamo procedere come segue. Dapprima scriviamo

$$x + y = (x - X) + (y - Y) + (X + Y) \quad (5.60)$$

Qui i primi due termini sono centrati sullo zero, con larghezze σ_x e σ_y , per il risultato (5.49). Allora la somma dei primi due termini è normalmente distribuita con larghezza $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$. Il terzo termine nella (5.60) è un numero fissato. Allora, per il risultato (5.49), esso sposta la distribuzione di $(X + Y)$, ma ne lascia immutata la larghezza. In altre parole, i valori di $(x + y)$ come dati dalla (5.60) sono normalmente distribuiti attorno a $(X + Y)$ con larghezza $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$. Questo è il risultato cercato.

Il caso generale

Avendo giustificato la formula di propagazione degli errori per il caso speciale di una somma, possiamo giustificare la formula generale per la propagazione degli errori in modo sorprendentemente semplice. Supponiamo di misurare due grandezze indipendenti x e y i cui valori osservati siano distribuiti normalmente, e di calcolare qualche grandezza $q(x, y)$ in termini di x e y . La distribuzione dei valori di $q(x, y)$ si trova facilmente usando i precedenti tre risultati, come segue.

In primo luogo, le incertezze σ_x e σ_y (le incertezze in x e in y) devono essere piccole. Questo significa che abbiamo a che fare solo con valori di x vicini a X , e di y vicini a Y , e possiamo usare l'approssimazione (3.42) per scrivere

$$q(x, y) \approx q(X, Y) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x,y} (x - X) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{x,y} (y - Y) \quad (5.61)$$

Questa approssimazione è buona poiché gli unici valori di x e y che occorrono significativamente spesso sono vicini a X e Y . Noi abbiamo dato le due derivate parziali con i pedici X e Y per mettere in risalto che le derivate sono calcolate in X e Y e sono quindi numeri fissati.

L'approssimazione (5.61) esprime la grandezza desiderata $q(x, y)$ come la somma di tre termini. Il primo termine $q(X, Y)$ è un numero fissato; così esso sposta semplicemente la distribuzione dei risultati. Il secondo termine è il numero fissato $\delta q/\delta x$ per $(x - X)$, la cui distribuzione ha larghezza σ_x ; così i valori del secondo termine sono centrati su zero, con larghezza

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\sigma_x$$

Analogamente, i valori del terzo termine sono centrati su zero con larghezza

$$\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\sigma_y$$

Combinando i tre termini nella (5.61) e invocando i risultati già stabiliti, concludiamo che i valori di $q(x, y)$ sono distribuiti normalmente attorno al valore vero $q(X, Y)$ con larghezze

$$\sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\right)^2} \tag{5.62}$$

Se identifichiamo le deviazioni standard σ_x e σ_y come le incertezze in x e in y , allora il risultato (5.62) è esattamente la regola (3.47) per la propagazione degli errori casuali, per il caso in cui q è una funzione di due variabili $q(x, y)$. Se q dipende da parecchie variabili, $q(x, y, \dots, z)$, allora l'argomento precedente può essere immediatamente esteso per stabilire la regola generale (3.47) per funzioni di parecchie variabili. Poiché tutte le regole del Capitolo 3 (riguardanti la propagazione degli errori casuali) possono essere derivate dalla (3.47), tutte queste regole sono ora giustificate.

5.7. Deviazione standard della media

Resta da dimostrare ancora un importante risultato riportato nel Capitolo 4. Riguarda la deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}}$. Abbiamo dimostrato (nella Sezione 5.5) che se facciamo N misure x_1, \dots, x_N di una grandezza x (che è normalmente distribuita), allora la miglior stima del valore vero X è la media \bar{x} di x_1, \dots, x_N . Nel Capitolo 4 affermammo che l'incertezza in questa stima è la deviazione standard della media,

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{N} \tag{5.63}$$

Siamo ora pronti a dimostrare questo risultato. La dimostrazione è così sorprendentemente breve che occorre che la seguitate con cura.

Supponiamo che le misure di x siano normalmente distribuite attorno al valor vero X e con parametro di larghezza σ_x . Vogliamo ora conoscere l'affidabilità della "media delle N misure". Per far ciò, naturalmente immaginiamo di ripetere le nostre N misure molte volte; cioè immaginiamo di

compiere un'intera sequenza di esperimenti, in ciascuna delle quali facciamo N misure e calcoliamo la media. Vogliamo ora trovare la distribuzione di queste molte determinazioni della media di N misure. E questo si fa facilmente.

In ciascun esperimento misuriamo N grandezze x_1, \dots, x_N e poi calcoliamo la funzione

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} \tag{5.64}$$

La grandezza calcolata (\bar{x}) è una funzione semplice delle grandezze misurate x_1, \dots, x_N , e possiamo facilmente trovare la distribuzione dei nostri risultati per \bar{x} usando la propagazione degli errori. L'unico aspetto insolito della funzione (5.64) è che tutte le misure x_1, \dots, x_N sono misure della stessa grandezza, con lo stesso valore vero X e la stessa larghezza σ_x .

In primo luogo osserviamo che, poiché ciascuna delle grandezze misurate x_1, \dots, x_N è normalmente distribuita, lo stesso è vero per la funzione \bar{x} data dalla (5.64). In secondo luogo, il valore vero per ciascuno degli x_1, \dots, x_N è X ; così il valore vero di \bar{x} come dato dalla (5.64) è

$$\frac{X + \dots + X}{N} = X$$

Così, dopo aver fatto molte determinazioni della media \bar{x} di N misure, i nostri molti risultati per \bar{x} saranno normalmente distribuiti attorno al valore vero X . L'unico problema restante (ed è il problema più importante) è di trovare la larghezza della nostra distribuzione di risultati. Secondo la (5.62), riscritta per N variabili, la larghezza è

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N}\sigma_{x_N}\right)^2} \tag{5.65}$$

Dal momento che x_1, \dots, x_N sono tutte misure della stessa grandezza x , le loro larghezze sono tutte le stesse e sono tutte uguali a σ_x

$$\sigma_{x_1} = \dots = \sigma_{x_N} = \sigma_x$$

Vediamo anche dalla (5.64) che tutte le derivate parziali nella (5.65) sono le stesse:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} = \frac{1}{N}$$

Allora la (5.65) si riduce a

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2} \\ &= \sqrt{N\frac{\sigma_x^2}{N^2}} \\ &= \sigma_x/\sqrt{N} \end{aligned} \tag{5.66}$$

come richiesto.

Siamo arrivati al risultato cercato (5.66) così rapidamente che probabilmente abbiamo bisogno di una pausa per rivedere cosa esso significhi. Abbiamo immaginato un grande numero di esperimenti, in ciascuno dei quali abbiamo fatto N misure di x e quindi calcolato la media \bar{x} di quelle N misure. Abbiamo mostrato che, dopo aver ripetuto questo esperimento molte volte, i nostri molti risultati per \bar{x} saranno distribuiti normalmente, saranno centrati sul valore vero X , e la larghezza della loro distribuzione è $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{N}$, come mostrato in Figura 5.17 per $N = 10$. Questa larghezza $\sigma_{\bar{x}}$ è il limite di confidenza del 68 per cento per il nostro esperimento. Se troviamo la media di N misure "di nuovo", allora possiamo essere confidenti al 68 per cento che il nostro risultato giace entro una distanza $\sigma_{\bar{x}}$ dal valore vero X . Questo è esattamente quello che intendiamo con "incertezza nella media". Spiega anche chiaramente perché l'incertezza è chiamata la deviazione standard della media.

Con questa semplice ed elegante dimostrazione, abbiamo ora giustificato tutti i risultati riportati nei capitoli precedenti sulle incertezze casuali.

5.8. Confidenza

Possiamo ora ritornare a due problemi sollevati, ma non risolti completamente, nel Capitolo 2. In primo luogo, cosa intendiamo con l'affermazione ora familiare che siamo "ragionevolmente confidenti" che qualche grandezza misurata giaccia nell'intervallo $x_{best} \pm \Delta x$? E, più in generale, come possiamo dare un valore quantitativo alla nostra confidenza in ogni risultato sperimentale?

Per la prima domanda, la risposta dovrebbe ora essere chiara. Se misuriamo una grandezza x parecchie volte (come solitamente si dovrebbe), allora la nostra miglior stima per x è la media \bar{x} , e la sua deviazione standard, $\sigma_{\bar{x}}$, è la nostra miglior misura della sua incertezza. Dovremmo giungere alla conclusione che

$$(\text{valore di } x) = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

intendendo che, dalle nostre osservazioni, ci attendiamo che il 68 per cento di qualunque insieme di misure susseguenti di x , fatte ugualmente accurate, cada nell'intervallo $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$.

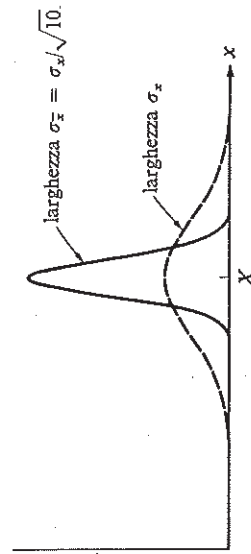


Figura 5.17. Le misure individuali di x sono normalmente distribuite attorno a X con larghezza σ_x (curva tratteggiata). Se usiamo lo stesso apparato sperimentale per fare molte determinazioni della media di 10 misure, allora i risultati \bar{x} saranno normalmente distribuiti attorno a X con larghezza $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{10}$ (curva continua).

Potremmo scegliere di caratterizzare la nostra incertezza differenzialmente. Per esempio, potremmo scegliere come nostra conclusione

$$(\text{valore di } x) = \bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$$

definendo così l'intervallo in cui ci attendiamo che cadano il 95 per cento di tutte le misure confrontabili. Chiaramente il punto essenziale nello stabilire ogni valore misurato è di stabilire un intervallo (o incertezza) e il "livello di confidenza corrispondente a quell'intervallo". La scelta più comune è di dare la deviazione standard del nostro risultato, con il suo significato familiare del limite di confidenza del 68 per cento.

Come fu messo in risalto nel Capitolo 2, quasi tutte le conclusioni sperimentali implicano il confronto di due o più numeri. Con la nostra teoria statistica, possiamo ora dare un significato quantitativo a molti di tali confronti. Qui considereremo proprio un tipo di esperimento, nel quale arriviamo ad un numero e confrontiamo il nostro risultato con qualche risposta nota, attesa. Notiamo che questa descrizione generale riguarda molti esperimenti interessanti. Per esempio, in un esperimento per verificare la conservazione della quantità di moto, possiamo misurare le quantità di moto iniziali e finali, p e p' , per verificare che $p = p'$ (entro gli errori), ma possiamo ugualmente cercare un valore per $(p - p')$ da confrontarsi con il risultato atteso zero. Più in generale, quando vogliamo confrontare due misure che si suppone siano la stessa, possiamo fare la loro differenza e confrontarla con il risultato atteso di zero. Ogni esperimento in cui si misura una grandezza (come g , l'accelerazione di gravità) per la quale è noto un accurato valore accettato è pure un problema di questo tipo, dove il risultato atteso è il valore noto accettato.

Supponiamo che uno studente misuri qualche grandezza x (come la differenza di due quantità di moto che si suppone siano uguali) nella forma

$$(\text{valore di } x) = x_{best} \pm \sigma$$

dove σ denota la deviazione standard del suo risultato (che dovrebbe essere la deviazione standard della media se x_{best} è la media di parecchie misure). Egli ora vuole confrontare questo risultato con la risposta attesa x_{exp} .

Nel Capitolo 2 abbiamo arguito che se la discrepanza $|x_{best} - x_{exp}|$ è minore di (o solo debolmente più grande di) σ , allora l'accordo è soddisfacente, ma se $|x_{best} - x_{exp}|$ è molto più grande di σ , esso non è soddisfacente. Finché funzionano, questi criteri sono corretti; ma essi non danno una misura quantitativa di quanto buono o quanto cattivo sia questo accordo. Nè ci dicono dove tracciare il limite di accettabilità. Una discrepanza di 1.5σ sarebbe soddisfacente? Oppure 2σ ?

Possiamo ora rispondere a queste domande se assumiamo che la misura del nostro studente sia governata da una distribuzione normale (come è certamente ragionevole). Partiamo facendo due ipotesi di lavoro su questa distribuzione:

- (a) la distribuzione è centrata sul risultato atteso x_{exp} ,
- (b) il parametro di larghezza della distribuzione è uguale alla stima σ dello studente.

L'ipotesi (a) è, naturalmente, quello che lo studente spera sia vero. Essa consiste nell'assumere che tutti gli errori sistematici siano stati ridotti ad un livello trascurabile (così che la distribuzione sia centrata sul valore vero) e che il valore vero è proprio x_{exp} (cioè, che le ragioni per aspettarsi x_{exp} sono

corrette). L'ipotesi (b) è una approssimazione, dal momento che σ deve essere una stima della deviazione standard, ma è una approssimazione ragionevole se il numero di misure su cui σ è basato è grande⁶. Prese insieme, le nostre due ipotesi significano assumere che le procedure e i calcoli dello studente sono essenzialmente corretti.

Dobbiamo ora decidere se il valore dello studente x_{best} è un valore ragionevole da ottenere se le nostre ipotesi sono corrette. Se la risposta è sì, allora non vi è ragione di dubitare delle ipotesi, e tutto va bene; se la risposta è no, allora le ipotesi devono essere messe in dubbio, e lo studente deve prendere in esame la possibilità di errori nelle misure o nei calcoli, di errori sistematici non palesi, e della possibilità che sia non corretta la risposta attesa x_{exp} .

Dapprima determiniamo la discrepanza, $|x_{best} - x_{exp}|$, e poi

$$t = \frac{|x_{best} - x_{exp}|}{\sigma} \quad (5.67)$$

il numero di deviazioni standard per cui x_{best} differisce da x_{exp} . Poi, dalla tabella dell'integrale normale degli errori in Appendice A, possiamo trovare la probabilità (date le nostre ipotesi) di ottenere un risultato che differisce da x_{exp} per t o più deviazioni standard. Questo è

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma) = 1 - P(\text{entro } t\sigma) \quad (5.68)$$

Se questa probabilità è grande, allora la discrepanza $|x_{best} - x_{exp}|$ è perfettamente ragionevole, e il risultato x_{best} è accettabile; se la probabilità in (5.68) risulta "irragionevolmente piccola", allora la discrepanza deve essere giudicata "significativa" (cioè, inaccettabile), e il nostro sfortunato studente deve cercare di trovare che cosa vi è stato di sbagliato.

Supponiamo, per esempio, che la discrepanza $|x_{best} - x_{exp}|$ sia una deviazione standard. La probabilità di una discrepanza così grande o più grande è il familiare 32 per cento. Chiaramente una discrepanza di una deviazione standard è del tutto probabile che occorra ed è, naturalmente, non significativa. All'estremo opposto, la probabilità $P(\text{al di fuori di } 3\sigma)$ è proprio lo 0.3 per cento, e, se le nostre ipotesi sono corrette, è piuttosto improbabile ottenere una discrepanza di 3σ . In altro modo, se la discrepanza del nostro studente è 3σ , allora è piuttosto improbabile che le nostre ipotesi fossero corrette.

Il limite tra l'accettabilità e l'inaccettabilità dipende dal livello al di sotto del quale giudichiamo che una discrepanza sia irragionevolmente improbabile. Questo livello è opinabile, e deve essere deciso dallo sperimentatore. Comunque, molti ritengono il 5 per cento un limite conveniente per "irragionevole improbabilità". Se accettiamo questa scelta, allora una discrepanza di 2σ dovrebbe essere inaccettabile, dal momento che $P(\text{al di fuori di } 2\sigma) = 4.6$ per cento. In realtà, dalla Tabella in Appendice A, vediamo che ogni discrepanza più grande di 1.96σ è inaccettabile a questo livello del 5 per cento. Al livello del 2 per cento, qualunque discrepanza più grande di 2.32σ sarebbe inaccettabile, e così via.

⁶ Vogliamo giudicare la ragionevolezza della nostra misura x_{best} , confrontando $|x_{best} - x_{exp}|$ con σ , la nostra "stima" della larghezza della distribuzione normale in questione. Se il numero di misure su cui σ è basato è "piccolo" allora questa stima può essere piuttosto inaffidabile, e i livelli di confidenza saranno corrispondentemente inaccurati (sebbene restino una utile rozza guida). Con un piccolo numero di misure, il calcolo accurato dei limiti di confidenza richiede l'uso della cosiddetta "distribuzione t di Student" che ci permette di valutare le probabili variazioni nella nostra stima σ della larghezza. Vedi H.L. Alder e E.B. Roessler, "Introduction to Probability and Statistics", (W.H. Freeman, 6^a ed., 1977) Capitolo 10.

Vediamo che non abbiamo ancora una chiara e decisiva risposta sul fatto che un certo valore misurato x_{best} è, o non è accettabile. Comunque, la nostra teoria della distribuzione normale ci ha dato una misura chiara e quantitativa della ragionevolezza di un particolare risultato. E questo è il massimo che ci si possa chiedere.

Ci sono, naturalmente, tipi di esperimenti più complessi, la cui analisi dei risultati è corrispondentemente meno semplice. Comunque, la maggior parte dei principi fondamentali sono già stati illustrati dal semplice e importante caso discusso qui. Il lettore che desidera conoscere ulteriori esempi, può trovarne parecchi nella Parte II di questo libro.

Problemi

Nota: Un asterisco indica che il problema è discusso, oppure il suo risultato dato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

***5.1** (Sezione 5.1). Uno studente misura i momenti angolari L_i e L_f di un sistema rotante prima e dopo aver aggiunto una massa addizionale. Per verificare la conservazione del momento angolare, egli calcola $L_i - L_f$ (aspettandosi come risultato 0). Ripete le misure 50 volte, e raccoglie i suoi risultati in intervalli come mostrato in Tabella 5.3, che riporta i suoi risultati (in unità non specificate) dopo 5, 10 e 50 prove. Disegnate un istogramma a intervalli per ciascuno di questi tre casi. (Seegliete con cura le vostre scale in modo che l'area di ciascun rettangolo sia la frazione di eventi nell'intervallo corrispondente).

Tabella 5.3.

Numero dopo	Intervallo									
	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
5 prove	0	1	2	0	1	0	1	0	0	0
10 prove	0	1	2	2	3	1	1	0	0	0
50 prove	1	3	7	8	10	9	6	4	2	2

***5.2** (Sezione 5.2). La distribuzione limite dei risultati in una ipotetica misura ha la forma

$$f(x) = C \quad \text{per } |x| < a \\ = 0 \quad \text{altrove}$$

- Utilizzare la condizione di normalizzazione (5.13) per calcolare la costante C in termini di a .
- Fate uno schizzo della distribuzione limite. Qual è il significato della costante a ?
- Usando le Equazioni (5.15) e (5.16), calcolare la media \bar{x} e la deviazione standard che si dovrebbero trovare dopo molte misure.

5.3 (Sezione 5.3). Usando appropriata carta millimetrata e assi etichettati chiaramente, fare buoni grafici della distribuzione di Gauss

$$f_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

per $X = 2$, $\sigma = 1$ e per $X = 3$, $\sigma = 0.3$. Usate la vostra calcolatrice per calcolare i valori $f_{X,\sigma}(x)$. Se ha due memorie da utilizzare, memorizzate $\sigma\sqrt{2\pi}$ e $-2\sigma^2$; questo renderà più veloci i vostri calcoli. Se tenete presente che la funzione è simmetrica attorno a $x = X$, questo dimezza il numero di calcoli necessari. Mettete entrambi i grafici sullo stesso foglio per confronto.

*5.4 (Sezione 5.3) Se non lo avete ancora fatto, graficate il terzo istogramma del Problema 5.1. Lo studente del Problema 5.1 decide che la distribuzione dei suoi risultati è consistente con la distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ centrata su $X = 0$ con larghezza $\sigma = 3.4$. Disegnate questa distribuzione sullo stesso grafico, e confrontatela con il vostro istogramma. (Leggete i suggerimenti al Problema 5.3. Notate che non avete un modo quantitativo di confrontare i due disegni; tutto quello che potete fare è vedere se la funzione di Gauss "sembra" descrivere l'istogramma soddisfacentemente).

5.5. (Sezione 5.3). La larghezza di una distribuzione di Gauss è usualmente caratterizzata dal parametro σ . Un parametro alternativo con una interpretazione geometrica semplice è la "larghezza totale a metà altezza" (o LTMA). Esso rappresenta la distanza tra i due punti x dove $f_{X,\sigma}(x)$ è la metà del suo valore massimo, come in Figura 5.18. Dimostrate che

$$LTMA = 2\sigma\sqrt{2 \ln 2} = 2.35\sigma$$

Questo significa che le metà altezze sono nei punti $X \pm 1.17\sigma$, o, molto rozzamente, $X \pm \sigma$.

*5.6 (Sezione 5.3). Dare in dettaglio i passi che portano dalla (5.30) alla (5.31) per mostrare che la deviazione standard σ_x di molte misure che sono distribuite normalmente con parametro di larghezza σ è $\sigma_x = \sigma$.

5.7 (Sezione 5.4). Se le misure di qualche grandezza x sono governate dalla distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$, allora la probabilità di ottenere un valore tra $X - t\sigma$ e $X + t\sigma$ è ovviamente

$$P(\text{entro } t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x) dx$$

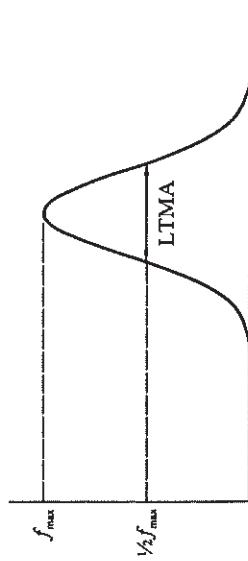


Figura 5.18. La larghezza totale a metà altezza LTMA.

Dimostrare accuratamente, effettuando tutti i cambi di variabile necessari, che

$$P(\text{entro } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2/2} dz \quad (5.69)$$

Con ogni cambio di variabile, verificare accuratamente cosa accade ai nostri limiti di integrazione. L'integrale (5.69) è spesso chiamato la funzione degli errori, denotata $erf(t)$, o integrale normale degli errori.

*5.8 (Sezione 5.4). Uno studente misura una grandezza y molte volte e calcola la sua media come $\bar{y} = 23$ e la sua deviazione standard come $\sigma_y = 1$. Quale frazione dei suoi risultati vi aspettate di trovare tra

- (a) 22 e 24?
- (b) 22.5 e 23.5?
- (c) 21 e 25?
- (d) 21 e 23?
- (e) 24 e 25?

Infine, f entro quali limiti (equidistanti da ogni parte della media) vi aspettate di trovare il 50 per cento delle sue letture?

L'informazione necessaria per risolvere ogni parte di questa domanda è in Figura 5.13. Informazioni più dettagliate per questi generi di probabilità sono nelle Appendici A e B.

5.9 (Sezione 5.4). Un'estesa analisi rivela che le altezze degli uomini in un certo paese sono normalmente distribuite, con media $\bar{h} = 1.75$ m. e deviazione standard $\sigma = 0.05$ m. In un campione casuale di 1.000 uomini, quanti vi attendete che abbiano altezze

- (a) tra 1.70 m. e 1.80 m.?
- (b) più di 1.80 m.?
- (c) più di 1.90 m.?
- (d) tra 1.65 e 1.70?

*5.10 (Sezione 5.5). Supponiamo di avere N misure x_1, \dots, x_N della stessa grandezza x , e di essere convinti che la nostra distribuzione limite sia la funzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$, con X e σ incognite. Il principio della massima verosimiglianza assicura che la miglior stima per la larghezza è il valore di σ per cui la probabilità $F_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N)$ dei valori osservati x_1, \dots, x_N è massima. Differenziate $F_{X,\sigma}(x_1, \dots, x_N)$ nella (5.41) rispetto a σ , e mostrate che il massimo si ha quando σ è dato dalla (5.44). Come discusso dopo la (5.44), questo risultato significa che la miglior stima per σ è la deviazione standard degli N valori osservati x_1, \dots, x_N .

5.11 (Sezione 5.6). Verificare la identità (5.54) usata per giustificare la somma in quadratura quando si propagano errori casuali.

*5.12 (Sezione 5.7). Qui elencate vi sono 40 misure t_1, \dots, t_{40} del tempo che impiega un sasso per cadere da una finestra al suolo (tutte in centesimi di

secondo).

63	58	74	78	70	74	75	82	68	69
76	62	72	88	65	81	79	77	66	76
86	72	79	77	60	70	65	69	73	77
72	79	65	66	70	74	84	76	80	69

- (a) Calcolare la deviazione standard σ_i per le 40 misure.
 (b) Calcolare la media $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{10}$ delle 4 misure in ciascuna delle 10 colonne. Si può ora pensare a questi dati come risultanti da 10 esperimenti, in ciascuno dei quali si è trovata la "media di 4 tempi". Dato il risultato della parte (a), cosa vi aspettate per la deviazione standard delle 10 medie $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{10}$? Qual è?
 (c) Graficare l'istogramma delle 40 singole misure t_1, \dots, t_{40} , e quello delle 10 medie $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{10}$. Usate le stesse scale e intervalli della stessa larghezza per entrambi i grafici, in modo che essi possano essere facilmente confrontati. I limiti dell'intervallo possono essere scelti in vari modi, fra i quali il più semplice è forse quello di porre un limite coincidente con la media di tutte le 40 misure (72.90), e di usare intervalli la cui larghezza è la deviazione standard delle dieci medie $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{10}$.

*5.13 (Sezione 5.8). Uno studente misura g , l'accelerazione di gravità, ripetutamente e con cura, e ottiene un risultato finale di 9.5 m/sec^2 con una deviazione standard di 0.1. Se la sua misura fosse normalmente distribuita, con centro al valore accettato 9.8 e con larghezza 0.1, quale sarebbe la probabilità di ottenere un risultato che differisce da 9.8 di tanto quanto il suo (o di più)? Assumendo che egli non abbia fatto errori banali, pensate che sia probabile che il suo esperimento sia affetto da errori sistematici non palesi?

5.14 (Sezione 5.8). Due studenti misurano la stessa grandezza x , e ottengono i risultati finali $x_A = 13 \pm 1$ e $x_B = 15 \pm 1$, dove le incertezze associate sono le deviazioni standard.

- (a) Assumendo che tutti gli errori siano indipendenti e casuali, qual è la differenza $x_A - x_B$ e qual è la sua incertezza?
 (b) Assumendo che tutte le grandezze siano normalmente distribuite come atteso, quale sarebbe la probabilità di ottenere una discrepanza grande come la loro? Consideri la loro discrepanza significativa (al livello del 5 per cento)?

*5.15 (Sezione 5.8). Uno sperimentatore desidera verificare la conservazione dell'energia in una certa reazione nucleare, e misura le energie iniziale e finale come $E_i = 75 \pm 3 \text{ MeV}$ e $E_f = 60 \pm 9 \text{ MeV}$, dove entrambe le incertezze associate sono le deviazioni standard dei risultati. Questa discrepanza è significativa (a livello del 5 per cento)? Spiegate il vostro ragionamento chiaramente.

PARTE SECONDA

6. Rigetto di dati
7. Medie pesate
8. Metodo dei minimi quadrati
9. Covarianza e correlazione
10. La distribuzione binomiale
11. La distribuzione di Poisson
12. Il test χ^2 per una distribuzione

Se avete letto e capito il Capitolo 5, siete ora pronti a studiare con sorprendente facilità argomenti più avanzati.

I sette capitoli della Parte II presentano sette di tali argomenti, alcuni dei quali sono applicazioni della teoria statistica già sviluppata, altri sono ulteriori estensioni di quella teoria. Tutti sono importanti, e lo studente serio è obbligato a studiarli tutti prima o poi. D'altra parte, potreste volerli imparare non necessariamente tutti in una volta. Per questo motivo sono stati organizzati in brevi capitoli indipendenti, che possono essere studiati in qualunque ordine, secondo le vostre necessità ed interessi.

6. Rigetto di dati

In questo capitolo affrontiamo lo spinoso problema di scartare o meno una misura che appare così irragionevole da far pensare ad un errore.

6.1. Il problema del rigetto dei dati

Talvolta accade che una misura in una serie di misure sembra essere in disaccordo stridente con tutte le altre.

Quando ciò accade, lo sperimentatore deve decidere se la misura anomala è risultata da qualche errore e deve pertanto essere rigettata, oppure se è una misura "bona fide" che deve essere usata con tutte le altre. Per esempio, immaginiamo di fare sei misure del periodo di un pendolo e di ottenere i risultati (tutti in secondi)

3.8, 3.5, 3.9, 3.9, 3.4, 1.8 (6.1)

In questo esempio il valore 1.8 è marcatamente diverso da tutti gli altri, e dobbiamo decidere cosa farne.

Sappiamo dal Capitolo 5 che una misura legittima "può" deviare significativamente dalle altre misure della stessa grandezza. Nondimeno, una discrepanza legittima grande quanto l'ultima misura in (6.1) è "molto improbabile"; così siamo inclini a sospettare che il tempo 1.8 sec. sia risultato da qualche errore nascosto o da qualche altra causa esterna. Forse possiamo aver semplicemente sbagliato la lettura dell'ultimo tempo, oppure verosimilmente il nostro cronometro elettrico di fatto si è fermato brevemente durante l'ultima misura a causa di una momentanea mancanza di alimentazione.

Se abbiamo registrato tutto accuratamente, talvolta possiamo essere in grado di stabilire tale causa definita per la misura anomala. Per esempio, la nostra registrazione potrebbe mostrare che l'ultima misura di tempo nella (6.1) è stata fatta con un altro cronometro, e una verifica seguente potrebbe mostrare che esso marcia lentamente. In questo caso la misura anomala dovrebbe definitivamente essere rigettata.

Sfortunatamente, di solito non è possibile trovare una causa esterna per un risultato anomalo. Dobbiamo quindi decidere se rigettare o no tale risultato semplicemente esaminando i risultati stessi, e qui la nostra conoscenza della distribuzione di Gauss si rivela utile.

Il rigetto di dati è un problema dibattuto, sul quale gli esperti sono in disaccordo. È anche un problema "importante". Nel nostro esempio, la miglior stima per il periodo del pendolo cambia significativamente se scartiamo il dato sospetto 1.8 sec. La media di tutte le sei misure è 3.4 sec., mentre quella delle prime cinque è 3.7 sec., una differenza apprezzabile.

Inoltre, la decisione di scartare dei dati è in ultima analisi soggettiva, e lo scienziato che prende questa decisione può a ragione essere accusato da altri scienziati di "preffissare" i suoi dati. La situazione è peggiorata dalla possibilità che il risultato anomalo possa riflettere qualche importante effetto. Invero, molte importanti scoperte scientifiche sono apparse all'inizio come misure anomale che sembravano errori. Nel gettar via il tempo 1.8 sec. nell'esempio (6.1), potremmo star gettando via la parte più interessante dei dati.

Di fatto, trovandosi con dati come quelli in (6.1), l'unico comportamento realmente onesto è di ripetere la misura molte, molte volte. Se l'anomalia si ripete, allora presumibilmente riusciremo a rintracciare la causa, sia essa uno sbaglio o un effetto fisico reale; se essa non ricorre, allora, avendo fatto, diciamo, 100 misure, non ci sarà una differenza significativa nel nostro risultato finale sia che includiamo l'anomalia o no.

Nondimeno, spesso è poco pratico (specialmente in un corso di laboratorio) ripetere una misura 100 volte ogni volta che un risultato sembra sospetto. Abbiamo quindi bisogno di qualche criterio per rigettare un risultato sospetto. Ci sono vari criteri, alcuni piuttosto complicati. Il criterio che ora descriviamo è chiamato criterio di Chauvenet, e fornisce un'applicazione semplice ed istruttiva della distribuzione di Gauss.

6.2. Criterio di Chauvenet

Ritorniamo alle sei misure dell'esempio (6.1):

$$3.8, 3.5, 3.9, 3.9, 3.4, 1.8$$

Se assumiamo per ora che queste siano sei misure legittime di una grandezza x , allora possiamo calcolare la media \bar{x} e la deviazione standard σ_x

$$\bar{x} = 3.4 \text{ sec} \quad (6.2)$$

$$\sigma_x = 0.8 \text{ sec} \quad (6.3)$$

Possiamo ora quantificare fino a che punto la misura sospetta, 1.8, è anomala. Essa differisce dalla media 3.4 di 1.6, o di due deviazioni standard. Se assumiamo che le misure siano governate da una distribuzione di Gauss con centro e larghezza dati dalle (6.2) e (6.3), allora possiamo calcolare la probabilità di ottenere misure che differiscono al minimo di questa quantità dalla media. Secondo le probabilità mostrate in Figura 5.13, abbiamo

$$\begin{aligned} P(\text{al di fuori di } 2\sigma_x) &= 1 - P(\text{entro } 2\sigma_x) \\ &= 1 - 0.95 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

In altre parole, assumendo che i valori (6.2) e (6.3) per \bar{x} e σ_x siano legittimi, dovremmo aspettarci che una misura ogni 20 differisca dalla media almeno di quanto differisce il sospetto 1.8 sec. Se abbiamo fatto 20 o più misure, dovremmo realmente "aspettarci" di ottenere una o più misure cattive come 1.8 sec., e non vi sarebbe ragione di rigettarla. Ma noi abbiamo fatto soltanto sei misure; così il numero atteso di misure cattive almeno quanto 1.8 sec. è di

fatto

$$0.05 \times 6 = 0.3$$

Cioè, in sei misure, dovremmo aspettarci (in media) soltanto $\frac{1}{3}$ di una misura cattiva come il sospetto 1.8 sec.

Questo risultato ci mette a confronto quantitativamente con la "mancanza di ragionevolezza" della nostra misura sospetta. Se scegliamo di considerare $\frac{1}{3}$ di una misura come "ridicolamente improbabile", allora concluderemo che il valore 1.8 sec non è una misura legittima e dovrebbe essere rigettato.

La decisione di dove porre il limite di "ridicola improbabilità" spetta allo sperimentatore. Il criterio di Chauvenet, come viene dato normalmente, stabilisce che se il numero atteso di misure cattive almeno quanto la misura sospetta è minore di $\frac{1}{3}$, allora la misura sospetta dovrebbe essere rigettata. Ovviamente la scelta di $\frac{1}{3}$ è arbitraria; ma anche ragionevole e può essere difesa.

L'applicazione del criterio di Chauvenet a un problema generale può ora essere descritta facilmente. Supponiamo di fare N misure

$$x_1, \dots, x_N$$

della stessa grandezza x . Da tutte le N misure, calcoliamo \bar{x} e σ_x . Se una delle misure (la chiamiamo x_{sus}) differisce da \bar{x} tanto da sembrare sospetta, allora in primo luogo calcoliamo

$$t_{\text{sus}} = \frac{x_{\text{sus}} - \bar{x}}{\sigma_x} \quad (6.4)$$

il numero di deviazioni standard di cui x_{sus} differisce da \bar{x} . Poi troviamo (da Figura 5.13 o dalla Tabella più completa in Appendice A) la probabilità P (al di fuori di $t_{\text{sus}}\sigma_x$) che una misura legittima differisca da \bar{x} di t_{sus} volte la deviazione standard (o più). Infine, moltiplichiamo per N , il numero totale di misure, per arrivare a

$$n \text{ (peggiori di } x_{\text{sus}}) = NP \text{ (al di fuori di } t_{\text{sus}}\sigma_x)$$

Questo n è il numero di misure che ci si attende siano cattive almeno quanto x_{sus} . Se n è minore di $\frac{1}{3}$, allora x_{sus} non segue il criterio di Chauvenet e deve essere rigettata.

Dopo aver rigettato le misure che non seguono il criterio di Chauvenet, naturalmente si ricalcolano \bar{x} e σ_x dai dati restanti. Il valore risultante di σ_x sarà più piccolo di quello originale, e può accadere che, con il nuovo σ_x , alcune altre misure non seguano il criterio di Chauvenet. Comunque, la maggior parte degli esperti concordano sul fatto che il criterio di Chauvenet non debba essere applicato una seconda volta usando i valori ricalcolati di \bar{x} e σ_x .

Molti scienziati pensano che il rigetto di dati "non è mai" giustificato, a meno che non vi sia una evidenza "esterna" che il dato in questione è scorretto. Forse una posizione più moderata è quella di utilizzare il criterio di Chauvenet per identificare dati che almeno potrebbero essere "considerati" candidati per il rigetto. Lo studente accurato allora potrebbe fare i calcoli due volte, una includendo i dati in discussione e un'altra senza di essi, per vedere quanto i valori sospetti influenzano realmente la conclusione finale.

6.3. Un esempio

Uno studente fa 10 misure di una lunghezza x e ottiene i risultati (tutti in mm)

46, 48, 44, 38, 45, 47, 58, 44, 45, 43

Notando che il valore 58 sembra grande in modo anomalo, egli riguarda i suoi appunti, ma non trova evidenza del fatto che il risultato sia causato da uno sbaglio.

Applica allora il criterio di Chauvenet. Cosa conclude?

Accettando provvisoriamente tutte le dieci misure, egli calcola

$$\bar{x} = 45.8 \quad \text{e} \quad \sigma_x = 5.1$$

La differenza fra il valore sospetto $x_{\text{sus}} = 58$ e la media $\bar{x} = 45.8$ è 12.2, o 2.4 deviazioni standard; cioè

$$\frac{x_{\text{sus}} - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{58 - 45.8}{5.1} = 2.4$$

Riferendosi alla tabella in Appendice A, vede che la probabilità che una misura differisca da \bar{x} di $2.4 \sigma_x$ o più è

$$\begin{aligned} P \text{ (al di fuori di } 2.4\sigma) &= 1 - P \text{ (entro } 2.4\sigma) \\ &= 1 - 0.984 \\ &= 0.016 \end{aligned}$$

In dieci misure allora dovrebbe aspettarsi di trovare soltanto 0.16 di una misura cattiva quanto il suo risultato sospetto. Dal momento che questo è minore del numero 4 stabilito dal criterio di Chauvenet, egli dovrebbe almeno considerare di rigettare il risultato.

Il suo successivo risultato molto sospetto è 38, che è 1.5 deviazioni standard lontano dalla media $\bar{x} = 45.8$. Un calcolo analogo mostra che, fra 10 misure, egli dovrebbe aspettarsene 1.3 cattive quanto questa; così questo risultato è del tutto accettabile. Se decide di rigettare il sospetto 58, allora deve ricalcolare \bar{x} e σ_x come

$$\bar{x} = 44.4 \quad \text{e} \quad \sigma_x = 2.9$$

Come ci si doveva aspettare, la sua media cambia un po', e la sua deviazione standard diminuisce apprezzabilmente.

Problemi

Nota: Un asterisco indica che il problema è discusso, oppure la sua risposta è data, nella sezione Risposte alla fine del libro.

6.1 (Sezione 6.2). Una studentessa entusiasta compie 50 misure del calore Q sviluppato in un certo processo. La sua media e deviazione standard sono $\bar{Q} = 4.8$ e $\sigma_Q = 0.4$, entrambi in calorie.

(a) Assumendo che le sue misure siano governate dalla distribuzione normale, trovare la probabilità che una misura differisca da \bar{Q} di 0.8 calorie o più. Quante misure la studentessa dovrebbe aspettarsi che differiscano da \bar{Q} di 0.8? Se una delle sue misure è 4.0 cal, ed ella decide di usare il criterio di Chauvenet, dovrebbe rigettare questa misura?

(b) Se una delle sue misure è 6.0 cal, dovrebbe rigettarla?

*6.2 (Sezione 6.2). Uno studente misura un certo voltaggio V dieci volte, con i risultati (in volts)

0.86, 0.83, 0.87, 0.84, 0.82, 0.95, 0.83, 0.85, 0.89, 0.88

(a) Calcolare la media \bar{V} e la deviazione standard σ_V di questi risultati.

(b) Se egli decide di usare il criterio di Chauvenet, dovrebbe rigettare la lettura di 0.95 volts? Spiegate il vostro ragionamento chiaramente.

*6.3 (Sezione 6.2). Uno studente fa 14 misure del periodo di un oscillatore smorzato con i risultati (in decimi di secondo)

7, 3, 9, 3, 6, 9, 8, 7, 8, 12, 5, 9, 9, 3

Accorgendosi che il risultato 12 è sospettosamente alto, egli decide di applicare il criterio di Chauvenet. Rigetta lo studente il risultato sospetto? Quanti risultati dovrebbe aspettarsi che distino dalla media quanto 12?

6.4 (Sezione 6.2). Il criterio di Chauvenet definisce un limite al di fuori del quale una misura deve essere considerata da rigettare. Se facciamo dieci misure e una di esse differisce dalla media di più di circa due volte la deviazione standard (in una qualunque direzione), allora quella misura è considerata da rigettare; per 20 misure, il limite corrispondente è circa 2.2 deviazioni standard. Fare una tabella che mostri il "limite di rigettabilità" per 5, 10, 15, 20, 50, 100, 200, e 1000 misure. (Usare la tabella della funzione degli errori in Appendice A).

7. Medie pesate

7.2. La media pesata

Possiamo risolvere il nostro problema facilmente utilizzando il principio della massima verosimiglianza, come abbiamo fatto in Sezione 5.5. Se assumiamo che entrambe le misure siano governate dalla distribuzione di Gauss e denotiamo il valore vero incognito di x con X , allora la probabilità dello studente A di ottenere il suo particolare valore x_A è

$$P_X(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-\frac{(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2}}, \quad (7.3)$$

è quella dello studente B di ottenere il suo valore osservato x_B è

$$P_X(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-\frac{(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}}. \quad (7.4)$$

Abbiamo indicato esplicitamente, con il pedice X , che queste probabilità dipendono dal valore reale incognito. (Dipendono anche dalle rispettive larghezze, σ_A e σ_B , ma questo non lo abbiamo indicato).

La probabilità che A trovi il valore x_A e B il valore di x_B è proprio il prodotto delle due probabilità (7.3) e (7.4). In un modo che dovrebbe ora essere familiare, questo prodotto comprenderà una funzione esponenziale il cui esponente è la somma dei due esponenti in (7.3) e (7.4). Scriviamo ciò come

$$P_X(x_A, x_B) = P_X(x_A)P_X(x_B) \\ \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-x^2/2}, \quad (7.5)$$

dove abbiamo introdotto la conveniente abbreviazione χ^2 (chi quadrato) per l'esponente

$$\chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A} \right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B} \right)^2. \quad (7.6)$$

Questa importante grandezza è la somma dei quadrati delle deviazioni da X delle due misure, ciascuna divisa per la sua corrispondente incertezza. Essa è talvolta chiamata proprio la "somma dei quadrati".

Il principio della massima verosimiglianza asserisce, proprio come prima, che la nostra miglior stima per il valore vero incognito X è quel valore per il quale le effettive osservazioni x_A e x_B hanno la massima probabilità. Ciò, la miglior stima per X è il valore per il quale la probabilità (7.5) è massima o, analogamente, l'esponente χ^2 è minimo. (Poiché massimizzare la probabilità equivale a minimizzare la "somma dei quadrati" χ^2 , questo metodo per la stima di X è talvolta chiamato il "metodo dei minimi quadrati"). Così, per trovare la migliore stima, differenziamo semplicemente la (7.6) rispetto a X e poniamo la derivata uguale a zero,

$$2 \frac{x_A - X}{\sigma_A^2} + 2 \frac{x_B - X}{\sigma_B^2} = 0.$$

La soluzione di questa equazione per X è la miglior stima x_{best} e si vede

In questo capitolo affrontiamo il problema di combinare due o più misure separate e indipendenti di una singola grandezza fisica. Troveremo che la miglior stima di quella grandezza, basata su parecchie misure, è una appropriata "media pesata" di quelle misure.

7.1. Il problema di combinare misure separate

Capita spesso che una grandezza fisica sia misurata parecchie volte, magari in parecchi laboratori differenti, e sorge il problema di come combinare queste misure per ottenere una singola migliore stima. Supponiamo, per esempio, che due studenti, A e B , misurino una grandezza x con cura e ottengano questi risultati:

$$\text{Studente A: } x = x_A \pm \sigma_A \quad (7.1)$$

$$\text{Studente B: } x = x_B \pm \sigma_B \quad (7.2)$$

Ciascuno di questi risultati probabilmente sarà a sua volta il risultato di parecchie misure, nel qual caso x_A sarà la media di tutte le misure di A e σ_A la deviazione standard della media (è analogamente per x_B e σ_B). Il problema è trovare il modo migliore di combinare x_A e x_B per ottenere una singola miglior stima di x .

Prima di rispondere a questa domanda, notiamo che se la discrepanza $x_A - x_B$ tra le due misure è molto più grande di entrambe le incertezze σ_A e σ_B , allora dovremmo sospettare che è stato fatto qualcosa di sbagliato in almeno una delle misure. In questa situazione dovremmo dire che le due misure sono "inconsistenti", e dovremmo esaminare entrambe le misure con cura per vedere se una di esse (od entrambe) è stata soggetta ad errori sistematici non palesi. Supponiamo, comunque, che le due misure (7.1) e (7.2) siano "consistenti", cioè, la discrepanza $x_A - x_B$ "non" è significativamente più grande di σ_A e σ_B . Allora ha senso chiedersi qual è la miglior stima x_{best} del valore vero X , basandosi sulle due misure. Il primo impulso potrebbe essere quello di usare la media $(x_A + x_B)/2$ delle due misure. Comunque, una piccola riflessione dovrebbe suggerire che ciò è non conveniente se le due incertezze σ_A e σ_B non sono uguali. La semplice media $(x_A + x_B)/2$ dà uguale importanza ad entrambe le misure, mentre a quella che è più precisa dovrebbe in qualche modo essere dato maggior peso.

facilmente che è

$$x_{\text{best}} = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2} \right) \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \right)^{-1} \quad (7.7)$$

Questo risultato piuttosto ostico può essere reso più semplice se definiamo i "pesi"

$$w_A = \frac{1}{\sigma_A^2} \quad \text{e} \quad w_B = \frac{1}{\sigma_B^2} \quad (7.8)$$

Sostituendo nella (7.7), otteniamo

$$x_{\text{best}} = \frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B} \quad (7.9)$$

Se le due misure originali sono ugualmente precise ($\sigma_A = \sigma_B$ e quindi $w_A = w_B$), il nostro risultato si riduce alla semplice media $(x_A + x_B)/2$. In generale, la (7.9) è una "media pesata"; essa è analoga alla formula per il centro di gravità di due corpi, dove w_A e w_B sono i pesi reali dei due corpi, e x_A e x_B le loro posizioni. Qui i "pesi" sono l'inverso dei quadrati delle incertezze nelle misure originali, come in (7.8). Se la misura di A è più precisa di quella di B, allora $\sigma_A < \sigma_B$ e quindi $w_A > w_B$; così la miglior stima x_{best} è più vicina a x_A che a x_B , proprio come dovrebbe essere.

La nostra analisi può essere generalizzata per combinare parecchie misure di una singola grandezza. Supponiamo di avere N misure separate di una grandezza x

$$x_1 \pm \sigma_1, \quad x_2 \pm \sigma_2, \dots, \quad x_N \pm \sigma_N$$

con le loro incertezze corrispondenti $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Ragionando come prima, troviamo che la miglior stima basata su questa misura è la media pesata

$$x_{\text{best}} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (7.10)$$

dove i "pesi w_i " sono l'inverso dei quadrati delle incertezze corrispondenti,

$$w_i = 1/\sigma_i^2 \quad (7.11)$$

per $i = 1, 2, \dots, N$.

Poiché il peso $w = 1/\sigma_i^2$ connesso a ciascuna misura implica il "quadrato" dell'incertezza corrispondente σ_i , una misura che sia molto meno precisa delle altre contribuisce molto poco al risultato finale (7.10). Per esempio, se una misura è quattro volte meno precisa delle restanti, allora il suo peso è sedici volte minore degli altri pesi, e per molti scopi questa misura potrebbe semplicemente essere ignorata.

Dal momento che il risultato finale (7.10) per x_{best} è una funzione semplice

dei valori originali misurati x_1, \dots, x_N , è facile calcolare l'incertezza nel nostro risultato utilizzando la propagazione degli errori. Il Problema 7.5 vi chiederà di verificare che l'incertezza nel risultato (7.10) per x_{best} è

$$\sigma_{x_{\text{best}}} = \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^{-1/2}, \quad (7.12)$$

dove è, come al solito, $w_i = 1/\sigma_i^2$.

7.3. Un esempio

Tre studenti misurano una resistenza parecchie volte e ottengono i seguenti tre risultati (in ohms):

(valore del primo studente per R) = 11 ± 1 ;

(valore del secondo studente per R) = 12 ± 1 ;

(valore del terzo studente per R) = 10 ± 3 .

Dati questi tre risultati, qual è la miglior stima per la resistenza R ?

Le tre incertezze $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono 1, 1, e 3. I tre pesi, $w_i = 1/\sigma_i^2$, sono quindi

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = \frac{1}{9}$$

Così secondo la (7.10) la stima migliore è

$$R_{\text{best}} = \frac{\sum w_i R_i}{\sum w_i} = \frac{(1 \times 11) + (1 \times 12) + (\frac{1}{9} \times 10)}{1 + 1 + \frac{1}{9}} = 11.42 \text{ ohms.}$$

L'incertezza in questo risultato è data dalla (7.12) come

$$\sigma_{R_{\text{best}}} = \left(\sum w_i \right)^{-1/2} = \left(1 + 1 + \frac{1}{9} \right)^{-1/2} = 0.69$$

Così il nostro risultato finale è

$$R = 11.4 \pm 0.7 \text{ ohms.}$$

È interessante vedere quale risultato otterremmo se ignorassimo completamente la misura del terzo studente, che è tre volte meno accurata e quindi nove volte meno importante. In questo caso un semplice calcolo dà $R_{\text{best}} = 11.50$ (da confrontarsi con 11.42) con una incertezza di 0.71 (da confrontarsi con 0.69). Ovviamente la terza misura non ha un grosso effetto.

Problemi

Nota. Un asterisco indica che il problema è discusso, oppure il suo risultato è dato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

*7.1 (Sezione 7.2)

(a) Due misure della velocità del suono u danno i risultati 334 ± 1 e 336 ± 2 (entrambe in m/sec). Le considerereste consistenti? Se è così, calcolate la miglior stima per u e la sua incertezza.

(b) Ripetete la parte (a) per i risultati 334 ± 1 e 336 ± 5 . In questo caso vale la pena di includere il secondo risultato?

*7.2 (Sezione 7.2). Due studenti misurano una resistenza con metodi diversi. Ognuno fa dieci misure e calcola la media e la deviazione standard della media, con questi risultati:

$$\begin{array}{ll} \text{Studente A,} & R = 72 \pm 8 \text{ ohms;} \\ \text{Studente B,} & R = 78 \pm 5 \text{ ohms;} \end{array}$$

(a) Includendo entrambe le misure, quali sono la miglior stima di R e la sua incertezza?

(b) Quante misure circa dovrebbe fare lo studente A (usando la sua stessa tecnica) per ottenere il suo risultato con lo stesso peso di quello di B?

7.3 (Sezione 7.2). Trovare la miglior stima e la sua incertezza basandosi sulle seguenti quattro misure di una grandezza:

$$1.4 \pm 0.5, \quad 1.2 \pm 0.2, \quad 1.0 \pm 0.25, \quad 1.3 \pm 0.2$$

7.4 (Sezione 7.2). Supponiamo che N misure della stessa grandezza x abbiano tutte la stessa incertezza. Mostrare chiaramente che in questa situazione la media pesata (7.10) si riduce alla media ordinaria, $\bar{x} = (\sum x_i)/N$, e che l'espressione (7.12) per l'incertezza si riduce alla familiare deviazione standard della media.

*7.5 (Sezione 7.2). Date N misure x_1, \dots, x_N di una grandezza x con incertezze $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, la miglior stima per x è data dalla (7.10), $x_{\text{best}} = (\sum w_i x_i) / (\sum w_i)$, con i pesi $w_i = 1/\sigma_i^2$. Essa definisce x_{best} come una funzione di x_1, \dots, x_N . Usate la formula (3.47) per la propagazione degli errori per mostrare che l'incertezza in x_{best} è data dalla (7.12) come

$$\sigma_{x_{\text{best}}} = \left(\sum w_i \right)^{-1/2}.$$

8. Metodo dei minimi quadrati

Nella nostra discussione dell'analisi statistica dei dati, ci siamo finora soffermati esclusivamente sulla misura ripetuta di una singola grandezza, non perché l'analisi di molte misure di una grandezza è il problema più interessante in statistica, ma perché questo semplice problema deve essere ben capito prima di poter discutere problemi più generali. Siamo ora pronti per discutere il nostro primo, e molto importante, problema più generale.

8.1. Dati che dovrebbero adattarsi ad una linea retta

Uno dei più comuni ed interessanti tipi di esperimento riguarda la misura di parecchi valori di due diverse variabili fisiche, per investigare la relazione matematica tra le due variabili. Per esempio, si potrebbe lasciar cadere un sasso da varie diverse altezze h_1, \dots, h_N e misurare i tempi di caduta corrispondenti t_1, \dots, t_N per vedere se le altezze e i tempi sono connessi dalla relazione attesa $h = \frac{1}{2}gt^2$.

Probabilmente gli esperimenti più importanti di questo tipo sono quelli in cui la relazione attesa è "lineare", e questo è il caso che consideriamo per primo. Per esempio, se crediamo che un corpo stia cadendo con accelerazione costante g , allora la sua velocità v dovrebbe essere una funzione lineare del tempo t ,

$$v = v_0 + gt$$

Più in generale, consideriamo due variabili fisiche qualsiasi x e y che supponiamo siano connesse da una relazione lineare della forma

$$y = A + Bx \quad (8.1)$$

dove A e B sono costanti. Sfortunatamente, vengono usate molte notazioni diverse per rappresentare una relazione lineare; state attenti a non confondere la forma (8.1) con la uguaglianza popolare $y = ax + b$.

Se le due variabili y e x sono in relazione lineare come nella (8.1), allora un grafico di y in funzione di x dovrebbe essere una linea retta che ha pendenza B e interseca l'asse y in $y = A$. Se misurassimo N diversi valori x_1, \dots, x_N e i valori corrispondenti y_1, \dots, y_N , e se le nostre misure non fossero soggette ad incertezze, allora ciascuno dei punti (x_i, y_i) dovrebbe giacere esattamente sulla retta $y = A + Bx$, come in Figura 8.1 (a). In pratica, "ci sono" incertezze, e il massimo che possiamo aspettarci è che la distanza di ciascun punto (x_i, y_i) dalla retta sarà ragionevole confrontata con le incertezze, come in Figura 8.1 (b).

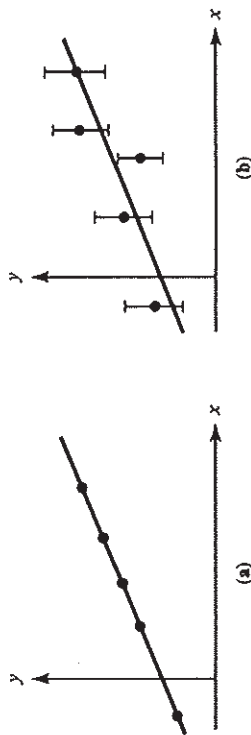


Figura 8.1. (a) Se le due variabili y e x sono in relazione lineare come nella Equazione (8.1), e se non vi fossero incertezze sperimentali, allora i punti misurati (x_i, y_i) dovrebbero giacere tutti esattamente sulla retta $y = A + Bx$. (b) In pratica ci sono sempre incertezze, che possono essere rappresentate con barre di errore, e ci si può aspettare soltanto che i punti (x_i, y_i) giacciono ragionevolmente vicino alla retta. Qui viene mostrato il caso in cui soltanto y è soggetto ad incertezze apprezzabili.

Quando facciamo una serie di misure del genere ora descritto, possiamo porci due possibili domande. In primo luogo, se noi prendiamo per garantito che y e x "sono" in relazione lineare, allora il problema interessante è di trovare la linea retta $y = A + Bx$ che meglio si adatta alle misure; cioè trovare la miglior stima per le costanti A e B basandoci sui dati $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Questo problema può essere affrontato graficamente, come discusso brevemente in Sezione 2.6. Esso può anche essere trattato analiticamente, per mezzo del principio della massima verosimiglianza. Questo metodo analitico è trovare la miglior linea retta che interpola una serie di punti sperimentali è chiamato "regressione lineare", o "curva dei minimi quadrati per una retta", ed è l'argomento principale di questo capitolo.

La seconda domanda che possiamo porci è se i valori misurati $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ soddisfano realmente la nostra attesa che y sia lineare in x . Possiamo dapprima trovare la retta che meglio interpola i dati, ma dobbiamo poi dare qualche misura di "quanto bene" questa retta si adatta ai dati. Affronteremo questo secondo problema nel Capitolo 9.

8.2. Calcolo delle costanti A e B

Ritorniamo ora al problema di trovare la miglior linea retta $y = A + Bx$ per interpolare un insieme di punti misurati $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Per semplificare la nostra discussione, supporremo che, sebbene le nostre misure di y siano soggette a qualche incertezza, l'incertezza nelle nostre misure di x è trascurabile. Questa è spesso un'ipotesi ragionevole, poiché le incertezze in una variabile sono spesso molto più grandi di quelle nell'altra, che noi possiamo quindi con sicurezza ignorare. Assumeremo inoltre che le incertezze in y abbiano tutte la stessa grandezza. (Anche questa è un'ipotesi ragionevole in molti esperimenti, ma se le incertezze sono diverse, allora la nostra analisi può essere generalizzata pesando le misure appropriatamente; vedi Problema 8.4). Più specificamente, assumiamo che la misura di ogni y_i sia governata dalla distribuzione di Gauss, con lo stesso parametro di larghezza σ_y , per tutte le misure.

Se conosciamo le costanti A e B , allora per ogni dato valore x_i (che assumiamo non abbia errore), potremmo calcolare il valore vero del corrispon-

dente y_i .

$$(\text{valore vero per } y_i) = A + Bx_i \tag{8.2}$$

La misura di y_i è governata da una distribuzione normale centrata su questo valore vero, con parametro di larghezza σ_y . Allora, la probabilità di ottenere il valore osservato y_i è

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-\frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{2\sigma_y^2}}, \tag{8.3}$$

dove i pedici A e B indicano che questa probabilità dipende dai valori (incogniti) di A e B . La probabilità di ottenere il nostro insieme completo di misure y_1, \dots, y_N è il prodotto

$$P_{A,B}(y_1, \dots, y_N) = P_{A,B}(y_1) \cdots P_{A,B}(y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}, \tag{8.4}$$

dove l'esponente è dato da

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}. \tag{8.5}$$

Nel modo ormai familiare, le migliori stime per le costanti incognite A e B , basate sulle misure date, sono quei valori di A e B per i quali la probabilità $P_{A,B}(y_1, \dots, y_N)$ è massima, o per i quali la somma dei quadrati χ^2 in (8.5) è minima (motivo per il quale il metodo è noto come curva dei minimi quadrati). Per trovare questi valori, differenziamo χ^2 rispetto ad A e B e poniamo le derivate uguali a zero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = (-2/\sigma_y^2) \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i) = 0 \tag{8.6}$$

e

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = (-2/\sigma_y^2) \sum_{i=1}^N x_i (y_i - A - Bx_i) = 0. \tag{8.7}$$

Queste due equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B :

$$AN + B \sum x_i = \sum y_i \tag{8.8}$$

e

$$A \sum x_i + B \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \tag{8.9}$$

(Da ora in avanti omettiamo i limiti $i = 1$ a N dai segni di sommatoria \sum . Queste due equazioni, note come "equazioni normali", possono essere risolte

facilmente per dare "la stima dei minimi quadrati per le costanti A e B ".

$$A = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta} \quad (8.10)$$

$$B = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta} \quad (8.11)$$

dove abbiamo introdotto la conveniente abbreviazione

$$\Delta = N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2 \quad (8.12)$$

I risultati (8.10) e (8.11) danno le migliori stime per le costanti A e B della linea retta $y = A + Bx$, basate sui punti misurati $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. La retta risultante è chiamata la "retta dei minimi quadrati" per i dati, o la "linea di regressione di y su x ". È ora naturale domandarsi quali sono le incertezze nelle nostre stime per A e B . Risulta che prima di poter rispondere a questa domanda, dobbiamo discutere l'incertezza σ_y nelle misure originali di y_1, \dots, y_N , ed è ciò che facciamo nella prossima sezione.

8.3. Incertezza nelle misure di y

Durante le misure dei valori y_1, \dots, y_N , ci siamo presumibilmente formati qualche idea della loro incertezza. Nondimeno è importante sapere come calcolare l'incertezza analizzando i dati stessi.

Bisogna ricordare che i numeri y_1, \dots, y_N "non" sono N misure della stessa grandezza (essi potrebbero, per esempio, essere i tempi di caduta di un sasso da N diverse altezze). Così certamente non ci facciamo un'idea della loro affidabilità esaminando lo sparpagliamento nei loro valori.

Nondimeno, possiamo facilmente stimare l'incertezza σ_y , nei numeri y_1, \dots, y_N . La misura di ogni y_i è (lo assumiamo) normalmente distribuita attorno al suo valore vero $A + Bx_i$, con parametro di larghezza σ_y . Così le "deviazioni" $y_i - A - Bx_i$ sono normalmente distribuite, tutte con lo stesso valore centrale 0 e la stessa larghezza σ_y . Questo suggerisce immediatamente che una buona stima per σ_y dovrebbe essere data da una somma di quadrati con la forma familiare

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum (y_i - A - Bx_i)^2 \quad (8.13)$$

In realtà, questo risultato può essere confermato per mezzo del principio della massima verosimiglianza. Come al solito, la miglior stima per il parametro in questione (σ_y in questo caso) è quel valore per cui la probabilità (8.4) di

ottenere i valori osservati y_1, \dots, y_N è massima. Come potete facilmente verificare differenziando la (8.4) rispetto a σ_y e ponendo la derivata uguale a zero, la miglior stima è precisamente il risultato (8.13). Sfortunatamente, come potete avere già sospettato, la stima (8.13) per σ_y^2 non è *completamente* la fine della storia. I numeri A e B nella (8.13) sono i valori veri incogniti per le costanti A e B . In pratica, essi devono essere rimpiazzati dalle nostre "migliori stime" per A e B , precisamente, la (8.10) e la (8.11), e questo rimpiazzo riduce leggermente il valore della (8.13). Si può mostrare che questa riduzione è compensata se rimpiazziamo il fattore N del denominatore con $(N - 2)$. Così il nostro risultato finale per l'incertezza nelle misure y_1, \dots, y_N è

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N - 2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2 \quad (8.14)$$

con A e B dati da (8.10) e (8.11). Se abbiamo già una stima indipendente della nostra incertezza in y_1, \dots, y_N , allora dovremmo aspettarci che questa stima sia confrontabile con σ_y come calcolato dalla (8.14).

Non tenteremo di giustificare il fattore $(N - 2)$ nella (8.14), ma possiamo fare alcuni commenti. In primo luogo, finché N è moderatamente grande la differenza tra N e $(N - 2)$ è in ogni caso trascurabile. In secondo luogo, che il fattore $(N - 2)$ sia "ragionevole" diventa chiaro se consideriamo di misurare proprio due coppie di dati (x_1, y_1) , e (x_2, y_2) .

Con solo due punti, possiamo sempre trovare una retta che passa "esattamente" attraverso entrambi i punti, e il metodo dei minimi quadrati ci darà questa retta. Cioè, con solo due coppie di dati, non possiamo dedurre nulla circa l'affidabilità delle nostre misure. Ora, poiché entrambi i punti giacciono esattamente sulla retta migliore, i due termini della somma in (8.13) e (8.14) sono zero. Così la formula (8.13) (con $N = 2$ nel denominatore) dovrebbe dare il risultato assurdo $\sigma_y = 0$; mentre la (8.14), con $N - 2 = 0$ nel denominatore, dà $\sigma_y = 0/0$, indicando correttamente che σ_y è indeterminato dopo soltanto due misure.

La presenza del fattore $(N - 2)$ in (8.14) ci ricorda il fattore $(N - 1)$ che compare nella nostra stima della deviazione standard di N misure di una grandezza x , nell'Equazione (5.46). Là facemmo N misure x_1, \dots, x_N di una grandezza x . Prima di poter calcolare σ_x , dovemmo far uso dei nostri dati per trovare la media \bar{x} . In un certo senso, questo lasciò soltanto $(N - 1)$ valori misurati indipendenti, così diciamo che, avendo calcolato \bar{x} , abbiamo soltanto $(N - 1)$ "gradi di libertà". Qui abbiamo fatto N misure, ma prima di calcolare σ_y abbiamo dovuto calcolare le "due" grandezze A e B . Avendo fatto ciò, abbiamo lasciato soltanto $(N - 2)$ gradi di libertà. In generale, definiamo il "numero di gradi di libertà" nel corso di un calcolo statistico come il numero di misure indipendenti "meno" il numero di parametri calcolati da queste misure. È possibile mostrare (sebbene qui non lo faremo) che è il numero di gradi di libertà, "non" il numero di misure, che dovrebbe apparire nel denominatore di formule come la (8.14) e la (5.46).

Questo spiega perché la (8.14) contiene il fattore $(N - 2)$, e la (5.46) il fattore $(N - 1)$.

8.4. Incertezza nelle costanti A e B

Avendo trovato l'incertezza σ_y nei numeri misurati y_1, \dots, y_N , possiamo facilmente ritornare alla nostra stima delle costanti A e B e calcolare le loro

incertezze. Il punto è che le stime (8.10) e (8.11) per A e B sono funzioni ben definite dei numeri misurati y_1, \dots, y_N . Allora le incertezze in A e B sono date dalla semplice propagazione degli errori in termini di quelli in y_1, \dots, y_N . Lasciamo al lettore la verifica che (Problema 8.8)

$$\sigma_A^2 = \sigma_y^2 \sum x_i^2 / \Delta \quad (8.15)$$

e

$$\sigma_B^2 = N\sigma_y^2 / \Delta, \quad (8.16)$$

dove Δ è dato dalla (8.12) come al solito.

8.5. Un esempio

Se il volume di un campione di un gas ideale è tenuto costante, allora la sua temperatura T è una funzione lineare della sua pressione P ,

$$T = A + BP \quad (8.17)$$

Qui la costante A è la temperatura a cui la pressione P dovrebbe ridursi a zero (se il gas non condensasse prima a liquido); essa è chiamata lo "zero assoluto di temperatura", ed ha il valore accettato

$$A = -273.15 \text{ gradi Celsius} \quad (8.18)$$

La costante B dipende dalla natura del gas, la sua massa e il suo volume⁽¹⁾. Misurando una serie di valori di T e P , possiamo trovare le migliori stime per le costanti A e B . In particolare, il valore di A dà lo zero assoluto di temperatura.

Un gruppo di cinque misure di P e T ottenute da uno studente è mostrato nelle prime tre colonne di Tabella 8.1. Lo studente valutò che le sue misure P avevano incertezza trascurabile, e quelle di T erano tutte ugualmente incerte con una incertezza di "alcuni gradi". Assumendo che questi punti dovrebbero giacere su una linea retta della forma (8.17), egli calcolò la sua migliore stima per la costante A (lo zero assoluto) e la sua incertezza. Quali dovrebbero essere state le sue conclusioni?

Tabella 8.1. Esperimento pressione-temperatura.

Numero della prova i	Pressione P_i (in mm. di mercurio)	Temperatura T_i (in °C)	$A + BP_i$
1	65	-20	-22.2
2	75	17	14.9
3	85	42	52.0
4	95	94	89.1
5	105	127	126.2

¹ La differenza $T-A$ è chiamata la "temperatura assoluta". Così la (8.17) può essere riscritta per dire che la temperatura assoluta è proporzionale alla pressione (a volume costante).

Tuttò ciò che dobbiamo fare qui è usare le formule (8.10) e (8.15), con x_i rimpiazzato da P_i e y_i da T_i , per calcolare tutte le grandezze che ci interessano. Questo richiede di calcolare le somme $\sum P_i$, $\sum P_i^2$, $\sum T_i$, $\sum P_i T_i$. Molte calcolatrici tascabili possono calcolare tutte queste somme automaticamente; ma anche senza tale macchina, possiamo facilmente fare questi calcoli a mano, se i dati sono organizzati opportunamente. Dalla Tabella 8.1 possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \sum P_i &= 425, \\ \sum P_i^2 &= 37125, \\ \sum T_i &= 260, \\ \sum P_i T_i &= 25810, \\ \Delta &= 5000, \end{aligned}$$

dove $\Delta = N(\sum P_i^2) - (\sum P_i)^2$. In questo tipo di calcolo è importante mantenere parecchie cifre significative, poiché dobbiamo fare le differenze di questi grandi numeri. Armati di queste somme, possiamo calcolare immediatamente le migliori stime per le costanti A e B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sum P_i^2)(\sum T_i) - (\sum P_i)(\sum P_i T_i)}{\Delta} = -263.35 \\ B &= \frac{N(\sum P_i T_i) - (\sum P_i)(\sum T_i)}{\Delta} = 3.71. \end{aligned}$$

e

Questo già dà la miglior stima dello studente per lo zero assoluto, $A = -263$ gradi Celsius.

Conoscendo le costanti A e B , possiamo poi calcolare i numeri $A + BP_i$, le temperature "attese" sulla base del nostro migliore adattamento alla relazione $T = A + BP$. Questi sono mostrati sulla colonna a destra della tabella, e come dovremmo sperare, si accordano tutti ragionevolmente bene con le temperature osservate. Possiamo ora fare le differenze fra le cifre nelle ultime due colonne e calcolare

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N-2} \sum (T_i - A - BP_i)^2 = 44.6$$

e quindi la deviazione standard

$$\sigma_T = 6.7$$

Questo valore si accorda ragionevolmente con la stima dello studente che le sue misure di temperatura erano incerte di "alcuni gradi".

Infine, possiamo calcolare l'incertezza in A usando la (8.15):

$$\sigma_A^2 = \sigma_T^2 (\sum P_i^2) / \Delta = 331$$

o

$$\sigma_A = 18$$

Così la conclusione finale del nostro studente, opportunamente arrotondata, dovrebbe essere

$$\text{zero assoluto, } A = -260 \pm 20 \text{ gradi Celsius,}$$

che si accorda soddisfacentemente con il valore accettato, -273 gradi.

Come è spesso vero, questi risultati diventano molto più chiari se li grafichiamo, come in Figura 8.2. I cinque dati, con le loro incertezze di $\pm 7^\circ$ in T , sono mostrati nella parte in alto a destra. La miglior retta passa attraverso quattro delle barre di errore e vicino alla quinta.

Per trovare un valore per lo zero assoluto, la retta è stata prolungata al di là dei punti, per intersecare l'asse T . Questo procedimento di "estrapolazione" (estendere una curva al di là dei punti che la determinano) può introdurre grandi errori, come è chiaro dal disegno. Un cambio molto piccolo nella pendenza della retta provocherà un cambio grande nella sua intercetta sul distante asse T . Così ogni incertezza nei dati è grandemente amplificata se dobbiamo estrapolare a grande distanza. Questo spiega perché l'incertezza nel valore dello zero assoluto ($\pm 18^\circ$) è così molto più grande di quella nelle misure originali di temperature ($\pm 7^\circ$).

8.6. Adattamento ad altre curve col metodo dei minimi quadrati

Fino ad ora abbiamo considerato l'osservazione di due variabili che soddisfano ad una relazione lineare, $y = A + Bx$, e abbiamo discusso il calcolo delle costanti A e B . Questo importante problema è un caso speciale di una vasta

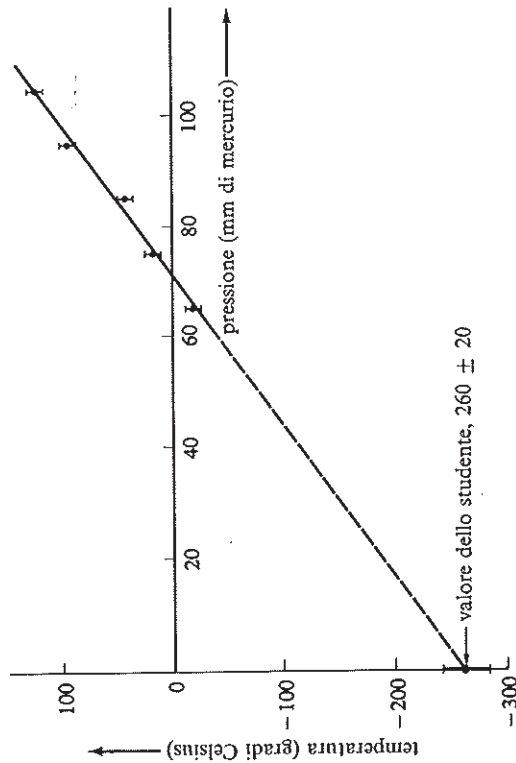


Figura 8.2. Grafico della temperatura T in funzione della pressione P per un gas a volume costante. Le barre di errore si estendono per una deviazione standard, σ_T , da ciascuna parte dei cinque punti sperimentali, e la retta è la retta dei minimi quadrati. Lo zero assoluto della temperatura è stato trovato estrapolando la retta fino alla sua intersezione con l'asse T .

classe di problemi che riguardano le curve di adattamento, molti dei quali possono essere risolti in un modo similare. In questa ultima sezione menzioniamo brevemente alcuni di questi problemi.

Adattamento ad una polinomiale

Spesso accade che ci si aspetti che una variabile, y , sia esprimibile come una polinomiale di una seconda variabile x

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^n \quad (8.19)$$

Per esempio, ci aspettiamo che l'altezza y di un corpo che cade sia una funzione quadratica del tempo t ,

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

dove y_0 e v_0 sono l'altezza e la velocità iniziale, e g è la accelerazione di gravità. Dato un gruppo di osservazioni delle due variabili, si può trovare la miglior stima delle costanti A, B, \dots, H come in (8.19) con un argomento che è esattamente parallelo a quello della Sezione 8.2, che ora tratteggiamo.

Per semplificare la trattazione, supponiamo che la polinomiale (8.19) sia di fatto una quadratica,

$$y = A + Bx + Cx^2 \quad (8.20)$$

(Il lettore interessato può facilmente estendere l'analisi al caso generale). Supponiamo, come prima, di avere una serie di misure (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, con gli y_i tutti ugualmente incerti e gli x_i tutti esatti. Per ogni x_i , il corrispondente valore vero di y_i è dato dalla (8.20), con A, B , e C come ancora incognite. Assumiamo che le misure degli y_i siano governate da distribuzioni normali, ciascuna centrata sull'appropriato valore vero e tutte con lo stesso parametro di larghezza σ_y . Questo ci permette di calcolare la probabilità di ottenere i nostri valori osservati y_1, \dots, y_N nella forma familiare

$$P(y_1, \dots, y_N) \propto e^{-\chi^2/2}, \quad (8.21)$$

dove ora

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2}{\sigma_y^2}. \quad (8.22)$$

(Questo corrisponde all'Equazione 8.5 per il caso lineare). La miglior stima per A, B e C sono quei valori per cui $P(y_1, \dots, y_N)$ è massima, o χ^2 è minimo. Differenziando χ^2 rispetto ad A, B e C e ponendo queste derivate uguali a zero, otteniamo le tre equazioni (come voi dovreste verificare):

$$\begin{aligned} AN + B \sum x_i + C \sum x_i^2 &= \sum y_i, \\ A \sum x_i + B \sum x_i^2 + C \sum x_i^3 &= \sum x_i y_i, \\ A \sum x_i^2 + B \sum x_i^3 + C \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 y_i. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Per ogni dato gruppo di misure (x_i, y_i) , queste equazioni simultanee per A, B e C (note come le "equazioni normali") possono essere risolte per trovare le migliori stime per A, B e C . Con A, B e C calcolati in questo modo, l'equazione

$y = A + Bx + Cx^2$ è chiamata l'adattamento polinomiale dei minimi quadrati, o la regressione polinomiale, per le misure date.

Il metodo della regressione polinomiale si generalizza facilmente ad una polinomiale di qualunque grado, sebbene le equazioni normali risultanti diventino molto ingombranti per polinomiali di alto grado. In linea di principio, un metodo simile può essere applicato a "qualsiasi" funzione $y = f(x)$ che dipende da vari parametri incogniti A, B, \dots . Sfortunatamente, le equazioni normali risultanti che determinano la miglior stima per A, B, \dots possono essere difficili o impossibili da risolvere. Comunque, vi è una grande classe di problemi che "possono" sempre essere risolti, precisamente quei problemi in cui la funzione $y = f(x)$ dipende linearmente dai parametri A, B, \dots . Sono incluse tutte le polinomiali - ovviamente la polinomiale (8.19) è lineare nei suoi coefficienti A, B, \dots - ma sono incluse anche molte altre funzioni. Per esempio, in alcuni problemi ci si aspetta che y sia una somma di funzioni trigonometriche, come

$$y = A \sin x + B \cos x \quad (8.24)$$

Per questa funzione, e di fatto per ogni funzione che sia lineare nei parametri A, B, \dots , le equazioni normali che determinano la miglior stima per A, B, \dots sono equazioni lineari simultanee, che possono sempre essere risolte (vedi Problemi 8.12 e 8.13).

Funzioni esponenziali

Una delle più importanti funzioni in fisica è la funzione esponenziale.

$$y = Ae^{\mu x} \quad (8.25)$$

dove A e B sono costanti. L'intensità di radiazione I , dopo esser passata per una distanza x attraverso uno schermo, decade esponenzialmente:

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

dove I_0 è l'intensità all'origine e μ caratterizza l'assorbimento da parte dello schermo. La carica su un condensatore corto-circuitato fluisce via esponenzialmente:

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}$$

dove Q_0 è la carica all'origine e $\lambda = 1/(RC)$, R e C essendo la resistenza e la capacità rispettivamente.

Se le costanti A e B nella (8.25) sono incognite, allora è naturale cercare le loro stime sulla base delle misure di x e y . Sfortunatamente, l'applicazione diretta dei nostri argomenti precedenti ci porta ad equazioni per A e B che non possono essere risolte convenientemente. Comunque, è possibile trasformare la relazione non lineare (8.25) tra y e x in una relazione lineare, alla quale possiamo applicare il nostro adattamento dei minimi quadrati.

Per ottenere la desiderata "linearizzazione", semplicemente facciamo il logaritmo della (8.25) e otteniamo

$$\ln y = \ln A + Bx \quad (8.26)$$

Vediamo che, anche se y non è lineare in x , $\ln y$ "lo è".

Questa conversione della nonlineare (8.25) nella lineare (8.26) è utile in molti contesti, oltre quello dell'adattamento coi minimi quadrati. Se vogliamo verificare la relazione (8.25) graficamente, allora un grafico diretto di y in funzione di x produrrà una curva che è difficile da identificare visualmente. D'altra parte, un grafico di $\ln y$ in funzione di x (o di $\log y$ in funzione di x) dovrebbe produrre una linea retta, che può essere facilmente riconosciuta.

(Tale grafico è specialmente semplice se si utilizza carta da grafico "semilogaritmica", sulla quale le graduazioni su un asse sono spaziate logaritmicamente. Tale carta ci permette di graficare $\log y$ direttamente senza neanche calcolarlo).

L'utilità dell'equazione lineare (8.26) nel metodo dei minimi quadrati è facilmente verificabile. Se crediamo che y ed x dovrebbero soddisfare la $y = Ae^{Bx}$, allora le variabili $z = \ln y$ ed x dovrebbero soddisfare la (8.26), o

$$z = \ln A + Bx \quad (8.27)$$

Se abbiamo una serie di misure (x_i, y_i) , allora per ogni y_i possiamo calcolare $z_i = \ln y_i$. Allora le coppie (x_i, z_i) dovrebbero giacere sulla linea (8.27). Tale linea retta può essere adattata con il metodo dei minimi quadrati per dare la miglior stima per le costanti $\ln A$ (da cui possiamo trovare A) e B .

Esempio

Molte popolazioni (di persone, di batteri, di nuclei radioattivi, etc.) tendono a variare esponenzialmente nel tempo. Se una popolazione N sta diminuendo esponenzialmente, scriviamo

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \quad (8.28)$$

dove τ è chiamata la "vita media" della popolazione (strettamente connessa al "tempo di dimezzamento", $t_{1/2}$; infatti, $t_{1/2} = 0.693\tau$). Un biologo è convinto che una popolazione di batteri sta diminuendo esponenzialmente come nella (8.28), e misura la popolazione in tre giorni successivi, con i risultati mostrati nelle prime due colonne di Tabella 8.2. Dati questi dati, qual è la sua miglior stima per la vita media τ ?

Tabella 8.2. Popolazione di batteri.

Tempo t_i (giorni)	Popolazione N_i	$z_i = \ln N_i$
0	153000	11.94
1	137000	11.83
2	128000	11.76

Se N varia come nella (8.28) allora la variabile $z = \ln N$ dovrebbe essere lineare in t .

$$z = \ln N = \ln N_0 - \frac{t}{\tau} \quad (8.29)$$

Il nostro biologo allora calcola i tre numeri $z_i = \ln N_i$ ($i = 0, 1, 2$) riportati nella terza colonna di tabella 8.2. Usando questi numeri, fa un adattamento dei minimi quadrati alla linea retta (8.29) e trova come miglior stima per i coefficienti $\ln N_0$ e $(-\frac{1}{\tau})$,

$$\ln N_0 = 11.93 \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\tau}\right) = -0.089 \text{ giorni}^{-1}$$

Il secondo di questi implica che la sua miglior stima per la vita media è

$$\tau = 11.2 \text{ giorni}$$

Il metodo ora descritto attrae per la sua semplicità (specialmente con un calcolatore che esegua automaticamente la regressione lineare), ed è frequentemente usato. Nondimeno, il metodo non è del tutto legittimo logicamente. La nostra derivazione dell'adattamento coi minimi quadrati ad una linea retta $y = A + Bx$ era basata sull'ipotesi che i valori misurati y_1, \dots, y_N erano tutti ugualmente incerti. Ora stiamo compiendo il nostro adattamento coi minimi quadrati usando la variabile $z = \ln y$. Ora, se i valori misurati y_i sono tutti ugualmente incerti, i valori $z_i = \ln y_i$ però "non" lo sono. Infatti, dalla semplice propagazione degli errori sappiamo che

$$\sigma_z = \left| \frac{dz}{dy} \right| \sigma_y = \frac{\sigma_y}{y}. \quad (8.30)$$

Così se σ_y è lo stesso per tutte le misure, σ_z invece varia (con σ_z più grande quando y è più piccolo). Evidentemente, la variabile $z = \ln y$ non soddisfa la richiesta di uguali incertezze per tutte le misure, anche se y di per se stesso la soddisfa.

Il rimedio per questa difficoltà è diretto. Si può modificare il procedimento dei minimi quadrati per permettere diverse incertezze nelle misure, ammesso che le varie incertezze siano note. (Questo metodo di "minimi quadrati pesati" è tracciato nel Problema 8.4). Se sappiamo che le misure di y_1, \dots, y_N sono realmente ugualmente incerte, allora l'Equazione (8.30) ci dice come le incertezze in z_1, \dots, z_N variano, e possiamo quindi applicare il metodo dei minimi quadrati pesati all'equazione $z = \ln A + Bx$.

In pratica, spesso non si può essere certi che le incertezze in y_1, \dots, y_N siano realmente costanti; così forse si può arguire che si potrebbe proprio assumere che le incertezze in z_1, \dots, z_N siano costanti ed usare il semplice metodo dei minimi quadrati non pesati. Spesso la variazione nella incertezza è piccola, e fa poca differenza quale metodo sia usato, come era vero nell'esempio precedente. In ogni caso, l'applicazione diretta del metodo dei minimi quadrati ordinario (non pesato) è un modo semplice e non ambiguo di ottenere stime "ragionevoli" (se non "le migliori") per le costanti A e B nell'equazione $y = Ae^{Bx}$, così esso è frequentemente usato in questo modo.

Regressione multipla

Infine, abbiamo a lungo discusso soltanto osservazioni di "due" variabili, x e y , e la loro relazione. In molti problemi reali ci sono più di due variabili che devono essere considerate. Per esempio, nello studiare la pressione P di un gas, si trova che essa dipende dal volume V e dalla temperatura T , e si deve analizzare P come una funzione di V e T . L'esempio più semplice di un tale problema è quando una variabile, z , dipende linearmente da altre due, x e y :

$$z = A + Bx + Cy \quad (8.31)$$

Questo problema può essere analizzato per mezzo di una generalizzazione molto diretta del nostro metodo a due variabili. Se abbiamo una serie di misure (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$ (con gli z_i tutti ugualmente incerti, e gli x_i e y_i esatti) allora possiamo usare il principio di

massima verosimiglianza proprio come in Sezione 8.2 per mostrare che la miglior stima per le costanti A, B, C è determinata da equazioni normali della forma:

$$\begin{aligned} AN + B \sum x_i + C \sum y_i &= \sum z_i, \\ A \sum x_i + B \sum x_i^2 + C \sum x_i y_i &= \sum x_i z_i, \\ A \sum y_i + B \sum x_i y_i + C \sum y_i^2 &= \sum y_i z_i. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Le equazioni possono essere risolte per A, B , e C per dare il miglior adattamento alla relazione (8.31). Questo metodo è chiamato "regressione multipla" ("multipla" dal momento che ci sono più di due variabili), ma noi non la discuteremo ulteriormente.

Problemi

Nota. Un asterisco indica che il problema è discusso, oppure la sua soluzione data, nella sezione Risposte alla fine del libro.

***8.1** (Sezione 8.2). Usate il metodo dei minimi quadrati per trovare la retta $y = A + Bx$ che meglio si adatta ai quattro punti (1, 12), (2, 13), (3, 18), (4, 19). Mettere in grafico i punti e la retta.

8.2 (Sezione 8.2). Per trovare la costante k di una molla, uno studente la carica con varie masse m e misura le corrispondenti lunghezze l . I suoi risultati sono riportati in Tabella 8.3.

Tabella 8.3.

carico m (gm)	200	300	400	500	600	700	800	900
lunghezza l (cm)	5.1	5.5	5.9	6.8	7.4	7.5	8.6	9.4

Dal momento che la forza mg è $k(l - l_0)$, dove l_0 è la lunghezza della molla non deformata, questi dati dovrebbero giacere sulla retta $l = l_0 + (g/k)m$. Fare un adattamento dei minimi quadrati ai dati, e trovare la miglior stima per la lunghezza non deformata l_0 e la costante della molla k .

***8.3** (Sezione 8.2). Supponete che due variabili x e y soddisfino notoriamente la relazione $y = Bx$; cioè esse giacciono su una retta che si sa che passa attraverso l'origine. Supponete anche di avere N misure (x_i, y_i) , con le incertezze in x trascurabili e quelle in y tutte uguali. Usando argomenti come quelli in Sezione 8.2, mostrate che la miglior stima con i minimi quadrati per B è

$$B = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

***8.4** (Sezione 8.2). Supponete di misurare N coppie di valori (x_i, y_i) di due variabili x e y che si suppone soddisfino ad una relazione lineare del tipo $y = A + Bx$. Supponete che le misure degli x_i abbiano incertezza trascurabile, e quelle degli y_i abbiano incertezze differenti σ_i . (Cioè, y_i ha incertezza σ_i ,

mentre y_2 ha incertezza σ_2 , e così via). Rivedete la derivazione dell'adattamento con i minimi quadrati in Sezione 8.2, e generalizzatelo per comprendere questa situazione in cui le incertezze negli y_i non sono tutte le stesse. Mostrate che le migliori stime per A e B sono

$$A = \frac{[\sum w_i x_i^2 (\sum w_i y_i) - (\sum w_i x_i)(\sum w_i x_i y_i)]/\Delta}{\quad} \quad (8.33)$$

e

$$B = \frac{[\sum w_i y_i (\sum w_i x_i y_i) - (\sum w_i x_i)(\sum w_i y_i)]/\Delta}{\quad} \quad (8.34)$$

con pesi $w_i = 1/\sigma_i^2$ e

$$\Delta = (\sum w_i)(\sum w_i x_i^2) - (\sum w_i x_i)^2. \quad (8.35)$$

Questo metodo dei "minimi quadrati pesati" può essere applicato soltanto quando le incertezze σ_i (o almeno le loro grandezze relative) sono note. Forse la situazione più comune in cui succede ciò è un esperimento di conteggio, come il conteggio di decadimenti radioattivi. Come discusso nella Sezione 3.1 (e dimostrato nel Capitolo 11), l'incertezza corrispondente ad ogni conteggio v è noto che sia \sqrt{v} .

8.5 (Sezione 8.2). Supponiamo che y sia normalmente lineare in x , così che $y = A + Bx$, e supponiamo di avere tre misure di (x, y) : $(1, 2 \pm 0.5)$; $(2, 3 \pm 0.5)$; $(3, 2 \pm 1.5)$, per cui le incertezze in x sono trascurabili. Utilizzate il metodo dei minimi quadrati pesati, Equazioni (8.33) fino a (8.35), per calcolare A e B . Confrontate i vostri risultati con quelli che otterreste ignorando la variazione nelle incertezze, cioè, usando l'adattamento non pesato delle Equazioni (8.10) fino a (8.12). Graficate i dati ed entrambe le rette, e provate a capire le differenze.

***8.6** (Sezione 8.4). Un carrello, che si suppone viaggi a velocità costante, è cronometrato al passaggio in quattro differenti posizioni, con i risultati mostrati in Tabella 8.4. Facendo l'adattamento con i minimi quadrati alla retta $d = d_0 + vt$, trovate la miglior stima per la velocità del carrello v . Qual è l'incertezza in v ?

Tabella 8.4.

distanza (cm)	0	3000	6000	9000
tempo (sec)	17.6	40.4	67.7	90.1

8.7 (Sezione 8.4). Uno studente misura la pressione P di un gas a cinque differenti temperature T , mantenendo il volume V fissato. I suoi risultati sono riportati in Tabella 8.5.

Tabella 8.5

pressione P_i (mm di mercurio)	79	82	85	88	90
temperatura T_i ($^{\circ}$ Celsius)	8	17	30	37	52

I suoi dati dovrebbero adattarsi ad una equazione della forma $T = A + BP$, dove A è lo zero assoluto di temperatura (il cui valore accettato è -273° Celsius, come discusso in Sezione 8.5). Trovare il miglior adattamento ai dati dello studente, e quindi la sua miglior stima per lo zero assoluto ed il suo errore.

***8.8** (Sezione 8.4)

(a) Utilizzare il principio della massima verosimiglianza, come abbozzato nella discussione dell'Equazione (8.13), per mostrare che la (8.13) dà l'incertezza σ_y di y in una serie di misure $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ che si suppone si adattino ad una linea retta.

(b) Utilizzare la propagazione degli errori per mostrare che le incertezze σ_A e σ_B nei parametri di una linea retta $y = A + Bx$ sono date dalla (8.15) e dalla (8.16)

***8.9** (Sezione 8.4). L'adattamento con i minimi quadrati ad una serie di punti $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ tratta le variabili x e y non simmetricamente. Specificamente, si trova un migliore adattamento per la retta $y = A + Bx$ assumendo che i numeri y_1, \dots, y_N siano tutti ugualmente incerti, ma che x_1, \dots, x_N abbiano incertezza trascurabile. Se la situazione fosse rovesciata, allora si dovrebbero scambiare i ruoli di x e y e adattarsi ad una retta $x = A' + B'y$. Le due rette $y = A + Bx$ e $x = A' + B'y$ dovrebbero essere la stessa se gli N punti giacessero "esattamente" su una retta, ma in generale le due rette saranno un po' diverse. Adattare i dati del Problema 8.1 ad una retta $x = A' + B'y$ (trattando gli x_i come ugualmente incerti e gli y_i come certi). Trovare A' e B' e le loro incertezze $\sigma_{A'}$ e $\sigma_{B'}$. Quali dovrebbero essere i valori di A' e B' basati sulle risposte al Problema 8.1? Confrontare le rette trovate con i due metodi. La differenza è significativa?

8.10 (Sezione 8.6). Considerate il problema di adattare una serie di misure (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, alla polinomiale $y = A + Bx + Cx^2$. Usate il principio della massima verosimiglianza per mostrare che le migliori stime di A , B , e C basate sui dati sono date dalle Equazioni (8.23). Seguite gli argomenti tracciati tra le Equazioni (8.20) e (8.23).

***8.11** (Sezione 8.6). Un modo di misurare l'accelerazione di un corpo che cade liberamente è di misurare la sua altezza y_i in una successione di tempi t_i ugualmente spazati (con una macchina fotografica multiflash, per esempio) e trovare il miglior adattamento alla polinomiale attesa

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (8.36)$$

Usate le equazioni (8.23) per trovare la miglior stima per i tre coefficienti nella (8.36), e quindi la miglior stima per g , basata sulle cinque misure in Tabella 8.6.

Tabella 8.6

tempo t (decimi di sec)	-2	-1	0	1	2
altezza y (cm)	131	113	89	51	7

Notiamo che possiamo chiamare i tempi comunque ci piaccia. Una scelta più naturale potrebbe sembrare $t = 0, 1, \dots, 4$.

Comunque, quando risolverete il problema, vedrete che definendo i tempi spazati simmetricamente attorno allo zero provoca che circa la metà delle

somme in questione è zero e semplifica grandemente i calcoli. Questo trucco può essere usato ogniqualvolta i valori della variabile indipendente sono ugualmente spaziatati.

8.12 (Sezione 8.6). Supponiamo che ci si aspetti che y abbia la forma $y = Af(x) + Bg(x)$, dove A e B sono parametri incogniti, ed f e g sono funzioni fissate, note (come $f = x$ e $g = x^2$, $f = \cos x$ e $g = \sin x$). Utilizzare il principio della massima verosimiglianza per mostrare che la miglior stima per A e B , basata sui dati (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, deve soddisfare

$$\begin{aligned} A \sum [f(x_i)]^2 + B \sum f(x_i)g(x_i) &= \sum y_i f(x_i), \\ A \sum f(x_i)g(x_i) + B \sum [g(x_i)]^2 &= \sum y_i g(x_i). \end{aligned} \quad (8.37)$$

***8.13** (Sezione 8.6). Un peso oscillante su una molla verticale dovrebbe avere altezza y data da

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Uno studente misura ω e trova $\omega = 10$ rad/sec con incertezza trascurabile. Usando un apparecchio fotografico multiframe, egli trova poi y per cinque tempi ugualmente spaziatati, come mostrato in Tabella 8.7.

Tabella 8.7.

t (decimi di sec)	-4	-2	0	2	4
y (cm)	3	-16	6	9	-8

Usare le Equazioni (8.37) per trovare la miglior stima per A e B . Graficare i dati e la miglior curva di adattamento. (Se graficate prima i dati, avrete l'opportunità di considerare quanto sarebbe difficile scegliere la curva di miglior adattamento senza il metodo dei minimi quadrati). Se lo studente valuta che i suoi valori misurati di y dovrebbero essere incerti di "un paio di centimetri", direste che i dati si adattano accettabilmente alla curva attesa?

***8.14** (Sezione 8.6). Il numero di particelle R che un campione di materiale radioattivo emette nell'unità di tempo diminuisce esponenzialmente man mano che il materiale è impoverito:

$$R = R_0 e^{-t/\tau}$$

dove τ è la vita media del campione. Uno studente ha osservato un certo materiale radioattivo per tre ore con i risultati riportati in Tabella 8.8. Facendo un adattamento con i minimi quadrati alla retta $\ln R = \ln R_0 - t/\tau$, trovare la miglior stima per la vita media τ .

Tabella 8.8

tempo t (ore)	0	1	2	3
particelle per unità di tempo	13.8	7.9	6.1	2.9
R (unità arbitrarie)				

9. Covarianza e correlazione

In questo capitolo introduciamo l'importante concetto di covarianza. La nozione di covarianza sorge naturalmente nella discussione della propagazione degli errori; così la introdurremo nella Sezione 9.2 dopo aver rivisto brevemente la propagazione degli errori nella Sezione 9.1. Nella Sezione 9.3 useremo la covarianza per definire il coefficiente di correlazione lineare per N punti misurati $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Questo coefficiente, indicato con r , permette una misura di quanto bene i punti osservati (x_i, y_i) si adattano ad una retta della forma $y = A + Bx$. Il suo uso è discusso nelle Sezioni 9.4 e 9.5.

9.1. Revisione della propagazione degli errori

In questa e nella prossima sezione diamo uno sguardo finale all'importante problema della propagazione degli errori. Discutiamo la propagazione degli errori per la prima volta nel Capitolo 3, dove giungemmo a parecchie conclusioni. Immaginammo di misurare due grandezze x e y per calcolare qualche funzione $q(x, y)$, come $q = x + y$ oppure $q = x^2 \sin y$. (In realtà, discuteremo la una funzione $q(x, \dots, z)$ di un numero arbitrario di variabili x, \dots, z ; per semplicità considereremo ora solo due variabili). Un semplice argomento ci suggerì che l'incertezza nel nostro risultato per q è proprio

$$\delta q \approx \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y. \quad (9.1)$$

Ricavammo ciò dapprima per i casi semplici speciali di somme, differenze, prodotti e quozienti. Per esempio, se q è la somma $q = x + y$, allora la (9.1) si riduce alla familiare $\delta q \approx \delta x + \delta y$. Il risultato generale (9.1) fu derivato nell'Equazione (3.43).

In seguito riconoscemmo che la (9.1) è spesso probabilmente una sovrastima di δq , dal momento che può verificarsi una cancellazione parziale degli errori in x e y . Affermammo, senza dimostrazione, che quando gli errori in x e in y sono indipendenti e casuali, un miglior valore per l'incertezza nel valore calcolato di $q(x, y)$ è

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \delta y \right)^2}. \quad (9.2)$$

Affermammo anche, senza dimostrazione, che sia che gli errori siano indipendenti e casuali o no, la più semplice formula (9.1) dà comunque un limite

superiore su δq ; cioè, l'incertezza δq non è mai in ogni caso peggiore di quella data dalla (9.1).

Nel Capitolo 5 demmo una definizione più appropriata ed una dimostrazione della (9.2). Dapprima diciamo che una buona stima dell'incertezza δx in una misura è data dalla deviazione standard σ_x ; in particolare, diciamo che se le misure di x sono normalmente distribuite, allora possiamo essere confidenti al 68 per cento che il valore misurato giaccia entro σ_x del valore vero. In seguito diciamo che se le misure di x e y sono governate da distribuzioni normali indipendenti, con deviazioni standard σ_x e σ_y , allora i valori di $q(x, y)$ sono anch'essi distribuiti normalmente, con deviazione standard

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}. \quad (9.3)$$

Questo risultato ci permette la giustificazione per il risultato riportato in (9.2).

Nella sezione 9.2 deriveremo una precisa formula per l'incertezza in q che si applica sia che gli errori in x e in y siano indipendenti e normalmente distribuiti o no. In particolare, dimostreremo che la (9.1) ci dà sempre un limite superiore all'incertezza in q .

Prima di derivare questi risultati, rivediamo la definizione di deviazione standard. La deviazione standard σ_x di N misure x_1, \dots, x_N fu all'origine definita dall'equazione

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (9.4)$$

Se le misure di x sono distribuite normalmente, allora supponendo che N sia grande, la definizione (9.4) è equivalente a definire σ_x come il parametro di larghezza che compare nella funzione di Gauss

$$\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x - \bar{x})^2 / 2\sigma_x^2}$$

che governa le misure di x . Poiché stiamo per considerare la possibilità che gli errori in x non siano distribuiti normalmente, questa seconda definizione non è più utilizzabile. Comunque possiamo e lo faremo, definire ancora σ_x con la (9.4). Sia che la distribuzione degli errori sia normale o no, questa definizione di σ_x dà una valutazione ragionevole delle incertezze casuali nella nostra misura di x . (Come nel Capitolo 5, supporremo che tutti gli errori sistematici siano stati identificati e ridotti ad un livello trascurabile, così che tutti gli errori restanti siano casuali).

Resta la solita ambiguità se usare la definizione (9.4) di σ_x , o la definizione "migliorata" con il fattore N nel denominatore rimpiazzato con $(N-1)$. Fortunatamente, la discussione che segue si applica ad entrambe le definizioni, finché usiamo consistentemente l'una o l'altra. Per convenienza, useremo la definizione (9.4), con N nel denominatore.

9.2. Covarianza nella propagazione degli errori

Supponiamo che, per trovare un valore della funzione $q(x, y)$, misuriamo le due grandezze x e y parecchie volte, ottenendo N coppie di dati, $(x_1, y_1), \dots, (x_N,$

y_N). Dalle N misure x_1, \dots, x_N , possiamo calcolare la media \bar{x} e la deviazione standard σ_x nel solito modo; analogamente, da y_1, \dots, y_N possiamo calcolare \bar{y} e σ_y . In seguito, usando le N coppie di misure possiamo calcolare N valori della grandezza che ci interessa

$$q_i = q(x_i, y_i), \quad (i = 1, \dots, N)$$

Dati q_1, \dots, q_N , possiamo ora calcolare la loro media \bar{q} , che assumiamo sia la nostra migliore stima per q , e la loro deviazione standard σ_q , che è la nostra valutazione dell'incertezza casuale nei valori q_i .

Assumeremo, come al solito, che tutte le nostre incertezze siano piccole, e quindi che tutti i numeri x_1, \dots, x_N siano vicini a \bar{x} e che tutti gli y_1, \dots, y_N siano vicini a \bar{y} . Possiamo quindi fare l'approssimazione

$$\begin{aligned} q_i &= q(x_i, y_i) \\ &\approx q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \end{aligned} \quad (9.5)$$

In questa espressione le derivate parziali $\partial q / \partial x$ e $\partial q / \partial y$ sono calcolate nel punto $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, e sono quindi la stessa per tutti gli $i = 1, \dots, N$. Con questa approssimazione, la media diventa

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[q(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \right] \end{aligned}$$

Questa espressione dà \bar{q} come la somma di tre termini. Il primo termine è proprio $q(\bar{x}, \bar{y})$, e gli altri due sono esattamente zero. (Per esempio, segue dalla definizione di \bar{x} che $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$). Così abbiamo il risultato notevolmente semplice

$$\bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}); \quad (9.6)$$

cioè, per trovare la media \bar{q} dobbiamo soltanto calcolare la funzione $q(x, y)$ nel punto $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$.

La deviazione standard negli N valori q_1, \dots, q_N è data da

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{N} \sum (q_i - \bar{q})^2.$$

Sostituendo la (9.5) e la (9.6), troviamo che

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \frac{1}{N} \sum \left[\frac{\partial q}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial q}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \right]^2 \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Le somme nei primi due termini sono quelle che appaiono nella definizione delle deviazioni standard σ_x e σ_y . La somma finale invece non l'abbiamo ancora incontrata. Essa è chiamata la "covarianza" ⁽¹⁾ di x e y ed è denotata

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (9.8)$$

Con questa definizione, l'equazione 9.7 per la deviazione standard σ_q diventa

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \sigma_{xy} \quad (9.9)$$

Questo dà la deviazione standard σ_q sia che le misure di x e y siano indipendenti o no, e sia che siano normalmente distribuite o no.

Se le misure di x e y "sono" indipendenti, si vede facilmente che, dopo molte misure, la covarianza σ_{xy} dovrebbe tendere a zero. Qualunque sia il valore di y_i , la grandezza $x_i - \bar{x}$ ha la stessa possibilità di essere tanto positiva che negativa.

Così dopo molte misure i termini positivi e negativi nella (9.8) dovrebbero circa bilanciarsi; e al limite di infinitamente molte misure, il fattore $1/N$ nella (9.8) garantisce che σ_{xy} sia zero. (Dopo un numero finito di misure, σ_{xy} non sarà esattamente zero, ma dovrebbe essere "piccolo", se gli errori in x e in y sono realmente indipendenti e casuali). Con σ_{xy} zero, l'Equazione (9.9) si riduce a

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 \quad (9.10)$$

risultato familiare per incertezze indipendenti e casuali.

Se le misure di x e y "non" sono indipendenti, allora non occorre che la covarianza σ_{xy} sia zero. Per esempio, è facile immaginare una situazione in cui una sovrastima di x sarà sempre accompagnata da una sovrastima di y , e viceversa. I numeri $(x_i - \bar{x})$ e $(y_i - \bar{y})$ avranno allora sempre lo stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi) e il loro prodotto sarà sempre positivo. Poiché tutti i termini nella somma (9.8) sono positivi, occorre che σ_{xy} non si annulli, anche al limite in cui si facciano infinitamente molte misure.

Quando la covarianza σ_{xy} non è zero (anche al limite di infinitamente molte misure), diciamo che gli errori in x e in y sono "correlati". In questa situazione l'incertezza σ_q in $q(x, y)$ come data dalla (9.9) "non" è la stessa che otterremmo dalla formula (9.10) per errori indipendenti e casuali.

Usando la formula (9.9), possiamo derivare un limite superiore su σ_q che è sempre valido. È un semplice esercizio algebrico (Problema 9.1) per dimostrare

¹ Il nome "covarianza" per σ_{xy} (per due variabili x, y) è parallela al nome "varianza" per σ_x^2 (per una variabile x). Per enfatizzare questo parallelismo, la covarianza (9.8) è talvolta denotata σ_{xy}^2 , notazione non particolarmente felice, dato che la covarianza può essere negativa. Un aspetto conveniente della nostra definizione (9.8) è che σ_{xy} ha le dimensioni di xy , proprio come σ_x ha le dimensioni di x .

che la covarianza σ_{xy} soddisfa la cosiddetta "disuguaglianza di Schwarz"

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y \quad (9.11)$$

Se sostituiamo la (9.11) nell'espressione (9.9) per l'incertezza σ_q , troviamo che

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &\leq \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left|\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y}\right| \sigma_x \sigma_y \\ &= \left[\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \sigma_x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \sigma_y \right]^2; \end{aligned}$$

cioè

$$\sigma_q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \sigma_x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \sigma_y \quad (9.12)$$

Con questo risultato abbiamo finalmente stabilito il significato preciso della nostra semplice espressione iniziale

$$\delta q \approx \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y \quad (9.13)$$

per l'incertezza δq . Se adottiamo la deviazione standard σ_q come nostra misura dell'incertezza in q , allora la (9.12) mostra che la vecchia espressione (9.13) è realmente un "limite superiore" dell'incertezza. Sia che gli errori in x e y siano indipendenti o no, e sia che siano normalmente distribuiti o no, l'incertezza in q non sarà mai superiore alla parte destra della (9.13). Se le misure di x e y sono correlate in modo che $|\sigma_{xy}| = \sigma_x \sigma_y$, il suo più grande valore possibile secondo la (9.11), allora l'incertezza in q può realmente essere tanto grande quanto data dalla (9.13), ma non può mai essere più grande.

Il ruolo della covarianza σ_{xy} in questa discussione della propagazione degli errori è puramente teorico; e, di fatto, il concetto di covarianza non gioca solitamente un ruolo pratico nella propagazione degli errori. In seguito discuteremo un problema in cui essa gioca un ruolo fondamentale e concreto.

9.3. Coefficiente di correlazione lineare

La nozione di covarianza σ_{xy} introdotta nella Sezione 9.2 ci rende in grado di rispondere ad una domanda sorta nel Capitolo 8, quanto bene un gruppo di misure $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ di due variabili sostiene l'ipotesi che x e y siano in relazione lineare.

Supponiamo di aver misurato N coppie di valori $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ di due variabili che crediamo soddisfino ad una relazione lineare della forma

$$y = A + Bx$$

È importante notare che x_1, \dots, x_N non sono più misure di un singolo numero, come erano nelle ultime due sezioni; piuttosto esse sono misure di N differenti

valori di qualche variabile (per esempio, N diverse altezze da cui abbiamo lasciato cadere un sasso). Lo stesso si applica a y_1, \dots, y_N .

Usando il metodo dei minimi quadrati, possiamo trovare i valori di A e B per la retta che meglio interpola i punti $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Se abbiamo già una stima ragionevole delle incertezze nelle misure, allora possiamo vedere se i punti misurati giacciono ragionevolmente vicino alla retta (confrontandosi con le incertezze note). Se è così, allora le misure confermano la nostra ipotesi che x e y siano in relazione lineare.

Sfortunatamente, in molti esperimenti è difficile ottenere una stima affidabile delle incertezze in anticipo, e dobbiamo usare i dati stessi per decidere se le due variabili sembrano essere in relazione lineare. In particolare, c'è un tipo di esperimento in cui è "impossibile" conoscere la dimensione delle incertezze in anticipo. Questo tipo di esperimento, che è più comune nelle scienze sociali che in quelle fisiche, è meglio spiegato con un esempio.

Supponiamo che un professore, ansioso di dimostrare ai suoi studenti che fare il compito a casa li aiuterà a sostenere bene gli esami, registri i loro punteggi nei compiti a casa e negli esami, e li metta in grafico come in Figura 9.1. In questa figura i punteggi del compito a casa sono graficati orizzontalmente e quelli dell'esame verticalmente. Ogni punto (x_i, y_i) mostra il punteggio nel compito a casa di uno studente, x_i , e quello dell'esame, y_i . Quello che il professore spera di far vedere è che alte votazioni nell'esame tendono ad essere "correlate" con alte votazioni nel compito a casa, e viceversa (e il suo grafico certamente suggerisce che ciò è approssimativamente vero). In questo tipo di esperimento, non vi sono incertezze nei punti; i due punteggi di ciascuno studente sono noti esattamente. L'incertezza consiste piuttosto in fino a che punto i punteggi "sono correlati", e questo deve essere deciso in base ai dati.

Le due variabili x e y (sia in un tipico esperimento di fisica o in uno come quello ora descritto) possono, naturalmente, essere legate da una legge più complicata che non la semplice relazione lineare $y = A + Bx$. Per esempio, parecchie leggi fisiche portano a relazioni quadratiche della forma $y = A + Bx + Cx^2$. Nondimeno, restringeremo qui la nostra discussione al più

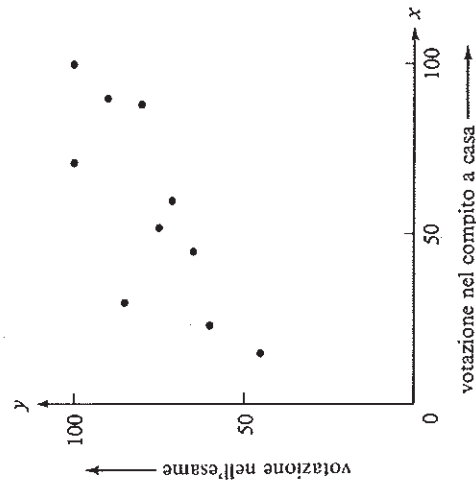


Figura 9.1. Un "diagramma di dispersione" che mostra le votazioni degli studenti negli esami e nei compiti a casa. Ciascuno dei dieci punti (x_i, y_i) indica la votazione del compito a casa di uno studente, x_i , e la votazione d'esame, y_i .

semplice problema di decidere se un dato insieme di punti giustifica l'ipotesi di una relazione "lineare" $y = A + Bx$.

Il grado in cui un insieme di punti $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ sostiene l'ipotesi di una relazione lineare tra x e y è misurato dal "coefficiente di correlazione lineare", o "coefficiente di correlazione",

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (9.14)$$

dove la covarianza σ_{xy} e le deviazioni standard σ_x e σ_y sono definite esattamente come prima, nelle Equazioni (9.8) e (9.4) (2). Sostituendo queste definizioni nella (9.14), possiamo riscrivere il coefficiente di correlazione come

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}} \quad (9.15)$$

Come mostreremo presto, il numero r è un indicatore di quanto bene i punti (x_i, y_i) si adattano ad una retta. È un numero compreso fra -1 e 1 . Se r è vicino a ± 1 , allora i punti giacciono vicino a qualche linea retta; se r è vicino a zero allora i punti sono incorrelati, con poca o nessuna tendenza a giacere su una linea retta.

Per dimostrare queste affermazioni, osserviamo dapprima che la disuguaglianza di Schwarz (9.11), $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$, implica immediatamente che $|r| \leq 1$ o

$$-1 \leq r \leq 1$$

come affermato. In seguito, supponiamo che i punti (x_i, y_i) giacciono tutti "esattamente" sulla retta $y = A + Bx$. In questo caso $y_i = A + Bx_i$ per tutti gli i , e quindi $\bar{y} = A + B\bar{x}$.

Sottraendo queste due equazioni, vediamo che

$$y_i - \bar{y} = B(x_i - \bar{x})$$

per ogni i . Inserendo queste relazioni nella (9.15), troviamo che

$$r = \frac{B \sum (x_i - \bar{x})^2}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 B^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2}} = \frac{B}{|B|} = \pm 1. \quad (9.16)$$

Cioè, se i punti $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ giacciono perfettamente su una retta, allora $r = \pm 1$, il segno di r essendo determinato dalla pendenza della retta ($r = 1$ per B positivo, e $r = -1$ per B negativo) (3). Anche quando le variabili x e y sono

² Notiamo comunque, che il loro significato è un po' diverso. Per esempio, nella Sezione 9.2 x_1, \dots, x_N erano misure di "un numero", e se queste misure erano precise, allora σ_x doveva essere piccolo. Nel presente caso, x_1, \dots, x_N sono misure di valori "differenti" di una variabile e, anche se le misure sono precise, non vi è ragione di pensare che σ_x sia piccolo. Notiamo anche che alcuni autori usano il numero r^2 , chiamato il "coefficiente di determinazione".

³ Se la retta è esattamente orizzontale, allora $B = 0$, e la (9.16) dà $r = 0/0$; cioè r è indefinito. Fortunatamente, questo speciale caso non è importante in pratica, poiché corrisponde ad y costante, indipendentemente da x .

realmente in relazione lineare, non ci aspettiamo che i nostri punti sperimentali giacciano "esattamente" su una retta. Così non ci aspettiamo che r sia esattamente ± 1 . D'altra parte, ci aspettiamo un valore di r "vicino" a ± 1 , se crediamo che x e y siano in relazione lineare.

Supponiamo, d'altra parte, che non vi sia relazione fra le variabili x e y . Qualunque sia il valore di y_i , ogni x_i avrebbe la stessa probabilità di trovarsi sopra \bar{x} come sotto \bar{x} . Così i termini nella somma

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

nel numeratore di r in (9.15) hanno la stessa probabilità di essere tanto positivi che negativi. Comunque, i termini nel denominatore di r sono tutti positivi. Così, al limite per N (il numero delle misure) che tende all'infinito, il coefficiente di correlazione r sarà zero. Con un numero finito di dati, non ci aspettiamo che r sia esattamente zero, ma ci aspettiamo che sia "piccolo" (se le due variabili sono realmente incorrelate).

Se due variabili x e y sono tali che, al limite per infinitamente molte misure, la loro covarianza σ_{xy} è zero (e quindi $r = 0$), diciamo che le variabili sono "incorrelate". Se, dopo un numero finito di misure, il coefficiente di correlazione $r = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$ è piccolo, allora ciò sostiene l'ipotesi che x e y siano incorrelate.

Come esempio, possiamo considerare le votazioni riportate nell'esame e nel compito a casa mostrate in Figura 9.1. Queste votazioni sono date in Tabella 9.1. Un semplice calcolo (Problema 9.4) mostra che il coefficiente di correlazione per queste dieci coppie di votazioni è $r = 0.8$. Il professore conclude che è "ragionevolmente vicino" ad 1 e così può annunciare alla classe dell'anno seguente che, poiché vi è buona correlazione fra i voti d'esame e quelli nel compito a casa, è importante fare il compito a casa.

Tabella 9.1. Votazione degli studenti.

Studenti, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Compito a casa, x_i	90	60	45	100	15	23	52	30	71	88
Esame, y_i	90	71	65	100	45	60	75	85	100	80

Se il nostro professore avesse trovato un coefficiente di correlazione vicino a zero, si sarebbe trovato nell'imbarazzante posizione di aver mostrato che le votazioni nel compito a casa non hanno influenza su quelle d'esame. Se gli fosse risultato r vicino a -1 , allora avrebbe fatto la scoperta ancor più imbarazzante che le votazioni del compito a casa e dell'esame mostrano una correlazione "negativa", cioè, quegli studenti che fanno un buon lavoro nel compito a casa, tendono a fare male all'esame.

9.4. Significato quantitativo di r

Dovrebbe essere chiaro dall'esempio ora discusso che non abbiamo ancora una risposta completa alla nostra domanda iniziale di quanto bene dei dati sostengano una relazione lineare tra x e y . Il nostro professore trovò un coefficiente di correlazione $r = 0.8$ e lo giudicò "ragionevolmente vicino" ad 1. Ma come possiamo decidere oggettivamente cosa è "ragionevolmente vicino

ad 1"? $r = 0.6$ sarebbe stato ragionevolmente vicino? Oppure $r = 0.4$? Possiamo rispondere a queste domande con il seguente ragionamento.

Supponiamo che due variabili x e y siano in realtà "incorrelate"; al limite di infinitamente molte misure, il coefficiente di correlazione r dovrebbe essere zero. Dopo un numero finito di misure, è molto improbabile che r sia esattamente zero. Si può, di fatto, calcolare la probabilità che ecceda qualche valore specifico. Denoteremo con

$$P_N(|r| \geq r_0)$$

la probabilità che N misure di due variabili incorrelate x e y diano un coefficiente r più grande (in valore assoluto) di un particolare r_0 . Per esempio potremmo calcolare la probabilità

$$P_N(|r| \geq 0.8)$$

che, dopo N misure delle variabili non correlate x e y , il coefficiente di correlazione sia al minimo grande quanto quello del nostro professore 0.8. Il calcolo di queste probabilità è piuttosto complesso, e non lo daremo qui. Comunque, i risultati per alcuni valori rappresentativi dei parametri sono mostrati in Tabella 9.2, e una tabulazione più completa è data in Appendice C.

Tabella 9.2. La Probabilità $P_N(|r| \geq r_0)$ che N misure di due variabili incorrelate x e y producano un coefficiente di correlazione con $|r| \geq r_0$. I valori dati sono probabilità percentuali, spazi vuoti indicano valori inferiori allo 0.05 per cento.

N	r_0										
	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
3	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
6	100	85	70	56	43	31	21	12	6	1	0
10	100	78	58	40	25	14	7	2	.5	—	0
20	100	67	40	20	8	2	.5	.1	—	—	0
50	100	49	16	3	.4	—	—	—	—	—	0

Sebbene non abbiamo mostrato come le probabilità in Tabella 9.2 siano calcolate, possiamo capire il loro comportamento generale e usarle. La colonna a sinistra mostra il numero di dati N . (Nel nostro esempio, il professore registrò le votazioni di dieci studenti; così, $N = 10$). I numeri nelle colonne successive mostrano la probabilità che N misure di due variabili "incorrelate" forniscano un coefficiente r grande al minimo quanto il numero riportato in cima alla colonna. Per esempio, vediamo che la probabilità che dieci punti incorrelati diano $|r| \geq 0.8$ è soltanto 0.5 per cento, non una grande probabilità. Il nostro professore può quindi dire che è "molto improbabile" che votazioni non correlate abbiano dato un coefficiente con $|r|$ maggiore o uguale allo 0.8 che egli ha ottenuto. In altre parole, è molto "probabile" che le votazioni nei compiti a casa e negli esami siano realmente correlate.

Alcuni aspetti della Tabella 9.2 meritano un commento. Tutti i numeri nella prima colonna sono il 100 per cento, poiché $|r|$ è sempre maggiore o uguale a

⁴ Dal momento che vi è correlazione se r è vicino a $+1$ "oppure" a -1 , consideriamo la probabilità di ottenere il "valore assoluto" $|r| \geq r_0$.

zero; così la probabilità di trovare $|r| \geq 0$ è sempre il 100 per cento. Analogamente i numeri dell'ultima colonna sono tutti zero, poiché la probabilità di trovare $|r| \geq 1$ è zero⁵. I numeri nelle colonne intermedie variano con il numero di dati N . Questo si capisce facilmente. Se facciamo tre misure, la possibilità che abbiamo un coefficiente di correlazione con $|r| \geq 0.5$, diciamo è ovviamente piuttosto buona (67 per cento, infatti); ma se facciamo venti misure, e le due variabili sono realmente non correlate, la probabilità di trovare $|r| \geq 0.5$ è ovviamente molto piccola (2 per cento, infatti).

Armati con le probabilità di Tabella 9.2 (o della Tabella più completa in Appendice C), abbiamo ora la risposta più completa possibile alla domanda di quanto bene N coppie di valori (x_i, y_i) indichino una relazione lineare tra x e y . Dai punti misurati, possiamo prima calcolare il coefficiente di correlazione osservato r_0 (il pedice "o" sta per "osservato"). In seguito, usando una di queste tabelle, possiamo trovare la probabilità $P_N(|r| \geq |r_0|)$ che N punti incorrelati diano un coefficiente al minimo grande quanto il coefficiente osservato r_0 . Se questa probabilità è "sufficientemente piccola", allora concludiamo che è molto "improbabile" che x e y siano incorrelati, e quindi molto "probabile" che essi siano realmente correlati.

Dobbiamo ancora scegliere il valore della probabilità che riguarderemo come "sufficientemente piccolo". Una scelta piuttosto comune è di riguardare una correlazione r_0 come "significativa" se la probabilità di ottenere un coefficiente r con $|r| \geq |r_0|$ da variabili incorrelate è minore del 5 per cento. Una correlazione è talvolta chiamata "altamente significativa" se la probabilità corrispondente è minore dell'1 per cento. Qualunque scelta facciamo, "non" otteniamo una risposta definita che i dati sono, o non sono, correlati; invece, abbiamo una valutazione quantitativa di quanto è improbabile che essi siano incorrelati.

9.5. Esempi

Supponiamo di misurare tre coppie di valori (x_i, y_i) e di trovare che essi hanno un coefficiente di correlazione di 0.7 (o -0.7). Sostiene questo l'ipotesi che x e y siano in relazione lineare?

Riferendoci alla Tabella 9.2, vediamo, che anche se le variabili x e y fossero completamente incorrelate, c'è la probabilità del 51 per cento di ottenere $|r| \geq 0.7$ quando $N = 3$. In altre parole, è interamente possibile che x e y siano incorrelati; così non abbiamo evidenza significativa della correlazione. Infatti con solo tre misure sarebbe molto difficile ottenere evidenza convincente di una correlazione. Anche un coefficiente osservato grande quanto 0.9 è del tutto insufficiente, dal momento che c'è la probabilità del 29 per cento di ottenere $|r| \geq 0.9$ da tre misure di variabili incorrelate.

Se trovassimo una correlazione di 0.7 da sei misure, la situazione sarebbe un po' migliore, ma ancora non abbastanza buona. Con $N = 6$, la probabilità di ottenere $|r| \geq 0.7$ da variabili incorrelate è 12 per cento. Questo valore non è abbastanza piccolo da escludere la possibilità che x e y siano incorrelati.

D'altra parte, se trovassimo $r = 0.7$ da venti misure, allora avremmo forte evidenza di una correlazione, poiché quando $N = 20$ la probabilità di ottenere $|r| \geq 0.7$ da due variabili incorrelate è soltanto 0.1 per cento. Per ogni standard questo è molto improbabile, e potremmo arguire ragionevolmente che è

indicata la presenza di una correlazione. In particolare, la correlazione potrebbe essere chiamata "altamente significativa", poiché la probabilità in questione è minore dell'1 per cento.

Problemi

Nota. Un asterisco indica che il problema è discusso oppure il suo risultato è dato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

*9.1 (Sezione 9.2). Dimostrare che la covarianza σ_{xy} , definita nella (8.9), soddisfa la disuguaglianza di Schwarz (9.11),

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y \quad (9.17)$$

Suggerimento: sia t un numero arbitrario e si consideri la funzione

$$A(t) = \frac{1}{N} \sum [(x_i - \bar{x}) + t(y_i - \bar{y})]^2 \geq 0. \quad (9.18)$$

Poiché $A(t)$ è positiva qualunque sia il valore di t , potete trovare il suo valore minimo A_{\min} ponendo la sua derivata dA/dt uguale a zero, e questo A_{\min} è ancora maggiore o uguale a zero. Mostrate che $A_{\min} = \sigma_x^2 - (\sigma_{xy}^2/\sigma_y^2)$, e deducete la (9.17).

9.2 (Sezione 9.2)

(a) Immaginate una serie di N misure di due lunghezze fissate x e y , fatte per trovare un valore di qualche funzione $q(x, y)$. Supponete che vengano usati differenti metri a nastro, ma che ogni coppia (x_i, y_i) sia misurata con lo stesso nastro; cioè, la coppia (x_1, y_1) è misurata con un metro a nastro (x_2, y_2) è misurata con un metro a nastro, e così via. Assumendo che la sorgente principale di errore sia che alcuni dei nastri si sono accorciati e alcuni allungati, mostrate chiaramente che la covarianza σ_{xy} deve essere positiva.

(b) Mostrate poi, sotto le stesse condizioni, che $\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y$, cioè, che σ_{xy} è tanto grande quanto è permesso dalla disuguaglianza di Schwarz (9.17). Suggerimento: assumete che il nastro stesso si sia accorciato di un fattore α_i (con α_i vicino a 1); allora, una lunghezza che è in realtà x sarà misurata come $x_i = \alpha_i x$. La morale di questo problema è che ci sono circostanze in cui la covarianza è certamente non trascurabile.

*9.3 (Sezione 9.3)

(a) Provare l'identità

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}$$

(b) Mostrare poi che il coefficiente di correlazione r definito nella (9.15) può essere scritto come

$$r = \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{[\sum x_i^2 - N\bar{x}^2][\sum y_i^2 - N\bar{y}^2]}^{1/2}. \quad (9.19)$$

⁵ Sebbene sia "impossibile" che $|r| > 1$, è, in linea di principio possibile che $|r| = 1$. Comunque r è una variabile continua, e la probabilità di ottenere $|r|$ esattamente uguale a uno è zero. Così $P_N(|r| \geq 1) = 0$.

Questo è spesso un modo più conveniente per calcolare r , poiché evita la necessità di calcolare le deviazioni individuali $(x_i - \bar{x})$ e $(y_i - \bar{y})$.

9.4 (Sezione 9.4)

- (a) Verificare che il coefficiente di correlazione r per le dieci coppie di votazioni in Tabella 9.1 è $r \approx 0.8$.
 (b) Usando la tabella delle probabilità in Appendice C, trovate la probabilità di ottenere una correlazione r con $|r| \geq 0.8$ se le due votazioni fossero realmente non correlate.

*9.5 (Sezione 9.4). Nell'effetto fotoelettrico, l'energia cinetica K degli elettroni emessi si suppone sia una funzione lineare della frequenza f della luce usata,

$$K = hf - \phi \quad (9.20)$$

dove h e ϕ sono costanti. Per verificare ciò, uno studente misura K per N diversi valori di f e calcola il coefficiente di correlazione r per i suoi risultati.

- (a) Se fa 5 misure ($N = 5$) e trova $r = 0.7$, è questo valore significativo per sostenere la relazione lineare (9.20)?
 (b) Cosa succede se $N = 20$ e $r = 0.5$?

*9.6 (Sezione 9.4)

(a) Disegnate un grafico per queste cinque coppie di misure:

$$x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$y = 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Calcolate il loro coefficiente di correlazione r . È probabilmente più semplice usare la forma (9.19). I dati mostrano una correlazione significativa? Le probabilità necessarie possono essere trovate in Appendice C.

- (b) Ripetete la parte (a) per i seguenti dati:

$$x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$y = 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

9.7 (Sezione 9.4). Uno psicologo, investigando la relazione tra l'intelligenza di padri e figli, misura i quozienti di intelligenza $Q.I.$ per dieci padri e i loro figli, con i risultati riportati in Tabella 9.3, dove $x_i = Q.I.$ del padre e $y_i = Q.I.$ del figlio corrispondente

Tabella 9.3.

x_i	74	83	85	96	98	100	106	107	120	124
y_i	76	103	99	109	111	107	91	101	120	119

Questi dati sostengono una correlazione fra l'intelligenza di padri e figli?

10. La distribuzione binomiale

La distribuzione di Gauss, o normale, è l'unico esempio di distribuzione che abbiamo studiato finora. Discuteremo ora altri due importanti esempi, la distribuzione binomiale (in questo capitolo) e la distribuzione di Poisson (nel Capitolo 11).

10.1. Distribuzioni

Nel Capitolo 5 abbiamo introdotto l'idea di una "distribuzione", la funzione che descrive la proporzione di volte in cui ciascuno dei vari possibili risultati di una misura ripetuta si presenta. Per esempio, potremmo fare N misure del periodo T di un pendolo e trovare la distribuzione dei valori misurati di T ; o potremmo misurare le altezze h di N americani e trovare la distribuzione delle varie altezze misurate h .

Poi abbiamo introdotto la nozione di "distribuzione limite", la distribuzione che si otterrebbe al limite quando il numero di misure N diventa molto grande. La distribuzione limite può essere vista come quella che ci dice la "probabilità" che una misura presenti uno dei possibili valori: la probabilità che una misura del periodo dia un particolare valore T ; la probabilità che un americano (scelto a caso) abbia una particolare altezza h . Per questa ragione la distribuzione limite è anche talvolta chiamata la "distribuzione di probabilità".

Delle molte distribuzioni limite possibili, l'unica che abbiamo discusso è la distribuzione di Gauss, o normale, che descrive la distribuzione dei risultati di una misura soggetta a molte sorgenti di errore che sono tutte piccole e casuali. Come tale, la distribuzione di Gauss è la più importante di tutte le distribuzioni limite per lo studioso di fisica, e merita ampiamente il rilievo che qui le abbiamo dato. Nondimeno, ci sono parecchie altre distribuzioni di grande importanza teorica e pratica, e in questo e nel prossimo capitolo ne daremo due esempi.

In questo capitolo descriveremo la distribuzione binomiale. Questa distribuzione non è di grande importanza pratica al fisico sperimentale. Comunque la sua semplicità permette un'eccellente introduzione a molte proprietà delle distribuzioni, ed è importante teoricamente, poiché da essa possiamo derivare l'importantissima distribuzione di Gauss.

10.2. Probabilità nel gettare un dado

La distribuzione binomiale può essere meglio descritta con un esempio. Supponiamo di intraprendere un nostro "esperimento", cioè di lanciare tre

dadi e contare il numero di assi usciti. I possibili risultati dell'esperimento sono le uscite 0, 1, 2, o 3 assi. Se ripetiamo l'esperimento un enorme numero di volte, allora troveremo la distribuzione limite, che ci dà la probabilità che in ogni lancio (di tutti e tre i dadi) si ottengano v assi, dove $v = 0, 1, 2, o 3$.

Questo esperimento è sufficientemente semplice da poter calcolare facilmente la probabilità delle quattro possibili uscite. Dapprima osserviamo che, assumendo che il dado sia buono, la probabilità di ottenere "un" asso quando gettiamo un dado è $1/6$. Gettiamo ora tutti e tre i dadi, e cerchiamo dapprima la probabilità di ottenere tre assi ($v = 3$). Poiché ogni dado separato ha probabilità $1/6$ di dare un asso, e poiché i tre dadi rotolano indipendentemente, la probabilità per tre assi è

$$P(3 \text{ assi in } 3 \text{ lanci}) = (1/6)^3 \\ \approx 0.5\%$$

Calcolare la probabilità di due assi ($v = 2$), è un po' più difficile, poiché possiamo ottenere due assi in parecchi modi. Il primo e il secondo dado potrebbero dare assi e il terzo no ($A, A, \text{ non } A$), oppure il primo e il terzo potrebbero mostrare assi e il secondo no ($A, \text{ non } A, A$) e così via. Ragioniamo ora in due passi. In primo luogo consideriamo la probabilità di ottenere due assi in un ordine definito, come ($A, A, \text{ non } A$). La probabilità che il primo dado dia un asso è $1/6$, e analogamente per il secondo. D'altra parte la probabilità che l'ultimo dado "non" presenti un asso è $5/6$. Così la probabilità per due assi in questo particolare ordine è

$$P(A, A \text{ non } A) = (1/6)^2 \times (5/6).$$

La probabilità per due assi in qualche altro ordine definito è la stessa. Infine, ci sono tre diversi ordini in cui potremmo ottenere i nostri due assi: ($A, A \text{ non } A$), o ($A, \text{ non } A, A$), o ($\text{non } A, A, A$). Così la probabilità totale di ottenere due assi (in ogni ordine) è

$$P(2 \text{ assi in } 3 \text{ lanci}) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) \\ \approx 6,9\%.$$

Calcoli analoghi danno la probabilità per un asso in tre lanci (34.7 per cento), e per nessun asso in tre lanci (57.9 per cento). Le nostre conclusioni numeriche

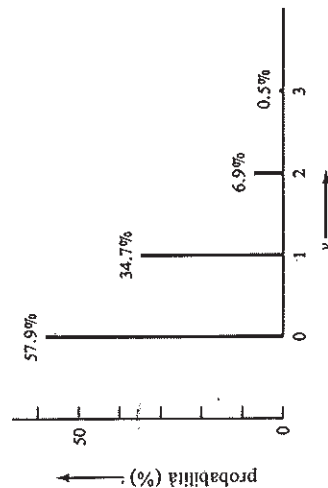


Figura 10.1. Probabilità di ottenere v assi gettando tre dadi. Questa funzione è la distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$, con $n = 3$ e $p = 1/6$.

possono essere riassunte disegnando la distribuzione di probabilità per il numero di assi ottenuti quando si gettano tre dadi, come in Figura 10.1. Questa distribuzione è un esempio della distribuzione binomiale, la cui forma generale descriveremo ora.

10.3. Definizione della distribuzione binomiale

Per descrivere la distribuzione binomiale generale, dobbiamo introdurre qualche terminologia. In primo luogo, immaginiamo di fare " n prove" indipendenti, come gettare n dadi, lanciare n monete, o provare n petardi. Ogni prova può avere varie uscite; un dado può presentare qualunque faccia da 1 a 6; una moneta può mostrare testa o croce; un petardo può esplodere o fallire. Riferiamoci ora all'uscita che consideriamo come un "successo". Così "successo" potrebbe essere ottenere un asso da un dado, o testa in una moneta o avere l'esplosione da un petardo. Denotiamo con " p " la probabilità di successo in una data prova, e con " q " $= 1 - p$ quella di insuccesso (cioè ottenere un'uscita diversa da quella che ci interessa). Così $p = 1/6$ per ottenere un asso in un dado, $p = 1/2$ per testa in una moneta, e p potrebbe essere il 95 per cento per una data marca di petardi di esplodere propriamente.

Armati con queste definizioni, possiamo ora cercare la probabilità di ottenere v successi in n prove. Un calcolo che presto abbozzeremo mostra che questa probabilità è data dalla cosiddetta "distribuzione binomiale":

$$P(v \text{ successi in } n \text{ prove}) = b_{n,p}(v) \\ = \frac{n(n-1) \cdots (n-v+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times v} p^v q^{n-v} \quad (10.2)$$

Qui la lettera b sta per "binomiale"; i sottoscritti n e p in $b_{n,p}(v)$ indicano che la distribuzione dipende da n , il numero di prove fatte, e da p , la probabilità di successo in una prova.

La distribuzione (10.2) è detta distribuzione binomiale a causa della sua vicina connessione con il ben noto sviluppo binomiale. Specificamente, la frazione nella (10.2) è il "coefficiente binomiale", spesso denotato $\binom{n}{v}$,

$$\binom{n}{v} = \frac{n(n-1) \cdots (n-v+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times v} \quad (10.3)$$

$$= \frac{n!}{v!(n-v)!} \quad (10.4)$$

dove abbiamo introdotto l'utile notazione "fattoriale"

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Il coefficiente binomiale compare nello sviluppo di un binomio

$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + \cdots + q^n \\ = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} p^v q^{n-v}, \quad (10.5)$$

che vale per due numeri qualunque p e q per ogni intero positivo n (vedi Problema 10.4).

Con la notazione (10.3), possiamo riscrivere la distribuzione binomiale nella forma più compatta

$$P(v \text{ successi in } n \text{ prove}) = b_{n,p}(v) \quad (10.6)$$

$$= \binom{n}{v} p^v q^{n-v}$$

dove, come al solito, p denota la probabilità di successo in una prova e $q = 1 - p$.

La derivazione del risultato (10.6) è analoga a quella dell'esempio del dado in (10.1),

$$P(2 \text{ assi in } 3 \text{ lanci}) = 3 \times (1/6)^2 \times (5/6) \quad (10.7)$$

Infatti, se poniamo $v = 2$, $n = 3$, $p = 1/6$, e $q = 5/6$ nella (10.6), otteniamo precisamente la (10.7), come potete verificare. Inoltre, il significato di ciascun fattore nella (10.6) è lo stesso del fattore corrispondente nella (10.7). Il fattore p^v è la probabilità di ottenere tutti successi in v prove definite, e q^{n-v} è la probabilità di fallire nelle rimanenti $n - v$ prove. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{v}$ rappresenta il numero dei diversi ordini in cui si possono ottenere v successi in n prove. Ciò prova che la distribuzione binomiale (10.6) è proprio la probabilità rivendicata.

Esempio

Supponiamo di lanciare 4 monete ($n = 4$) e di contare il numero di teste ottenute, v . Qual è la probabilità di ottenere i vari valori possibili $v = 0, 1, 2, 3, 4$?

Poiché la probabilità di ottenere una testa in un lancio è $p = \frac{1}{2}$, la probabilità richiesta è semplicemente la distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$, con $n = 4$ e $p = q = \frac{1}{2}$,

$$P(v \text{ teste in } 4 \text{ lanci}) = \binom{4}{v} \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Questi numeri si calcolano facilmente (Problema 10.5) e danno la distribuzione riportata in Figura 10.2.

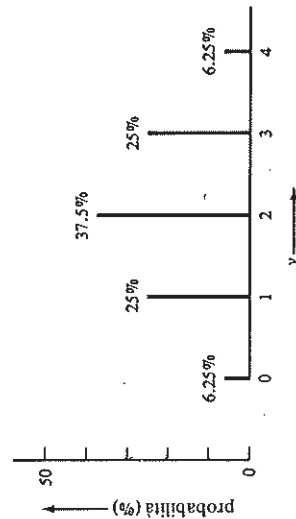


Figura 10.2. La distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$ con $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$. Fornisce la probabilità di ottenere v teste quando si lanciano 4 monete.

Vediamo che il numero più probabile di teste è $v = 2$, come ci si dovrebbe aspettare. In questo caso le probabilità sono simmetriche attorno a questo valore più probabile. Cioè, la probabilità per tre teste è la stessa che per una, e la probabilità per quattro teste è la stessa che per nessuna. Come vedremo, la simmetria si ha soltanto quando $p = \frac{1}{2}$.

10.4. Proprietà della distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$ dà la probabilità di ottenere v successi in n prove, quando p è la probabilità del successo in una singola prova. Se ripetiamo il nostro completo esperimento (consistente di n prove) molte volte, allora è naturale domandarsi quale sarebbe il nostro numero di successi in media \bar{v} . Esso è proprio

$$\bar{v} = \sum_{v=0}^n v b_{n,p}(v), \quad (10.8)$$

e si calcola facilmente (Problema 10.8) come

$$\bar{v} = np. \quad (10.9)$$

Cioè se ripetiamo la nostra serie di n prove molte volte, allora il numero medio di successi sarà proprio la probabilità di successo in una prova (p) moltiplicato n , come ci si dovrebbe aspettare. Si può analogamente calcolare la deviazione standard σ , nel nostro numero di successi (Problema 10.10). Il risultato è

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}. \quad (10.10)$$

Quando $p = \frac{1}{2}$ (come nell'esperimento del lancio di una moneta) il numero medio di successi è proprio $n/2$. Inoltre, è facile dimostrare che per $p = \frac{1}{2}$

$$b_{n,1/2}(v) = b_{n,1/2}(n-v) \quad (10.11)$$

(vedi Problema 10.11). Cioè, la distribuzione binomiale, con $p = \frac{1}{2}$, è simmetrica attorno al valore medio $n/2$, come notiamo in Figura 10.2.

In generale, quando $p \neq \frac{1}{2}$, la distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$ non è simmetrica. Per esempio, la Figura (10.1) è chiaramente non simmetrica, il numero più probabile di successi essendo per $v = 0$, e diminuendo la probabilità regolarmente per $v = 1, 2, 3$. Inoltre, il numero medio di successi ($\bar{v} = 0.5$) non è qui lo stesso del numero più probabile di successi ($v = 0$).

È interessante confrontare la distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$ con la più familiare distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$. Forse la differenza più grossa è che l'esperimento descritto dalla prima ha dato in uscita i valori "discreti" ($v = 0, 1, \dots, n$, mentre quelli della seconda sono dati dai valori "continui" della grandezza misurata x . La distribuzione di Gauss è simmetrica con un piccolo

¹ La parola "discreto" (da non confondersi con riservato, prudente) significa "staccati l'uno dall'altro" ed è l'opposto di continuo.

centrato sul valor medio $x = X$, il che significa che il valor medio X è anche il valore più probabile (quello per cui $f_{X,\sigma}(x)$ è massima). Come abbiamo visto la distribuzione binomiale è simmetrica solo quando $p = \frac{1}{2}$, e in generale il valore medio non coincide con il valore più probabile.

Approssimazione Gaussiana alla Distribuzione Binomiale

Nonostante tutte le loro differenze, vi è una importante connessione tra le distribuzioni binomiale e Gaussiana. Se consideriamo la distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$ per un valore fissato di p , allora quando n è grande $b_{n,p}(v)$ è approssimata da vicino dalla distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(v)$ con la stessa media e la stessa deviazione standard; cioè

$$b_{n,p}(v) \approx f_{X,\sigma}(v) \quad (n \text{ grande}) \quad (10.12)$$

con

$$X = np \quad e \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (10.13)$$

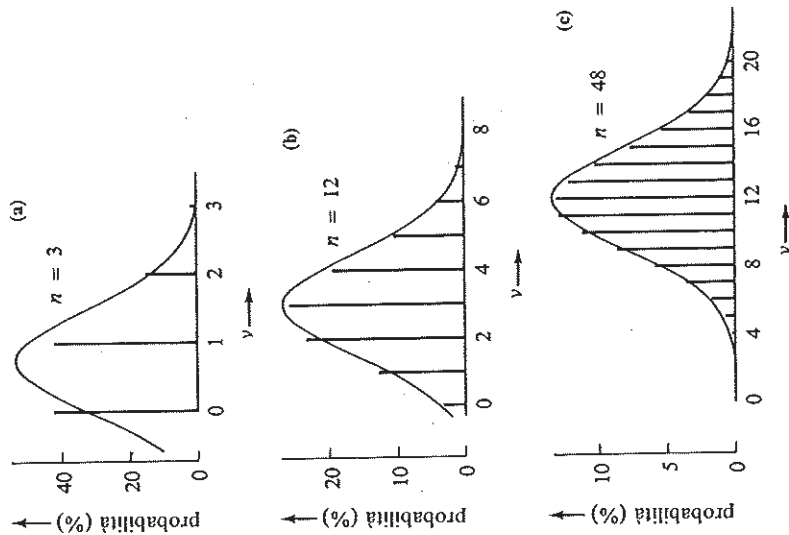


Figura 10.3. Le distribuzioni binomiali con $p = \frac{1}{2}$ e $n = 3, 12, e 48$. La curva continua sovrapposta su ciascun disegno è la funzione di Gauss con la stessa media e la stessa deviazione standard.

Ci riferiamo alla (10.12) come la approssimazione Gaussiana alla distribuzione binomiale. Non dimostriamo qui il risultato (*), ma la sua evidenza è chiaramente illustrata in Figura 10.3, che mostra la distribuzione binomiale per $p = \frac{1}{2}$ e per tre valori di n successivamente più grandi ($n = 3, 12, 48$). Sovrapposta su ogni distribuzione binomiale vi è la distribuzione di Gauss con la stessa media e deviazione standard. Con solo tre prove ($n = 3$), la distribuzione binomiale è completamente diversa dalla corrispondente Gaussiana. In particolare, la distribuzione binomiale è distintamente asimmetrica, mentre la Gaussiana è, naturalmente, perfettamente simmetrica attorno alla sua media. Per $n = 12$, la asimmetria della distribuzione binomiale è molto meno pronunciata, e le due distribuzioni sono piuttosto vicine l'una all'altra. Quando $n = 48$, la differenza tra la binomiale e la Gaussiana corrispondente è così debole che le due sono praticamente indistinguibili sulla scala di Figura 10.3 (c).

Il fatto che la distribuzione binomiale possa essere approssimata dalla funzione di Gauss quando n è grande è molto utile in pratica. Il calcolo della distribuzione binomiale con n maggiore di circa 20 è estremamente tedioso, mentre il calcolo della funzione di Gauss è sempre semplice qualunque siano i valori di X e σ . Per illustrare ciò, supponiamo di voler conoscere la probabilità di ottenere 23 teste in 36 lanci di una moneta. Questa probabilità è data dalla distribuzione binomiale $b_{36,1/2}(v)$, poiché la probabilità di una testa in un lancio è $p = \frac{1}{2}$. Così

$$P(23 \text{ teste in } 36 \text{ lanci}) = b_{36,1/2}(23) \quad (10.14)$$

$$= \frac{36!}{23!13!} \left(\frac{1}{2}\right)^{36} \quad (10.15)$$

che un calcolo (*) piuttosto tedioso mostra essere

$$P(23 \text{ teste}) = 3.36\%.$$

D'altra parte, poiché la media della distribuzione è $np = 18$ e la deviazione standard è $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3$, possiamo approssimare la (10.14) con la funzione di Gauss $f_{18,3}(23)$, e un calcolo banale dà

$$P(23 \text{ teste}) \approx f_{18,3}(23) = 3.32\%$$

Per la maggior parte degli scopi questa è un'eccellente approssimazione.

L'utilità dell'approssimazione Gaussiana è anche più ovvia, se vogliamo la probabilità di parecchie uscite. Per esempio, la probabilità di ottenere 23 o "più" teste in 36 lanci è

$$P(23 \text{ o più teste}) = P(23 \text{ teste}) + P(24 \text{ teste}) + \dots + P(36 \text{ teste})$$

una somma molto tediosa da calcolare direttamente. Comunque se approssimiamo la distribuzione binomiale con una Gaussiana, allora la probabilità si trova facilmente. Poiché il calcolo della probabilità Gaussiana, tratta v come

* Per le dimostrazioni, vedi Stuart L. Meyer, "Data Analysis for Scientists and Engineers" (John Wiley, 1975), p. 226, oppure Hugh D. Young, "Statistical Treatment of Experimental Data" (McGraw-Hill, 1962), Appendix C.

† Alcuni calcolatori tascabili sono preprogrammati per calcolare $n!$ automaticamente, e con tale calcolatore il calcolo della (10.15) è facile. Comunque, nella maggior parte di questi calcolatori tascabili $n!$ va fuori limite quando $n \geq 70$; così per $n \geq 70$ questa funzione preprogrammata non è di aiuto.

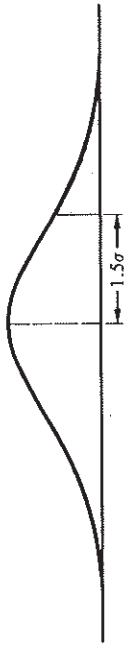


Figura 10.4. La probabilità di un risultato maggiore di 1.5σ al di sopra della media è l'area tratteggiata sotto la curva di Gauss.

una variabile continua, la probabilità per $v = 23, 24, \dots$ è meglio calcolata come $P_{\text{Gauss}}(v \geq 22.5)$, la probabilità per ogni $v \geq 22.5$. Ora, $v = 22.5$ è 1.5 deviazioni standard al di sopra del valore medio, 18. (Ricordiamo, $\sigma = 3$; così $4.5 = 1.5\sigma$). La probabilità di un risultato maggiore di 1.5σ al di sopra della media è uguale all'area sotto la funzione di Gauss mostrata in Figura 10.4. Si calcola facilmente con l'aiuto della tabella in Appendice B, e troviamo

$$P(23 \text{ o più teste}) \approx P_{\text{Gauss}}(v \geq X + 1.5\sigma) = 6.7\%$$

Questo valore si confronta bene con il risultato esatto (di due cifre significative) 6.6 per cento.

10.5. La distribuzione di Gauss per gli errori casuali

Nel Capitolo 5 affermammo che una misura soggetta a molti piccoli errori casuali sarà distribuita normalmente. Ora stiamo per dimostrarlo, usando un semplice modello per il tipo di esperimento in considerazione. Supponiamo di misurare una grandezza x il cui valore vero è X . Assumiamo che le nostre misure siano soggette ad errori sistematici trascurabili, ma che vi siano n sorgenti indipendenti di errori casuali (effetti di parallasse, tempi di reazione, e così via). Per semplificare la nostra discussione, supponiamo ancora che tutte queste sorgenti producano errori casuali della stessa fissata dimensione ε . Cioè ogni sorgente di errore spinge il nostro risultato verso l'alto di ε o verso il basso di ε , e queste due possibilità occorrono con la stessa probabilità, $p = \frac{1}{2}$. Per esempio, se il valore vero è X e c'è solo una sorgente di errore, allora i nostri possibili risultati sono $x = X - \varepsilon$ e $x = X + \varepsilon$, entrambi ugualmente probabili. Se vi fossero due sorgenti di errore, una misura potrebbe dare $x = X - 2\varepsilon$ (se capita che entrambi gli errori siano negativi), oppure $x = X$ (se uno è negativo e l'altro positivo), oppure $x = X + 2\varepsilon$ (se capita che entrambi siano positivi). Queste possibilità sono mostrate nella Figura 10.5 (a) e 10.5 (b).

In generale se vi sono n sorgenti di errore, il nostro risultato sarebbe compreso nell'intervallo da $x = X - n\varepsilon$ a $x = X + n\varepsilon$. In una data misura, se capita che v sorgenti diano errori positivi e $(n - v)$ errori negativi, allora il nostro risultato sarà

$$\begin{aligned} x &= X + v\varepsilon - (n - v)\varepsilon \\ &= X + (2v - n)\varepsilon \end{aligned} \tag{10.16}$$

La probabilità di questa occorrenza è proprio la probabilità binomiale

$$P(v \text{ errori positivi}) = b_{n,1/2}(v) \tag{10.17}$$

Così i possibili risultati della nostra misura sono simmetricamente distribuiti

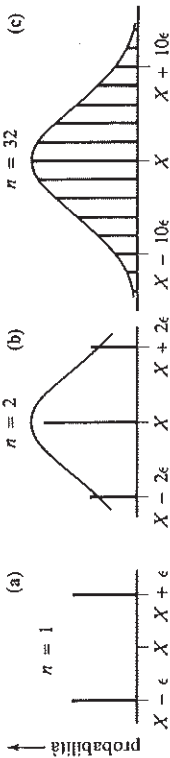


Figura 10.5. Distribuzione di misure soggette ad n errori casuali di grandezza ε , per $n = 1, 2$ e 32 . Le curve continue sovrapposte su (b) e (c) sono le Gaussiane con lo stesso centro e larghezza. (Le scale verticali sono diverse nei tre grafici).

attorno al valore vero X , con probabilità date dalla funzione binomiale (10.17). Questo è illustrato in Figura 10.5 per $n = 1, 2$, e 32 .

Quello che ora possiamo con certezza affermare è che se il numero di sorgenti di errore, n , è grande e la dimensione dei singoli errori, ε , è piccola, allora le nostre misure sono distribuite normalmente. Per essere più precisi, notiamo che la deviazione standard della distribuzione binomiale è $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{n/4}$. Allora, secondo la (10.16) la deviazione standard delle nostre misure di x è $\sigma_x = 2\varepsilon\sigma_x = \varepsilon\sqrt{n}$. Di conseguenza, poniamo $n \rightarrow \infty$ ed $\varepsilon \rightarrow 0$ in modo tale che $\sigma_x = \varepsilon\sqrt{n}$ rimanga fissato. Quando facciamo ciò, succedono due cose. In primo luogo, come discusso nella precedente sezione, la distribuzione binomiale si approssima alla distribuzione Gaussiana con centro X e larghezza σ_x . Questo si vede chiaramente nelle Figure 10.5 (b) e (c), in cui le funzioni di Gauss appropriate sono state sovrapposte. In secondo luogo, per $\varepsilon \rightarrow 0$, i possibili risultati della nostra misura si fanno più vicini fra loro (come è anche chiaro in Figura 10.5), così che la distribuzione discreta si approssima ad una distribuzione continua, che è precisamente, la distribuzione di Gauss attesa.

10.6. Applicazioni; verifica di ipotesi

Una volta che sappiamo come dovrebbero essere distribuiti i risultati di un esperimento, possiamo domandarci se "sono" distribuiti come ci aspettiamo. Questo tipo di verifica di una distribuzione, è una tecnica importante nelle scienze fisiche, e forse ancor di più in quelle biologiche e sociali. Un test importante e generale, il test χ^2 , è l'argomento del Capitolo 12. Qui diamo due esempi di un test più semplice che può essere applicato a certi problemi che coinvolgono la distribuzione binomiale.

Verifica di una nuova cera per sci

Supponiamo che un fabbricante di sciolina dichiarò di aver prodotto una nuova cera che riduce grandemente l'attrito fra sci e neve. Per verificare la sua affermazione, potremmo prendere dieci paia di sci e trattare uno sci di ciascuna coppia con la cera. Potremmo poi far fare delle corse ai legni trattati e non trattati di ciascuna coppia, lasciandoli scivolare lungo una opportuna discesa coperta di neve.

Se gli sci trattati vincessero tutte e dieci le corse, avremmo ovviamente forte evidenza che la sciolina funziona. Sfortunatamente, raramente otteniamo un risultato così chiaro e netto; e anche quando è così, ci piacerebbe dare qualche valutazione quantitativa della forza dell'evidenza. Così dobbiamo porci due

domande. In primo luogo, come possiamo quantificare l'evidenza che la cera funziona (o non funziona)? In secondo luogo dove dovremmo tracciare la linea di demarcazione? Se gli sci trattati vincessero nove delle gare, sarebbe ciò conclusivo? E se ne vincessero otto? O sette?

Precisamente queste stesse domande sorgono in una moltitudine di test statistici similari. Se volessimo verificare l'efficacia di un fertilizzante, dovremmo organizzare "corse" tra piante trattate e non trattate. Per prevedere quale candidato vincerà una elezione, dovremmo scegliere un campione casuale di elettori e tenere "gare" fra i candidati con i membri del nostro campione.

Per rispondere alle due domande, dobbiamo decidere più precisamente cosa dovremmo aspettarci dai nostri test. Nella terminologia accettata, dobbiamo formulare una "ipotesi statistica". Nell'esempio della sciolina, l'ipotesi più semplice è la "ipotesi nulla", cioè che la nuova cera non provoca di fatto alcuna differenza. A seguito di questa ipotesi possiamo calcolare la probabilità dei vari risultati possibili del nostro test, e quindi giudicare il significato del nostro particolare risultato.

Supponiamo di assumere come nostra ipotesi che la sciolina non fa differenza. In ogni corsa quindi lo sci trattato e quello non trattato dovrebbero avere la stessa probabilità di vincere; cioè, la probabilità per uno sci trattato di vincere è $p = \frac{1}{2}$. La probabilità che gli sci trattati vincano v delle dieci corse è quindi la probabilità binomiale:

$$P(v \text{ vittorie in } 10 \text{ corse}) = b_{10, 1/2}(v) \\ = \frac{10!}{v!(10-v)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad (10.18)$$

Secondo la (10.18) la probabilità che gli sci trattati vincano tutte le dieci corse è

$$P(10 \text{ vittorie in } 10 \text{ corse}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.1\% \quad (10.19)$$

Cioè, se la nostra ipotesi nulla è corretta, è molto "improbabile" che gli sci trattati vincano tutte le dieci corse. Al contrario, se gli sci trattati "vincessero" tutte le dieci corse, è molto improbabile che la nostra ipotesi nulla sia corretta. Infatti, la probabilità (10.19) è così piccola che potremmo dire che l'evidenza in favore della cera è "altamente significativa", come discuteremo brevemente.

Supponiamo invece che gli sci trattati abbiano vinto otto delle dieci corse. Qui dovremmo calcolare la probabilità di otto "o più" vittorie:

$$P(8 \text{ o più vittorie in } 10 \text{ corse}) = P(8 \text{ vittorie}) + P(9 \text{ vittorie}) + P(10 \text{ vittorie}) \\ \approx 5.5\% \quad (10.20)$$

Per gli sci trattati vincere otto o più gare è ancora piuttosto improbabile, ma non tanto improbabile quanto vincerne dieci.

Per decidere quale conclusione trarre dalle otto vittorie, dobbiamo tener presente che in realtà ci sono solo due alternative:

(a) la nostra ipotesi nulla è corretta (la sciolina non provoca differenza), ma, per caso, è capitato un evento improbabile (gli sci trattati hanno vinto otto corse);

oppure

(b) la nostra ipotesi nulla è falsa, e la sciolina è efficace.

Nei test statistici è tradizione fissare qualche definita probabilità (per esempio, 5 per cento) che si considera come quella che stabilisce il limite al di sotto del quale un evento è improbabile in maniera inaccettabile. Se la probabilità dell'uscita reale (otto o più vittorie, nel nostro caso) è al di sotto di questo limite, allora noi scegliamo l'alternativa (b), rigettiamo l'ipotesi, e diciamo che il risultato del nostro esperimento è "significativo".

È pratica comune chiamare un risultato significativo se la sua probabilità è minore del 5 per cento, e chiamarlo "altamente significativo" se la sua probabilità è minore dell'1 per cento. Poiché la probabilità (10.20) è 5.5 per cento, diciamo che otto vittorie per gli sci trattati "non" sono abbastanza per dare evidenza "significativa" che la sciolina funziona. D'altra parte, diciamo che la probabilità di 10 vittorie è 0.1 per cento. Poiché è minore dell'1 per cento, possiamo dire che dieci vittorie costituirebbero evidenza "altamente significativa" che la cera lavora bene (⁴).

Procedimento generale

I metodi dell'esempio ora descritto possono essere applicati a qualunque insieme di n prove similari ma indipendenti (o "corse"), ciascuna delle quali ha le stesse due possibili uscite, "successo" o "insuccesso". Dapprima si formula una ipotesi, in questo caso semplicemente si assume un valore per la probabilità p di successo in una prova. Questo valore assunto di p determina il numero medio atteso di successi, $\bar{v} = np$, in n prove (⁵). Se il numero effettivo di successi, v , nelle nostre n prove è vicino a np , allora non vi è evidenza contro l'ipotesi. (Se gli sci trattati vincessero cinque delle 10 corse, non vi è evidenza che la cera faccia qualche differenza). Se v è apprezzabilmente più grande di np , allora calcoliamo la probabilità (data la nostra ipotesi) di ottenere v o più successi. Se questa probabilità è minore del nostro "livello di significatività" scelto, (cioè 5 per cento o 1 per cento), allora arguiamo che il nostro numero osservato è improbabile in modo inaccettabile (se la nostra ipotesi è corretta) e quindi che la nostra ipotesi dovrebbe essere rigettata. Nello stesso modo, se il nostro numero di successi è apprezzabilmente minore di np , allora possiamo ragionare analogamente, eccetto che dovremmo calcolare la probabilità di ottenere v o meno successi (⁶).

Come avremmo dovuto aspettarci, questo procedimento non ci fornisce una risposta semplice che la nostra ipotesi è certamente vera o certamente falsa. Quello che ci dà è una valutazione quantitativa della ragionevolezza dei nostri risultati alla luce dell'ipotesi, così possiamo scegliere un criterio oggettivo, anche se arbitrario, per il rigetto della nostra ipotesi. Quando uno sperimentatore trae una conclusione basandosi su questo tipo di ragionamento, è importante che dica chiaramente quale criterio ha usato e qual era la probabilità calcolata, in modo che il lettore possa giudicare la ragionevolezza delle conclusioni.

⁴ Merita forse mettere in risalto la grande semplicità del test per ora descritto. Potremmo aver misurato vari parametri addizionali, come il tempo impiegato da ogni sci, la velocità massima di ogni sci, e così via. Invece, abbiamo semplicemente registrato quale sci ha vinto ogni corsa. I test che non usano tali parametri addizionali si chiamano test "non parametrici". Essi hanno il grande vantaggio della semplicità e vasta applicabilità.

⁵ Come al solito, $\bar{v} = np$ è il numero medio di successi atteso se noi ripetessimo il nostro completo insieme di n prove molte volte.

⁶ Come discuteremo in seguito, in alcuni esperimenti la probabilità rilevante è la probabilità "a due code" di ottenere un valore di v che devia "in ciascun lato" da np di tanto quanto, o più, il valore realmente ottenuto.

Un sondaggio d'opinione

Come secondo esempio, consideriamo un'elezione tra due candidati, A e B . Supponiamo che il candidato A rivendichi che una ricerca estensiva ha stabilito che egli è favorito dal 60 per cento dell'elettorato, e supponiamo che il candidato B ci chieda di verificare questa affermazione (nella speranza, naturalmente, di mostrare che il numero che è in favore di A è significativamente minore del 60 per cento).

In questo caso la nostra ipotesi statistica dovrebbe essere che il 60 per cento di elettori è in favore di A ; così la probabilità che un campione di elettori selezionato casualmente voterà per A dovrebbe essere $p = 0.6$. Poiché non possiamo chiedere il parere di ogni singolo elettore, con cura ne selezioniamo un campione casuale di 600 e chiediamo le loro preferenze. Se il 60 per cento è realmente in favore di A , allora il numero atteso nel nostro campione che favorisce A è $np = 600 \times 0.6 = 360$. Se di fatto 330 dicono di preferire A , possiamo dire di aver messo un dubbio significativo sull'ipotesi che il 60 per cento è in favore di A ?

Per rispondere a questa domanda, notiamo che secondo l'ipotesi la probabilità che v elettori voterà A è la probabilità binomiale

$$P(v \text{ elettori in favore di } A) = b_{n,p}(v) \quad (10.21)$$

con $n = 600$ e $p = 0.6$. Poiché n è così grande, è una approssimazione eccellente rimpiazzare la funzione binomiale con l'appropriata funzione di Gauss, con centro in $np = 360$ e deviazione standard $\sigma_v = \sqrt{np(1-p)} = 12$

$$P(v \text{ elettori in favore di } A) \approx f_{50.12}(v) \quad (10.22)$$

Il numero medio atteso in favore di A è 360. Così il numero che di fatto è stato in favore di A nel nostro campione (precisamente 330) è minore di quello atteso di 30. Poiché la deviazione standard è 12, il nostro risultato è 2.5 deviazioni standard al di sotto della media supposta. La probabilità di un risultato così basso o più basso (secondo la Tabella in Appendice B) è 0.6 per cento (*). Così il nostro risultato è "altamente significativo", e al livello dell'1 per cento possiamo confidentemente rigettare l'ipotesi che A è favorito dal 60 per cento.

Questo esempio illustra due aspetti generali di questo tipo di test. In primo luogo, avendo trovato che 330 elettori sono in favore di A (cioè 30 in meno del numero atteso), abbiamo calcolato la probabilità che il numero in favore di A sia 330 "o meno". Dapprima si potrebbe aver considerato la probabilità che il numero in favore di A sia esattamente $v = 330$. Comunque, questa probabilità



Figura 10.6. (a) La probabilità "a una coda" di ottenere un risultato 30 o più sotto la media. (b) La probabilità "a due code" di ottenere un risultato che differisca dalla media di 30 o più in entrambe le direzioni (Non in scala).

* Strettamente parlando, dovremmo aver calcolato la probabilità per $v \leq 330.5$ poiché la distribuzione di Gauss tratta v come una variabile continua. Questo valore è 2.46σ al di sotto della media; così la probabilità corretta è realmente 0.7 per cento, ma questa piccola differenza non influenza la nostra conclusione.

è estremamente piccola (0.15 per cento, in realtà), ed anche il risultato più probabile ($v = 360$) ha una probabilità bassa (3.3 per cento). Per ottenere una valutazione più appropriata di quanto sia inatteso il risultato $v = 330$, dobbiamo includere $v = 330$ "e" ogni risultato che sia ancor più al di sotto della media.

Il nostro risultato $v = 330$ è 30 in meno di quello atteso. La probabilità di un risultato che è 30 o più al di sotto della media è talvolta chiamata "probabilità a una coda", poiché è l'area sotto una coda della curva di distribuzione, come in Figura 10.6 (a). In alcuni test la probabilità rilevante è la "probabilità a due code" di ottenere un risultato che differisca dalla media attesa di 30 o più in entrambe le direzioni, cioè la probabilità di ottenere $v \leq 330$ "oppure" $v \geq 390$, come in Figura 10.6 (b). Il fatto di utilizzare la probabilità a una coda o a due code in un test statistico dipende da quale si considera l'alternativa interessante all'ipotesi originale. In questo esempio volevamo mostrare che il candidato A era favorito da "meno" del 60 per cento che egli rivendicava; così la probabilità ad una coda era appropriata. Se avessimo voluto mostrare che il numero in favore di A era "diverso" dal 60 per cento (in entrambe le direzioni), allora la probabilità a due code sarebbe stata appropriata. In pratica, di solito è chiaro quale probabilità debba essere usata. In ogni caso, lo sperimentatore deve sempre stabilire chiaramente quale probabilità e quale livello di significatività siano stati scelti, e qual era la probabilità calcolata. Con questa informazione il lettore può giudicare il significato dei risultati per se stesso.

Problemi

Nota. Un asterisco indica che il problema è discusso, oppure il suo risultato dato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

10.1 (Sezione 10.2). Considerate l'esperimento della Sezione 10.2 in cui vengono gettati tre dadi. Derivate le probabilità di ottenere nessun asso e un asso. Verificate tutte le quattro probabilità riportate in Figura 10.1.

*10.2 (Sezione 10.2).

- (a) Calcolare la probabilità $P(v$ assi in due gettate) per tutti i possibili v in un lancio di due dadi. Riportare i risultati in un istogramma.
(b) Fare lo stesso per un lancio di quattro dadi.

10.3 (Sezione 10.3)

- (a) Calcolate $5!$, $6!$, $25!/23!$.
(b) Utilizzate la relazione $n! = (n+1)/(n+1)$ per mostrare che 0! dovrebbe essere definito come 1.
(c) Dimostrare che il coefficiente binomiale definito dalla Equazione (10.3) è uguale a

$$\binom{n}{v} = \frac{n!}{v!(n-v)!}$$

*10.4 (Sezione 10.3). Calcolate i coefficienti binomiali $\binom{n}{v}$ per $v = 0, 1, 2, 3$ e $\binom{4}{v}$ per $v = 0, \dots, 4$. Scrivete quindi lo sviluppo binomiale, (10.5), di $(p+q)^n$ per $n = 3$ e 4.

10.5 (Sezione 10.3)

- (a) Calcolate e graficate un istogramma della funzione distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$ per $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$, e tutti i possibili v .
 (b) Ripetete la parte (a) per $n = 4$ e $p = 1/5$.

*10.6 (Sezione 10.3). Un ospedale ricovera quattro pazienti che soffrono di una malattia, la mortalità della quale è 80 per cento. Utilizzare i risultati del Problema 10.5 (b) per trovare le probabilità dei seguenti esiti:

- (a) nessuno dei pazienti sopravvive;
 (b) uno sopravvive;
 (c) due o più sopravvivono.

*10.7 (Sezione 10.3). Trovare le probabilità di ottenere v assi in un lancio di cinque dadi per $v = 0, 1, \dots, 5$.

10.8 (Sezione 10.4). Dimostrate che il numero medio di successi

$$\bar{v} = \sum_{v=0}^n vb_{n,p}(v)$$

per la distribuzione binomiale è proprio np .

Ci sono molti modi di farlo, dei quali uno dei migliori è il seguente. Scrivete lo sviluppo binomiale (10.5) per $(p+q)^n$. Poiché questo è vero per ogni p e q , potete differenziarlo rispetto a p . Se ora ponete $p+q = 1$, e moltiplicate per p , otterrete il risultato desiderato.

*10.9 (Sezione 10.4). La deviazione standard per una distribuzione $f(v)$ è definita da

$$\sigma_v^2 = \overline{(v - \bar{v})^2}$$

Dimostrate che ciò è lo stesso di $\overline{v^2} - (\bar{v})^2$.

*10.10 (Sezione 10.4). Utilizzare il risultato del Problema 10.9 per dimostrare che per la distribuzione binomiale $b_{n,p}(v)$

$$\sigma_v^2 = np(1-p)$$

(Utilizzate lo stesso trucco che nel Problema 10.8, ma differenziate rispetto a p due volte).

10.11 (Sezione 10.4). Dimostrate che per $p = \frac{1}{2}$ la distribuzione binomiale soddisfa

$$b_{n,1/2}(v) = b_{n,1/2}(n-v);$$

cioè la distribuzione è simmetrica attorno a $v = n/2$.

10.12 (Sezione 10.4). L'approssimazione Gaussiana (10.12) alla distribuzione binomiale è eccellente per n grande, e sorprendentemente buona per n piccolo (specialmente se p è vicino a $\frac{1}{2}$). Per illustrare ciò, calcolate $b_{n,1/2}(v)$ per $v = 0, 1, \dots, 4$, sia esattamente che utilizzando l'approssimazione Gaussiana. Confrontate i risultati.

*10.13 (Sezione 10.4). Usate l'approssimazione Gaussiana per trovare la probabilità di ottenere esattamente 15 teste nel lanciare 25 volte una moneta. Calcolate la stessa probabilità esattamente, e confrontate i risultati.

*10.14 (Sezione 10.4). Utilizzare l'approssimazione Gaussiana per trovare la probabilità di ottenere 18 o più teste in 25 lanci di una moneta. (Nell'usare le probabilità di Gauss, dovete trovare la probabilità per $v \geq 17.5$). Confrontate con il risultato esatto che è 2.16 per cento.

10.15 (Sezione 10.6). Nella prova della sciolina descritta in Sezione 10.6, supponete che gli sci trattati abbiano vinto nove delle dieci corse. Assumendo che la cera non fa differenza, calcolate la probabilità di nove o più vittorie. Nove vittorie danno evidenza "significativa" che la cera è efficace (al livello del 5 per cento)? È l'evidenza "altamente significativa" (1 per cento di livello)?

*10.16 (Sezione 10.6). Per provare un nuovo fertilizzante, un giardiniere sceglie 14 coppie di piante simili, e tratta una pianta di ciascuna coppia con il fertilizzante. Dopo due mesi, 12 delle piante trattate sono più rigogliose delle loro compagne non trattate (e le restanti due sono meno rigogliose). Se in realtà il fertilizzante non facesse differenza, quale dovrebbe essere la probabilità che un puro caso abbia portato a 12 o più successi? I dodici successi danno evidenza significativa che il fertilizzante funziona (al livello del 5 per cento)? L'evidenza è "altamente significativa" (al livello dell'1 per cento)?

10.17 (Sezione 10.6). È noto che il 25 per cento di un certo tipo di semente normalmente germoglia. Per provare un nuovo "stimolante della germinazione", 100 di tali semi vengono piantati e trattati con lo stimolante. Se 32 di essi germogliano, si può concludere (al livello significativo del 5 per cento) che lo stimolante funziona?

*10.18 (Sezione 10.6). In una certa scuola, 420 dei 600 studenti superano un test standardizzato di matematica, per il quale il livello nazionale di promozione è il 60 per cento. Se gli studenti della scuola non hanno particolare attitudine per il test, quanti dovreste aspettarvi che lo superino, e qual è la probabilità che 420 o più lo superino? Può la scuola rivendicare che i suoi studenti sono significativamente ben preparati per il test?

dove la "distribuzione di Poisson", $p_\mu(v)$, è data da

$$p_\mu(v) = e^{-\mu} \frac{\mu^v}{v!} \quad (11.2)$$

In questa definizione, μ è un parametro positivo ($\mu > 0$) che, come vedremo, è proprio il numero medio atteso di conteggi nell'intervallo di tempo considerato; e $v!$ denota la solita funzione fattoriale ($0! = 1$).

Non deriveremo qui la distribuzione di Poisson (11.2), ma affermeremo semplicemente che essa è la distribuzione appropriata per il tipo di esperienza qui discusso (*). Per stabilire il significato del parametro μ nella (11.2), dobbiamo soltanto calcolare il numero medio di conteggi \bar{v} atteso se ripetiamo il nostro esperimento di conteggio molte volte. Questa media è

$$\bar{v} = \sum_{v=0}^{\infty} v p_\mu(v) = \sum_{v=0}^{\infty} v e^{-\mu} \frac{\mu^v}{v!} \quad (11.3)$$

Il primo termine di questa somma può essere eliminato (poiché è zero), e $v/v!$ può essere sostituito da $1/(v-1)!$. Se raccogliamo il fattore comune di $\mu e^{-\mu}$, otteniamo

$$\bar{v} = \mu e^{-\mu} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu^{v-1}}{(v-1)!} \quad (11.4)$$

La somma infinita che resta è

$$1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \dots = e^\mu \quad (11.5)$$

che è proprio la funzione esponenziale e^μ (come indicato). Così l'esponenziale $e^{-\mu}$ nella (11.4) è esattamente cancellata dalla somma, e arriviamo alla semplice conclusione che

$$\bar{v} = \mu \quad (11.6)$$

Cioè, il parametro μ che caratterizza la distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$ è proprio il "numero medio di conteggi atteso se ripetiamo l'esperimento di conteggio molte volte".

11.2. Proprietà della distribuzione di Poisson

In Figura 11.1 sono riportate le distribuzioni di Poisson per i casi $\mu = 0.8$ e 3. In Figura 11.1 (a), con $\mu = 0.8$, vediamo che i conteggi più probabili sono

* Per la derivazione, vedi, per esempio, Hugh D. Young, "Statistical Treatment of Experimental Data" (McGraw-Hill, 1962), Sezione 8, oppure Stuart L. Meyer, "Data Analysis for Scientists and Engineers" (John Wiley, 1975), pag. 207.

11. La distribuzione di Poisson

In questo capitolo studiamo il nostro terzo esempio di funzione limite di una distribuzione, la distribuzione di Poisson. Essa descrive i risultati di esperimenti in cui si contano eventi che capitano a caso, ma con una media temporale definita. È specialmente importante nella fisica atomica e nucleare, dove si contano le disintegrazioni di atomi instabili e nuclei.

11.1. Definizione della distribuzione di Poisson

Come esempio della distribuzione di Poisson, supponiamo che ci venga dato un campione di materiale radioattivo. Usando un contatore Geiger, possiamo contare il numero v di elettroni emessi per decadimento radioattivo in un periodo di un minuto. Se il contatore è affidabile, allora non ci sarà incertezza nel nostro valore di v . Nondimeno, se ripetiamo l'esperimento, quasi certamente otterremo un valore diverso per v . Questa variazione nel numero v non riflette incertezze nel nostro conteggio, ma è piuttosto una proprietà intrinseca del processo di decadimento radioattivo.

Ogni nucleo radioattivo ha una probabilità definita di decadere in ogni intervallo di un minuto. Se conosciamo queste probabilità e il numero di nuclei nel nostro campione, allora potremmo calcolare il "numero medio atteso" di decadimenti in un minuto. Nondimeno, ogni nucleo decade in un istante a caso, ed in ogni minuto il numero di decadimenti può essere diverso dal numero medio atteso.

Ovviamente la domanda che dovremmo porci è la seguente: se ripetiamo il nostro esperimento molte volte (ripopolando il nostro campione se esso viene impoverito significativamente), quale distribuzione dovremmo aspettarci per il numero di decadimenti v osservati negli intervalli di un minuto? Se avete studiato il Capitolo 10, riconoscerete che la distribuzione richiesta è la distribuzione binomiale. Se vi fossero n nuclei, e la probabilità che ogni nucleo decada è p , allora la probabilità di v decadimenti è proprio la probabilità di v "successi" in n "prove", ovvero $b_{n,p}(v)$. Comunque, nel tipo di esperimento che stiamo trattando ora, vi è un'importante semplificazione. Il numero di "prove" (cioè, nuclei) è enorme ($n \sim 10^{20}$, forse), e la probabilità di "successo" (cioè, decadimento) per ogni nucleo è minuscola (spesso dell'ordine di $p \sim 10^{-20}$). Sotto queste condizioni (n grande e p piccolo), si può far vedere che la distribuzione binomiale non si distingue da una funzione più semplice, chiamata la distribuzione di Poisson. Specificamente, si può dimostrare che

$$P(v \text{ conteggi in un intervallo definito}) = p_\mu(v) \quad (11.1)$$

$v = 0 = 1$ (con $v = 0$ un po' più probabile), ma che vi è una probabilità apprezzabile di ottenere $v = 2$ o 3 . In Figura 11.1 (b), con $\mu = 3$, i conteggi più probabili sono 2 e 3 con una probabilità apprezzabile di conteggi che vanno da $v = 0$ fino a $v = 7$. In entrambi i disegni la distribuzione è visibilmente asimmetrica.

Se consideriamo un esperimento con un conteggio medio più grande, per esempio $\mu = 9$, come mostrato in Figura 11.2, allora la distribuzione è un po' più simmetrica attorno alla media. In realtà, si può dimostrare che per $\mu \rightarrow \infty$, la distribuzione di Poisson diventa via via più simmetrica, e si avvicina alla distribuzione di Gauss con la stessa media e deviazione standard⁽²⁾. In Figura 11.2, la curva tratteggiata è la funzione di Gauss centrata su 9 e con la stessa deviazione standard. Si può vedere che anche quando μ è soltanto 9, la distribuzione di Poisson è marcatamente vicina all'appropriata funzione di Gauss, e la piccola discrepanza riflette la restante asimmetria nella funzione di Poisson. Come discuteremo in breve, è molto conveniente in pratica che per μ grande si possa approssimare la distribuzione di Poisson con una appropriata Gaussiana.

Un'altra interessante proprietà della distribuzione di Poisson emerge se calcoliamo la sua deviazione standard σ_v . Come vedemmo nel Capitolo 4, σ_v^2 è la media delle deviazioni elevate al quadrato $(v - \bar{v})^2$. Così

$$\sigma_v^2 = (v - \bar{v})^2$$

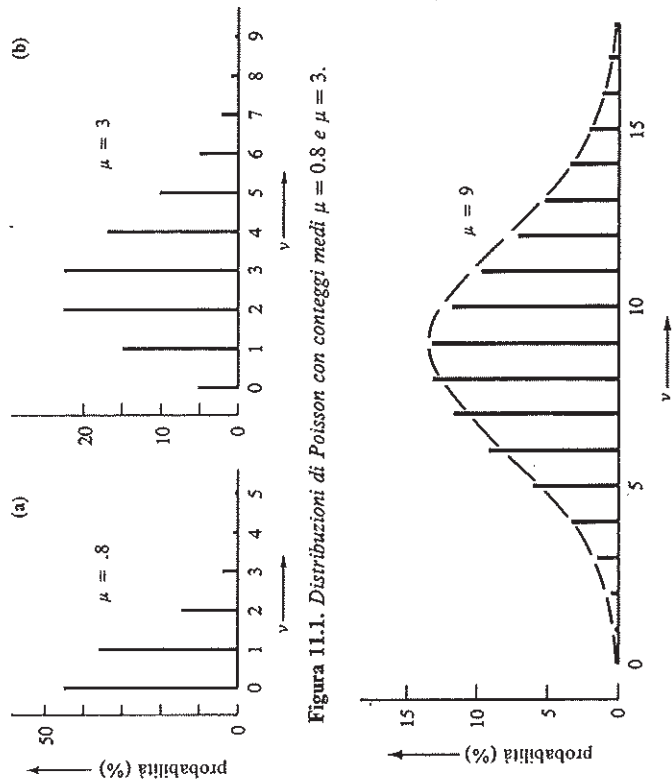


Figura 11.1. Distribuzioni di Poisson con conteggi medi $\mu = 0.8$ e $\mu = 3$.

Figura 11.2. La distribuzione di Poisson con $\mu = 9$. La curva tratteggiata è la distribuzione di Gauss con lo stesso centro e la stessa deviazione standard.

² Vedi Stuart L. Meyer, op. cit., p. 227.

o (usando il risultato del Problema 10.9)

$$\sigma_v^2 = \bar{v}^2 - (\bar{v})^2 \tag{11.7}$$

Abbiamo già calcolato $\bar{v} (= \mu)$, e un calcolo simile ci dà $\bar{v}^2 = \mu^2 + \mu$ (vedi Problema 11.6). Così $\sigma_v^2 = \mu$

$$\sigma_v = \sqrt{\mu} \tag{11.8}$$

Cioè, la distribuzione di Poisson con conteggio medio μ ha deviazione standard $\sqrt{\mu}$.

Il risultato (11.8) è estremamente utile in pratica. Se facciamo un esperimento di conteggio una volta e otteniamo il risultato v , allora si vede facilmente (usando il principio della massima verosimiglianza, come in Problema 11.9) che la nostra miglior stima per il conteggio medio atteso μ è $\mu_{\text{best}} = v$. Dalla (11.8) segue immediatamente che la nostra miglior stima per la deviazione standard è proprio \sqrt{v} . In altre parole, se facciamo una misura di un numero di eventi in qualche intervallo di tempo e otteniamo il risultato v , allora il nostro risultato finale per il conteggio medio atteso per quell'intervallo di tempo è

$$v \pm \sqrt{v} \tag{11.9}$$

Questo è il risultato dato senza dimostrazione nell'Equazione (3.2). Se dovessimo contare per un tempo più lungo, otterremmo un valore più grande di v . Secondo la (11.9) questo significherebbe un'incertezza più grande \sqrt{v} . Comunque l'incertezza relativa, che è

$$\text{incertezza relativa} = \frac{\sqrt{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{v}}$$

dovrebbe "diminuire", se contassimo per un tempo più lungo.

È interessante confrontare le distribuzioni di Poisson e di Gauss. In primo luogo, la distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ è "continua" perché x è una variabile continua, la distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$ è "discreta" (come la binomiale) poiché $v = 0, 1, 2, \dots$. In secondo luogo, la distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ è definita da "due" parametri, X , la media, e σ , la larghezza; ma la distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$ è definita da un solo parametro, μ poiché come abbiamo visto, la larghezza σ_v della distribuzione di Poisson è automaticamente determinata dalla media μ (precisamente, $\sigma_v = \sqrt{\mu}$). Infine, se consideriamo distribuzioni di Poisson per cui il conteggio medio è grande, allora la natura discreta di v diviene meno importante, e come si è già detto riferendosi alla Figura 11.2, la distribuzione di Poisson (come la binomiale) è ben approssimata dalla funzione di Gauss $f_{X,\sigma}(v)$ con la stessa media e larghezza. Cioè

$$p_\mu(v) \approx f_{X,\sigma}(v) \quad (\mu \text{ grande}) \tag{11.10}$$

dove

$$X = \mu \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

L'approssimazione (11.10) è detta l'approssimazione Gaussiana alla distribuzione di Poisson. Essa è analoga alla corrispondente approssimazione per la distribuzione binomiale (discussa in Sezione 10.4) ed è utile sotto le stesse condizioni, quando i parametri in gioco sono grandi. Per illustrare ciò, supponiamo di voler calcolare la distribuzione di Poisson con $\mu = 64$. La probabilità di 72 conteggi, per esempio, è

$$P(72 \text{ conteggi}) = p_{64}(72) = e^{-64} \frac{(64)^{72}}{72!} \quad (11.11)$$

ed un calcolo noioso fornisce

$$P(72 \text{ conteggi}) = 2.9\%$$

Comunque, secondo la (11.10), la probabilità (11.11) è ben approssimata da

$$P(72 \text{ conteggi}) \approx \int_{64.8}^{64} f_{64.8}(72)$$

che si calcola facilmente e dà

$$P(72 \text{ conteggi}) \approx 3.0\%.$$

Se volessimo calcolare direttamente la probabilità di 72 "o più" conteggi nello stesso esperimento, allora un tedioso calcolo di grossa portata darebbe

$$P(v \geq 72) = p_{64}(72) + p_{64}(73) + \dots = 17.3\%$$

Se usiamo l'approssimazione (11.10), allora dobbiamo soltanto calcolare la probabilità di ottenere $v \geq 71.5$ (poiché la distribuzione Gaussiana tratta v come continua). Poiché 71.5 è 7.5, ovvero 0.94 σ , al di sopra della media, la probabilità richiesta può essere trovata immediatamente dalla tabella in Appendice B.

$$P(v \geq 72) \approx P_{\text{Gauss}}(v \geq 71.5) = P_{\text{Gauss}}(v \geq X + 0.94\sigma) = 17.4\%$$

approssimazione eccellente praticamente per ogni standard.

11.3. Esempi

Come abbiamo già messo in risalto, la distribuzione di Poisson descrive la distribuzione dei risultati in un esperimento in cui si contano eventi che capitano casualmente, ma con una media attesa definita in un intervallo di tempo. In un corso introduttivo al laboratorio, i due esempi più comuni sono il conteggio delle disintegrazioni di nuclei radioattivi e il conteggio dell'arrivo di particelle di raggi cosmici.

Un altro esempio molto importante è un esperimento per studiare una distribuzione limite attesa, come le distribuzioni Gaussiana o binomiale, o la distribuzione di Poisson stessa. Ogni distribuzione limite ci dice quanti eventi di un particolare tipo sono attesi quando un esperimento è ripetuto parecchie

volte. (Per esempio, la Gaussiana $f_{x,\sigma}(x)$ ci dice quante misure di x ci si attende che cadano in un intervallo da $x = a$ a $x = b$). In pratica, il numero osservato è rado esattamente il numero atteso. Invece esso fluttua secondo la distribuzione di Poisson. In particolare, se il numero atteso di eventi di qualche tipo è n , allora ci si può aspettare che il numero osservato differisca da n di un numero dell'ordine di \sqrt{n} .

In molte situazioni è ragionevole aspettarsi che i numeri siano distribuiti approssimativamente secondo la distribuzione di Poisson. Il numero di uova deposte in un'ora in un allevamento di polli e il numero di nascite in un giorno in un ospedale dovrebbero entrambi seguire la distribuzione di Poisson almeno approssimativamente (sebbene essi probabilmente mostrerebbero alcune variazioni stagionali). Per verificare queste ipotesi, dovrete registrare il numero in questione molte volte. Facendo il grafico della distribuzione risultante, potrete confrontarla con la distribuzione di Poisson e farvi un'idea di quanto bene è approssimata. Per una verifica più quantitativa, dovrete usare il test χ^2 descritto nel Capitolo 12.

Conteggio di raggi cosmici

Come esempio concreto della distribuzione di Poisson, consideriamo un esperimento con i raggi cosmici. Questi "raggi" sono in realtà particelle cariche, come protoni e particelle α , che entrano nell'atmosfera terrestre provenendo dallo spazio. Alcune di esse viaggiano attraverso tutta l'atmosfera fino ad arrivare a livello del suolo e possono essere rivelate (con un contatore Geiger, per esempio) in laboratorio. Nel seguente problema, sfruttiamo il fatto che il numero di raggi cosmici che colpiscono una data area in un dato tempo dovrebbe seguire la distribuzione di Poisson.

Lo Studente *A* afferma che ha misurato il numero di raggi cosmici che colpiscono un contatore Geiger in un minuto. Egli sostiene di aver fatto la misura ripetutamente e con cura, e di aver trovato che, in media, nove particelle colpiscono il contatore in un minuto, con incertezza "trascurabile". Per verificare questa affermazione, lo Studente *B* conta quante particelle arrivano in un minuto e ottiene il risultato 12. Getta ciò seri dubbi sull'affermazione di *A* che il numero atteso è nove?

Per fare una verifica più accurata, la Studentessa *C* conta quante particelle arrivano in 10 minuti. Dal risultato di *A* ella si aspetta di ottenere 90, ma di fatto ottiene 120. Pone questo fatto un dubbio significativo sull'affermazione di *A*?

Consideriamo dapprima il risultato di *B*. Se *A* è corretto, il conteggio medio atteso è nove. Poiché la distribuzione di conteggi dovrebbe essere la distribuzione di Poisson, la deviazione standard è $\sqrt{9} = 3$. Il risultato dello Studente *B*, 12, è allora soltanto una deviazione standard fuori della media. Esso è certamente non abbastanza lontano da contraddire il risultato di *A*. Più specificamente, sapendo che la probabilità di ogni risultato v si suppone sia $p_9(v)$, possiamo calcolare la probabilità totale di ottenere un risultato che differisca da 9 di 3 o più. Questa risulta essere il 40 per cento (vedi Problema 11.11). Ovviamente il risultato di *B* non è del tutto sorprendente, ed *A* non ha motivo di preoccuparsi.

Il risultato della Studentessa *C* è materia del tutto diversa. Se *A* è corretto, allora *C* dovrebbe aspettarsi di ottenere 90 conteggi in 10 minuti. Poiché la distribuzione dovrebbe essere di Poisson, la deviazione standard dovrebbe essere $\sqrt{90} = 9.5$. Così il risultato di *C*, 120, è più di "tre deviazioni standard" fuori dalla previsione di *A*, 90. Con questi grandi numeri la distribuzione di Poisson non si distingue da quella di Gauss, e possiamo immediatamente

trovare dalla tabella in Appendice A che la probabilità di un conteggio più di tre deviazioni standard lontano dalla media è 0.3 per cento. Cioè, se A è corretto, è estremamente improbabile che C abbia osservato 120 conteggi. In altre parole, possiamo dire che è praticamente certo che qualcosa è stato fatto di sbagliato. Forse A non è stato così accurato come sostiene. Forse il contatore funzionava male per A oppure per C , introducendo errori sistematici in uno dei risultati. O forse A ha fatto le sue misure in un periodo in cui il flusso di raggi cosmici era veramente inferiore al normale.

Problemi

Nota. Un asterisco indica che il problema è discusso, o il suo risultato dato, nella sezione Risposte alla fine del libro.

*11.1 (Sezione 11.1).

- (a) Calcolare la distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$ per $\mu = 0.5$ e $v = 0, 1, \dots, 6$ e graficare un istogramma a barre di $p_\mu(v)$ in funzione di v .
 (b) Ripetere la parte (a) per $\mu = 1$.
 (c) Ripetere la parte (a) per $\mu = 2$.

*11.2 (Sezione 11.1)

- (a) La distribuzione di Poisson, come tutte le funzioni di distribuzione, deve soddisfare una "condizione di normalizzazione",

$$\sum_{v=0}^{\infty} p_\mu(v) = 1. \quad (11.12)$$

Questa condizione asserisce che la probabilità totale di osservare "tutti" i valori possibili di v deve essere 1. Dimostratelo. Ricordate la serie infinita (11.5) per e^μ .

- (b) Differenziate la (11.12) rispetto a μ , e poi moltiplicate per μ per ottenere una dimostrazione alternativa che $\bar{v} = \mu$ come nell'Equazione (11.6).

11.3 (Sezione 11.1). Nel corso di 28 giorni, un allevatore di polli trova che tra le 10 e le 10:30 A.M. la sua covata di galline depone una media di 2.5 uova. Assumendo che il numero di uova deposte segua una distribuzione di Poisson con $\mu = 2.5$, in circa quanti giorni dovrete supporre che non vengano deposte uova tra le 10 e le 10:30? In quanto dovrete supporre che ne vengano deposte 2 "o meno"? 3 o più?

*11.4 (Sezione 11.1). Un certo campione radioattivo contiene 1.5×10^{20} nuclei, ciascuno dei quali ha una probabilità $p = 10^{-20}$ di decadere in ogni minuto.

- (a) Quale è il numero medio atteso, μ , di decadimenti dal campione in un minuto?
 (b) Calcolate le probabilità $p_\mu(v)$ di osservare v decadimenti in un minuto per $v = 0, 1, 2, 3$.
 (c) Qual è la probabilità di osservare quattro o più decadimenti in un minuto?

*11.5 (Sezione 11.1). Ci si aspetta che un certo campione radioattivo sia sottoposto a tre decadimenti per minuto. Uno studente osserva il numero v di

decadimenti in 100 separati intervalli di un minuto con i risultati riportati in Tabella 11.1.

Tabella 11.1

numero di decadimenti v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
volte osservate	5	19	23	21	14	12	3	2	1	0

(a) Fate un istogramma di questi risultati, graficando f_v (la frazione di volte in cui il risultato v è stato trovato) in funzione di v .

(b) Sullo stesso grafico mostrate la distribuzione attesa $P_3(v)$. I dati sembrano adattarsi alla distribuzione attesa?

11.6 (Sezione 11.2).

(a) Dimostrate che la media \bar{v}^2 per la distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$ è $\bar{v}^2 = \mu^2 + \mu$. Il modo più facile di farlo è probabilmente differenziare l'identità (11.12) due volte rispetto a μ .

(b) Dimostrate poi che la deviazione standard di v è $\sigma_v = \sqrt{\mu}$ [Usate l'identità (11.7)].

*11.7 (Sezione 11.2). Calcolate la media \bar{v} e la deviazione standard σ , dei dati nel Problema 11.5. Confrontate i vostri risultati con i valori attesi 3 e $\sqrt{3}$.

11.8 (Sezione 11.2). È noto che il numero medio di disintegrazioni nucleari da un certo campione è rozzamente 20 per minuto. Se volete misurare questo numero entro il 4 per cento, per quanto tempo circa dovrete contare?

*11.9 (Sezione 11.2)

- (a) Supponiamo di contare il numero di raggi cosmici che colpiscono un contatore in un minuto e di osservare il risultato v_0 . Assumendo che il numero segua la distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$, dove μ è il conteggio medio atteso incognito, ricavare la probabilità di ottenere il numero osservato v_0 . Usare il principio della massima verosimiglianza per dimostrare che la miglior stima per μ è

$$\mu_{\text{best}} = v_0$$

(Ricordate che la miglior stima per μ è quel valore per cui la probabilità di ottenere l'osservato v_0 è massima)

- (b) Supponiamo di fare N determinazioni separate v_1, \dots, v_N ; analogamente arguiamo che in questo caso μ_{best} è la media

$$\mu_{\text{best}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$$

*11.10 (Sezione 11.2). Il conteggio medio atteso in un certo esperimento è $\mu = 16$.

- (a) Utilizzare l'approssimazione Gaussiana (11.10) per stimare la probabilità di ottenere 10 conteggi. Confrontare con il risultato esatto $P_{16}(10)$.
 (b) Utilizzare l'approssimazione Gaussiana per stimare la probabilità di ottenere dieci conteggi "o meno". [Ricordate di calcolare $P_{\text{Gauss}}(v)$

$\leq 10,5$) per tener conto del fatto che la distribuzione Gaussiana tratta v come una variabile continua. La probabilità necessaria può essere calcolata dalla Tabella in Appendice B]. Calcolate il risultato esatto e confrontate.

Notate come anche con μ piccolo come 16, l'approssimazione Gaussiana dà un risultato molto buono e — almeno nella parte (b) — è significativamente meno noioso di un calcolo esatto.

***11.11** (Sezione 11.3).

- (a) Calcolate le probabilità $p_s(v)$ di ottenere v conteggi con $v = 7, 8, 9, 10$ e 11 in un esperimento in cui il conteggio medio atteso è 9.
 (b) Trovate poi la probabilità totale di ottenere un conteggio che differisca dalla media 9 di 3 o più. Un conteggio di 12 vi porterebbe a sospettare che la media attesa non è realmente 9?

12. Il test χ^2 per una distribuzione

Abbiamo raggiunto ora molta esperienza con le distribuzioni limite. Esse sono le funzioni che descrivono la distribuzione attesa dei risultati se si ripete un esperimento molte volte. Ci sono molte diverse distribuzioni limite, che corrispondono ai molti diversi tipi di esperimenti che sono possibili. Forse le tre più importanti nelle scienze fisiche sono le tre che abbiamo già discusso: la funzione di Gauss (o normale), la distribuzione binomiale e la distribuzione di Poisson.

In questo capitolo finale discutiamo come decidere se i risultati di un esperimento reale sono governati dalla distribuzione limite attesa. Specificamente, supponiamo di compiere qualche esperimento per il quale crediamo di conoscere la distribuzione attesa dei risultati. Supponiamo anche di ripetere l'esperimento parecchie volte e di registrare le nostre osservazioni. La domanda che ora ci poniamo è questa: come possiamo decidere se la nostra distribuzione osservata è consistente con la distribuzione teorica attesa? Vedremo che a questa domanda si può rispondere utilizzando un semplice procedimento chiamato il "test chi-quadrato" o χ^2 .

12.1. Introduzione al χ^2

Cominciamo con un esempio concreto. Supponiamo di fare 40 misure x_1, \dots, x_{40} della gittata x di un proiettile sparato da un certo fucile, e di ottenere i risultati riportati in Tabella 12.1.

Tabella 12.1. Valori misurati di x (in cm)

731,	772,	771,	681,	722,	688,	653,	757,	733,	742
739,	780,	709,	676,	760,	748,	672,	687,	766,	645
678,	748,	689,	810,	805,	778,	764,	753,	709,	675
698,	770,	754,	830,	725,	710,	738,	638,	787,	712

Supponiamo anche di aver motivo di credere che queste misure siano governate da una distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$, come è certamente molto naturale. In questo tipo di esperimento di solito non si conoscono in anticipo sia il centro X che la larghezza σ della distribuzione attesa. Il nostro primo passo allora è di usare le nostre 40 misure per calcolare le migliori stime per queste grandezze

$$\begin{aligned} \text{(miglior stima per } X) = \bar{x} &= \sum_{i=1}^{40} x_i / 40 \\ &= 730.1 \text{ cm} \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\text{(miglior stima per } \sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{39}} = 46.8 \text{ cm.} \quad (12.2)$$

Possiamo ora domandarci se la distribuzione reale dei nostri risultati x_1, \dots, x_{40} è consistente con la nostra ipotesi che le nostre misure siano governate dalla distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$ con X e σ stimati. Per rispondere a ciò, dobbiamo calcolare come dovremmo aspettarci che i nostri 40 risultati siano distribuiti se l'ipotesi fosse vera, e confrontare questa distribuzione attesa con la nostra distribuzione osservata in realtà. La prima difficoltà è che x è una variabile continua; così non possiamo parlare del numero atteso di misure per un valore di x . Piuttosto, dobbiamo discutere il numero atteso in qualche intervallo $a < x < b$. Cioè dobbiamo suddividere l'escursione dei valori possibili in "intervalli". Con 40 misure, potremmo scegliere i limiti dell'intervallo a $X - \sigma$, e $X + \sigma$, ottenendo così quattro intervalli come in Tabella 12.2. Discuteremo in seguito i criteri per la scelta degli intervalli. In particolare, devono essere scelti in modo tale che ciascuno di essi contenga parecchi valori misurati x_i .

Tabella 12.2. Una possibile scelta di intervalli per i dati di Tabella 12.1. L'ultima riga riporta il numero di dati che sono caduti in ciascun intervallo

Numero dell'intervallo, k	1	2	3	4
Valori di x nell'intervallo	$x < X - \sigma$	$X - \sigma < x < X$	$X < x < X + \sigma$	$X + \sigma < x$
Osservazioni O_k nell'intervallo	8	10	16	6

In generale denoteremo il numero di intervalli con n_i ; in questo caso, per l'esempio con quattro intervalli, $n = 4$.

Tabella 12.3. I numeri attesi E_k e i numeri osservati O_k per le 40 misure di Tabella 12.1.

Intervallo k	1	2	3	4
Probabilità P_k	16%	34%	34%	16%
Numero atteso $E_k = NP_k$	6.4	13.6	13.6	6.4
Numero osservato O_k	8	10	16	6

Avendo suddiviso l'escursione dei possibili valori misurati in intervalli, possiamo ora formulare la nostra domanda in modo più preciso. Dapprima possiamo contare il numero di misure che cadono in ciascun intervallo k (¹).

¹ Se una misura cade esattamente sul limite tra due intervalli, potete assegnare metà misura a ciascun intervallo.

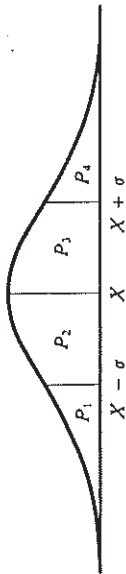


Figura 12.1. Le probabilità P_1, \dots, P_4 che una misura cada in ciascuno dei quattro intervalli $k = 1, \dots, 4$ sono le quattro aree mostrate sotto la funzione di Gauss.

Denotiamo questo numero con O_k (dove O sta per "numero osservato"). Per i dati del nostro esempio, i numeri osservati O_1, O_2, O_3, O_4 sono riportati nella riga in basso a Tabella 12.2. Poi, assumendo che le nostre misure siano distribuite normalmente (con X e con σ come stimati), possiamo calcolare il numero di misure "atteso" E_k in ciascun intervallo k . Dobbiamo poi decidere quanto bene i numeri osservati O_k si confrontano con i numeri attesi E_k .

Il calcolo dei numeri attesi E_k è del tutto diretto. La "probabilità" che una misura cada in un intervallo $a < x < b$ è proprio l'area sotto la funzione di Gauss tra $x = a$ e $x = b$. In questo esempio, le probabilità P_1, P_2, P_3, P_4 per una misura di cadere in ciascuno dei nostri quattro intervalli sono le quattro aree indicate in Figura 12.1. Le due aree uguali P_2 e P_3 rappresentano insieme il ben noto 68 per cento; così la probabilità di cadere in uno dei due intervalli centrali è 34 per cento; cioè $P_2 = P_3 = 0.34$. Le due aree esterne comprendono il restante 32 per cento; così $P_1 = P_4 = 0.16$. Per trovare i numeri attesi E_k moltiplichiamo semplicemente queste probabilità per il numero totale di misure, $N = 40$. Allora i nostri numeri attesi sono quelli riportati in Tabella 12.3. Il fatto che i numeri E_k non siano interi, serve a ricordarci che il "numero atteso" non è quello che di fatto ci aspettiamo in un esperimento; è piuttosto il numero medio atteso quando ripetiamo l'intera serie di misure molte volte.

Il nostro problema ora è di decidere quanto bene i numeri attesi E_k rappresentino i corrispondenti numeri osservati O_k (sull'ultima riga di Tabella 12.3). Ovviamente non dobbiamo aspettarci un accordo "perfetto" dopo un numero finito di misure. D'altra parte se l'ipotesi che le nostre misure siano normalmente distribuite fosse corretta, allora dovremmo aspettarci che, in qualche modo, le deviazioni

$$O_k - E_k \quad (12.3)$$

siano "piccole". Al contrario, se le deviazioni $O_k - E_k$ fossero "grandi", dovremmo sospettare che la nostra ipotesi sia sbagliata.

Per rendere più precisa l'affermazione che la deviazione $O_k - E_k$ è "piccola" oppure "grande", dobbiamo decidere quanto grande dovremmo "aspettarci" che sia $O_k - E_k$ se le misure sono effettivamente normalmente distribuite. Fortunatamente si può fare facilmente. Se immaginiamo di ripetere la intera serie di 40 misure molte volte, allora il numero O_k di misure in ogni intervallo k può essere considerato come il risultato di un esperimento di conteggio del tipo descritto nel Capitolo 11. I diversi risultati per O_k dovrebbero avere un valore medio pari a E_k e dovrebbero fluttuare attorno a E_k con una deviazione standard dell'ordine di $\sqrt{E_k}$. Così i due numeri da confrontarsi sono la deviazione $O_k - E_k$ e la dimensione attesa delle sue fluttuazioni $\sqrt{E_k}$.

Queste considerazioni ci portano a considerare il rapporto

$$\frac{O_k - E_k}{\sqrt{E_k}} \quad (12.4)$$

Per alcuni intervalli k , questo rapporto sarà positivo, per altri negativo; per alcuni k può essere apprezzabilmente più grande di 1, ma per la maggior parte dovrebbe essere dell'ordine di 1 o più piccolo. Per verificare la nostra ipotesi (che le misure siano normalmente distribuite), è naturale elevare al quadrato il numero (12.4) per ciascun k e poi sommare su tutti gli intervalli $k = 1, \dots, n$ (nel nostro esempio $n = 4$). Questo procedimento definisce un numero chiamato "chi quadrato",

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \quad (12.5)$$

Dovrebbe essere chiaro che questo numero χ^2 è un indicatore ragionevole dell'accordo tra la distribuzione osservata e quella attesa. Se $\chi^2 = 0$, l'accordo è perfetto; cioè $O_k = E_k$ per tutti gli intervalli k , cosa che è molto improbabile che succeda. In generale ci si aspetta che i singoli termini nella somma (12.5) siano dell'ordine di 1 e, poiché ci sono n termini nella somma, se

$$\chi^2 \lesssim n$$

(χ^2 dell'ordine di n o inferiore), la distribuzione osservata e quella attesa si accordano tanto bene quanto ci si potrebbe circa aspettare. In altre parole, se $\chi^2 \lesssim n$ non abbiamo motivo di dubitare sul fatto che le nostre misure siano distribuite come ci aspettavamo. D'altra parte, se

$$\chi^2 \gg n$$

(χ^2 significativamente più grande del numero di intervalli), i numeri osservati e attesi differiscono significativamente, e vi è buon motivo di sospettare che le nostre misure non siano governate dalla distribuzione attesa.

Nel nostro esempio, i numeri osservati e attesi nei quattro intervalli sono riportati nuovamente in Tabella 12.4, ed un semplice calcolo con essi dà

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{k=1}^4 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \\ &= \frac{(1.6)^2}{6.4} + \frac{(-3.6)^2}{13.6} + \frac{(2.4)^2}{13.6} + \frac{(-0.4)^2}{6.4} \\ &= 1.80. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Poiché il valore di 1.80 per χ^2 è minore del numero di termini nella somma (precisamente 4), non abbiamo motivo di mettere in dubbio l'ipotesi che le nostre misure siano distribuite normalmente.

Tabella 12.4. Calcolo di χ^2 per i dati di Tabella 12.1

Numero dell'intervallo k	1	2	3	4
Intervallo	$x < X - \sigma$	$X - \sigma < x < X$	$X < x < X + \sigma$	$X + \sigma < x$
Numero osservato O_k	8	10	16	6
Numero atteso E_k	6.4	13.6	13.6	6.4
$O_k - E_k$	1.6	-3.6	2.4	-0.4

12.2. Definizione generale di χ^2

Finora abbiamo focalizzato la nostra discussione su un esempio particolare, le 40 misure di una variabile continua x , che denotava la gittata di un proiettile sparato da un certo fucile. Abbiamo definito il numero χ^2 e abbiamo detto che esso è, al minimo, una rozza stima dell'accordo tra la nostra distribuzione osservata di misure e la distribuzione di Gauss che ci aspettavamo che le nostre misure seguissero. Come ora vedremo, possiamo definire ed utilizzare χ^2 nello stesso modo per molti esperimenti diversi.

Consideriamo un esperimento nel quale misuriamo un numero x e per il quale abbiamo ragione di aspettarci una certa distribuzione di risultati. Immaginiamo di ripetere la misura molte volte (N) e, dopo aver diviso l'escursione dei possibili risultati x in n intervalli, $k = 1, \dots, n$, contiamo il numero O_k di osservazioni che di fatto cadono in ciascun intervallo k . Assumendo che le misure siano effettivamente governate dalla distribuzione attesa, calcoliamo il numero atteso E_k delle misure nell'intervallo k esimo. Infine, calcoliamo χ^2 esattamente come nella (12.5)

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \quad (12.7)$$

Il significato approssimato di χ^2 è sempre lo stesso di quello del nostro esempio precedente. Cioè, se $\chi^2 \lesssim n$, l'accordo tra la distribuzione osservata e quella attesa è accettabile; se $\chi^2 \gg n$, vi è un disaccordo significativo.

Il procedimento per la scelta degli intervalli in termini dei quali χ^2 viene calcolato, dipende in qualche modo dalla natura dell'esperimento col quale si sta trattando. Specificamente, dipende dal fatto che la grandezza misurata x sia continua, oppure discreta. Tratteremo queste due situazioni una per volta.

Misura di una variabile continua

L'esempio discusso in Sezione 12.1 riguardava una variabile continua x , e c'è poco da aggiungere a quello che abbiamo già detto. L'unica distribuzione limite che abbiamo discusso per una variabile continua è la distribuzione di Gauss, ma ci sono naturalmente molte distribuzioni diverse che ci si potrebbe aspettare. Per esempio, in molti esperimenti atomici e nucleari, la distribuzione attesa della variabile misurata x (di fatto una energia) è la distribuzione di Lorentz

$$f(x) \propto \frac{1}{(x - X)^2 + \gamma^2},$$

dove X e γ sono certe costanti.

Qualunque sia la distribuzione attesa $f(x)$, l'area totale sotto il grafico di $f(x)$ in funzione di x è 1, e la probabilità di una misura compresa tra $x = a$ e $x = b$ è proprio l'area tra a e b ,

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Così, se l'intervallo k esimo va da $x = a_k$ a $x = a_{k+1}$, il numero atteso di misure

nell'intervallo kesimo (dopo N misure totali) è

$$E_k = N \times P(a_k < x < a_{k+1}) \\ = N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx. \quad (12.8)$$

Quando tratteremo dell'uso quantitativo del test χ^2 nella Sezione 12.4, vedremo che i numeri attesi E_k non dovrebbero essere troppo piccoli. Sebbene non vi sia un limite inferiore definito, E_k probabilmente dovrebbe essere circa 5 o più,

$$E_k \gtrsim 5 \quad (12.9)$$

Dobbiamo allora scegliere gli intervalli in modo tale che E_k dato dalla (12.8) soddisfi questa condizione. Vedremo anche che il numero di intervalli non deve essere troppo piccolo. Per esempio, nell'esperimento di Sezione 12.1, dove la distribuzione attesa era una distribuzione di Gauss il cui centro X e la larghezza σ non erano noti in anticipo, il test χ^2 non si può applicare (come vedremo) con meno di quattro intervalli; cioè in questo esempio era necessario

$$n \gtrsim 4. \quad (12.10)$$

Combinando la (12.9) e la (12.10), vediamo che non possiamo applicare utilmente il test χ^2 a questo tipo di esperimento se il nostro numero totale di osservazioni è minore di circa 20.

Misura di una variabile discreta

Supponiamo ora di misurare una variabile discreta, come l'ormai familiare numero di assi quando gettiamo parecchi dadi. In pratica, la variabile discreta più comune è un intero (come il numero di assi), e denoteremo la variabile discreta con v invece di x (che usiamo per una variabile continua). Se gettiamo cinque dadi, i valori possibili di v sono $v = 0, 1, \dots, 5$ e non è realmente necessario raggruppare i possibili risultati in intervalli. Possiamo semplicemente contare quante volte abbiamo ottenuto ciascuno dei sei possibili risultati. Possiamo esprimere ciò in un altro modo dicendo che abbiamo scelto sei intervalli ciascuno dei quali contiene proprio un possibile risultato.

Nondimeno, è spesso desiderabile raggruppare parecchi risultati diversi in un intervallo. Per esempio, se lanciamo i nostri cinque dadi 200 volte, allora (secondo le probabilità trovate nel Problema 10.7) la distribuzione attesa dei risultati sarebbe come quella riportata nelle prime due colonne di Tabella 12.5. Vediamo che i numeri attesi di lanci che danno quattro e cinque assi sono 0.6 e 0.03 rispettivamente, entrambi molto minori delle 5 o più presenze richieste in ciascun intervallo per poter applicare il test χ^2 . A questa difficoltà si rimedia facilmente raggruppando i risultati per $v = 3, 4, 5$ in un singolo intervallo. Questa operazione ci lascia con quattro intervalli, $k = 1, 2, 3, 4$, che sono riportati, con i corrispondenti numeri attesi E_k , nelle ultime due colonne di Tabella 12.5.

Avendo scelto gli intervalli come ora descritto, potremmo contare le occorrenze osservate O_k in ciascun intervallo. Potremmo poi calcolare χ^2 e vedere se la distribuzione osservata e quella attesa sembrano accordarsi. In questo esperimento sappiamo che la distribuzione attesa è certamente la distribuzione binomiale $b_{5,1/6}(v)$ "ammesso" che i dadi siano buoni (così che p sia effettivamente $1/6$). Così il nostro test della distribuzione è, in questo caso, un test per verificare se i dadi sono buoni o truccati.

Tabella 12.5. Occorrenza attesa di v assi ($v = 0, 1, \dots, 5$) quando si lanciano cinque dadi 200 volte.

Risultato	Occorrenza attesa	Numero dell'intervallo k	Numero atteso E_k
Nessun asso	80.4	1	80.4
Un asso	80.4	2	80.4
Due assi	32.2	3	32.2
Tre assi	6.4	4	7.0
Quattro assi	0.6		
Cinque assi	0.003		

In ogni esperimento che tratta una variabile discreta, gli intervalli possono essere scelti in modo da contenere ciascuno uno dei possibili risultati, ammesso che il numero atteso di occorrenze per ciascun intervallo sia almeno cinque. Negli altri casi, occorre raggruppare insieme parecchi risultati diversi in un singolo intervallo più grande che comprende occorrenze attese sufficienti.

Altre forme di χ^2

Abbiamo già usato la notazione χ^2 in precedenza in questo libro. Fu utilizzata nell'Equazione (7.6) ed ancora nella (8.5); e potrebbe essere stata usata per la somma dei quadrati nella (5.42). In tutti questi casi χ^2 è una somma di quadrati con la forma generale

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\text{valore osservato} - \text{valore atteso}}{\text{deviazione standard}} \right)^2. \quad (12.11)$$

In tutti i casi, χ^2 è un indicatore dell'accordo tra i valori osservati e quelli attesi di qualche variabile. Se l'accordo è buono, χ^2 sarà dell'ordine di n ; se è cattivo, χ^2 sarà molto maggiore di n .

Sfortunatamente, possiamo usare il χ^2 per verificare questo accordo solo se conosciamo i valori attesi e la deviazione standard, e possiamo allora calcolare la (12.11). Forse la situazione più comune in cui queste grandezze sono note abbastanza accuratamente è il tipo di test discusso in questo capitolo; precisamente un test di una distribuzione, con gli E_k dati dalla distribuzione, e la deviazione standard data da $\sqrt{E_k}$. Nonostante ciò, il test χ^2 ha applicazioni molto vaste. Consideriamo, per esempio, il problema discusso nel Capitolo 8, la misura di due grandezze x e y , in cui ci si aspetta che y sia qualche funzione definita di x ,

$$y = f(x)$$

(come $y = A + Bx$). Supponiamo di avere N coppie di misure (x_i, y_i) , dove gli x_i hanno incertezza trascurabile e gli y_i hanno incertezze note σ_i . Qui il valore atteso di y_i è $f(x_i)$, e potremmo verificare quanto bene y si adatta alla funzione $f(x)$ calcolando

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2.$$

Tutte le nostre precedenti osservazioni sui valori attesi di χ^2 dovrebbero applicarsi a questo numero, ed i tests quantitativi descritti nelle seguenti sezioni potrebbero essere usati. Non perseguiremo qui questa importante applicazione, poiché è piuttosto raro in un corso introduttivo di fisica di laboratorio che le incertezze σ_i siano note in maniera sufficientemente affidabile, vedi comunque Problema 12.14.

12.3. Gradi di libertà e χ^2 ridotto

Abbiamo arguito che possiamo verificare l'accordo tra una distribuzione osservata ed una attesa calcolando χ^2 e confrontandolo con il numero di intervalli nel raccogliere i dati. Risulta che un procedimento un po' migliore è di confrontare χ^2 , non con il numero di intervalli n , ma piuttosto con "il numero di gradi di libertà", denotato d . Abbiamo menzionato brevemente la nozione di gradi di libertà nella Sezione 8.3. Dobbiamo ora discuterla più in dettaglio.

In generale, il numero di gradi di libertà d in un calcolo statistico è definito come il numero di dati osservati "meno" il numero di parametri calcolati dai dati e usati nel calcolo. Per i problemi considerati in questo capitolo, i dati osservati sono i numeri di osservazioni O_k negli n intervalli, $k = 1, \dots, n$. Così il numero di dati osservati è proprio n , il numero di intervalli. Allora, nei problemi considerati qui,

$$d = n - c,$$

dove n è il numero di intervalli e c è il numero di parametri che devono essere calcolati dai dati per ricavare i numeri attesi E_k . Il numero c è spesso chiamato il numero di "vincoli" come spiegheremo brevemente.

Il numero di vincoli c dipende dal problema che si considera. Consideriamo dapprima l'esperimento del lancio dei dadi di Sezione 12.2. Se gettiamo cinque dadi e stiamo verificando l'ipotesi che i dadi siano buoni, allora la distribuzione attesa dei numeri di assi è la distribuzione binomiale $b_{5, 1/6}(v)$, dove $v = 0, \dots, 5$ è il numero di assi in ogni lancio. Entrambi i parametri in questa funzione — il numero di dadi, cinque, e la probabilità di un asso, $1/6$ — sono noti in anticipo, e non devono essere calcolati dai dati. Quando calcoliamo il numero atteso di occorrenze di un particolare v , dobbiamo moltiplicare la probabilità binomiale per il numero totale di lanci N (nel nostro esempio, $N = 200$). Questo parametro "dipende" dai dati. Specificamente, N è proprio la somma dei numeri O_k .

$$N = \sum_{k=1}^n O_k. \quad (12.12)$$

Così nel calcolare i risultati attesi del nostro esperimento di dadi, dobbiamo calcolare giusto un parametro (N) dai dati. Il numero di vincoli è allora

$$c = 1$$

ed il numero di gradi di libertà è

$$d = n - 1.$$

Nella Tabella 12.5 i risultati dell'esperimento dei dadi erano stati raggruppati in quattro intervalli, (cioè $n = 4$); così in quell'esperimento c'erano tre gradi di libertà.

L'equazione (12.12) illustra bene la curiosa terminologia di "vincoli" e "gradi di libertà". Una volta che il numero N è stato determinato, si può riguardare la (12.12) come un'equazione che "vincola" i valori di O_1, \dots, O_n . Più specificamente, possiamo dire che, a causa del vincolo (12.12), soltanto $n - 1$ dei numeri O_1, \dots, O_n sono indipendenti. Per esempio, i primi numeri O_1, \dots, O_{n-1} potrebbero assumere qualunque valore (entro certi intervalli), ma poi l'ultimo numero O_n dovrebbe essere completamente determinato dall'Equazione (12.12). In questo senso, soltanto $n - 1$ dei dati sono "liberi" di assumere valori indipendenti; così diciamo che ci sono soltanto $n - 1$ gradi indipendenti di libertà.

Nel primo esempio in questo capitolo, la distanza x attraversata da un proiettile era misurata 40 volte ($N = 40$). I risultati venivano raggruppati in quattro intervalli ($n = 4$) e confrontati con quelli che ci si dovrebbe aspettare per una distribuzione di Gauss $f_{X,\sigma}(x)$. In questo caso ci sono "tre" vincoli e quindi soltanto un grado di libertà,

$$d = n - c = 4 - 3 = 1.$$

Il primo vincolo è lo stesso che nella (12.12): il numero totale di osservazioni N è la somma delle osservazioni O_k in tutti gli intervalli. Ma in questo caso ci sono due vincoli in più, poiché (come è usuale in questo tipo di esperimento) non conosciamo in anticipo i parametri X e σ della distribuzione di Gauss attesa $f_{X,\sigma}(x)$. Così, prima di poter calcolare i numeri attesi E_k , dobbiamo stimare X e σ usando i dati. Ci sono, allora, tre vincoli in tutto; così in questo esempio

$$d = n - 3 \quad (12.13)$$

Incidentalmente, questo spiega perché dovevamo usare almeno quattro intervalli in questo esperimento. Vedremo che il numero di gradi di libertà deve sempre essere maggiore o uguale ad uno; così, dalla (12.13), è chiaro che dovevamo scegliere $n \geq 4$.

Negli esempi considerati qui, ci sarà sempre almeno un vincolo (precisamente, il vincolo $N = \sum O_k$, che coinvolge il numero totale di misure), e ce ne potranno essere uno o due in più. Così il numero di gradi di libertà, d , varierà da $n - 1$ a $n - 3$ (nei nostri esempi). Quando n è grande, la differenza tra n e d è praticamente priva d'importanza, ma se n è piccolo (come spesso sfortunatamente è) c'è ovviamente una differenza significativa.

Armati con la nozione di gradi di libertà, possiamo ora cominciare a rendere più preciso il nostro test χ^2 . Si può far vedere (sebbene noi non lo faremo) che il valore "atteso" di χ^2 è precisamente d , il numero di gradi di libertà,

$$\text{(valore medio atteso di } \chi^2) = d \quad (12.14)$$

Questa importante equazione non significa che noi ci aspettiamo di fatto di trovare $\chi^2 = d$ dopo una qualunque serie di misure. Significa piuttosto che se potessimo ripetere la nostra intera serie di misure infinitamente molte volte e calcolassimo χ^2 ogni volta, allora la media di questi valori di χ^2 dovrebbe essere d . Nondimeno, anche dopo soltanto "un" gruppo di misure, un confronto di χ^2 con d è un indicatore dell'accordo. In particolare, se la nostra distribuzione attesa è la distribuzione attesa "corretta", allora è molto impro-

babile che χ^2 sia molto più grande di d . In altre parole, se troviamo $\chi^2 \gg d$, possiamo affermare che è molto improbabile che la nostra distribuzione attesa sia corretta.

“Non” abbiamo dimostrato il risultato (12.14), ma possiamo dire che alcuni aspetti del risultato sono ragionevoli. Per esempio, poiché $d = n - c$, possiamo riscrivere la (12.14) come

$$(\text{valore medio atteso di } \chi^2) = n - c. \quad (12.15)$$

Cioè, per un dato n il valore atteso di χ^2 sarà minore quando c è maggiore (cioè, se calcoliamo più parametri dai dati). Questo è proprio quello che dovremmo aspettarci. Nell'esempio di Sezione 12.1, usammo i dati per calcolare il centro \bar{X} e la larghezza σ della distribuzione attesa $f_{X,c}(x)$. Naturalmente, poiché X e σ sono stati così scelti da adattarsi ai dati, dovremmo aspettarci di trovare in qualche modo un accordo migliore tra le distribuzioni osservate e quelle attese; cioè ci dovremmo aspettare che questi due vincoli extra riducano il valore di χ^2 . Questo è proprio ciò che implica la (12.15).

Il risultato (12.14) suggerisce un modo un po' più conveniente di pensare al nostro test χ^2 . Noi introduciamo un “chi quadrato ridotto” (o “chi quadrato per gradi di libertà”), che denotiamo con $\bar{\chi}^2$ e definiamo come

$$\bar{\chi}^2 = \chi^2/d \quad (12.16)$$

Poiché il valore atteso di χ^2 è d , vediamo che

$$(\text{valore medio atteso di } \bar{\chi}^2) = 1 \quad (12.17)$$

Così, qualunque sia il numero di gradi di libertà, possiamo esporre il nostro test semplicemente come segue: Se otteniamo un valore di $\bar{\chi}^2$ dell'ordine di 1 o minore, allora non abbiamo motivo di dubitare che la nostra distribuzione attesa sia corretta. Se otteniamo un valore di $\bar{\chi}^2$ molto maggiore di uno, allora è improbabile che la nostra distribuzione attesa sia corretta.

12.4. Probabilità per il χ^2

Il nostro test per l'accordo fra dati osservati e la loro distribuzione attesa è ancora piuttosto rozzo. Quello di cui ora abbiamo bisogno è una misura “quantitativa” dell'accordo. In particolare, abbiamo bisogno di una guida per decidere dove tracciare il limite tra accordo e disaccordo. Per esempio, nell'esperimento di Sezione 12.1, abbiamo fatto 40 misure di una certa distanza x la cui distribuzione, come noi credevamo, dovrebbe essere Gaussiana. Abbiamo raggruppato i nostri dati in quattro intervalli, e abbiamo trovato che $\chi^2 = 1.80$. Con tre vincoli restava soltanto un grado di libertà ($d = 1$); così il χ^2 ridotto, $\bar{\chi}^2 = \chi^2/d$, è pure 1.80.

$$\bar{\chi}^2 = 1.80.$$

La domanda ora è: il valore di $\bar{\chi}^2 = 1.80$ è sufficientemente maggiore di uno da escludere che la nostra distribuzione attesa sia Gaussiana, o no?

Per rispondere a questa domanda, cominciamo col supporre che le nostre misure “siano” governate dalla distribuzione attesa (una Gaussiana, in questo esempio). Con questa ipotesi si può calcolare la probabilità di ottenere un valore di $\bar{\chi}^2$ grande quanto, o maggiore, del nostro valore 1.80. In questo caso la probabilità risulta essere

$$P(\bar{\chi}^2 \geq 1.80) \approx 18\%,$$

come presto vedremo. Cioè se i nostri risultati fossero governati dalla distribuzione attesa, allora dovrebbe esserci una probabilità del 18% di ottenere un valore di $\bar{\chi}^2$ maggiore o uguale al valore 1.80 che abbiamo realmente ottenuto. In altre parole, in questo esperimento un valore di $\bar{\chi}^2$ grande quanto 1.80 non è del tutto irragionevole; così non avremo motivo (basandoci su questa evidenza) di rigettare la nostra distribuzione attesa.

Il nostro procedimento generale dovrebbe ora essere ragionevolmente chiaro. Dopo aver completato una serie di misure, calcoliamo il chi quadrato ridotto, che ora denotiamo con $\bar{\chi}_o^2$ (dove il sottoscritto “o” sta per “ottenuto” dal momento che $\bar{\chi}_o^2$ è il valore realmente ottenuto). In seguito, assumendo che le nostre misure seguano la distribuzione attesa, calcoliamo la probabilità

$$P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2) \quad (12.18)$$

di trovare un valore di $\bar{\chi}^2$ maggiore o uguale al valore $\bar{\chi}_o^2$ realmente ottenuto. Se questa probabilità è alta, allora il nostro valore $\bar{\chi}_o^2$ è perfettamente accettabile, e non vi è motivo di rigettare la nostra distribuzione attesa. Se questa probabilità è irragionevolmente bassa, allora un valore di $\bar{\chi}^2$ grande quanto il nostro osservato $\bar{\chi}_o^2$ è molto improbabile (se le nostre misure fossero distribuite come atteso), ed è corrispondentemente improbabile che la nostra distribuzione attesa sia corretta.

Come sempre con i test statistici, dobbiamo decidere sul limite tra ciò che è “ragionevolmente probabile” e ciò che non lo è. Due scelte comuni sono quelle già menzionate in connessione con le correlazioni. Con il limite al 5 percento, dovremmo dire che il nostro valore osservato $\bar{\chi}_o^2$ indica un “disaccordo significativo” se

$$P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2) < 5\%,$$

e dovremmo rigettare la nostra distribuzione attesa al “livello significativo del 5 percento”. Se noi poniamo il limite all'1 percento, allora potremmo dire che il disaccordo è “altamente significativo” se $P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2) < 1$ percento e rigettare la distribuzione attesa al “livello significativo dell'1 percento”.

Qualunque sia il livello che scegliamo come nostro limite per il rigetto, il livello scelto dovrebbe essere dichiarato. Forse ancor più importante sarebbe dichiarare la probabilità $P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2)$, in modo che il lettore possa giudicare la sua ragionevolezza.

Il calcolo delle probabilità $P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2)$ è troppo complicato da descrivere in questo libro. Comunque, i risultati possono essere facilmente tabulati, come nella Tabella 12.6 o nella tabella più completa in Appendice D. Risulta che la probabilità di ottenere un particolare valore di $\bar{\chi}^2$ dipende dal numero di gradi di libertà. Così scriveremo la probabilità che ci interessa come $P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza da d .

Il solito calcolo delle probabilità $P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2)$ tratta i numeri osservati O_k come variabili continue che sono distribuite attorno ai loro valori attesi E_k secondo una distribuzione di Gauss. Nei problemi considerati qui, O_k è una

Il valore minimo di $\tilde{\chi}_0^2$ che richiede di mettere in dubbio la distribuzione attesa dipende da d . Per un grado di libertà, vediamo che $\tilde{\chi}_0^2$ può essere grande quanto 4 prima che il disaccordo diventi "significativo" (livello del 5 per cento). Con due gradi di libertà, il limite corrispondente è $\tilde{\chi}_0^2 = 3$; per $d = 5$, esso è più vicino a 2 ($\tilde{\chi}_0^2 = 2.2$, infatti); è così via.

Armati con le probabilità in Tabella 12.6 (o in Appendice D), possiamo ora assegnare un significato quantitativo al valore di $\tilde{\chi}_0^2$ ottenuto in un particolare esperimento. Nella Sezione 12.5 diamo alcuni esempi.

12.5. Esempi

Abbiamo ormai analizzato piuttosto completamente l'esempio di Sezione 12.1. In questa sezione consideriamo ancora tre esempi per illustrare l'applicazione del test χ^2 .

Un altro esempio di distribuzione di Gauss

L'esempio di Sezione 12.1 riguardava una misura di cui ci si attendeva che i risultati fossero normalmente distribuiti. La distribuzione normale, o di Gauss, è così comune che consideriamo brevemente un altro esempio. Supponiamo che un antropologo sia interessato alle altezze dei nativi di una certa isola. Egli sospetta che le altezze dei maschi adulti dovrebbero essere normalmente distribuite, e misura le altezze di un campione di 200 uomini. Utilizzando queste misure, egli calcola la media e la deviazione standard, e usa questi numeri come miglior stima per il centro X e il parametro di larghezza σ della distribuzione normale attesa $f_{X,\sigma}(x)$. Sceglie poi otto intervalli, come mostrato nelle due colonne a sinistra di Tabella 12.7, e raggruppa le sue osservazioni, con i risultati riportati nella terza colonna.

Il nostro antropologo vuole ora verificare se questi risultati sono consistenti con la distribuzione normale attesa $f_{X,\sigma}(x)$. A questo scopo, calcola dapprima le probabilità P_k che un uomo abbia altezza compresa in un particolare intervallo k , (assumendo una distribuzione normale). Tale probabilità è l'integrale di $f_{X,\sigma}(x)$ tra i limiti dell'intervallo, e si trova facilmente dalla tabella di integrali in Appendice B. Il numero atteso E_k in ciascun intervallo è allora P_k volte il numero totale di uomini campionati (200). Questi numeri sono riportati nella colonna finale di Tabella 12.7.

Tabella 12.7. Misure delle altezze di 200 maschi adulti

Numero dell'intervallo, k	Altezza per intervallo	Numero osservato, O_k	Numero atteso, E_k
1	minore di $X - 1.5\sigma$	14	13.4
2	compresa fra $X - 1.5\sigma$ e $X - \sigma$	29	18.3
3	compresa fra $X - \sigma$ e $X - 0.5\sigma$	30	30.0
4	compresa fra $X - 0.5\sigma$ e X	27	38.3
5	compresa fra X e $X + 0.5\sigma$	28	38.3
6	compresa fra $X + 0.5\sigma$ e $X + \sigma$	31	30.0
7	compresa fra $X + \sigma$ e $X + 1.5\sigma$	28	18.3
8	al di sopra di $X + 1.5\sigma$	13	13.4

variabile discreta, distribuita secondo la distribuzione di Poisson (²). Ammesso che tutti i numeri in gioco siano ragionevolmente grandi, il carattere discreto di O_k non è importante, e la distribuzione di Poisson è ben approssimata dalla funzione di Gauss. Sotto queste condizioni le probabilità tabulate $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$ possono essere tranquillamente usate. È per questo motivo che abbiamo detto che gli intervalli devono essere scelti in modo che il conteggio atteso, E_k , in ciascun intervallo sia ragionevolmente grande (almeno 5). Per la stessa ragione, il numero di intervalli non dovrebbe essere troppo piccolo.

Con questi avvertimenti, possiamo ora dare le probabilità calcolate $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$ per alcuni valori rappresentativi di d e $\tilde{\chi}_0^2$ in Tabella 12.6. I numeri nella colonna a sinistra danno sei scelte di d , il numero di gradi di libertà ($d = 1, 2, 3, 5, 10, 15$). Quelli in testa alle altre colonne danno valori possibili di $\tilde{\chi}_0^2$ osservato. Ciascuno dei restanti numeri nella tabella rappresenta la probabilità percentuale $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$ come una funzione di d e $\tilde{\chi}_0^2$. Per esempio, con dieci gradi di libertà ($d = 10$), vediamo che la probabilità di ottenere $\tilde{\chi}^2 \geq 2$ è 3 per cento,

$$P_{10}(\tilde{\chi}^2 \geq 2) = 3\%.$$

Così se in un esperimento con dieci gradi di libertà abbiamo ottenuto un chi quadrato ridotto di 2, potremmo concludere che le nostre osservazioni differiscono "significativamente" dalla distribuzione attesa e rigettare la distribuzione attesa al livello significativo del 5 per cento (sebbene non al livello dell'1 per cento)

Tabella 12.6. La probabilità percentuale $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$ di ottenere un valore di $\tilde{\chi}^2$ maggiore o uguale ad un particolare valore $\tilde{\chi}_0^2$, assumendo che le misure siano effettivamente governate dalla distribuzione attesa. I bianchi indicano probabilità minori di 0.05%.

d	$\tilde{\chi}_0^2$												
	0	.25	.5	.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2	3	4	5	6
1	100	62	48	39	32	26	22	19	16	8	5	3	1
2	100	78	61	47	37	29	22	17	14	5	2	.7	.2
3	100	86	68	52	39	29	21	15	11	3	.7	.2	—
5	100	94	78	59	42	28	19	12	8	1	.1	—	—
10	100	99	89	68	44	25	13	6	3	.1	—	—	—
15	100	100	94	73	45	23	10	4	1	—	—	—	—

Le probabilità nella seconda colonna di Tabella 12.6 sono tutte 100 per cento, poiché si è sempre certi di ottenere $\tilde{\chi}^2 \geq 0$. Come $\tilde{\chi}_0^2$ aumenta, la probabilità di ottenere $\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2$ diminuisce, ma lo fa con una rapidità che dipende da d . Così, per due gradi di libertà ($d = 2$), $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq 1)$ è il 37 per cento; mentre per $d = 15$, $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq 1)$ è il 45 per cento. Notiamo che $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq 1)$ è sempre apprezzabile (almeno 32 per cento, infatti); così un valore per $\tilde{\chi}_0^2$ di 1 o minore è perfettamente ragionevole, e non richiede mai di rigettare la distribuzione attesa.

² Abbiamo arguito che trovare il numero O_k consiste in un esperimento di conteggio, e quindi che O_k dovrebbe seguire una distribuzione di Poisson. Se l'intervallo k è troppo grande, allora questo argomento non è strettamente corretto, poiché la probabilità di una misura nell'intervallo non è molto minore di 1 (che è una delle condizioni per la distribuzione di Poisson, come menzionato nella Sezione 11.1); così dobbiamo avere un numero ragionevole di intervalli.

Un esempio della distribuzione di Poisson

Come esempio finale dell'uso del test χ^2 , consideriamo un esperimento nel quale la distribuzione di Poisson è la distribuzione attesa. Supponiamo di allestire un contatore Geiger per contare le particelle di raggi cosmici che arrivano in una certa regione. Supponiamo anche di contare il numero di particelle che arrivano in 100 intervalli separati di un minuto, con i risultati riportati nelle prime due colonne di Tabella 12.9.

L'osservazione dei numeri in colonna 2 suggerisce immediatamente di raggruppare tutti i conteggi $v \geq 5$ in un singolo intervallo. La scelta di sei intervalli ($k = 1, \dots, 6$) è riportata nella terza colonna ed i numeri corrispondenti O_k nella colonna 4.

Tabella 12.9. Numeri di particelle di raggi cosmici osservati in 100 intervalli separati di un minuto

Conteggi v in un minuto	Occorrenza	Numero dell'intervallo k	Osservazioni O_k nell'intervallo k	Numero atteso E_k
Nessuno	7	1	7	7.5
Uno	17	2	17	19.4
Due	29	3	29	25.2
Tre	20	4	20	21.7
Quattro	16	5	16	14.1
Cinque	8	6	11	12.1
Sei	1			
Sette	2			
Otto o più	0			
Totale	100			

L'ipotesi che vogliamo verificare è che il numero v è governato da una distribuzione di Poisson $P_\mu(v)$, poiché il conteggio medio atteso μ è incognito, dobbiamo prima calcolare la media dei nostri cento conteggi. Facilmente si trova che $\bar{v} = 2.59$, che ci dà la miglior stima per μ . Usando questo valore $\mu = 2.59$, possiamo calcolare la probabilità $P_\mu(v)$ di ogni particolare conteggio v e quindi calcolare i numeri attesi E_k come riportati nella colonna finale.

Nel calcolare i numeri E_k , abbiamo usato due parametri basati sui dati, il numero totale di osservazioni (100) e la nostra stima di μ ($= 2.59$). (Notiamo che poiché la distribuzione di Poisson è completamente determinata da μ , non abbiamo dovuto stimare la deviazione standard. In effetti, poiché $\sigma = \sqrt{\mu}$, la nostra stima per μ ci dà automaticamente una stima per σ .) Ci sono, quindi, due vincoli, che riducono i nostri sei intervalli a quattro gradi di libertà, $d = 4$.

Un semplice calcolo che usa i numeri nelle ultime due colonne di Tabella 12.9 fornisce ora per il chi quadrato ridotto

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^6 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 0.35.$$

Poiché questo valore è minore di uno, possiamo concludere immediatamente che l'accordo tra le nostre osservazioni e la distribuzione di Poisson attesa è soddisfacente. Più specificamente, vediamo dalla tabella in Appendice D che

Per calcolare i numeri attesi E_k , occorre utilizzare tre parametri che venivano calcolati dai dati (il numero totale del campione e le sue stime per X e σ). Così, sebbene vi fossero otto intervalli, c'erano tre vincoli; così il numero di gradi di libertà era $d = 8 - 3 = 5$. Un semplice calcolo che utilizza i dati di Tabella 12.7 dà per chi quadrato ridotto

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^8 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 3.5.$$

Poiché questo valore è apprezzabilmente maggiore di uno, sospettiamo immediatamente che le altezze degli isolani non seguano la distribuzione normale. Più specificamente, vediamo dalla Tabella 12.6 che, se le altezze degli isolani fossero distribuite come atteso, allora la probabilità $P_3(\bar{\chi}^2 \geq 3.5)$ di ottenere un $\bar{\chi}^2$ grande quanto 3.5 o maggiore è circa 0.5 percento. Per qualunque standard ciò è molto improbabile, e concludiamo che è molto improbabile che le altezze degli isolani siano normalmente distribuite. In particolare, all'1 percento di livello (o "altamente significativo"), possiamo rigettare l'ipotesi di una distribuzione normale di altezza.

Ancora sui dadi

Nella Sezione 12.2 abbiamo considerato un esperimento in cui cinque dadi venivano gettati molte volte ed il numero di assi in ciascun tiro veniva registrato. Supponiamo di fare 200 tiri e di dividere i risultati in intervalli come discusso in precedenza. Assumendo che il dado sia buono, possiamo calcolare i numeri attesi E_k come prima. Essi sono riportati nella terza colonna di Tabella 12.8.

Tabella 12.8. Distribuzione del numero di assi in 200 tiri di 5 dadi per volta.

Numero dell'intervallo k	Risultati per intervallo	Numero atteso, E_k	Numero osservato, O_k
1	nessun asso	80.4	60
2	un asso	80.4	88
3	due assi	32.2	39
4	3, 4 o 5 assi	7.0	13

In un test effettivo, cinque dadi sono stati lanciati 200 volte e sono osservati i numeri riportati nell'ultima colonna di Tabella 12.8. Per verificare l'accordo tra la distribuzione osservata e quella attesa, notiamo semplicemente che ci sono tre gradi di libertà (quattro intervalli meno un vincolo) e calcoliamo

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 4.16.$$

Riferendoci indietro alla Tabella 12.6 vediamo che con tre gradi di libertà la probabilità di ottenere un $\bar{\chi}^2$ grande quanto questo o maggiore è circa 0.7 percento, "se" i dadi sono buoni. Concludiamo che i dadi sono quasi certamente non buoni. Il confronto dei numeri E_k e O_k in Tabella 12.8 suggerisce che almeno un dado è truccato in favore dell'asso.

192 12. Il test χ^2 per una distribuzione
 un valore di χ^2 grande quanto 0.35 è molto probabile; infatti $P(\chi^2 \geq 0.35) \approx 85$ per cento. Così il nostro esperimento non ci dà assolutamente motivo di dubitare della distribuzione di Poisson attesa.

Il valore di $\chi^2 = 0.35$ trovato in questo esperimento è realmente apprezzabilmente minore di 1, ed indica che le nostre osservazioni si adattano molto bene alla distribuzione di Poisson. Comunque, questo piccolo valore "non" dà una evidenza più forte che le nostre misure sono governate dalla distribuzione attesa di quello che farebbe un valore $\chi^2 \approx 1$. Se i risultati sono realmente governati dalla distribuzione attesa, e se ripetessimo la nostra serie di misure molte volte, dovremmo aspettarci molti diversi valori di χ^2 , fluttuanti attorno al valor medio 1. Così, se le misure sono governate dalla distribuzione casuale lontana dal valore medio atteso. In nessun modo dà maggior peso alla nostra conclusione che le nostre misure sembrano seguire la distribuzione attesa.

Se avete seguito questi tre esempi, non dovrete aver difficoltà ad applicare il test χ^2 al tipo di problemi che si incontrano in un corso elementare di fisica di laboratorio. Parecchi ulteriori esempi si trovano nei problemi che seguono. Dovreste verificare il grado di comprensione che avete raggiunto provando a risolvere alcuni di essi.

Problemi

Nota. Un asterisco indica che il problema è discusso, oppure il suo risultato dato nella sezione Risposte alla fine del libro.

*12.1 (Sezione 12.1). A ciascun membro di una classe di 50 studenti viene dato un pezzo dello stesso metallo (o di quello che si suppone sia lo stesso metallo) e viene chiesto loro di trovarne la densità. Dai 50 risultati vengono calcolate la media \bar{p} e la deviazione standard σ_p , ed è poi deciso di verificare se i risultati sono distribuiti normalmente. A questo scopo le misure sono raggruppate in quattro intervalli con limiti in $\bar{p} - \sigma_p$, \bar{p} , e $\bar{p} + \sigma_p$, con i risultati riportati in Tabella 12.10.

Tabella 12.10.

Intervallo k	Valori di p nell'intervallo	Osservazioni O_k nell'intervallo
1	al di sotto di $\bar{p} - \sigma_p$	12
2	fra $\bar{p} - \sigma_p$ e \bar{p}	13
3	fra \bar{p} e $\bar{p} + \sigma_p$	11
4	al di sopra di $\bar{p} + \sigma_p$	14

Assumendo che le misure siano distribuite normalmente, con centro \bar{p} e larghezza σ_p , calcolate il numero, E_k , di misure attese in ciascun intervallo. Quindi calcolate χ^2 . Risulta che le misure sono distribuite normalmente?

12.2 (Sezione 12.1). Nel problema 4.7 sono state date 30 misure di un tempo t , con media $\bar{t} = 8.15$ sec e deviazione standard $\sigma_t = 0.04$ sec. Raggruppate i dati in quattro intervalli con limiti in $\bar{t} - \sigma_t$, \bar{t} , e $\bar{t} + \sigma_t$, e trovate i numeri osservati O_k in ciascun intervallo $k = 1, 2, 3, 4$. Assumendo che le misure siano

distribuite normalmente con centro in \bar{t} e larghezza σ_t , quali sono i numeri attesi E_k in ciascun intervallo? Calcolate χ^2 . Vi è qualche ragione di mettere in dubbio che le misure siano distribuite normalmente?

12.3 (Sezione 12.2). Un giocatore decide di provare un dado gettandolo 240 volte. Ciascun tiro ha sei possibili uscite ($k = 1, 2, \dots, 6$, dove k è la faccia che si presenta) e la distribuzione dei suoi risultati è quella riportata in Tabella 12.11.

Tabella 12.11.

Faccia che esce, k	1	2	3	4	5	6
Occorrenze, O_k	20	46	35	45	42	52

Quali sono i numeri di occorrenze attesi E_k , assumendo che il dado sia buono? Trattando ciascun possibile risultato come un intervallo separato, calcolare χ^2 . Sembra probabile che il dado sia truccato?

*12.4 (Sezione 12.2). Tre dadi vengono gettati 400 volte ed il numero di sei è registrato per ciascun tiro, con i risultati riportati in Tabella 12.12. Assumendo che il dado sia buono, calcolate i numeri attesi E_k per ciascuno dei tre intervalli. (Le probabilità richieste sono le probabilità binomiali discusse in Sezione 10.2). Calcolate χ^2 . Vi è qualche motivo di sospettare che i dadi siano truccati?

Tabella 12.12.

Risultato	Intervallo k	Occorrenze O_k
Nessun sei	1	217
Un sei	2	148
Due o Tre sei	3	35

*12.5 (Sezione 12.3).

- (a) Per ciascuno dei Problemi 12.1 fino a 12.4, trovate il numero di vincoli c e il numero dei gradi di libertà d .
- (b) Supponiamo che nel Problema 12.1 il valore accettato ρ_{acc} della densità sia noto, e che abbiamo deciso di verificare l'ipotesi che i risultati siano governati da una distribuzione normale centrata su ρ_{acc} . Per questo test, quanti vincoli ci sarebbero, e quanti gradi di libertà?

*12.6 (Sezione 12.4). Per i dati del Problema 12.1, calcolate il chi quadrato ridotto χ^2 . Se le misure fossero distribuite normalmente, quale sarebbe la probabilità di ottenere un valore di χ^2 grande quanto questo o maggiore? Al livello significativo del 5 per cento, potete rigettare l'ipotesi che le misure siano distribuite normalmente? A livello dell'1 per cento? (Vedi Appendice D per le probabilità necessarie).

12.7 (Sezione 12.4). Nel Problema 12.2 potete rigettare l'ipotesi di distribuzione normale ai livelli significativi sia del 5 per cento sia dell'1 per cento? (Vedi Appendice D per le probabilità necessarie).

*12.8 (Sezione 12.5). Una coppia di dadi viene gettata 360 volte, ed il punteggio totale è registrato per ciascun tiro. I totali possibili sono 2, 3, ..., 12 e i loro numeri di occorrenze sono riportati in Tabella 12.13.

Tabella 12.13.

Totale	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Occorrenze	6	14	23	35	57	50	44	49	39	27	16

Calcolate le probabilità per ciascun totale e quindi i numeri attesi di occorrenze (assumendo che i dadi siano buoni). Calcolate χ^2 , d , e $\tilde{\chi}^2 = \chi^2/d$. Assumendo che i dadi siano buoni, qual è la probabilità di ottenere un valore di $\tilde{\chi}^2$ grande quanto questo o maggiore? Al livello significativo del 5 per cento, potete rigettare l'ipotesi che i dadi siano buoni? Al livello dell'1 per cento? (Vedi Appendice D per le probabilità necessarie).

12.9 (Sezione 12.5). Nel problema 12.3, trovare il valore di $\tilde{\chi}^2$. Possiamo concludere che il dado era truccato, al livello significativo del 5 per cento? A livello dell'1 per cento? (Vedi Appendice D per la probabilità necessaria).

*12.10 (Sezione 12.5). Nel problema 12.4, qual è il valore di $\tilde{\chi}^2$? Se i dadi sono realmente buoni, qual è la probabilità di ottenere un valore di $\tilde{\chi}^2$ grande quanto questo o maggiore? Spiegate se l'evidenza suggerisce che i dadi siano truccati. (Vedi Appendice D per le probabilità necessarie).

12.11 (Sezione 12.5). Calcolate χ^2 per i dati del Problema 11.5, assumendo che le osservazioni dovrebbero seguire la distribuzione di Poisson con conteggio medio $\mu = 3$. (Raggruppare tutti i valori $v \geq 6$ in un singolo intervallo). Quanti gradi di libertà ci sono? (Non dimenticate che μ è stato dato in precedenza, e non calcolato dai dati). Qual è $\tilde{\chi}^2$? I dati sono consistenti con la distribuzione di Poisson attesa? (Vedi Appendice D per le probabilità necessarie).

*12.12 (Sezione 12.5).
 (a) Le specifiche di un certo campione radioattivo affermano che esso produce una media di due decadimenti per minuto. Per verificare ciò, uno studente misura il numero di decadimenti in 40 intervalli separati di un minuto, con i risultati in Tabella 12.14.

Tabella 12.14.

Numero di decadimenti	0	1	2	3	4	5 o più
Volte osservate	11	12	11	4	2	0

Se i decadimenti seguono una distribuzione di Poisson con $\mu = 2$, quali numeri lo studente dovrebbe aspettarsi di osservare? (Raggruppare tutte le osservazioni con $v \geq 3$ in un singolo intervallo) Calcolate χ^2 , d , e $\tilde{\chi}^2 = \chi^2/d$. (Non dimenticate che μ non è stato calcolato dai dati). Al livello significativo del 5 per cento, rigettereste l'ipotesi che il campione segua una distribuzione di Poisson con $\mu = 2$?

(b) Lo studente osserva che la media ottenuta dei risultati è $\bar{v} = 1.35$, e decide allora di verificare se i dati seguono una distribuzione di Poisson con $\mu = 1.35$. In questo caso, quali sono d e $\tilde{\chi}^2$? I dati sono consistenti con questa nuova ipotesi?

*12.13 (Sezione 12.5). Nel Capitolo 10 abbiamo discusso un test per l'adattamento ad una distribuzione binomiale. Abbiamo considerato n prove ciascuna con due possibili uscite, successo (con probabilità p) ed insuccesso (con probabilità $1 - p$). Abbiamo poi fatto un test per vedere se il numero osservato di successi, v , era compatibile con qualche valore assunto di p . Finché i numeri in gioco sono ragionevolmente grandi, possiamo trattare questo stesso problema con il test χ^2 , con due intervalli $-k = 1$ per i successi e $k = 2$ per gli insuccessi - ed un grado di libertà. Qui di seguito, userete entrambi i metodi e confronterete i risultati. Con numeri grandi troverete che l'accordo è eccellente; con numeri piccoli esso è meno buono, ma ancora abbastanza buono perché χ^2 sia un indicatore molto utile.

(a) Un produttore di mangime crede di poter introdurre un diverso componente nel suo mangime per polli, senza far calare la popolarità del prodotto. Per verificare questa ipotesi egli prepara 16 lattine, etichettate "tipo X", contenenti la nuova mistura, e 16 lattine, etichettate "tipo Y", contenenti la vecchia. Invia poi una lattina di ciascun tipo a 16 assaggiatori, e chiede quali essi preferiscano. Se la sua ipotesi è corretta, dovremmo aspettarci che otto assaggiatori preferiscano X ed otto preferiscano Y. In realtà il numero in favore di X risulta $v = 11$. Calcolate χ^2 e la probabilità di ottenere un valore grande quanto questo o più grande. Il test indica una differenza significativa tra i due tipi di mangime? Ora, calcolate la probabilità corrispondente esattamente, usando la distribuzione binomiale, e confrontate i vostri risultati. Notate che il test χ^2 include deviazioni dai numeri attesi in entrambe le direzioni. Allora, per questo confronto, dovrete calcolare la probabilità "a due code", per valori di v che deviano da otto di tre o più in entrambe le direzioni; cioè, per $v = 11, 12, \dots, 16$ e $v = 5, 4, \dots, 1$.

(b) Ripetete la parte (a) per il test successivo, in cui il produttore prepara 400 lattine di ciascun tipo, ed il numero di preferenze X è 225. (Nel calcolare le probabilità binomiali utilizzate l'approssimazione Gaussiana).

(c) Nella parte (a) i numeri erano abbastanza piccoli per cui il test χ^2 risultava piuttosto rozzo. (Esso dava una probabilità del 14 per cento, confrontata con il valore corretto 21.0 per cento). Con un grado di libertà, possiamo migliorare un po' il test χ^2 usando un " χ^2 aggiustato", definito come

$$\text{aggiustato } \chi^2 = \sum_{k=1}^2 \frac{(|O_k - E_k| - \frac{1}{2})^2}{E_k}$$

Calcolate il χ^2 aggiustato per i dati della parte (a), e mostrate che l'uso di questo valore (invece del solito χ^2) nella tabella in Appendice D dà una approssimazione più accurata (d).

12.14 (Sezione 12.5). Il test χ^2 può essere usato per verificare quanto bene un

³ Non abbiamo qui "giustificato" l'uso del χ^2 aggiustato, ma questo esempio illustra la sua superiorità. Per ulteriori dettagli, vedi H. L. Alder e E. B. Roessler, "Introduction to Probability and Statistics" (Freeman, 1977) p. 263.

insieme di misure (x_i, y_i) di due variabili si adatta ad una relazione attesa $y = f(x)$, ammesso che le incertezze siano note in modo affidabile. Supponiamo che ci si aspetti che x e y soddisfino la relazione lineare

$$y = f(x) = A + Bx \quad (12.19)$$

(Per esempio, y potrebbe essere la lunghezza di una barra di metallo ed x la sua temperatura). Supponiamo che A e B siano stati previsti teoricamente ottenendo i valori $A = 50$ e $B = 6$, e che cinque misure di x e y abbiano prodotto i risultati riportati in Tabella 12.15

Tabella 12.15.

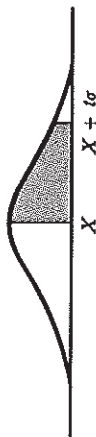
x (incertezza trascurabile)	1	2	3	4	5
y (± 4)	60	56	71	66	86

L'incertezza quotata su y è la deviazione standard; cioè, le cinque misure di y hanno tutte la stessa deviazione standard $\sigma = 4$. Fate una tabella dei valori osservati ed attesi di y_i , e calcolate χ^2 come

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma} \right)^2.$$

Poiché non ci sono stati parametri calcolati dai dati, non ci sono restrizioni e quindi ci sono cinque gradi di libertà. Calcolate χ^2 , ed usate la tabella in Appendice D per trovare la probabilità di ottenere un valore di χ^2 così grande, assumendo che y soddisfi la (12.19). Al livello del 5 per cento, rigettereste la relazione attesa (12.19)? (Se le costanti A e B non fossero note in precedenza, si potrebbe calcolarle dai dati con il metodo dei minimi quadrati. Si procederebbe poi come prima, ma ci sarebbero ora soltanto tre gradi di libertà).

Tabella B. La probabilità percentuale, $Q(t) = \int_x^{x+\tau\sigma} f_{X,\sigma}(x) dx$, come una funzione di t .



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.53
0.2	7.93	8.32	8.71	9.10	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.80	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17.00	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.50	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.90	22.24
0.6	22.57	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.17	25.49
0.7	25.80	26.11	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.10	29.39	29.67	29.95	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.40	33.65	33.89
1.0	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.70	37.90	38.10	38.30
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.80	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.70	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.50	47.56	47.61	47.67
2.0	47.72	47.78	47.83	47.88	47.93	47.98	48.03	48.08	48.12	48.17
2.1	48.21	48.26	48.30	48.34	48.38	48.42	48.46	48.50	48.54	48.57
2.2	48.61	48.64	48.68	48.71	48.75	48.78	48.81	48.84	48.87	48.90
2.3	48.93	48.96	48.98	49.01	49.04	49.06	49.09	49.11	49.13	49.16
2.4	49.18	49.20	49.22	49.25	49.27	49.29	49.31	49.32	49.34	49.36
2.5	49.38	49.40	49.41	49.43	49.45	49.46	49.48	49.49	49.51	49.52
2.6	49.53	49.55	49.56	49.57	49.59	49.60	49.61	49.62	49.63	49.64
2.7	49.65	49.66	49.67	49.68	49.69	49.70	49.71	49.72	49.73	49.74
2.8	49.74	49.75	49.76	49.77	49.78	49.79	49.79	49.79	49.80	49.81
2.9	49.81	49.82	49.82	49.83	49.84	49.84	49.85	49.85	49.86	49.86
3.0	49.87	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	49.98	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	49.997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	49.9997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	49.99997	—	—	—	—	—	—	—	—	—

APPENDICE B

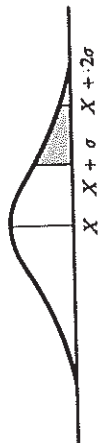
Integrale Normale degli Errori, II

In certi calcoli, una forma conveniente dell'integrale normale degli errori è

$$Q(t) = \int_x^{x+\tau\sigma} f_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2} dz$$

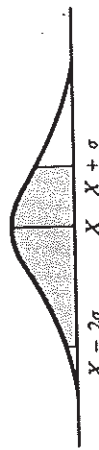

(Questo integrale è, naturalmente, proprio la metà dell'integrale tabulato in Appendice A). La probabilità $P(a \leq x \leq b)$ di una misura in un intervallo $a \leq x \leq b$ può essere trovata da $Q(t)$ con una singola sottrazione o addizione. Per esempio,

$$P(X + \sigma \leq x \leq X + 2\sigma) = Q(2) - Q(1)$$



Analogamente

$$P(X - 2\sigma \leq x \leq X + \sigma) = Q(2) + Q(1)$$



La probabilità di una misura maggiore di un certo $X + \tau\sigma$ è proprio $0.5 - Q(t)$. Per esempio,

$$P(x \geq X + \sigma) = 50\% - Q(1).$$



APPENDICE C

Probabilità per i Coefficienti di Correlazione

La bontà con cui N punti $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ si adattano ad una linea retta è indicata dal coefficiente di correlazione lineare

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2]^{1/2}}$$

che è sempre compreso nell'intervallo $-1 \leq r \leq 1$. Valori di r vicini a ± 1 indicano una buona correlazione lineare; valori vicini a 0 indicano poca o nessuna correlazione.

Una misura più quantitativa dell'adattamento si può trovare usando la Tabella C. Per ogni definito r_0 , $P_N(|r| \geq |r_0|)$ è la probabilità che N misure di due variabili incorrelate diano un coefficiente r grande quanto r_0 . Così se otteniamo un coefficiente r_0 per cui $P_N(|r| \geq |r_0|)$ è piccola, allora è corrispondentemente improbabile che le nostre variabili siano incorrelate; cioè, è indicata una correlazione. In particolare, se $P_N(|r| \geq |r_0|) \leq 5$ per cento, la correlazione è chiamata "significativa"; se è minore dell'1 per cento, la correlazione è chiamata "altamente significativa".

Per esempio, la probabilità che 20 misure ($N = 20$) di due variabili incorrelate diano $|r| \geq 0.5$ è data nella tabella come 2.5 per cento. Così se 20 misure danno $r = 0.5$, dovremmo avere evidenza "significativa" di una correlazione lineare tra le due variabili. Per ulteriore discussione, vedi Sezioni 9.3 e 9.5.

I valori in Tabella C sono stati calcolati dall'integrale

$$P_N(|r| \geq |r_0|) = \frac{2\Gamma[(N-1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(N-2)/2]} \int_{|r_0|}^1 (1-r^2)^{(N-4)/4} dr.$$

Vedi, per esempio, E.M. Pugh e G.H. Winslow, "The Analysis of Physical Measurements" (Addison-Wesley, 1966), Sezione 12-8.

Tabella C. La probabilità percentuale $P_N(|r| \geq r_0)$ che N misure di due variabili incorrelate diano un coefficiente di correlazione con $|r| \geq r_0$, come una funzione di N ed r_0 . (I bianchi indicano probabilità minori di 0.05 per cento).

N	r_0										
	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
3	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
4	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
5	100	87	75	62	50	39	28	19	10	3.7	0
6	100	85	70	56	43	31	21	12	5.6	1.4	0
7	100	83	67	51	37	25	15	8.0	3.1	0.6	0
8	100	81	63	47	33	21	12	5.3	1.7	0.2	0
9	100	80	61	43	29	17	8.8	3.6	1.0	0.1	0
10	100	78	58	40	25	14	6.7	2.4	0.5	—	0
11	100	77	56	37	22	12	5.1	1.6	0.3	—	0
12	100	76	53	34	20	9.8	3.9	1.1	0.2	—	0
13	100	75	51	32	18	8.2	3.0	0.8	0.1	—	0
14	100	73	49	30	16	6.9	2.3	0.5	0.1	—	0
15	100	72	47	28	14	5.8	1.8	0.4	—	—	0
16	100	71	46	26	12	4.9	1.4	0.3	—	—	0
17	100	70	44	24	11	4.1	1.1	0.2	—	—	0
18	100	69	43	23	10	3.5	0.8	0.1	—	—	0
19	100	68	41	21	9.0	2.9	0.7	0.1	—	—	0
20	100	67	40	20	8.1	2.5	0.5	0.1	—	—	0
25	100	63	34	15	4.8	1.1	0.2	—	—	—	0
30	100	60	29	11	2.9	0.5	—	—	—	—	0
35	100	57	25	8.0	1.7	0.2	—	—	—	—	0
40	100	54	22	6.0	1.1	0.1	—	—	—	—	0
45	100	51	19	4.5	0.6	—	—	—	—	—	0
0	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45		
50	100	73	49	30	16	8.0	3.4	1.3	0.4	0.1	
60	100	70	45	25	13	5.4	2.0	0.6	0.2	—	
70	100	68	41	22	9.7	3.7	1.2	0.3	0.1	—	
80	100	66	38	18	7.5	2.5	0.7	0.1	—	—	
90	100	64	35	16	5.9	1.7	0.4	0.1	—	—	
100	100	62	32	14	4.6	1.2	0.2	—	—	—	

APPENDICE D

Probabilità per χ^2

Tabella D. La probabilità percentuale $P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_0^2)$ di ottenere un valore di $\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_0^2$ in una esperienza con d gradi di libertà, come una funzione di d e $\bar{\chi}_0^2$. (I bianchi indicano probabilità minori di 0.05 per cento).

d	$\bar{\chi}_0^2$														
	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	8.0	10.0
1	100	48	32	22	16	11	8.3	6.1	4.6	3.4	2.5	1.9	1.4	0.5	0.2
2	100	61	37	22	14	8.2	5.0	3.0	1.8	1.1	0.7	0.4	0.2	—	—
3	100	68	39	21	11	5.8	2.9	1.5	0.7	0.4	0.2	0.1	—	—	—
4	100	74	41	20	9.2	4.0	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1	—	—	—	—
5	100	78	42	19	7.5	2.9	1.0	0.4	0.1	—	—	—	—	—	—
6	100	82	44	18	6.0	2.0	0.8	0.4	0.1	—	—	—	—	—	—
7	100	85	45	17	5.0	1.4	0.6	0.2	0.1	—	—	—	—	—	—
8	100	88	46	16	4.0	0.9	0.4	0.2	0.1	—	—	—	—	—	—
9	100	90	47	15	3.2	0.6	0.2	0.1	—	—	—	—	—	—	—
10	100	92	48	14	2.5	0.4	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—
11	100	94	49	13	1.9	0.3	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—
12	100	95	50	12	1.4	0.2	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—
13	100	96	51	11	1.0	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	100	97	52	10	0.7	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	100	98	53	9	0.5	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	100	98	54	8	0.4	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	100	99	55	7	0.3	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	100	99	56	6	0.2	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	100	99	57	5	0.1	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	100	100	58	4	0.1	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	100	100	60	3	0.0	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
24	100	100	62	2	0.0	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
26	100	100	64	1	0.0	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28	100	100	66	0	0.0	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	100	100	68	0	0.0	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Se una serie di misure è raggruppata in intervalli $k = 1, \dots, n$, denotiamo con O_k il numero di misure osservate nell'intervallo k . Il numero "atteso" (sulla base di qualche distribuzione assunta od attesa) nell'intervallo k è denotato con E_k . La bontà con cui le osservazioni si adattano alla distribuzione attesa è indicata dal chi quadrato ridotto, $\bar{\chi}^2$, definito come

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

dove d è il numero di gradi di libertà, $d = n - c$, e c è il numero di vincoli (vedi Sezione 12.3). Il valore medio atteso di $\bar{\chi}^2$ è 1. Se $\bar{\chi}^2 \gg 1$, i risultati osservati non si adattano alla distribuzione assunta; se $\bar{\chi}^2 \lesssim 1$, l'accordo è soddisfacente.

Questo test è reso quantitativo con le probabilità riportate in Tabella D. $\bar{\chi}_0^2$ denoti il valore di $\bar{\chi}^2$ effettivamente ottenuto in un esperimento con d gradi di libertà. Il numero $P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_0^2)$ è la probabilità di ottenere un valore di $\bar{\chi}^2$ grande quanto l'osservato $\bar{\chi}_0^2$ se le misure hanno seguito realmente la distribuzione assunta. Così se, $P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_0^2)$ è grande, la distribuzione osservata ed attesa sono consistenti; se è piccola esse sono probabilmente in disaccordo. In particolare, se $P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_0^2)$ è minore del 5 per cento, diciamo che il disaccordo è "significativo", e rigettiamo la distribuzione assunta al livello del 5 per cento. Se è minore di 1 per cento, il disaccordo è chiamato "altamente significativo", e rigettiamo la distribuzione assunta al livello dell'1 per cento.

Per esempio, supponiamo di ottenere un chi quadrato ridotto di 2.6 (cioè, $\bar{\chi}_0^2 = 2.6$) in un esperimento con sei gradi di libertà ($d = 6$). Secondo la Tabella D, la probabilità di ottenere $\bar{\chi}^2 \geq 2.6$ è 1.6 per cento, se le misure fossero governate dalla distribuzione assunta. Così al livello del 5 per cento (ma non completamente al livello dell'1 per cento), dovremmo rigettare la distribuzione assunta. Per ulteriore discussione vedi Capitolo 12.

I valori nella Tabella D sono stati calcolati dall'integrale

$$P_d(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_0^2) = \frac{2}{2^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_{\bar{\chi}_0}^{\infty} x^{d-1} e^{-x^2/2} dx.$$

Vedi, per esempio, E.M. Pugh e G.H. Winslow, "The Analysis of Physical Measurements" (Addison-Wesley, 1966) Sezione 12-5.

Bibliografia

I seguenti sono libri che io ho trovato molto utili. Essi sono approssimativamente suddivisi secondo il loro livello matematico e la completezza della loro trattazione.

Una bella chiara introduzione ai metodi statistici che non ricorre all'uso di troppi calcoli è Oliver L. Lacy, "Statistical Methods in Experimentation" (McMillan, 1953).

Un libro più avanzato sulla statistica che è anche molto chiaro e non usa calcolo è Henry L. Alder and Edward B. Roessler, "Introduction to Probability and Statistics" (Freeman, 1977).

Tre libri circa allo stesso livello di questo libro che trattano molti degli argomenti sono:

D.C. Baird, "Experimentation; An Introduction to Measurements Theory and Experiment Design" (Prentice Hall, 1962);

N.C. Barford, "Experimental Measurements; Precision, Error, and Truth" (Addison-Wesley, 1967);

Hugh D. Young, "Statistical Treatment of Experimental Data" (McGraw Hill, 1962).

Numerosi ulteriori argomenti e derivazioni possono essere trovati nei seguenti libri più avanzati:

Phillip R. Bevington, "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences" (McGraw-Hill, 1969);

Stuart L. Meyer, "Data Analysis for Scientists and Engineers" (John Wiley, 1975);

Emerson M. Pugh and George H. Winslow, "The Analysis of Physical Measurements" (Addison-Wesley, 1966).

Risposte a problemi scelti

Nota sulle cifre significative: Piccole differenze nell'ultima cifra significativa possono sorgere dall'uso di diversi metodi di arrotondamento, e sono di solito non importanti. Per i problemi dei Capitoli 2 e 3, le incertezze date sono state ricavate col metodo più rozzo possibile, arrotondando ad una cifra significativa, va ad ogni sequenza del calcolo. Nei pochi casi in cui un procedimento più esatto dà un risultato diverso, la risposta esatta è riportata fra parentesi, opportunamente arrotondata alla fine del calcolo. Nei Capitoli 4-12, tutti i risultati sono stati trovati con una calcolatrice (che utilizza dieci cifre) ed arrotondati alla fine.

Capitolo 2

- 2.2 (a) 5.03 ± 0.04 metri. (b) Questo è un caso in cui occorre mantenere una cifra extra e dare 19.5 ± 1 sec. (c) $(-3.2 \pm 0.3) \times 10^{-19}$ coulombs. (d) $(0.56 \pm 0.07) \times 10^{-6}$ metri. (e) $(3.27 \pm 0.04) \times 10^3$ gm. cm/sec.
- 2.3 (a) Probabilmente l'unica conclusione ragionevole è 1.9 ± 0.1 gm/cm³. (b) La discrepanza è 0.05 gm/cm³, che non è significativa.
- 2.5 La colonna intestata ($L - L'$) dovrebbe riportare: 0.3 ± 0.9 , -0.6 ± 1.5 , -2.2 ± 2 (che potrebbe essere arrotondata a -2 ± 2), 1 ± 4 , 1 ± 4 , -4 ± 4 .
La differenza ($L - L'$) dovrebbe essere teoricamente zero. In tutti i casi eccetto uno il valore misurato è più piccolo della sua incertezza; ed in quell'unico caso (-2.2 ± 2) è soltanto di poco più grande. Così i valori osservati sono consistenti con il valore atteso zero.
- 2.8 (a) Poiché si può trovare una linea retta (come in Figura A 2.8) che passa attraverso lo 0 e attraverso tutte le barre di errore, i dati "sono" consistenti con la previsione $v^2 \propto h$. (b) La pendenza della retta che meglio si adatta è ≈ 18.4 ; quella della più ripida possibile è ≈ 20.4 ; quella della meno ripida possibile è ≈ 16.4 . Così la pendenza risulta 18.4 ± 2 m/sec² (o forse 18 ± 2), che è consistente con il valore atteso 19.6 m/sec². Domanda: Quando si disegnano tali linee, bisogna insistere che esse passino attraverso lo 0 o no? La risposta dipende dai dettagli delle misure. In questo caso abbiamo permesso che le linee non passino attraverso lo 0, e quindi abbiamo una stima generosa dell'incertezza.
- 2.9 (a) Nella Figura A 2.9 (a), che comprende l'origine, è impossibile dire se T varia con A . Dalla Figura A 2.9 (b), che ha una scala verticale molto allargata, è chiaro che T varia con A . Ovviamente bisogna considerare con attenzione la scelta degli assi in funzione dello scopo che ci si prefigge.

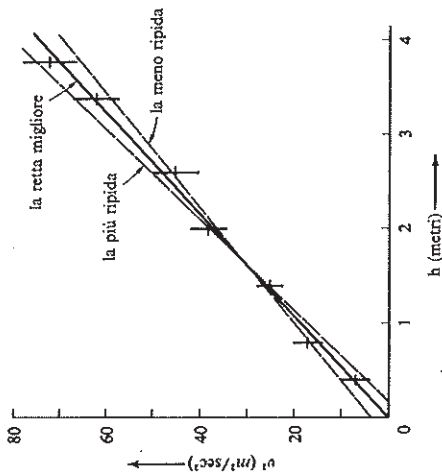


Figura A 2.8

- (b) Se entrambi i grafici venissero ridisegnati con barre di errore di 0.3 sec (in alto e in basso), sarebbe chiaro che in questo caso non vi è evidenza della variazione di T con A .
- 2.12 (a) Le risposte per $v_f - v_i$ sono 4.0 ± 0.3 e 0.6 ± 0.4 cm/sec.
(b) Le incertezze percentuali sono 8 per cento e 70 per cento.
- 2.14 Risultato Incertezza percentuale Incertezza assoluta
(a) 292 cm² 3% 9 cm² (o 7 "esattamente")
(b) 270 cm² 10% 30 cm² · sec
(c) 12 piedi · libbre 10% 1 piede · libbre
- 2.15 (a) $q_{\text{vera}} = 10 \times 20 = 200$;
(il più alto valore probabile di q) = $11 \times 21 = 231$;
(il più basso valore probabile di q) = $9 \times 19 = 171$.
La regola in (2.27) dà $q = 200 \pm 30$, che si accorda bene.
(b) (il più alto valore probabile) = $18 \times 35 = 630$;
(il più basso valore probabile) = $2 \times 5 = 10$.
La regola in (2.27) dà $q = 200 \pm 300$ (cioè, $q_{\text{max}} = 500$; $q_{\text{min}} = -100$).
La ragione per cui questo risultato è così malamente scortetto è che la regola in (2.27) si applica solo quando le incertezze relative sono piccole confrontate ad uno. Questa condizione (che di solito si incontra in pratica) non si verifica in questo caso.

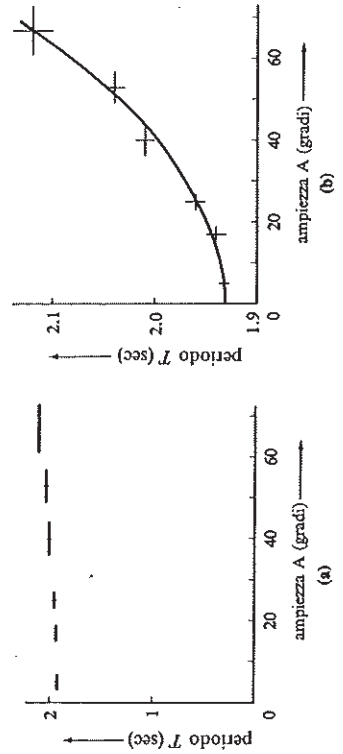


Figura A 2.9

Capitolo 3

- 3.1. (a) $32 \pm \sqrt{32} \approx 32 \pm 6$. (b) $786 \pm \sqrt{786} \approx 790 \pm 30$. (c) 16 ± 3 per A, 13.1 ± 0.5 per B. Notate che i risultati di A e B sono consistenti, ma che B è stato ottenuto con una incertezza più piccola.
- 3.3 (a) 3 ± 7 . (b) 40 ± 20 . (c) 0.5 ± 0.1 . (d) 63 ± 6 .
- 3.4 (a) 0.48 ± 0.02 sec (o 4%). (b) 0.470 ± 0.005 sec (o 1%). (c) No. In primo luogo il pendolo eventualmente si fermerà a meno che esso non venga forzato. Anche se così fosse altri effetti potrebbero diventare importanti ed opporsi alla nostra richiesta di una accuratezza via via più grande. Per esempio, se misurassimo per parecchie ore, l'affidabilità del cronometro può diventare un fattore limitante, ed il periodo τ può "variare" a causa di cambi di temperatura, umidità, etc.
- 3.6 Profondità = 40 ± 10 metri. (Un calcolo più esatto dà 44 ± 15 , che si può scegliere di lasciare non arrotondato).

3.8 "errori sommati"
"errori sommati in quadratura"

a + b	80 ± 6
a + c	90 ± 5
a + d	58 ± 5

- 3.10 (a) 0.70 ± 0.05 MeV (b) 0.40 ± 0.02 MeV.
- 3.11 (a) $\sin \theta = 0.82 \pm 0.02$. (Non dimenticate che $\delta \theta$ deve essere espresso in radianti quando si usa $\delta(\sin \theta) = |\cos \theta| \delta \theta$). (b) $f_{\text{best}} = e^{a_{\text{best}}}$, $\delta f = f_{\text{best}} \delta a$, $e^a = 20 \pm 2$. (c) $f_{\text{best}} = \ln a_{\text{best}}$, $\delta f = \delta a / a_{\text{best}}$, $\ln a = 1.10 \pm 0.03$.
- 3.14 $n = 1.66 \pm 20\%$, $1.52 \pm 9\%$, $1.54 \pm 6\%$, $1.58 \pm 3\%$, $1.53 \pm 2\%$. Come l'angolo aumenta, $\delta n/n$ diminuisce, soprattutto perché le incertezze assolute sono costanti, così le incertezze relative sono più piccole quando gli angoli sono grandi.

- 3.16 (a) 1 e 1. (b) y e x . (c) $2xy^3$ e $3x^2y^2$.
- 3.17 (c) Parte Sinistra = $(x+u)^2(y+v)^3 = (x^2 + 2xu + u^2)(y^3 + 3y^2v + 3yv^2 + v^3) = x^2y^3 + 2xy^3u + 3x^2y^2v + v^3$, e potenze superiori).
- Parte Destra = $x^2y^3 + 2xy^3u + 3x^2y^2v$.

Allora Parte Sinistra \approx Parte Destra, quando u e v sono piccoli.

3.19 (a) Il risultato corretto è $\delta q = 0.005$, ma il calcolo passo-passo dà $\delta q = 0.1$. (b) $\delta q = 0.1$ in ogni modo. In (a) i numeri sono tali che un piccolo errore in x cambia $x+y$ e $x+z$ di circa la stessa proporzione e così si cancella in $(x+y)/(x+z)$; il calcolo passo-passo ignora questa cancellazione. In (b) un errore in x rende più grande $x+y$ ma più piccolo $x+z$, o viceversa, e così non si cancella in q .

Capitolo 4

- 4.1 $\bar{x} = 7.2$; $\sigma_x = 1.5$ usando la definizione (4.9), oppure 1.3 usando la (4.6).
- 4.3 $\bar{z} = (1/N) \sum d_i = (1/N) \sum (x_i - \bar{x}) = (1/N) \sum x_i - (1/N) N\bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$. Se qualcuno di questi passaggi non è chiaro, esplicitate le somme come $\sum d_i = d_1 + d_2 + \dots + d_n$, etc.

$$4.4 \quad \begin{aligned} \sum (x_i - \bar{x})^2 &= \sum (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + N\bar{x}^2 \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{x}N\bar{x} + N\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - N\bar{x}^2. \end{aligned}$$

(Di nuovo, esplicitate le somme se avete qualche dubbio).

- 4.7 (a) $\bar{F} = 8.149$ sec, $\sigma_F = 0.039$ sec. (b) Al di fuori di $\bar{F} \pm \sigma_F$ ci aspettiamo il 30% cioè 9 misure, ed abbiamo ottenuto 8. Al di fuori di $\bar{F} \pm 2\sigma_F$ ci aspettiamo il 5% cioè 1.5, e abbiamo ottenuto 2.
- 4.9 (Risultato finale per t) = $\bar{F} \pm \sigma_F = 8.149 \pm 0.007$ sec.
- 4.11 $A = 1221.2 \text{ mm}^2$, $\sigma_A = 0.3 \text{ mm}^2$. Questo risultato si confronta bene con il risultato $1221.2 \pm 0.4 \text{ mm}^2$ trovato nel testo.
- 4.13 (a) 336 ± 15 m/sec. L'incertezza sistematica dell'1% in f è trascurabile rispetto al 4.5% di incertezza in λ . (b) 336 ± 11 m/sec. Qui l'incertezza sistematica predomina.

Capitolo 5

- 5.1 Vedi Figura A 5.1. La curva tratteggiata di Figura A 5.1 (c) è la funzione di Gauss per il Problema 5.4.
- 5.2 (a) $C = 1/(2a)$. (b) Tutti i valori compresi fra $-a$ ed a sono ugualmente probabili; nessuna misura cade al di fuori dell'intervallo $-a + a$. (c) $\bar{x} = 0$, $\sigma_x = a/\sqrt{3}$.
- 5.4 Vedere le risposte al Problema 5.1.
- 5.6 L'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$ può essere riscritto nella forma standard $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2/2} du$ con $u = z/\sqrt{2}$. Quando integrate per parti, il termine $[u v]_{-\infty}^{\infty}$ è in questo caso zero.
- 5.8 (a) 68%. (b) 38%. (c) 95%. (d) 48%. (e) 14%. (f) $22.3 \leq y \leq 23.7$.

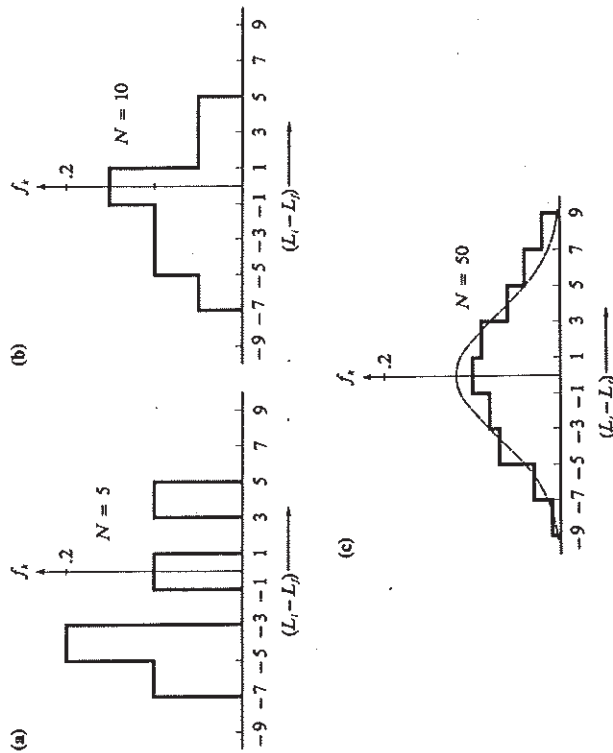


Figura A 5.1

5.10 State attenti a differenziare P correttamente; dovrete ottenere

$$\partial P / \partial \sigma = \sigma^{-(N+3)} [\sum (x_i - X)^2 - N\sigma^2] \exp[-\sum (x_i - X)^2 / 2\sigma^2];$$

P è massimo quando $\partial P / \partial \sigma = 0$, il che ci porta al risultato desiderato.
 5.12 (a) $\sigma_i = 7.04$. (b) $\bar{r}_1 = 74.25$, $\bar{r}_2 = 67.75$, etc. Se \bar{r} denota la media di un gruppo di quattro misure, allora dovremmo aspettarci $\sigma_i = \sigma_i / \sqrt{4} = 3.52$; in effetti, la deviazione standard delle dieci medie è 3.56. (c) Vedi Figura A 5.12.

5.13 Il risultato dello studente (9.5) differisce dal supposto centro della distribuzione (9.8) di 0.3, cioè di tre deviazioni standard. La probabilità di un risultato lontano dal centro di tre o più deviazioni standard è P (al di fuori di 3σ) = 0.3 percento. Ciò è talmente improbabile da farci sospettare che le sue misure "non" siano normalmente distribuite attorno a 9.8 con $\sigma = 0.1$; cioè, o lo studente ha fatto qualche errore che ha spostato il suo risultato verso il basso, oppure il suo esperimento è stato soggetto a qualche errore sistematico.

5.15 $E_f - E_i = 15 \text{ MeV}$, con una deviazione standard di 9.5 MeV. Se la misura era distribuita normalmente, con centro $E_f - E_i = 0$ e $\sigma = 9.5 \text{ MeV}$, allora la misura differisce dal valore vero di $15/9.5$, cioè 1.6, deviazioni standard. Poiché P (al di fuori di 1.6σ) = 11 percento, il risultato è perfettamente ragionevole e non vi è motivo di dubitare della conservazione dell'energia.

Capitolo 6

6.2 (a) $\bar{V} = 0.862 \text{ volts}$, $\sigma_v = 0.039 \text{ volts}$. (b) Lo studente lo rigetterà. Il risultato 0.95 differisce da \bar{V} di 0.088 ovvero 2.3σ . Poiché P (al di fuori di 2.3σ) = 2.1 percento, in dieci misure dovremmo aspettarci soltanto 0.21 misure che differiscano di tanto o più da \bar{V} . Per il criterio di Chauvenet il risultato deve essere rigettato.

6.3 La studentessa non rigetta il risultato 12. In questo caso $\bar{T} = 7.00$ e $\sigma_T = 2.72$; così 12 differisce da \bar{T} di 5 ovvero 1.84σ . Poiché P (al di fuori di 1.84σ) = 6.6 percento, in 14 misure dovremmo aspettarci 0.92 misure che differiscano di tanto o più da \bar{T} .

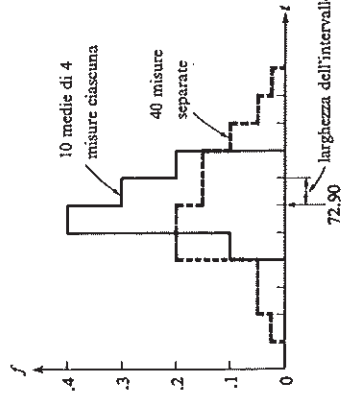


Figura A 5.12

Capitolo 7

7.1 (a) Le due misure sono consistenti, e la miglior stima basata su entrambe è $334.4 \pm 0.9 \text{ m/sec}$. (b) Anche queste misure sono consistenti (anche di più, per la verità). La miglior stima in questo caso è 334.08 ± 0.98 , che si può certamente arrotondare a $334 \pm 1 \text{ m/sec}$. Evidentemente il secondo risultato è a tal punto incerto che non vale la pena di includerlo.

7.2 (a) $76 \pm 4 \text{ ohms}$. (b) Circa 26 misure.

7.5 Secondo la (3.47)

$$(\sigma_{x_{\text{best}}})^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_{\text{best}}}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2.$$

La derivata richiesta è $\partial x_{\text{best}} / \partial x_i = w_i / (\sum w_i)$. Se avete qualche difficoltà a verificarlo, esplicitate la somma $\sum w_i x_i$ come $w_1 x_1 + \dots + w_N x_N$ e quindi differenziate rispetto a x_1, x_2 , etc. Allora

$$(\sigma_{x_{\text{best}}})^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum (w_i \sigma_{x_i})^2$$

ovvero, dal momento che $\sigma_{x_i} = 1/\sqrt{w_i}$, $(\sigma_{x_{\text{best}}})^2 = 1/\sum w_i$

Capitolo 8

8.1 $A = 9.00$, $B = 2.60$. Questo dà la linea solida in Figura A 8.1. (La linea tratteggiata è per il problema 8.9).

8.3 L'argomento è analogo a quello che nel testo porta dalla (8.2) alla (8.12), con l'unica differenza che $A = 0$ dall'inizio alla fine. Così

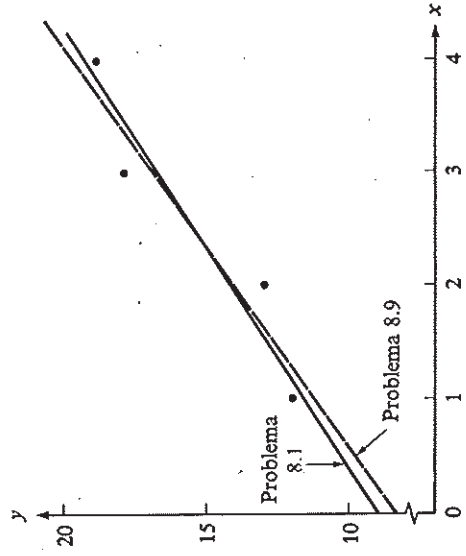


Figura A 8.1

$P(y_1, \dots, y_N) \propto \exp(-\chi^2/2)$ come nella (8.4) e χ^2 è dato dalla (8.5), eccetto che $A = 0$. La derivazione rispetto a B dà la (8.7) (di nuovo con $A = 0$), e la soluzione è $B = (\sum x_i y_i) / (\sum x_i^2)$.

8.4 Come nel Problema 8.3, l'argomento è parallelo a quello che porta dall'Equazione (8.2) alla (8.12). Come nell'Equazione (8.4), $P(y_1, \dots, y_N) \propto \exp(-\chi^2/2)$, ma poiché le misure hanno diverse incertezze $\chi^2 = \sum w_i (y_i - A - Bx_i)^2$. (Ricordate, $w_i = 1/\sigma_i^2$). L'argomento poi continua come prima.

8.6 $V = 122 \pm 3$ cm/sec.

8.8 (a) Dovete trovare il valore di σ per cui $P(y_1, \dots, y_N)$ in (8.4) è massima.

La derivata $\partial P / \partial \sigma$ è

$$\sigma^{-(N+3)} [\sum (y_i - A - Bx_i)^2 - N\sigma^2] \exp(-\chi^2/2);$$

ponendola uguale a zero si ottiene il valore desiderato di σ . (b) Le costanti A e B sono funzioni definite di x_1, \dots, x_N e y_1, \dots, y_N . Poiché gli x_i non hanno incertezza, la formula di propagazione degli errori (3.47) dà, per esempio,

$$\sigma_A^2 = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \sigma_{y_i} \right)^2.$$

Sostituendo $\partial A / \partial y_i = [(\sum x_i^2) - x_i(\sum x_i)] / \Delta$ si ottiene la (8.15) dopo un po' di algebra. Un calcolo similare dà σ_B .

8.9 $A' = -2.9 \pm 1.2$, $B' = 0.35 \pm 0.08$. Usando le costanti A e B dal Problema 8.1, dovremmo trovare $A' = -3.5$ e $B' = 0.38$; questi valori sono entro le incertezze dei nuovi risultati. Così sebbene i due metodi diano linee differenti (vedi Figura A 8.1), la differenza non è realmente significativa.

8.11 La miglior stima per g è 9.4 m/sec².

8.13 $A = 5.5$ cm, $B = 11.1$ cm

8.14 $\tau = 2.0$ ore.

Capitolo 9

9.1 Questo calcolo è più semplice se osservate che la funzione $A(t)$ è proprio

$$A(t) = \sigma_x^2 + 2t\sigma_{xy} + t^2\sigma_y^2.$$

$$\begin{aligned} 9.3 \quad (a) \quad \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum (x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \sum x_i y_i - \bar{x} (\sum y_i) - \bar{y} (\sum x_i) + N \bar{x} \bar{y} \\ &= \sum x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

9.5 (a) $P_5(|r| \geq 0.7) = 19$ percento. Così dopo 5 misure, un valore di $r = 0.7$ è del tutto probabile anche se k ed f non sono correlati linearmente. In particolare, esso non dà un supporto "significativo" ad una relazione lineare.

(b) $P_{20}(|r| \geq 0.5) = 2$ percento. Poiché è minore del 5 percento, dà evidenza "significativa" per una relazione lineare.

9.6 (a) $r = -0.97$. Poiché $P_5(|r| \geq 0.97) \approx 1.2$ percento, vi è una correlazione "significativa". (b) $r = -0.57$. Poiché $P_5(|r| \geq 0.57) \approx 31$ percento, questo valore non è significativo.

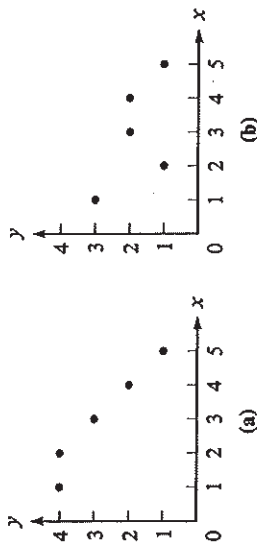


Figura A 9.6

Capitolo 10

10.2 (a) In due lanci, le probabilità per 0, 1, e 2 assi sono 69.44, 27.78 e 2.78 percento, rispettivamente. (b) In quattro lanci, le probabilità per 0, 1, ..., 4 assi sono 48.23, 38.58, 11.57, 1.54, e 0.08 percento, rispettivamente.

$$10.4 \quad (p+q)^3 = \sum_{v=0}^3 \binom{3}{v} p^v q^{3-v} = q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3.$$

10.6 La probabilità per un paziente di sopravvivere è $p = 0.2$, così $P(v)$ pazienti che sopravvivono) = $b_{4,0.2}(v)$. (a) 41%. (b) 41%. (c) 18%.

10.7 40.2%, 40.2%, 16.1%, 3.2%, 0.32%, 0.01%.

$$\begin{aligned} 10.9 \quad \sigma_v^2 &= \overline{(v - \bar{v})^2} = \sum_v f(v)(v - \bar{v})^2 = \sum_v f(v)(v^2 - 2\bar{v}v + \bar{v}^2) \\ &= \sum_v [f(v)v^2] - 2\bar{v} \sum_v f(v)v + \bar{v}^2 \sum_v f(v) = \overline{v^2} - \bar{v}^2. \end{aligned}$$

Si può notare che se rimpiazziamo le sommatorie con integrali, possiamo provare lo stesso risultato per una distribuzione continua come la Gaussiana.

10.10 Per qualunque p e q , $(p+q)^n = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} p^v q^{n-v}$. Differenziando due volte rispetto a p , troviamo

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{v=0}^n v(v-1) \binom{n}{v} p^{v-2} q^{n-v}.$$

Moltiplicando per p^2 e ponendo $q = 1 - p$, otteniamo

$$n(n-1)p^2 = \sum_{v=0}^n (v^2 - v) b_{n,p}(v) = \overline{v^2} - \bar{v}$$

Poiché $\bar{v} = np$, ciò implica che $\overline{v^2} = n(n-1)p^2 + np$. Sostituendo nel risultato del Problema 10.9, $\sigma_v^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2$ (con $\bar{v} = np$) otteniamo il risultato desiderato.

10.13 9.68 percento (approssimazione Gaussiana), 9.74 percento (esatto).

10.14 $P(v \geq 18) \approx P_{\text{Gauss}}(v \geq 17.5) = P_{\text{Gauss}}(v \geq \bar{v} + 2\sigma) = 2.28$ percento.

10.16 $P(v \geq 12) = 0.65$ percento (se il fertilizzante non fa differenza). Così 12 successi sono "significativi" e "altamente significativi".

10.18 Successi attesi 360; $P(420 \text{ successi o più}) \approx P_{\text{Gauss}}(v \geq 360 + 5\sigma) = 0.00003$ percento, che è altamente significativo.

Capitolo 11

11.1 (a) Per $v = 0, 1, \dots, 6$, $P_{1/2}(v) = 60.7, 30.3, 7.6, 1.3, 0.2, 0.02, 0.001$ percento.

(a) $\sum P_{\mu}(v) = e^{-\mu} \sum \mu^v / v! = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$

(b) Differenziando la (11.12) rispetto a μ si ottiene

$$\sum e^{-\mu} (\mu^v v^{-1} - \mu^v) / v! = 0$$

o, utilizzando di nuovo la (11.12),

$$\sum v e^{-\mu} \mu^{v-1} / v! = 1.$$

Moltiplicando per μ otteniamo $\sum v p_{\mu}(v) = \mu$, che è il risultato desiderato. (a) $\mu = (\text{numero di nuclei}) \times p = 1.5$. (b) Le probabilità per v decadimenti, $v = 0, 1, 2, 3$, sono 22.3, 33.5, 25.1 e 12.6 percento, rispettivamente. (c) $P(v \geq 4) = 6.5$ percento.

11.5 Le barre verticali in Figura A 11.5 mostrano la distribuzione osservata. La distribuzione di Poisson attesa, $p_3(v)$, è stata connessa con una curva continua per guidare l'occhio. L'adattamento è buono.

11.7 $\bar{v} = 2.84$, $\sigma = 1.70$. Questi valori si accordano bene con quelli attesi 3 e $\sqrt{3} = 1.73$.

11.9 (a) La probabilità di ottenere il conteggio osservato v_0 è $p_{\mu}(v_0) = e^{-\mu} \mu^{v_0} / v_0!$. Il valore di μ per cui essa è massima si trova differenziando rispetto a μ e trovando quando la derivata è zero. La derivata richiesta è

$$e^{-\mu} (v_0 \mu^{v_0-1} - \mu^{v_0}) / v_0!$$

ed è zero quando $\mu = v_0$.

11.10 (a) 3.2 percento (approssimazione Gaussiana), 3.4 percento (esatto). (b) 8.5 percento (approssimazione Gaussiana), 7.7 percento (esatto).

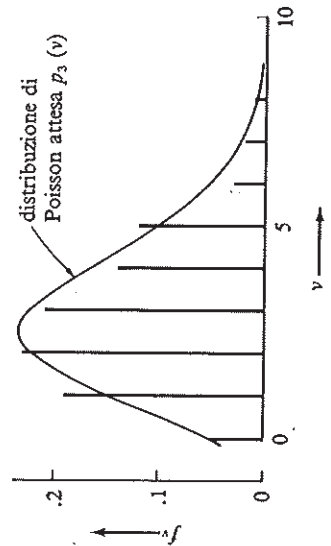


Figura A 11.5

11.11 (a) $p_9(7) = 11.7$ percento, etc. (b) $P(v \leq 6) + P(v \geq 12) = 40.3$ percento. Un conteggio che devii di tanto quanto 12 non è del tutto sorprendente; così non vi è motivo di mettere in discussione che $\mu = 9$.

Capitolo 12

12.1 Numeri attesi = 7.9, 17.1, 17.1, 7.9, e $\chi^2 = 10$; i dati si adattano molto malamente ad una distribuzione normale.

12.4 Numeri attesi = 231.5, 138.9, 29.6; $\chi^2 = 2.5$; con tre intervalli, $\chi^2 = 2.5$ è perfettamente ragionevole, e non vi è motivo di sospettare i dati.

12.5 (a) Nei Problemi 12.1 e 12.2, $c = 3$ e $d = 1$; nel Problema 12.3, $c = 1$ e $d = 5$; nel 12.4, $c = 1$ e $d = 2$. (b) Con ρ_{acc} noto in precedenza, $c = 2$ e $d = 2$.

12.6 Poiché $d = 1$, $\chi^2 = \chi^2 = 10$; $P_1(\chi^2 \geq 10) = 0.2$ percento; così possiamo rigettare una distribuzione normale ai livelli del 5 e dell'1 percento.

12.8 Le probabilità per i totali 2, 3, ..., 12 sono $1/36, 2/36, \dots, 6/36, \dots, 1/36$. I numeri attesi E_k sono 10, 20, ..., 60, ..., 10. $\chi^2 = 19.8$, $d = 10$, e $\chi^2 = 1.98$. $P_{10}(\chi^2 \geq 1.98) = 3.2$ percento. Al 5 percento di livello potremmo dire che i dadi sono truccati, ma non all'1 percento.

12.10 $\chi^2 = 1.2$. $P_2(\chi^2 \geq 1.2) \approx 30$ percento. Poiché $\chi^2 \geq 1.2$ è del tutto probabile, non vi è motivo di sospettare i dadi.

12.12 (a) $E(v = 0) = 5.4$, $E(v = 1) = E(v = 2) = 10.8$, $E(v \geq 3) = 13.0$. $\chi^2 = 9.7$, $d = 3$, $\chi^2 = 3.2$.

$P_3(\chi^2 \geq 3.2) \approx 2.5$ percento; così al livello del 5 percento dovremmo rigettare una distribuzione di Poisson con $\mu = 2$. (b) $d = 2$, $\chi^2 = 0.3$, e i dati sono consistenti con una distribuzione di Poisson con $\mu = 1.35$.

12.13 (a) $\chi^2 = 2.25$, $P_1(\chi^2 \geq 2.25) \approx 14$ percento, e non vi è differenza significativa. $P(v \geq 11) + P(v \leq 5) = 21.0$ percento. (b) $\chi^2 = 6.25$, $P_1(\chi^2 \geq 6.25) \approx 1.2$ percento; $P(v \geq 224.5) + P(v \leq 175.5) = 1.4$ percento. Al livello del 5 percento vi è una differenza significativa.

(c) χ^2 aggiustato = 1.56. $P_1(\chi^2 \geq 1.56) \approx 21.2$ percento, in eccellente accordo con il risultato esatto 21.0 percento.

Indice analitico

- Accelerazione di un carrello su un piano inclinato, Sezione 3.8
- Aggiustato, chi-quadrato a., Problema 12.13 (vedi anche Chi-quadrato)
- Angolo critico, Sezione 3.5
- Archimede, problema di A., Sezione 1.3
- Area di un rettangolo, Sezione 4.5 e Problema 4.11
- Absorbimento, coefficiente di a. ed energia di un fotone, Problema 3.10
- Binomiale, coefficiente b., Sezione 10.3
- Binomiale, distribuzione b., Sezioni 10.3 e 10.4
- confronto con la Gaussiana, Sezione 10.4
- definizione, Sezione 10.3
- deviazione standard, Sezione 10.4
- media della, Sezione 10.4 e Problema 10.8
- simmetrica quando $p = \frac{1}{2}$, Sezione 10.4
- Binomiale, serie b., Sezione 3.2 e Problema 3.7
- Binomiale, sviluppo b., Sezione 10.3
- $b_{n,d}(v)$, distribuzione binomiale, Sezione 10.3 (vedi anche Binomiale, distribuzione b.)
- Carrello su un piano inclinato, Sezione 3.8 e Problema 3.15
- Casuale, componente c. dell'errore, Sezione 4.6
- Casuali, errori c., Sezione 4.1
- Chauvenet, criterio di C., Sezione 6.2
- Chi-quadrato, Sezione 12.2
- aggiustato, Problema 12.13
- come indicatore di accordo, Sezione 12.1
- per gradi di libertà, Sezione 12.3
- probabilità per, Sezione 12.4
- ridotto, χ^2 , Sezione 12.3
- tabella di probabilità per, Appendice D
- Chi-quadrato, test c.q., per l'esperimento dei dadi, Sezione 12.2
- per la distribuzione di Gauss, Sezione 12.1
- per la distribuzione di Poisson, Sezione 12.5
- Coefficiente di correlazione, (vedi Correlazione, coefficiente di c.)
- Coefficiente di determinazione, Sezione 9.3 (vedi anche Correlazione, coefficiente di c.)
- Coefficiente di dilatazione, Sezione 3.3
- Confidenza, Sezione 5.8
- Confidenza, livello di c. per l'incertezza, Sezione 5.8
- (vedi anche Significatività, livello di s.)
- Confronto, di valori misurati ed accettati, Sezioni 2.4 e 5.8
- di due numeri misurati, Sezioni 2.5 e 5.8
- Consistenti, misure c., Sezione 7.1
- Conteggio, incertezza negli esperimenti di c., Sezioni 3.1 e 11.2
- (vedi anche Poisson, distribuzione di P.)
- Correlazione, di Q.I., Problema 9.7
- negativa, Sezione 9.3
- significativa, Sezione 9.4
- Correlazione, coefficiente di c., Sezione 9.3
- probabilità per, Sezione 9.4
- tabella di probabilità per, Appendice C
- Covarianza, Sezione 9.2
- e coefficiente di correlazione, Sezione 9.3
- nella propagazione degli errori, Sezione 9.2
- Curva a forma di campana, Sezione 5.3 (vedi anche Distribuzione Normale)
- Dadi, esperimenti sui d., Sezione 10.2 e test chi-quadrato, Sezioni 12.2 e 12.5
- Decadimento radioattivo, Sezione 11.1
- Definizione, problemi di d., Sezioni 1.2 e 3.1
- Deflessione della luce da parte del sole, Sezione 1.4
- δx , incertezza in x, Sezione 2.1
- (vedi anche Incertezza ed Errore)
- Densità dell'oro, Sezione 1.3
- Determinazione, coefficiente di d., Sezione 9.3
- (vedi anche Correlazione, coefficiente di c.)
- Deviazione, Sezione 4.2
- media, Sezione 4.2
- la media delle d. è zero, Problema 4.3
- (vedi anche Deviazione standard)

- Deviazione standard, Sezione 4.2
 definizione, Sezione 4.2
 definizione "migliorata", Sezione 4.2
 della distribuzione binomiale, Sezione 10.4
 della distribuzione limite, Sezione 5.2
 della distribuzione di Poisson, Sezione 11.2
 di misure come stima della larghezza di una distribuzione, Sezione 5.5
 del campione, Sezione 4.2
 della popolazione, Sezione 4.2
 come limite di confidenza del 68%, Sezione 5.4
 come incertezza in una misura, Sezione 4.3
 Deviazione standard di un campione, Sezione 4.2
 Deviazione standard della media, Sezione 4.4
 giustificazione di, Sezione 5.7
 Diagramma di dispersione, Sezione 9.3
 Differenza di numeri misurati, Sezione 2.5, Problema 12.2 e Sezione 3.2
 Discrepanza, Sezione 2.3
 significativa e non significativa, Sezione 5.8
 Display digitale, Sezione 3.1
 Distribuzione, Sezione 5.1
 binomiale, (vedi Binomiale, distribuzione b.)
 discreta, Sezione 10.4
 di Gauss, (vedi Normale, distribuzione n.)
 limite, (vedi Limite, distribuzione l.)
 di Lorenz, Sezione 12.2
 normale, (vedi Normale, distribuzione n.)
 di Poisson (vedi Poisson, distribuzione di P.)
 universale, Sezione 5.2
 (vedi anche Limite, distribuzione l.)
 Distribuzioni discrete, Sezione 10.4
 Divisione di numeri misurati, Sezione 3.2
 Due-code, probabilità a d.c., Sezione 10.6
- Erf (t), (vedi Normale, integrale n. degli errori)
 Errore, Sezione 1.1
 probabile, Sezione 5.4
 casuale, Sezione 4.1
 sistematico, Sezioni 1.6, 4.1 e 4.6
 vero, Sezione 2.3
 (vedi anche Incertezza)
 Errore, barre di e, Sezione 2.6
 Errore della media, Sezione 4.4
 Errori che si compensano, Sezione 3.9
 Errori, funzione degli e., (vedi Normale; integrale n. degli errori)
 Errore, propagazione dell'e., Capitolo 3, Sezioni 9.1 e 9.2
 covarianza nella, Sezione 9.2
 per funzioni di una variabile, Sezione 3.5
 per funzioni di parecchie variabili, Sezione 3.9
- formula generale, Sezione 3.9
 con grafici, Sezione 3.5 e Problema 3.10
 per errori indipendenti, Sezioni 3.3 e 3.4
 per potenze, Sezioni 3.2 e 3.5
 per prodotti e quozienti, Sezioni 3.2 e 3.4
 giustificazione della formula generale, Sezione 5.6
 passo-passo, Sezione 3.6
 per somme e differenze, Sezione 3.2
 limite superiore per, Sezione 9.2
 Estrapolazione, Sezione 8.5
- Fattoriale, funzione f., Sezione 10.3
 Frazionaria, incertezza f., Sezione 2.7
 nei prodotti, Sezione 2.9
 e cifre significative, Sezione 2.8
 (vedi anche Incertezza)
 Funzione di una variabile, incertezza nella f. di u.v., Sezione 3.5
 Funzione di parecchie variabili, incertezza nella f. di p.v., Sezione 3.9
 $f_{X,p}(x)$, funzione di Gauss, Sezione 5.3
 (vedi anche Normale, distribuzione n.)
- g. misura con un pendolo, Sezione 3.7 e Problema 3.13
 Gauss, distribuzione di G., (vedi Normale, distribuzione n.)
 Gauss, funzione di G., Sezione 5.3
 (vedi anche Normale, distribuzione n.)
 Gaussiana, approssimazione G., alla distribuzione binomiale, Sezione 10.4
 alla distribuzione di Poisson, Sezione 11.2
 Gradi di libertà, Sezioni 8.3 e 12.3
 Grafici, Sezione 2.6
 barre di errori nei g., Sezione 2.6, Problemi 2.7 e 2.8
 e propagazione dell'errore, Sezione 3.5
 pendenza di, Sezione 2.6, Problema 2.8
 linea retta, Sezioni 2.6 e 8.1
 (vedi anche Minimi quadrati adattamento ad una retta)
- Incertezza, Sezione 2.1
 assoluta, Sezione 2.7
 nelle differenze, Sezione 2.5, Problema 2.12, Sezioni 3.2 e 3.4
 in esperimenti di conteggio, Sezioni 3.1 e 11.2
 frazionaria, Sezioni 2.7 e 2.8
 in una funzione di una variabile, Sezione 3.5
 in una funzione di parecchie variabili, Sezione 3.9
 in una grandezza moltiplicata per un numero esatto, Sezione 3.2
- Deviazione standard, Sezione 4.2
 definizione, Sezione 4.2
 definizione "migliorata", Sezione 4.2
 della distribuzione binomiale, Sezione 10.4
 della distribuzione limite, Sezione 5.2
 della distribuzione di Poisson, Sezione 11.2
 di misure come stima della larghezza di una distribuzione, Sezione 5.5
 del campione, Sezione 4.2
 della popolazione, Sezione 4.2
 come limite di confidenza del 68%, Sezione 5.4
 come incertezza in una misura, Sezione 4.3
 Deviazione standard di un campione, Sezione 4.2
 Deviazione standard della media, Sezione 4.4
 giustificazione di, Sezione 5.7
 Diagramma di dispersione, Sezione 9.3
 Differenza di numeri misurati, Sezione 2.5, Problema 12.2 e Sezione 3.2
 Discrepanza, Sezione 2.3
 significativa e non significativa, Sezione 5.8
 Display digitale, Sezione 3.1
 Distribuzione, Sezione 5.1
 binomiale, (vedi Binomiale, distribuzione b.)
 discreta, Sezione 10.4
 di Gauss, (vedi Normale, distribuzione n.)
 limite, (vedi Limite, distribuzione l.)
 di Lorenz, Sezione 12.2
 normale, (vedi Normale, distribuzione n.)
 di Poisson (vedi Poisson, distribuzione di P.)
 universale, Sezione 5.2
 (vedi anche Limite, distribuzione l.)
 Distribuzioni discrete, Sezione 10.4
 Divisione di numeri misurati, Sezione 3.2
 Due-code, probabilità a d.c., Sezione 10.6
- Erf (t), (vedi Normale, integrale n. degli errori)
 Errore, Sezione 1.1
 probabile, Sezione 5.4
 casuale, Sezione 4.1
 sistematico, Sezioni 1.6, 4.1 e 4.6
 vero, Sezione 2.3
 (vedi anche Incertezza)
 Errore, barre di e, Sezione 2.6
 Errore della media, Sezione 4.4
 Errori che si compensano, Sezione 3.9
 Errori, funzione degli e., (vedi Normale; integrale n. degli errori)
 Errore, propagazione dell'e., Capitolo 3, Sezioni 9.1 e 9.2
 covarianza nella, Sezione 9.2
 per funzioni di una variabile, Sezione 3.5
 per funzioni di parecchie variabili, Sezione 3.9

- indipendente, Sezioni 3.3 e 3.4
 nella lettura di scale, Sezione 1.5
 nella media, (vedi Deviazione standard della media)
 nella media pesata, Sezione 7.2
 nelle misure dirette, Sezione 3.1
 nelle misure ripetibili, Sezione 1.6
 nei parametri A e B dei minimi quadrati, Sezione 8.4
 percentuale, Sezione 2.7
 nelle potenze, Sezioni 3.2 e 3.5
 nei prodotti, Sezioni 2.9, 3.2 e 3.4
 propagazione della, (vedi Errore, propagazione dell'e.)
 nei quozienti, Sezioni 3.2 e 3.4
 relativa, Sezione 2.7
 nella radice quadrata, Sezione 3.5
 significato di, Sezioni 2.1 e 5.7
 nelle somme, Problema 2.6, Sezioni 3.2 e 3.4
 quando non è stabilita, Sezione 1.5
 unità della, Sezioni 2.2 e 2.7
 (vedi anche Errore)
 Inconsistenti, misure i., Sezione 7.1
 Incorrelate, variabili i., Sezione 9.3
 Indipendenti, propagazione degli errori i., Sezioni 3.3 e 3.4
 Interpolazione, Sezione 1.5
 Intervallo, Sezione 5.1
 scelta dell'i., Sezioni 5.1, 12.1, 12.2 e 12.4
 Ipotesi, Sezione 10.6
 nulla, Sezione 10.6
 test di una i., Sezione 10.6
 Istogramma, Sezione 5.1
 a barre, Sezione 5.1
 a intervalli, Sezione 5.1
- Larghezza, parametro σ di l. della distribuzione normale, Sezione 5.3
 Larghezza totale a metà altezza, Problema 5.5
 Limite, distribuzione l., Sezioni 5.2 e 10.1
 deviazione standard della, Sezione 5.2
 media della, Sezione 5.2
 normalizzazione della, Sezione 5.2
 come probabilità, Sezione 5.2
 Limite superiore per la propagazione dell'errore, Sezione 9.2
 Lineare correlazione l., (vedi Correlazione, coefficiente di c.)
 Lineare, regressione l., Sezione 8.1
 Lineari, grafici l., Sezioni 2.6 e 8.1
 pendenza dei, Sezione 2.6, Problema 2.8
 (vedi anche Minimi quadrati adattamento ad una retta)
 Linearizzazione, Sezione 8.6
 Linee rette, grafici di l.r., Sezioni 2.6 e 8.1
 pendenza di, Problema 2.8

- (vedi anche Minimi quadrati adattamento ad una retta)
 Lorentz, distribuzione di L., Sezione 12.2
 LTMA, Problema 5.5
 Luce, deflessione della luce da parte del sole, Sezione 1.4
- Massima verosimiglianza, (vedi Principio di massima verosimiglianza)
 Media, come miglior stima, Sezioni 4.2 e 5.5
 della distribuzione binomiale, Sezione 10.4
 della distribuzione limite, Sezione 5.2
 della distribuzione normale, Sezione 5.3
 della distribuzione di Poisson, Sezione 11.1
 deviazione standard della m., (vedi Deviazione standard della media)
 Media pesata, Sezioni 7.2 e 7.3
 definizione, Sezione 7.2
 incertezza nella, Sezione 7.2
 Metodo dei minimi quadrati, Sezione 7.2
 (vedi anche Minimi quadrati, adattamento ad una retta e
 Minimi quadrati, adattamento a curve)
 Miglior stima, x_{best} , Sezione 2.1
 Minimi quadrati, Sezione 7.2
 (vedi anche Minimi quadrati, adattamento ad una retta e
 Minimi quadrati, adattamento a curve).
 Minimi quadrati, adattamento a curve, Sezione 8.6
 polinomiale, Sezione 8.6
 Minimi quadrati, adattamento ad una retta, Sezioni 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5
 stime per A e B , Sezione 8.2
 retta attraverso l'origine, Problema 8.3
 incertezza in A e B , Sezione 8.4
 incertezza σ , Sezione 8.3
 pesati, Problema 8.4
 Molla, costante k di una m., Sezioni 4.3, 4.5 e Problema 8.2
 Moltiplicazione di numeri misurati, Sezioni 2.9, 3.2 e 3.4
 Multipla, regressione m., Sezione 8.6
- Negativa, correlazione n., Sezione 9.3
 Normale, distribuzione n., Sezione 5.3
 confronto con la distribuzione binomiale, Sezione 10.4
 confronto con la distribuzione di Poisson, Sezione 11.2
 definizione, Sezione 5.3
 deviazione standard della, Sezione 5.3
 giustificazione della distribuzione n. per gli errori casuali, Sezione 10.5
 come limite della binomiale, Sezioni 10.4 e 10.5

- come limite della distribuzione di Poisson, Sezione 11.2
- media della, Sezione 5.3
- normalizzazione della, Sezione 5.3
- parametro di larghezza della, Sezione 5.3
- test chi-quadrato per una distribuzione n., Sezione 12.1
- Normale, funzione n. densità, Sezione 5.3
- Normale, funzione n. degli errori, Sezione 5.3
- Normale, integrale n. degli errori, Sezione 5.4
- tabelle dell', Appendice A (Tabella A), Appendice B (Tabella B)
- Normali, equazioni n., Sezioni 8.2 e 8.6
- Normalizzazioni, condizione di n., Sezioni 5.1 e 5.2
- per la distribuzione normale, Sezione 5.3
- per la distribuzione di Poisson, Problema 11.2
- Normalmente distribuite, misure n.d., Sezione 5.3
- Nulla, ipotesi n., Sezione 10.6
- Oro, densità dell', Sezione 1.3
- Parallasse, Sezione 4.1
- Passo-passo, propagazione degli errori passo-passo, Sezione 3.6
- Pendolo, Sezione 3.7 e Problema 3.13
- Percentuale, errore p., Sezione 2.7
- (vedi anche Frazionaria, incertezza f.)
- $P_n(\nu)$, distribuzione di Poisson, Sezione 11.1
- (vedi anche Poisson, distribuzione di P.)
- Poisson, distribuzione di P., Capitolo 11
- confronto con la distribuzione Gaussiana, Sezione 11.2
- definizione, Sezione 11.1
- deviazione standard della, Sezione 11.2
- come limite della binomiale, Sezione 11.1
- media della, Sezione 11.1
- normalizzazione, Problema 11.2
- per i raggi cosmici, Sezione 11.3
- simmetria approssimata per μ grande, Sezione 11.2
- test chi-quadrato per, Sezione 12.5
- Polinomiale, regressione p., Sezione 8.6
- Popolazione, deviazione standard della p., Sezione 4.2
- Porta, misura di una p., Sezione 1.2
- Precisione, Sezione 2.7
- (vedi anche Frazionaria, incertezza f.)
- Principio di massima verosimiglianza, Sezione 5.5
- applicato alla distribuzione di Poisson, Problema 11.9
- negli adattamenti con i minimi quadrati, Sezione 8.1, Problemi 8.8 e 8.10
- nella media pesata, Sezione 7.2
- Probabile, errore p., Sezione 5.4
- Probabilità, distribuzione di p., Sezione 10.1
- (vedi anche Limite, distribuzione l.)
- Probabilità ad una e due code, Sezione 10.6
- Problemi di definizione, Sezioni 1.2 e 3.1
- Prodotto di numeri misurati, Sezioni 2.9, 3.2 e 3.4
- Propagazione degli errori, (vedi Errore, propagazione dell'e.)
- Quadratica, somma q ., Sezione 3.3
- Quoziente di numeri misurati, Sezioni 3.2 e 3.4
- r , coefficiente di correlazione, Sezione 9.3
- (vedi anche Correlazione, coefficiente di c.)
- Radice quadrata, incertezza nella r.q., Sezione 3.5
- Radioattivo, decadimento r., Sezione 11.1
- Raggi cosmici, Sezione 11.3
- Regressione lineare, Sezione 8.1
- multiplica, Sezione 8.6
- polinomiale, Sezione 8.6
- retta di, Sezione 8.2
- (vedi anche Minimi quadrati, adattamento ad una retta e Minimi quadrati, adattamento a curve)
- Relativa, incertezza r., Sezione 2.7
- (vedi anche Frazionaria, incertezza f.)
- Relatività generale, test di r.g., Sezione 1.4
- Residuo, Sezione 4.2
- (vedi anche Deviazione)
- Retta di regressione, Sezione 8.2
- Rifrazione, indice di r., dall'angolo critico, Sezione 3.5
- usando la legge di Snell, Sezione 3.7 e Problema 3.14
- Rigetto di dati, Capitolo 6
- R.M.S. deviazione, Sezione 4.2
- Schwarz, disuguaglianza di S., Sezione 9.2 e Problema 9.1
- Sciolina, test della s., Sezione 10.6
- Semplice, pendolo s., Sezione 3.7, Problema 3.13
- SD, (vedi Deviazione standard)
- SDOM, (vedi Deviazione standard della media)
- Sigma, notazione σ , Σ , Sezione 4.2
- σ , larghezza della distribuzione di Gauss, Sezione 5.3
- (vedi anche Normale, distribuzione n.)
- σ_x , deviazione standard, Sezione 4.2
- (vedi anche Deviazione standard)
- σ_y , deviazione standard della media, Sezione 4.4
- (vedi anche Deviazione standard della media)
- σ_{xy} , covarianza di x e y , Sezione 9.2
- (vedi anche Covarianza)
- Significativa, correlazione s., Sezione 9.4
- Significativa, discrepanza s., Sezione 5.8
- Significative, cifre s., Sezione 2.2
- e incertezza frazionaria, Sezione 2.8
- nei prodotti, Problema 2.16
- Significatività, livello di s., Sezioni 10.6 e 12.4
- Sistematica, componente s. dell'errore, Sezione 4.6
- Sistematico, errore s., Sezioni 1.6, 4.1 e 4.6
- Snell, legge di S., Sezione 3.7 e Problema 3.14
- Somma di numeri misurati, Problema 2.6, Sezioni 3.2 e 3.4
- Somma pesata, Sezione 5.1
- Somma in quadratura, Sezione 3.3
- giustificazione della, Sezione 5.6
- per errori indipendenti e casuali, Sezioni 3.3 e 3.4
- può dare un risultato più piccolo, Sezione 3.4
- Sondaggio d'opinione, Sezione 10.6
- Standard, errore s., Sezione 4.4
- (vedi anche Deviazione standard della media)
- Statistica, ipotesi s., Sezione 10.6
- Student, distribuzione t di S., Sezione 5.8
- Test, altamente significativo (1%), Sezioni 10.6 e 12.4
- significativo (5%), Sezioni 10.6 e 12.4
- Test per la verifica di ipotesi, Sezione 10.6
- della sciolina, Sezione 10.6
- Tests non parametrici, Sezione 10.6
- Una-coda, probabilità ad u.-c., Sezione 10.6
- Universale, distribuzione u., Sezione 5.2
- (vedi anche Distribuzione limite)
- Valore accettato, Sezione 2.3
- Varianza, Sezione 4.2
- (vedi anche Deviazione standard)
- Vero, errore v., Sezione 2.3
- Vero, valore v., Sezione 5.3
- Vincoli, Sezione 12.3
- x_{best} , miglior stima per x , Sezione 2.1
- Zero assoluto di temperatura, Sezione 8.5

Principali Formule nella Parte II

Medie Pesate (Capitolo 7)

Se x_1, \dots, x_N sono misure della stessa grandezza x , con incertezze note $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, allora la miglior stima per x è

$$x_{\text{best}} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \quad (\text{Sezione 7.2})$$

dove $w_i = 1/\sigma_i^2$.

Adattamento ad una Linea Retta con i Minimi Quadrati (Capitolo 8)

Se $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ sono coppie misurate di dati, allora la miglior linea retta $y = A + Bx$ che si adatta a questi N punti ha

$$A = \frac{[\sum x_i^2][\sum y_i] - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)]/\Delta,}{B = \frac{[N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)]/\Delta,}$$

dove

$$\Delta = N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2. \quad (\text{Sezione 8.2})$$

Covarianza e Correlazione (Capitolo 9)

La covarianza σ_{xy} di N coppie $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ è

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (\text{Sezione 9.2})$$

Il coefficiente di correlazione lineare è

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2]^{1/2}}. \quad (\text{Sezione 9.3})$$

Valori di r vicini a 1 o a -1 indicano forte correlazione lineare; valori vicini a zero indicano poca o nessuna correlazione. (Per una tabella di probabilità per r , vedi Appendice C).

Distribuzione Binomiale (Capitolo 10)

Se la probabilità di "successo" in un lancio è p , allora la probabilità di v successi in n lanci è

$$P(v \text{ successi in } n \text{ lanci}) = b_{n,p}(v) = \frac{n!}{v!(n-v)!} p^v (1-p)^{n-v} \quad (\text{Sezione 10.3})$$

Dopo molti gruppi di n lanci, il numero medio di successi è

$$\bar{v} = np,$$

e la deviazione standard è

$$\sigma_v = \sqrt{np(1-p)} \quad (\text{Sezione 10.4})$$

Distribuzione di Poisson (Capitolo 11)

Nel contare decadimenti radioattivi (ed altri eventi casuali similari), la probabilità di v conteggi (in qualche intervallo di tempo definito) è

$$P(v \text{ conteggi}) = p_\lambda(v) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^v}{v!}, \quad (\text{Sezione 11.1})$$

dove μ è il conteggio medio atteso nell'intervallo di tempo considerato,

$$\bar{v} = \mu \quad (\text{dopo molti esperimenti}). \quad (\text{Sezione 11.1})$$

La deviazione standard è

$$\sigma_v = \sqrt{\mu} \quad (\text{Sezione 11.2})$$

Chi Quadrato (Capitolo 12)

I risultati di qualunque misura ripetuta possono essere raggruppati in intervalli, $k = 1, \dots, n$. Sia O_k il numero di risultati "osservati" nell'intervallo k . Analogamente E_k sia il numero di risultati "attesi" nell'intervallo k , sull'ipotesi di qualche distribuzione assunta (Gauss, binomiale, Poisson, etc.). Definiamo il chi quadrato come

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n (O_k - E_k)^2 / E_k, \quad (\text{Sezione 12.2})$$

ed il chi quadrato ridotto come

$$\bar{\chi}^2 = \chi^2 / d, \quad (\text{Sezione 12.3})$$

dove d è il numero di gradi di libertà.

Se $\bar{\chi}^2 \gg 1$, l'accordo tra O_k ed E_k è cattivo e dobbiamo rigettare la distribuzione assunta. Se $\bar{\chi}^2 \lesssim 1$, l'accordo è soddisfacente e la distribuzione osservata è compatibile con quella attesa. (Per una tabella di probabilità per $\bar{\chi}^2$ vedi Appendice D).