UNICAM
Università di Camerino
1336

Università di Camerino

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

a.a. 2013 – 2014

DIDATTICA DELLE STRUMENTAZIONI E ANALISI DATI

MATERIALI DIDATTICI

Prof. Angelo Angeletti

INDICE

E1 – Distribuzione gaussiana

Introduzione

Ogni volta che si ha a che fare con un insieme di dati che si riferiscono a misure indipendenti della *stessa* grandezza fisica (indipendenti significa che il risultato di una misura non influenza la misura successiva) i valori della misura si distribuiscono in modo caratteristico, con una forma ben riconoscibile a campana. La distribuzione che si ottiene è detta ***normale o gaussiana***. Proposta per la prima volta da Gauss nel 1809, è in grado di descrivere molto bene i fenomeni governati dalla casualità, che in Fisica è la situazione più comune.
La funzione matematica che rappresenta tale distribuzione è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

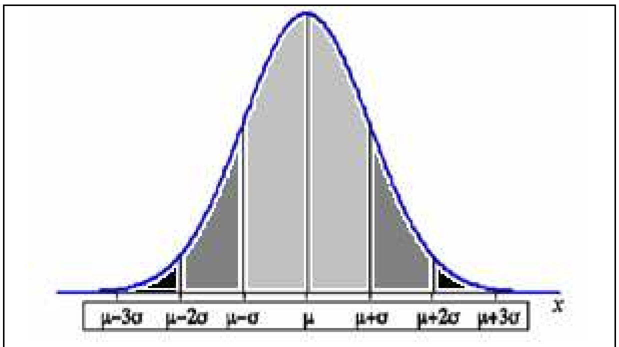


Figura 1 – La curva "a campana" della distribuzione di Gauss e le probabilità associate all'area sotto il grafico

i cui parametri fondamentali sono la ***media*** (μ) e la ***varianza*** (σ^2), con la sua radice σ (***deviazione standard***). Se il fenomeno che si sta analizzando obbedisce ai requisiti di casualità, allora il valore più probabile per la grandezza fisica in esame è proprio la media μ, mentre la deviazione standard descrive l'incertezza sul risultato. La figura specifica anche in quale senso il parametro σ rappresenta la dispersione delle misure intorno alla media: la campana può essere più larga (σ maggiore) o più stretta (σ minore), ma allontanandosi dal valore centrale si finisce per includere tutte le misure del campione, perché la decrescenza della curva è rapida.
In queste brevi note ometteremo la dimostrazione che a partire dalle ipotesi di indipendenza delle misure, di casualità degli eventi, di interazione tra molte e diverse fonti di fluttuazione dei dati sperimentali si può scrivere un'equazione differenziale che permette di ricavare l'espressione della gaussiana.

Per le nostre applicazioni è importante soprattutto la curva gaussiana *normalizzata*, cioè quella che ha area sotto il grafico pari esattamente a 1. Ciò rende la distribuzione adatta a rappresentare probabilità. Identificando infatti porzioni di area sotto la curva con le probabilità, l'area colorata in grigio chiaro rappresenta la probabilità di ottenere una misura che dista dal valor medio μ (il più probabile) *meno* della deviazione standard σ. Allargando la distanza fino a 2σ si includono anche le due regioni in grigio scuro, mentre arrivando a 3σ si copre quasi (anche se non proprio) tutta l'area. Per una gaussiana normalizzata la regione in grigio chiaro ha area pari a circa 0,6826 (e la probabilità di trovare proprio lì la misura è quindi il 68,26%), mentre includendo la zona grigio scuro si arriva a 0,9544 (probabilità corrispondente 95,44%) e con la zona nera a 0,997 (probabilità 99,7%); il totale dell'area sotto la curva vale 1 e ciò corrisponde a una probabilità del 100% - ovvia conseguenza del fatto che eseguendo una misura si otterrà *sicuramente* un numero compreso fra $-\infty$ e $+\infty$. Nella pratica di laboratorio si fa uso di una tavola con i valori dell'area sotto la curva in funzione della *x* scelta (che viene fornita insieme a queste note).
Nella pratica degli esperimenti scientifici si dice spesso che il "livello di confidenza 3−sigma" è quello per cui i fisici si sentono autorizzati a definire un risultato come "altamente" probabile. La ragione di tale prudenza è che il discorso teorico dietro la gaussiana è da considerarsi veramente rigoroso *solo* come limite ideale di una situazione reale molto più complessa. Soprattutto, è importante ricordare che i presupposti teorici non sempre sono validi quando si tenta di estendere l'analisi a problematiche di altre discipline, come per esempio la sociologia, la psicologia, la docimologia o l'economia (anche la stessa fisica). La potenza e la duttilità dello strumento

matematico portano talvolta ad usarlo anche dove, a rigore, le ipotesi di partenza non sono soddisfatte; in questi casi è più che lecito mettere in dubbio la validità delle conclusioni.

L'ambito di applicazione che prevediamo di coprire, comunque, ci permetterà di evitare le trappole più ovvie, come gli errori di selezione del campione, il numero troppo scarso di misure o la scelta di dati non indipendenti.

Obiettivo

Verificare la casualità della distribuzione di masse confrontando la distribuzione dei dati sperimentali con la curva teorica di Gauss.

Materiale a disposizione

- Campione omogeneo di oggetti nominalmente "uguali" (200 rondelle)
- Bilancia (sensibilità 0,1 g)

Montaggio ed esecuzione dell'esperimento

Si misura la massa di ognuna delle rondelle. Si raccomanda molta cura nelle misure, a cominciare dalla taratura degli strumenti usati e poi proseguendo nella metodologia operativa in ciascuna misura, che deve sempre essere la stessa per evitare l'introduzione di errori addizionali. In particolare, occorre resistere alla tentazione di accelerare la procedura (che è certamente ripetitiva e noiosa) quando ci si avvicina al termine delle misure. Si può decidere di far eseguire lo stesso tipo di misure sempre alla stessa persona (il che può però favorire l'introduzione di errori sistematici) oppure a persone diverse (ma in tal caso è indispensabile uniformare la procedura per ciascuno degli sperimentatori).

Elaborazione dei dati

Si inseriscano tutte le misure in un foglio Excel.

L'anali che segue deve essere fatta, prima per le prime 50 rondelle, poi per le prime 100 ed infine per tutte e 200.

Si calcolano media, varianza e deviazione standard del campione:

$\mu = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$, dove $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$ rappresentano i valori delle misure;

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)^2}$$

Si costruisce poi un istogramma raggruppando i dati in classi, ciascuna delle quali rappresenterà una barra del diagramma. La suddivisione in classi dovrebbe esser fatta considerando come ampiezza dell'intervallo la deviazione standard: come criterio empirico si può anche utilizzare la formula

$$\text{Ampiezza intervallo} = \frac{x_{max} - x_{\min}}{\sqrt{N}}$$

Per evitare variazioni statistiche troppo accentuate dovute allo scarso numero di misure in qualche barra (soprattutto quelle posizionate sulle code) è molto importante che ogni intervallo contenga almeno 4−5 misure; se necessario, si possono fondere due intervalli contigui per soddisfare tale criterio.

Un primo esame del lavoro svolto consiste nel confrontare l'istogramma con la distribuzione gaussiana teorica avente media e varianza uguali a quelli trovati. Si tratta di un'analisi qualitativa, ma importante.

Il passo successivo è la costruzione un altro istogramma con i valori teorici della distribuzione gaussiana. Ecco la sequenza operativa:

a) Si *normalizzano* le misure ottenute, passando dagli x_n ai valori standardizzati z_n, dove

$$z_n = \frac{x_n - \mu}{\sigma}$$

b) Si calcolano i valori teorici per z_n, utilizzando la tavola di valori allegata.

Alcuni esempi: Supponiamo di dover trovare l'area A tra i valori z = 0 e z = 1/2. La tavola fornisce i valori dell'area per *zmaggiori* di 1/2, e si trova il valore 0,30854 (se fosse stato z = 0,51 anziché 0,5 si sarebbe dovuto scegliere il valore a destra, 0,30503. Sono riportati tutti i valori tabulati per z a intervalli di 0,01, e la precisione è largamente sufficiente).
Per calcolare A basta poi fare 1/2 – 0,30854, essendo 1/2 l'area tra z = 0 e z = + ∞. Il risultato 0,19146 va poi moltiplicato per il numero totale N di misure, ottenendo così il numero teorico di misure che dovrebbero cadere in quell'intervallo se la distribuzione fosse effettivamente gaussiana. Il confronto tra i valori dei due istogrammi, sperimentale e teorico, fornisce un'indicazione della bontà del risultato in termini "gaussiani".

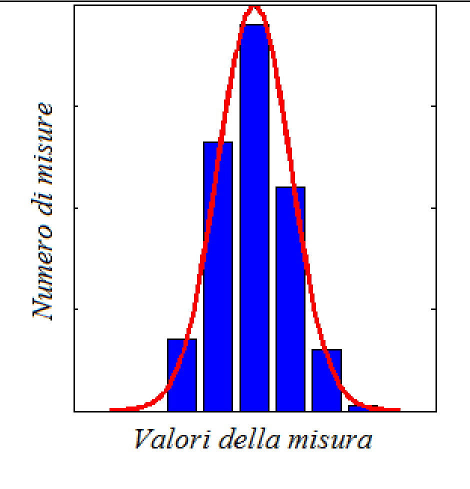


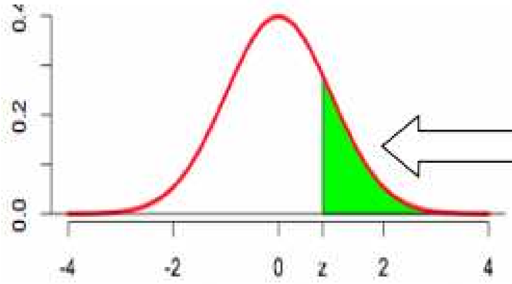
Figura 2 – L'istogramma dei dati sperimentali sovrapposto alla gaussiana teorica

Il grande numero di misure necessarie in questo esperimento rende indispensabile l'automazione delle procedure di calcolo. Excel è un ottimo strumento per effettuare questo tipo di calcolo; in particolare, il calcolo di media, varianza e deviazione standard del campione va eseguito con le funzioni automatiche di calcolo di Excel.

Approfondimento

Per completare il lavoro si potrebbe eseguire il test del χ^2 ("chi" quadro), che fornisce una valutazione quantitativa della "vicinanza" dei dati sperimentali alla corrispondente curva gaussiana. Per poter eseguire il test vedere le pagine allegate del libro: J.R. Taylor – Introduzione all'analisi degli errori, Zanichelli.

Tabella della Distribuzione z (deviata gaussiana standardizzata)



F(z) = P(Z > z) = area sottesa a destra di z dal valore di z = 0.0, essendo P(Z < 0 = 0.5). L'area sottesa e sinistra di z (area bianca della figura) è uguale a 1 meno il valore tabulato o il complemento ad 1 del valore tabulato.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
4.1	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00001	0.00001
4.2	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
4.3	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
4.4	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

E2 – Proporzionalità inversa. Quant'acqua c'è nella bottiglia?

Obiettivo

Vogliamo misurare, in un modo un po' bizzarro, la quantità d'acqua contenuta in una bottiglietta. È opportuno che ognuno dei componenti del gruppo esegua l'esperimento e l'analisi dei dati autonomamente senza uso del computer.

Figura 1 – I cilindri a disposizione per misurare la quantità d'acqua contenuta nella bottiglia

Materiali a disposizione

- 6 cilindri di plexiglas di diverso diametro
- una bottiglietta con dell'acqua colorata
- calibro
- righello
- carta millimetrata
- righe

Montaggio dell'esperimento

L'esperimento non ha bisogno di un particolare montaggio.

Esecuzione dell'esperimento

1) Misurare il diametro interno d di ogni cilindro stimando l'errore assoluto Δd e riportarne i valori nella tabella sottostante. Ordinare i dati in modo che il diametro assuma valori crescenti.
2) Calcolare l'area di base A di ogni cilindro con il suo errore ΔA e riportate i valori ottenuti nella tabella. Si ricordi che essendo $A = \frac{\pi}{4} d^2$, $\Delta A = \frac{\pi}{2} d \Delta d$.
3) Versare tutta l'acqua della bottiglietta nel cilindro di diametro minore e misurarne l'altezza h (stimare sempre l'errore Δh), riportare i valori nella tabella.
4) Ripetere l'operazione 3) per tutti gli altri cilindri.

d [cm]	Δd [cm]	A [cm^2]	ΔA [cm^2]	h [cm]	Δh [cm]

Elaborazione dati

Sulla base dei dati acquisiti verificare ***algebricamente*** che tra l'area di base A dei cilindri e l'altezza h dell'acqua in essi contenuta esiste una proporzionalità inversa e determinare la costante di proporzionalità.

A [cm^2]	ΔA [cm^2]	h [cm]	Δh [cm]	$V=A\cdot h$ [cm^3]	ΔV[1] [cm^3]	$V-\Delta V$ [cm^3]	$V+\Delta V$ [cm^3]

Verificare la compatibilità delle misure effettuate.

Determinare, anche ***graficamente***, la costante di proporzionalità, ossia il volume dell'acqua. A tal fine riportare su carta millimetrata i valori di A sull'asse delle ordinate e di $1/h$ su quello delle ascisse con i corrispondenti errori[2].

[1] Si ricordi che l'errore è dato da $\Delta V = A\cdot\Delta h + h\cdot\Delta A$

[2] Si ricordi che l'errore è dato da $\Delta\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{\Delta h}{h^2}$

E3 – Legge di Hooke

Introduzione

Robert Hooke (Freshwater, 18 luglio 1635 – Londra, 3 marzo 1703) è stato un fisico, biologo, geologo e architetto inglese. Fu uno dei più grandi scienziati del Seicento e una delle figure chiave della rivoluzione scientifica.

Figura 1 – George Simon Alfred Ohm

Egli fu il primo ad occuparsi del problema dell'allungamento di una molla. Nel 1675 diede la soluzione nella forma dell'anagramma latino "***ceiiinosssttuv***" di cui pubico la soluzione solo nel 1678 come "***Ut tensio, sic vis***" che significa "come l'estensione, così la forza". Oggi diremmo: ***l'allungamento prodotto (nella molla) è direttamente proporzionale alla forza impressa***.

La rappresentazione moderna della legge di Hooke fa riferimento ai concetti di tensione σ e deformazione ε ed è fornita nel caso monodimensionale dalla relazione: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, dove E è il modulo di elasticità di Young.

Legge di Hooke: Se si applica una forza di modulo F ad una molla ideale[3], si produce in essa un allungamento di modulo x direttamente proporzionale alla forza: $F = k \cdot x$, dove k è una costante detta ***costante elastica della molla*** e dipende dalla natura del materiale.

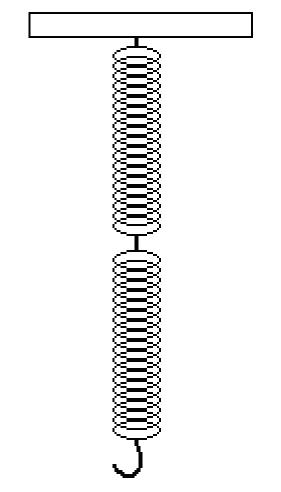


Figura 2 – Molle in serie

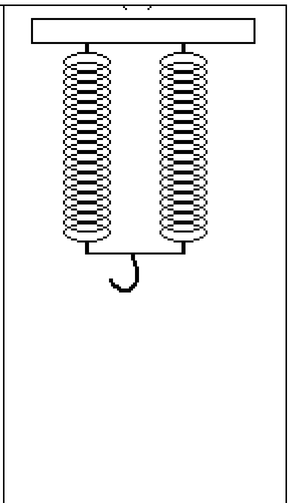


Figura 3 – Molle in parallelo

Consideriamo due molle ideali di costanti elastiche k_1 e k_2 e colleghiamole in ***serie***, ossia una di seguito all'altra (vedi figura 2). Si ha allora un allungamento complessivo $x = x_1 + x_2$ dove x_1 e x_2 sono rispettivamente gli allungamenti della molla di costante k_1 e k_2 sotto l'azione della forza F. Dalla legge di Hooke si ha:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

Da cui segue che due molle in serie, di costanti elastiche k_1 e k_2, sono equivalenti ad una unica molla la cui costante elastica k è data da

[1] $$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Consideriamo sempre le due molle di prima, ma le colleghiamo in ***parallelo***, ossia una di fianco all'altra (vedi figura 3). La forza F che applichiamo si distribuisce tra le due molle in modo tale che $F = F_1 + F_2$ e che producano lo stesso allungamento x, si ha:

$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = \left(k_1 + k_2\right) x .$$

Da ciò segue che due molle in parallelo, di costanti elastiche k_1 e k_2, sono equivalenti ad una unica molla la cui costante elastica k è data da

[3] Una molla perfetta o ideale è una molla priva di peso, attrito e di altri fenomeni dissipativi. Una molla ideale è molla non precompressa, ossia che non necessita una forza minima per produrre un allungamento. In una molla precompressa la legge di Hooke si scrive : $\vec{F} = k \cdot \vec{x} + \vec{F_0}$

[2] $$k = k_1 + k_2 \,.$$

Obiettivo

Il nostro obiettivo è di ricavare sperimentalmente la legge di Hooke e di determinare la costante elastica delle molle in dotazione. In secondo luogo verificheremo la consistenza delle relazioni [1] e [2].

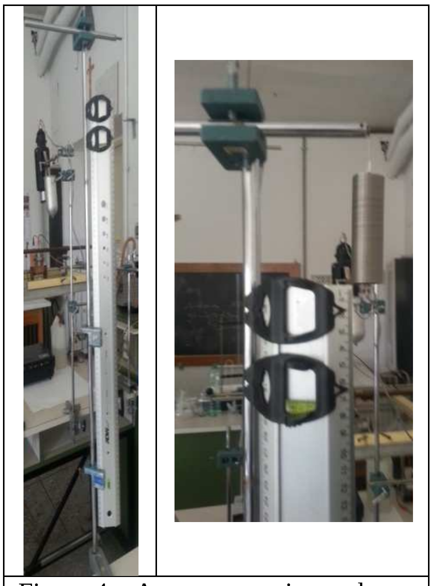


Figura 4 – Apparato sperimentale

Materiali a disposizione

- Sostegno per le molle con riga graduata (vedi figura 4 a sinistra)
- 2 molle di costante elastica diversa
- Dischetti di alluminio per circa 200 g
- Bilancia

VERIFICA DELLA LEGGE DI HOOKE

Montaggio ed esecuzione dell’esperimento

1) Fissare il morsetto con l’asta di sostegno al bancone (se non è già stato fatto)
2) Appendere una molla al gancio (vedi figura 4 a destra)
3) Tarare il sistema di misura dell’allungamento della molla
   a. allentare i morsetti che tengono la riga fissata all’asta di sostegno
   b. spostare la riga in modo da allineare lo zero con un punto della molla che servirà da riferimento per le misure
   c. serrare i morsetti per fissare la riga all’asta (non esagerare, basta che la riga rimanga ferma)
4) Pesare il piattino stimando l’incertezza della misura
5) Appenderlo alla molla
6) Leggere l’allungamento stimandone l’incertezza
7) Riportare i dati in un’apposita tabella (tipo quelle di pagina 4)
8) Aggiungere un dischetto al piattino
9) Pesare il tutto stimando l’incertezza
10) Appendere alla molla
11) Leggere l’allungamento stimandone l’incertezza
12) Riportare i dati nella tabella
13) Ripetere dal punto 8 al 12 fino all’esaurimento dei dischetti
14) Ripetere per la seconda molla[4].

Elaborazione dati

Riportare su un foglio Excel i dati ottenuti per la prima molla, come indicato nella figura 5.

Nella colonna B e nella colonna D vengono riportati gli errori stimati sulla massa e sull’allungamento.

	A	B	C	D
1	m	Δm	x	Δx
2	[g]	[g]	[cm]	[cm]

Figura 5 – Il foglio Excel per la raccolta dei dati.

Per prima cosa è necessario determinare il peso dei dischetti via via appesi alla molla. Ricordando che la massa è in grammi si deve effettuare la trasformazione:

[4] Si può evitare di ripesare tutti i discetti se li si infilano sul piattino nello stesso ordine precedente.

[3] $$P = \frac{m}{1000} g$$

dove g è l'accelerazione di gravità; g = (9,81 ± 0,01) m/s^2.

A tal fine inserire nella colonna E il risultato della formula [3] e nella colonna F l'errore corrispondente $\Delta P = \frac{m \cdot \Delta g + g \cdot \Delta m}{1000}$.

Realizzare quindi il grafico excel e verificare che la forza è direttamente proporzionale all'allungamento (si faccia uso della funzione REGR.LIN); calcolare la costante elastica della molla e determinarne l'incertezza.

Effettuare l'analisi per entrambe le molle. Si consiglia di utilizzare un nuovo foglio excel.

MOLLE IN SERIE

Montaggio ed esecuzione dell'esperimento

1) Fissare il morsetto con l'asta di sostegno al bancone (se non è già stato fatto)
2) appendere una delle due molle al gancio e ad essa appendere la seconda molla
3) tarare il sistema di misura dell'allungamento della molla
   a. allentare i morsetti che tendono fissa la riga all'asta di sostegno
   b. spostare la riga in modo da far allineare lo zero (o un altro numero, in questo caso potrebbe essere opportuno il 10 o il 20) con un punto della seconda molla che servirà da riferimento delle misure
   c. serrare i morsetti per fissare la riga all'asta (non esagerare, basta che la riga rimanga ferma)
4) ripetere il procedimento di pesatura come nel caso precedente.

Per questa misura potrebbe essere opportuno ripetere tutto il procedimento modificano l'ordine con cui le molle vengono appese al sostegno.

Elaborazione dati

Ripetere il procedimento del punto precedente per determinare la costante elastica complessiva e verificare se entro l'errore sperimentale è compatibile con la [1].

MOLLE IN SERIE E IN PARALLELO

Montaggio ed esecuzione dell'esperimento

1) Fissare il morsetto con l'asta di sostegno al bancone (se non è già stato fatto)
2) appendere entrambe le molle e appendere ad esse il gancio comune
3) tarare il sistema di misura dell'allungamento della molla
   a. allentare i morsetti che tendono fissa la riga all'asta di sostegno
   b. spostare la riga in modo da far allineare lo zero con un punto di una delle molle che servirà da riferimento delle misure
   c. serrare i morsetti per fissare la riga all'asta (non esagerare, basta che la riga rimanga ferma)
4) ripetere il procedimento di pesatura come nel caso precedente.

Elaborazione dati

Ripetere il procedimento dei punti precedenti per determinare la costante elastica complessiva e verificare se entro l'errore sperimentale è compatibile con la [2].

Molla 1	
m ± Δm [g]	x ± Δx [cm]

Molla 2	
m ± Δm [g]	x ± Δx [cm]

Molle in serie	
m ± Δm [g]	x ± Δx [cm]

Molle in parallelo	
m ± Δm [g]	x ± Δx [cm]

E4 – Leggi di Ohm

Introduzione

Il fisico tedesco George Simon Alfred Ohm (16 marzo 1789 – Monaco di Baviera, 6 luglio 1854) agli inizi del 1800 dimostrò che in un filo conduttore percorso da corrente elettrica esiste una relazione tra la d.d.p. ai suoi capi e l'intensità di corrente che percorre il conduttore. Egli formulò due importanti leggi che prendono il suo nome.


Figura 1 – George Simon Alfred Ohm

Prima legge di Ohm: In un filo conduttore l'intensità di corrente (I) è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale (V) ai suoi estremi, ossia, in simboli:

$$V = R \times I$$

dove R è la costante di proporzionalità diretta e viene chiamata resistenza del filo.

Seconda legge di Ohm: La resistenza di un filo conduttore è direttamente proporzionale alla sua lunghezza (l) ed inversamente proporzionale alla sua sezione (s). La resistenza dipende dalla natura del materiale: ogni materiale ha la sua resistenza specifica (ρ)

Obiettivo

L'obiettivo dell'esperimento è quello di verificare la prima e la seconda legge di Ohm e determinare la resistenza specifica della costantana[5].

Materiali a disposizione

- Tavoletta 1 di legno con fili di costantana della stessa lunghezza e diametro diverso
- Tavoletta 2 di legno con un filo di costantana del diametro di 0,2 mm lungo circa 3 m.
- Interruttore
- Multimetro digitale
- Multimetro analogico 680R VII serie
- Metro
- Generatore di tensione
- Cavetteria varia

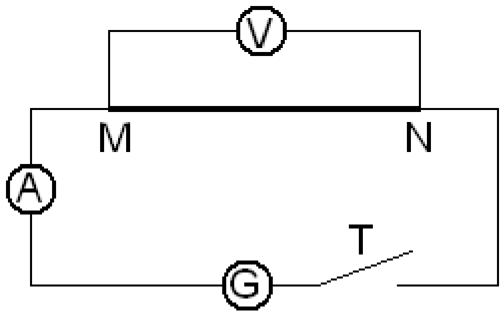


Figura 2 – Il codice dei colori per le resistenze in dotazione.

VERIFICA DELLA PRIMA LEGGE DI OHM

Montaggio dell'esperimento

Realizzare il circuito riportato nello schema di figura 2, il tratto MN è uno dei fili della tavoletta 1.

Esecuzione dell'esperimento

1) Collegare uno dei fili di costantana nei punti MN del circuito
2) Chiudere l'interruttore

[5] La costantana è una lega costituita al 55%-60% di rame e al 45%40% di nichel; ha una resistività compresa tra 0,45 e $0{,}51 \cdot 10^{-6}$ Ω m. Via internet per poche decine di euro è possibile acquistare rotoli di costantana di svariati metri di lunghezza.

3) Ruotando un po' la manopola del generatore leggere la tensione e la corrente segnando i valori in una opportuna tabella.

4) Ripetere l'operazione 3 per una decina di volte. Attenzione a scegliere il fondo scala adatto.

5) Aprire l'interruttore

6) Collegare un altro filo e ripetere le operazioni dalla 1 alla 5 per tutti i fili della tavoletta 1.

Elaborazione dati

Riportare su un foglio Excel i dati ottenuti come indicato nella figura 3.

Nella colonna B e nella colonna D vengono riportati gli errori stimati nella lettura della corrente e della tensione.

	A	B	C	D
1	I	ΔI	V	ΔV
2				

Figura 3 – Il foglio Excel per la raccolta dei dati.

Nel caso del multimetro digitale, a seconda del tipo in uso si hanno valori diversi che però sono sempre indicati nel seguente modo:

$$\pm\left(\text{p\% della lettura} + \text{n digit}\right)$$

dove p indica una percentuale e n un numero intero e digit è pari al valore del digit meno significativo della sua visualizzazione. Per esempio se si è misurata una corrente di 34,7 mA e se il multimetro da noi utilizzato, per quel range di misura della corrente dà p = 1 e n = 5, mentre dalla lettura digit = 0,1 mA, allora l'errore è

$$\pm\left(\frac{1}{100}\times 34,7 + 5\times 0,1\right) = \pm 0,847\ \text{mA} \simeq \pm 0,8\ \text{mA}\,.$$

Il calcolo può essere fatto fare da Excel, basta inserire nella casella della colonna B (o D) l'opportuna formula. Per il multimetro analogico la stima va fatta "a occhio" è buona norma prendere la metà della sensibilità dello strumento nell'impostazione di misura.

Realizzare il grafico della tensione in funzione della corrente e utilizzando la funzione REGR.LIN calcolare la pendenza della retta che risulta essere le resistenza.

Salvare il foglio di lavoro attribuendo un opportuno nome.

VERIFICA DELLA SECONDA LEGGE DI OHM

Montaggio dell'esperimento

Utilizzare la tavoletta 2 e il multimetro analogico.

Esecuzione dell'esperimento

1) Posizionare il multimetro analogico sulla misura di bassi valori di resistenza (vedi manuale dello strumento)

2) Collegare i puntali uno all'estremità A del filo e l'altro in un punto P qualunque.

3) Leggere il valore della resistenza e stimarne l'incertezza.

4) Misurare la distanza L tra A e P e stimarne l'incertezza

5) Riportare i valori in una opportuna tabella.

6) Cambiare la posizione del punto P e ripetere le operazioni dalla 2 alla 5 per una decina di volte

Elaborazione dati

L'analisi dei dati e la determinazione della seconda legge viene fatta in due parti. Nella prima dimostreremo la dipendenza diretta dalla lunghezza del filo, nella seconda la dipendenza inversa dalla sezione.

Prima parte

Riportare su un foglio Excel i dati ottenuti come indicato nella figura 3.

Nella colonna B e nella colonna D vengono riportati gli errori stimati nella lettura della resistenza e della lunghezza.

	A	B	C	D
1	R	ΔR	L	ΔL
2				

Figura 3 – Il foglio Excel per la raccolta dei dati.

Realizzare il grafico della resistenza in funzione della lunghezza: dovrebbe essere una retta che passa per l'origine di equazione $R = kL$. Utilizzando la funzione REGR.LIN calcolare il valore di *k*. Ciò dimostra che la resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza del filo.

Seconda parte

Utilizzando i dati ricavati nella determinazione della prima legge di Ohm ricavare la tabella di figura 4. Nella tabella d è il diametro del filo (per la stima del diametro del filo è ragionevole considerare un 5% del valore. Nella colonna E viene calcolato il valore $z = \frac{1}{d^2}$ e il corrispondente errore. Si ha $\Delta z = 2\frac{1}{d^3}\Delta d$

	A	B	C	D	E	F
1	R	ΔR	d	Δd	z=1/d^2	Δz
2						

Figura 4 – Il foglio Excel per l'elaborazione dei dati.

Riportando in grafico *R* sull'asse delle ordinate e *z* sull'asse delle ascisse, i punti dovrebbero allinearsi lungo una retta di equazione $R = hz$ e utilizzando la funzione REGR.LIN determinare il valore di *h*. Ciò dimostra che resistenza è inversamente proporzionale al quadrato del diametro del filo $R = \frac{h}{d^2}$. Ricordando che l'area della sezione del filo è $A = \pi r^2 = \pi\frac{d^2}{4}$, ponendo $h' = \frac{\pi}{4}h$ si ha che la resistenza è inversamente proporzionale alla sezione.

Determinazione della resistività

Ricordando che il diametro del filo di costantana della tavoletta 2 è d = 0,2 mm con una ragionevole incertezza del 5%, per ognuna delle coppie di misure della prima parte, calcolare la resistività mediante la formula

$$\rho = \frac{R \cdot A}{L} = \frac{\pi}{4}\frac{R \cdot d^2}{L}. \qquad [4]$$

Tenendo conto che i fili della tavoletta 1 hanno tutti lunghezza *L* = (1,00 ± 0,01) m calcolare la resistività per ognuno dei fili utilizzando la [4].

Ovviamente questi calcoli possono essere fatti con opportuni fogli Excel
Determinare la resistività della costantana come media di tutti i valori ottenuti e stimare l'errore come deviazione la standard utilizzando l'opportuna funzione di Excel o la definizione $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$ dove x_i sono i valori della resistività ottenuti sopra, $\bar{x}$ è la media di tali valori e *N* il numero di valori.

E5 – Corrente nella carica e nella scarica del condensatore

Introduzione

In un circuito RC, quale quello di figura 1, la corrente che circola varia nel tempo con legge esponenziale

[5] $$I(t) = I_{MAX} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove τ = RC è la costante di tempo del circuito, R la resistenza del circuito e C la capacità del condensatore.

I_{MAX} è la corrente che passa all'istante t = 0 in cui si chiude il circuito.

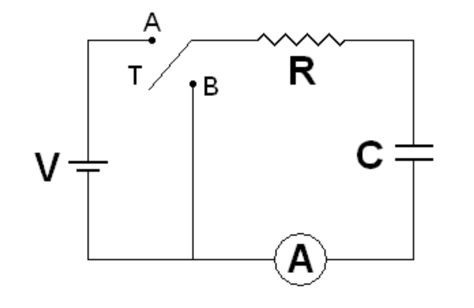


Figura 1 – Schema del circuito RC

Obiettivo

L'obiettivo dell'esperimento è quello di determinare la costante di tempo τ e la corrente I_{MAX}.

Materiali a disposizione

- Basetta per realizzare il circuito
- Alcune resistenze (in figura 2 la tabella con il codice dei colori)
- Un condensatore da 1000 μF
- Un multimetro digitale
- Un cronometro
- Un alimentatore 9 V
- Interruttore
- Cavetteria varia

COLORE	1° ANELLO	2° ANELLO	3° ANELLO	4° ANELLO
Nero	-	0	x 1	-
Marrone	1	1	x 10	-
Rosso	2	2	x 100	-
Arancio	3	3	x 1.000	-
Giallo	4	4	x 10.000	-
Verde	5	5	x 100.000	-
Blu	6	6	x 1.000.000	-
Viola	7	7	x 10.000.000	-
Grigio	8	8	-	-
Bianco	9	9	-	-
ORO	-	-	: 10	5%
ARGENTO	-	-	: 100	10%
NULLA	-	-	-	25%

Figura 2 – Il codice dei colori per le resistenze in dotazione.

Montaggio dell'esperimento

Realizzare il circuito riportato nello schema di figura 1. Attenzione al fondo scala del multimetro, ricordare che $I_{MAX} = \frac{V}{R}$ e che con la strumentazione indicata non supera 1 mA.

Esecuzione dell'esperimento

Sono necessarie almeno due persone, una che legge dal cronometro, un'altra che legge sul multimetro la corrente e trascrive il valore in una opportuna tabella (in allegato si troverà un facsimile della tabella).

Dopo aver montato il circuito, al via del cronometrista, si chiude il circuito di carica del condensatore (il commutatore T va posto su A) e si prende nota della corrente che passa nel circuito così come viene letto sul display del multimetro. Il cronometrista deve dare il via alla lettura del multimetro ogni 5 s (si può variare questo valore, ma non discostarsi troppo). Il modo più semplice è che egli conti i secondi ed enfatizzi il 5, il 10, ecc. Per avere un discreto numero di valori da elaborare si consiglia di effettuare le letture almeno per due minuti.

Al termine delle letture lasciare per qualche minuto il circuito chiuso.

Azzerare il cronometro e dare il via alle letture per la fase di scarica.

Al via del cronometrista spostare il commutatore T da A a B e riprendere le letture della corrente come nella fase di carica.

Elaborazione dati

Riportare su un foglio Excel (vedi figura 3) i dati ottenuti durante la fase di carica

	A	B	C	D	E
1	t [s]	Δt [s]	I[μA]	ΔI [μA]	δI

Figura 3 – Il foglio Excel per la raccolta dei dati.

Nella colonna A riportare i valori del tempo (i valori dovranno essere 0, 5, 10,15, ecc, a meno di non aver utilizzato un intervallo di lettura diverso).

Nella colonna B l'errore assoluto stimato nella lettura del tempo (tenere presente che i tempi di reazione umani sono sull'ordine del decimo di secondo per cui qualche decimo di secondo è ragionevole).

Nella colonna C i valori della corrente e nella D gli errori assoluti. Una nota particolare per la stima delle incertezze nelle misure della corrente. A seconda del multimetro in uso si hanno valori diversi che però sono sempre indicati nel seguente modo:

$$\pm\left(\text{p\% della lettura + n digit}\right)$$

dove p indica una percentuale, n un numero intero e digit è pari al valore del digit meno significativo della sua visualizzazione. Per esempio, se p = 1,8 e n = 2 e la misura della corrente è 132 μA, mentre dalla lettura digit = 1 mA, l'errore è $\pm\left(\frac{1,8}{100}\times 132 + 2\times 1\right) = 4,376\ \mu\text{A} \simeq 4\ \mu\text{A}$. Il calcolo può essere fatto fare da Excel, basta inserire nella casella D2 la formula =C2*1,8/100+2 (ovviamente 1,8 e 2 si riferiscono all'esempio) e ricopiarla nella caselle della colonna D fin dove serve.

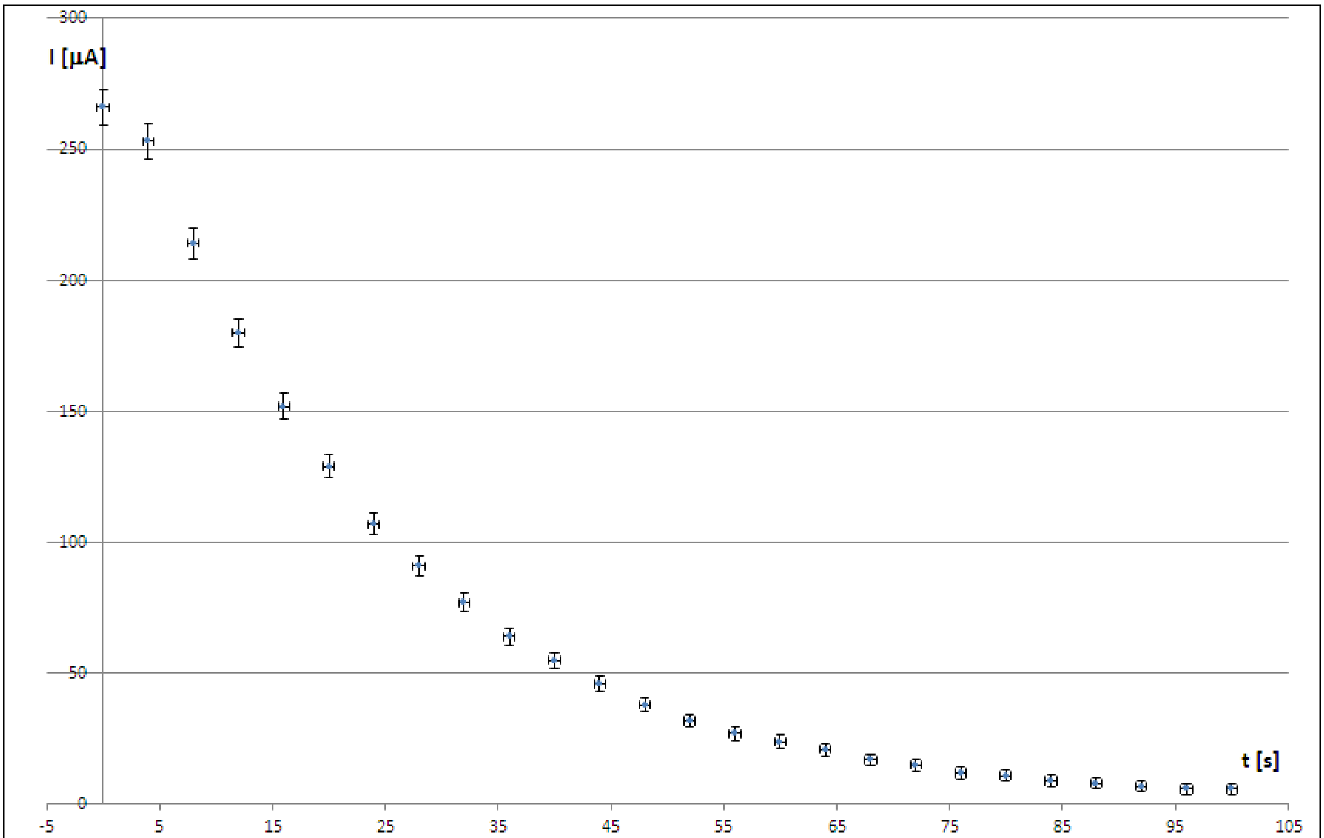


Figura 4 – Grafico della corrente nel circuito durante la carica del condensatore.

Nella colonna E è stato inserito l'errore relativo (che Excel può evidenziare nella forma percentuale) per vedere quanto sia significativa la misura. Si ricordi che l'errore relativo sulla misura *x* è dato da

$\delta x = \dfrac{\Delta x}{x}$.

Salvare il foglio di lavoro attribuendo un opportuno nome.

Realizzare il grafico della corrente in funzione del tempo su un foglio a parte inserendo anche le barre di errore; in figura 4 un esempio con dei dati ricavati durante una delle prove di misura.

Per ricavare le grandezze richieste è necessario linearizzare la relazione [5]. Passando al logaritmo naturale si ha:

[6] $$\ln[I(t)] = \ln[I_{MAX}] - \frac{t}{\tau}.$$

Posto $y = \ln[I(t)]$, $q = \ln[I_{MAX}]$ e $m = -\frac{1}{\tau}$, la [6] diventa l'equazione di una retta

[7] $$y = mt + q.$$

	A	B	C	D	E	F
1	t [s]	Δt [s]	I[μA]	ΔI [μA]	δI	y = ln(I)

Figura 5 – Il foglio Excel per l'elaborazione dei dati.

Nel foglio Excel si aggiunga, nella colonna F, il valore $y = \ln[I(t)]$ (vedi figura 5) e si realizzi il grafico y in funzione di t (vedi figura 6).

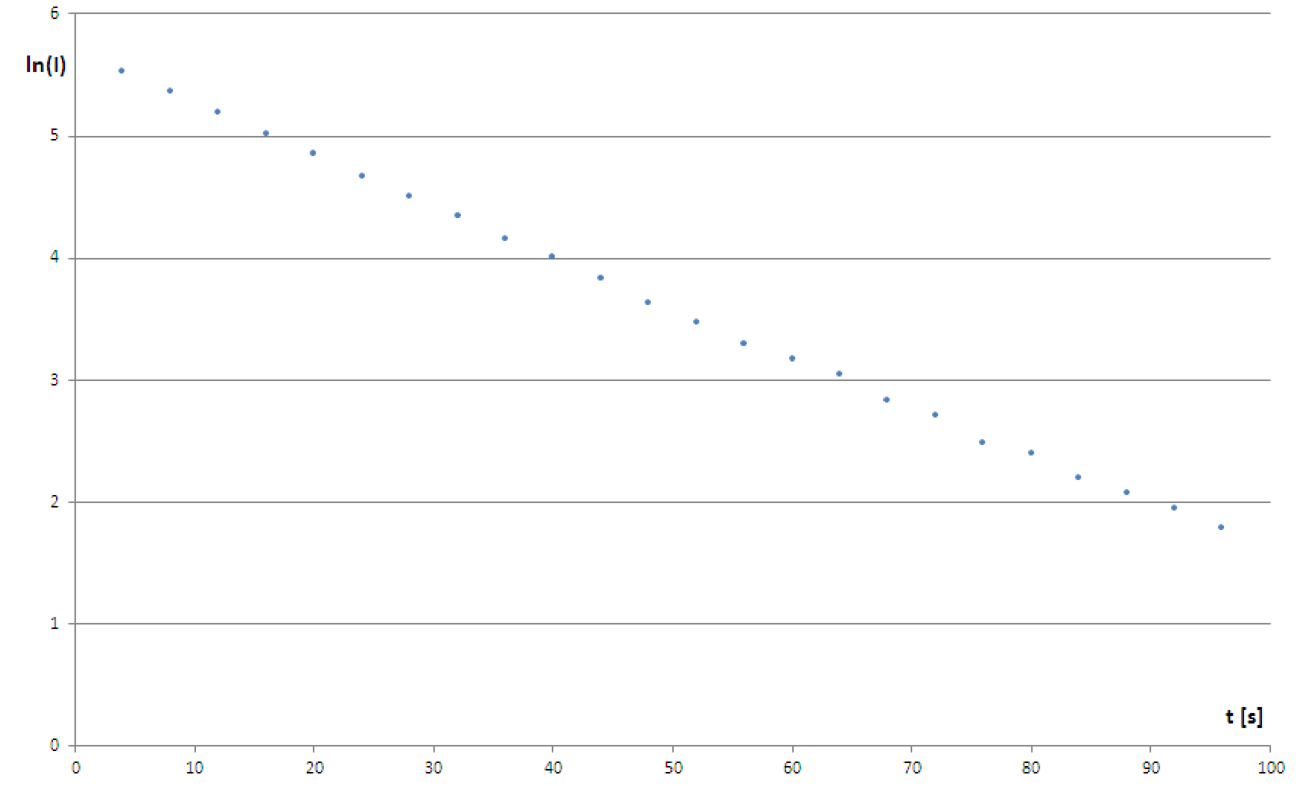


Figura 6 – Grafico del logaritmo della corrente in funzione del tempo

Utilizzando la funzione Excel REGR.LIN si ricavi il valore del coefficiente angolare della retta e il termine noto. Con i dati utilizzati per i grafici delle figure 4 e 6 si ricava: m =(– 0,04104 ± 0,00028 e q = 5,659 ± 0,016 da ci segue τ = (24,36 ± 0,17) s e I_{MAX} = (287 ± 5) μA.

Ripetere il calcolo per la scarica del condensatore e confrontare i risultati.

Ripetere ancora con resistenze diverse e confrontare sempre i risultati.

TABELLA RACCOLTA DATI

Carica	
t [s]	I [μA]

Scarica	
t [s]	I [μA]

NOTE:

E6 – Curva caratteristica del diodo (LED) e determinazione del potenziale di innesco

Introduzione

In questa esperienza ci proponiamo di ottenere la curva caratteristica di un diodo **LED**, (sigla inglese di *Light Emitting Diode* ovvero diodo ad emissione luminosa). Si tratta di un dispositivo a semiconduttore che, oltre a svolgere le funzioni di un normale diodo al silicio – cioè di permettere il passaggio della corrente elettrica in un solo verso – si comporta come una piccola lampadina illuminandosi quando collegato ad un generatore di tensione. La luce irradiata ha una frequenza (e quindi un colore) ben definita che dipende dalle caratteristiche del semiconduttore. In commercio esistono LED di vari colori e dimensioni. Dire che la frequenza della luce emessa è ben definita, significa che essa è composta esclusivamente da fotoni di una determinata energia e quindi di un'unica frequenza (in realtà ciò non è del tutto vero, ma per i nostri fini non è importante).

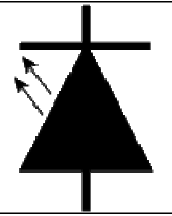


Figura 1 – Simbolo circuitale del diodo LED

Per prima cosa è necessario capire il funzionamento di un semiconduttore. La principale caratteristica dei solidi è la distribuzione di livelli energetici possibili in bande di energia separate da intervalli proibiti (detti bande proibite, o band gap dall'inglese). Nei conduttori di solito l'ultima banda (detta banda di conduzione) non è completamente riempita e quindi esistono livelli non occupati contigui in energia a quelli occupati. Gli elettroni possono accedere a questi livelli vuoti ricevendo energia da un campo elettrico esterno; questo comporta una densità di corrente concorde al campo. Gli elettroni delle bande inferiori, che sono tutte piene, non acquistano energia e non influiscono nel processo di conduzione. L'ultima banda piena si chiama banda di valenza.

Questa configurazione non è l'unica che permetta di avere proprietà di conduzione; può accadere che l'ultima banda completamente piena si sovrapponga a quella successiva vuota (vedi il magnesio che ha una buona conducibilità elettrica pur avendo la banda di conduzione vuota come gli isolanti).

Non sono conduttori i solidi refrattari in cui l'ultima banda contenente elettroni è completamente piena e non è sovrapposta alla banda successiva. Questa è la configurazione che caratterizza gli isolanti e i semiconduttori. L'ampiezza della zona proibita è definita banda proibita, o energia di gap, o con l'espressione inglese band gap. Con questo parametro è possibile definire i semiconduttori come quei solidi la cui banda proibita è abbastanza piccola da far sì che ad una temperatura inferiore al punto di fusione si possa osservare statisticamente una conduzione non trascurabile (comunque inferiore a quella dei conduttori, ma superiore a quella degli isolanti) dovuta al passaggio dei portatori di carica dalla banda di valenza (piena) a quella di conduzione per eccitazione termica.

Nel silicio e nel germanio l'energia di gap a temperatura ambiente (300 K) è rispettivamente di 1,12 eV[6] e 0,66 eV. Quando la temperatura aumenta non è trascurabile la probabilità che gli ultimi elettroni, presenti nella banda di valenza, possano passare alla banda di conduzione, per eccitazione termica. Gli elettroni passati alla banda di conduzione sotto l'azione di un campo elettrico esterno danno luogo a una densità di corrente I. Ogni elettrone che passa dalla banda di valenza alla banda di conduzione, lascia un livello vuoto definito lacuna. La presenza delle lacune rende disponibili altri livelli che possono essere occupati da altri elettroni della banda di valenza e quindi si può avere un moto ordinato di cariche, sotto l'azione di un campo elettrico anche nella banda di valenza. Si parla quindi di una densità di corrente nella banda di valenza.

Il grafico I–V è chiamato curva caratteristica per un diodo LED (vedi figura 2). Possiamo notare come la corrente, in un diodo polarizzato direttamente, cominci a scorrere quando si raggiunge di un certo valore di tensione. Infatti, in questa situazione, il campo elettrico esterno imposto dal generatore, riesce a vincere il campo all'interno del semiconduttore e gli elettroni

[6] 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J è l'energia che acquistata da un elettrone quando viene accelerato da un potenziale di 1 V.

riescono a superare la barriera di potenziale. Il salto energetico che l'elettrone compie passando dalla banda di conduzione a quella di valenza (dove si ricongiunge con una lacuna) è dato da:

[8] $$E = eV_0$$

dove e = (1,602176565 ± 0,000000035)·10^{-19} C è la carica elementare e V_0 la tensione d'innesco del LED, ossia le tensione minima alla quale il LED si accende (fa passare la corrente).

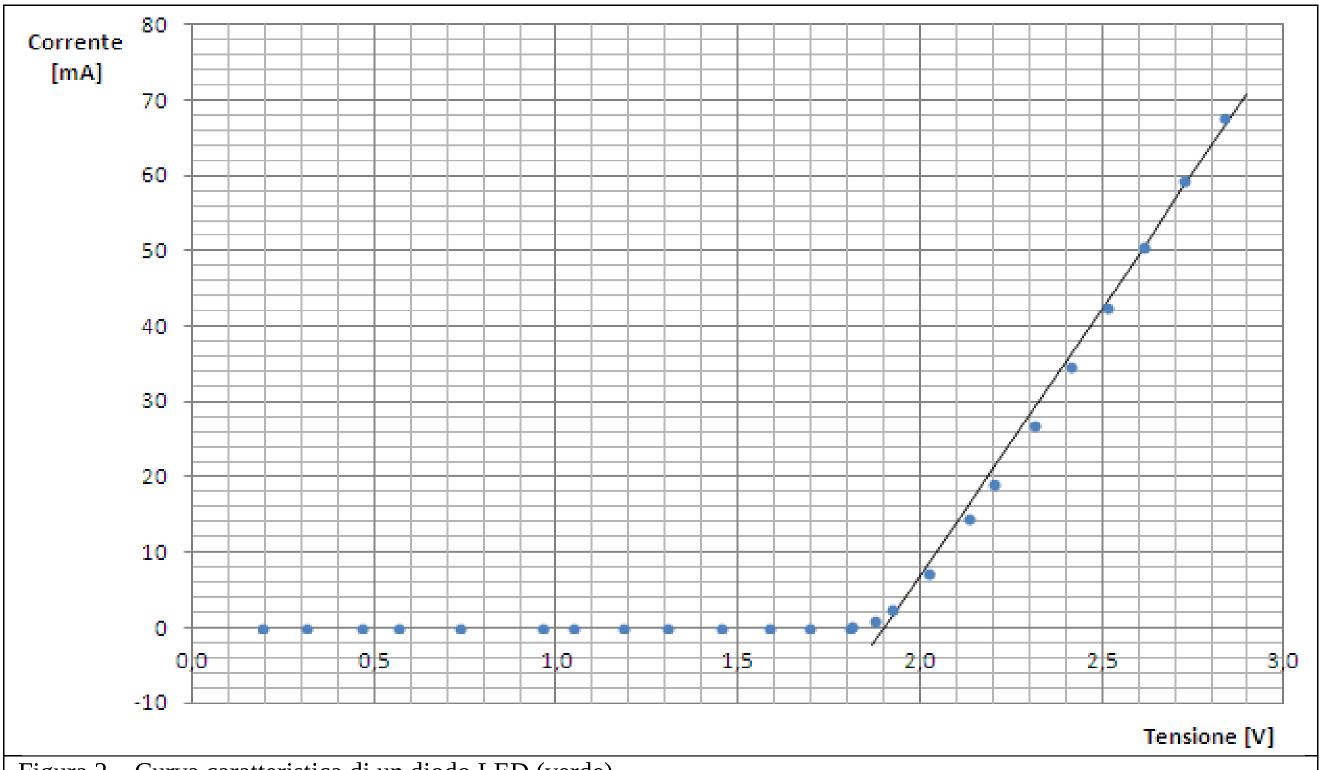


Figura 2 – Curva caratteristica di un diodo LED (verde)

Obiettivo

Il nostro obiettivo è di ricavare sperimentalmente la *curva caratteristica del diodo*, ovvero il grafico della corrente I che passa nel led in funzione della tensione V (vedi figura 2). Da questa ricaveremo il potenziale di innesco.

Materiali a disposizione

- Generatore di tensione
- Basetta per la realizzazione di circuiti elettrici
- Resistenza da 100 Ω
- Interruttore
- Diodi LED di vari colori
- Supporto per i LED
- Voltmetro
- Amperometro
- Computer
- Cavetteria varia

Montaggio dell'esperimento

Per effettuare le misure realizziamo prima il circuito riportato nello schema di figura 3 utilizzando la base fornita e i vari elementi circuitali.

Impostare il fondo scala del voltmetro a 20 V e quello dell'amperometro a 200 mA.

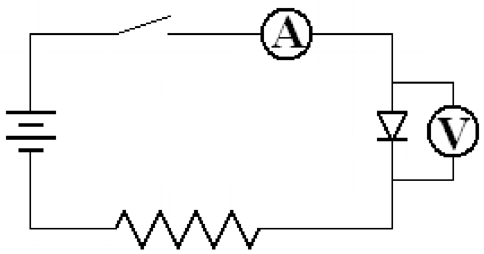


Figura 3 – Circuito per l'acquisizione dei dati necessari per la determinazione della curva caratteristica del diodo LED e del potenziale d'innesco

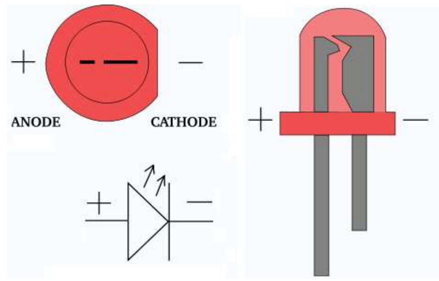


Figura 4 – Poli del LED

ATTENZIONE ALLE POLARITA' del LED; il polo negativo del LED corrisponde al connettore più corto ovvero alla parte della base del LED che è piatta (vedi figura 4). Una volta inseriti gli elementi circuitali, collegare al generatore facendo ancora attenzione alla polarità.

Esecuzione dell'esperimento ed acquisizione dei dati

Per l'acquisizione dei dati predisporre una tabella (anche con Excel) con due colonne, una per il potenziale e una per la corrente (si ricordi che il potenziale verrà misurato in volt, la corrente in milliampere).

Dopo aver chiuso il circuito, far variale lentamente la tensione emessa dal generatore ruotando leggermente il potenziometro, leggere il potenziale ai capi del diodo (sul voltmetro) e la corrente che passa nel circuito (sull'amperometro) e riportare i dati in tabella.

Per evitare di danneggiare il diodo non superare la corrente di 60 mA e comunque non superare ASSOLUTAMENTE la tensione agli estremi del LED di 3V.

Per quanto detto sopra, nel circuito non passerà corrente fino a quando non si raggiungerà il potenziale di innesco del diodo, che dipende dal colore del LED. A partire da 1,5 V è opportuno effettuare la lettura circa ogni 0,05 V.

Cambiare il colore del LED e ripetere le misure.

Elaborazione dati

Per l'analisi dati utilizzeremo Excel di Office.

Per prima cosa riportare i dati rilevati in una tabella Excel (tipo figura 5). Lasciare colonne per calcolare gli errori assoluti sulla corrente e sulla tensione (ad esempio le colonne B e D).

	A	B	C	D
1	I	ΔI	V	ΔV

Figura 5 – Tabella Excel dei dati sperimentali

Per la determinazione delle incertezze nelle misure fatte con multimetri digitali, a seconda del multimetro in uso e della grandezza da misurare, si hanno valori diversi che però sono sempre indicati nel seguente modo:

$$\pm\left(\text{p\% della lettura} + \text{n digit}\right)$$

dove p indica una percentuale e n un numero intero e digit è pari al valore del digit meno significativo della sua visualizzazione. Per esempio se si sono misurate una corrente di 34,7 mA e una corrispondente tensione di 2,41 V e se il multimetro da noi utilizzato, per quel range di misura della corrente dà p = 1 e n = 5, mentre dalla lettura digit = 0,1 mA, allora l'errore è

$\pm\left(\frac{1}{100}\times 34,7 + 5\times 0,1\right) = \pm 0,847 \text{ mA} \simeq \pm 0,8 \text{ mA}$. Per la tensione, se p = 0,5 e n = 2, essendo digit = 0,01, si ha $\pm\left(\frac{0,5}{100}\times 2,41 + 2\times 0,01\right) = \pm 0,03205 \text{ V} \simeq \pm 0,03 \text{ V}$.

Ovviamente il calcolo va fatto fare ad Excel inserendo nella casella B2 la formula =A2*1/100+5*0,1 (ovviamente 1, 5 e 0,1 si riferiscono all'esempio) e nella casella D2 la formula =C2*0,5/100+2*0,01 (anche in questo caso 0,5, 2 e 0,01 si riferiscono all'esempio). Le formule vanno poi ricopiate nelle caselle sottostanti.

Si realizzi quindi il grafico *I*–*V* (la corrente *I* in ordinata e la tensione *V* in ascissa) con le barre d'errore. Il risultato deve essere qualcosa di simile al grafico di figura 6.

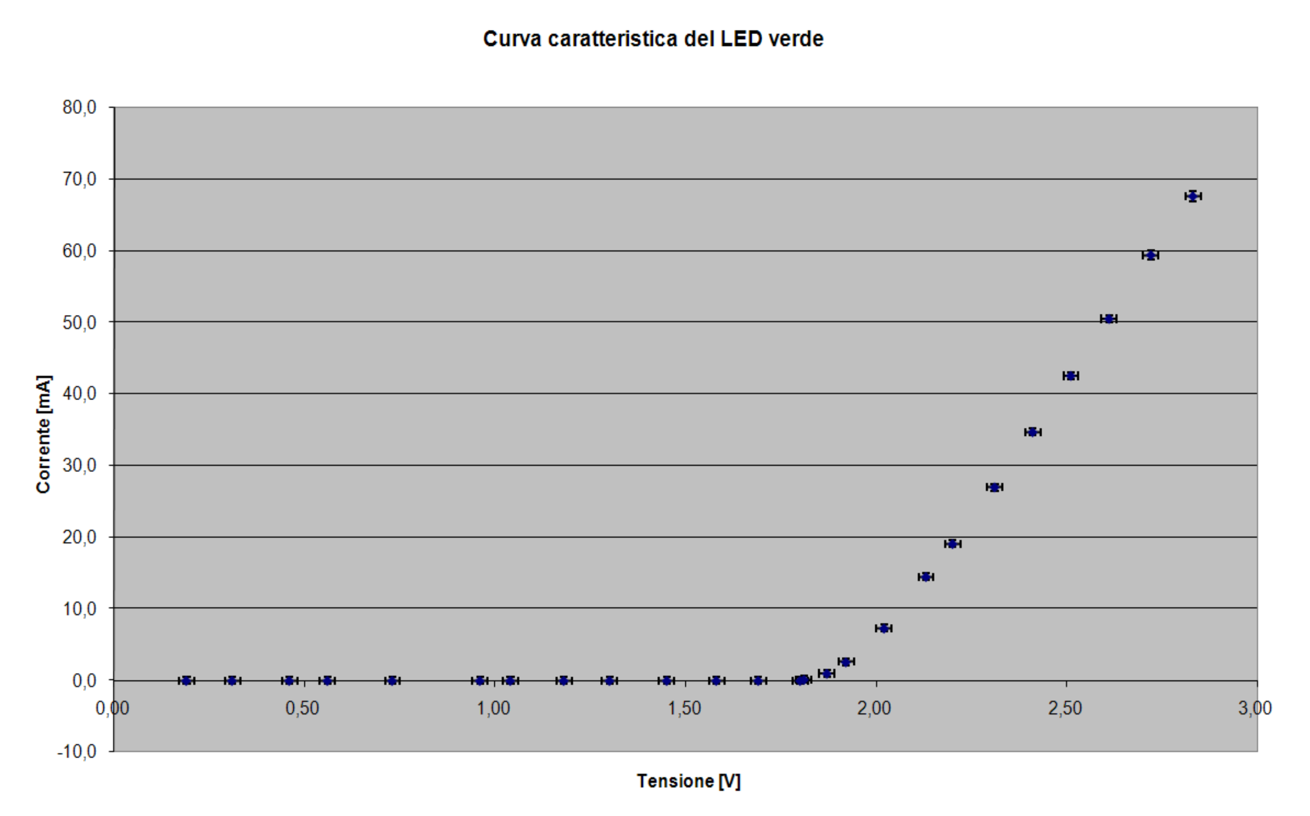


Figura 6 – Grafico Excel per la curva caratteristica del LED verde

Per il calcolo del potenziale d'innesco dobbiamo trovare l'equazione della retta che meglio approssima la parte lineare della curva caratteristica del LED. Per fare ciò utilizziamo la funzione REGR.LIN di Excel.

L'equazione che cerchiamo ha la forma $I = kV + q$ e i valori di *k* e *q*, con le loro incertezze assolute, si possono ricavare utilizzando la funzione di Excel REGR.LIN.

Il potenziale d'innesco si ricava ponendo $I = 0$; si ha: $V_{INNESCO} = -\frac{q}{k}$

Per l'errore ricordiamo che $\Delta V_{INNESCO} = \left(\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta q}{q}\right|\right) \cdot V_{INNESCO}$.

TABELLA RACCOLTA DATI

LED ROSSO	
V [V]	I [mA]

LED GIALLO	
V [V]	I [mA]

LED VERDE	
V [V]	I [mA]

LED BLU	
V [V]	I [mA]

APPENDICE 1
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA E ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI MANUALE

1 - INTRODUZIONE

Uno dei compiti del fisico è quello di ricavare le leggi della natura a partire dalla misura di grandezze fisiche. Con il termine grandezza fisica intendiamo “tutto ciò che può essere misurato”, perciò la misura è uno dei concetti fondamentali per la fisica.

Misurare significa “confrontare” una grandezza con una campione scelta come unità e il risultato di una misura è un numero, o meglio un intervallo di valori in quanto bisogna tener conto dell’incertezza insita in tutte le misure; come abbiamo già detto il risultato della misura di una grandezza G deve essere espresso da:

$$\mathrm{G} = \left(\overline{\mathrm{G}} \pm \Delta\mathrm{G}\right)\mathrm{u}$$

dove $\overline{\mathrm{G}}$ è il valor medio della grandezza (può scaturire da un’unica misura o dalla media di più misure), □G è l’incertezza sulla misura (può essere dato dalla sensibilità dello strumento o da altre considerazioni) e u è l’unità di misura. Ricordiamo che questo significa che

$$\left(\overline{G} - \Delta G\right)u < G < \left(\overline{G} + \Delta G\right)u\ ,$$

ovvero che la grandezza G non viene data con un valore ben definito, ma con un intervallo di valori possibili.

Per la ricerca della legge che descriva un dato fenomeno si procede attraverso una serie di passi e qui sotto vengono indicati quelli principali:

1 - Individuazione delle grandezze tra le quali si vuol cercare un legame: devono essere due.
2 - Misura delle grandezze e determinazione delle incertezze corrispondenti.
3 - Realizzazione di una tabella con i valori delle grandezze (con le incertezze e le unità di misura): per esempio, si supponga di aver individuato le grandezze x ed y (misurate rispettivamente in unità che chiameremo u e v) e di aver trovato i valori riportati nella tabella 1).
4 - Rappresentazione grafica dei dati
5 - Analisi dei dati (può essere fatta per via grafica o per via algebrica attraverso il calcolo) e determinazione della legge fisica.

Tabella 1 - Esempio di dati sperimentali

x (u)	y (v)
0,9 ± 0,1	3,6 ± 0,1
2,7 ± 0,1	8,8 ± 0,2
3,5 ± 0,2	10,4 ± 0,2
4,1 ± 0,2	13,1 ± 0,3
5,3 ± 0,3	16,3 ± 0,3
6,5 ± 0,3	20,0 ± 0,4
7,4 ± 0,4	21,5 ± 0,4

In questi appunti vedremo essenzialmente le fasi 4 e 5, ma prima di procedere è opportuno ricordare alcune leggi fondamentali che dovrebbero essere conosciute dalla scuola media (che sono poi quelle che per il momento ci interessano e impareremo a determinare).

2 - LEGGI DI PROPORZIONALITA’

2.1 - La proporzionalità diretta.

Due grandezze,* x *ed* y*, si dicono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante.

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$$

x	y
0,6	0,84
1,0	1,40
1,2	1,68
1,6	2,24
2,1	2,94

Tabella 2 - Proporzionalità diretta

Consideriamo per esempio le grandezze x e y i cui valori sono dati nella tabella 2. Come si può facilmente verificare, il rapporto tra i valori della grandezza y e i corrispondenti valori della grandezza x danno sempre lo stesso valore (che indichiamo con la lettera k) k = 1,4. Concludiamo quindi dicendo che x e y sono direttamente proporzionali e possiamo scrivere

(9) $$y = k \cdot x$$

con k = 1,4; oppure semplicemente $y = 1,4 \cdot x$.

Se riportiamo su di un grafico i valori della tabella 2, risulta che la linea che li unisce è un segmento (vedi figura 1), più in generale, la relazione (9), su di un piano cartesiano è rappresentata da una retta che passa per l’origine degli assi cartesiani (vedi figura 2).

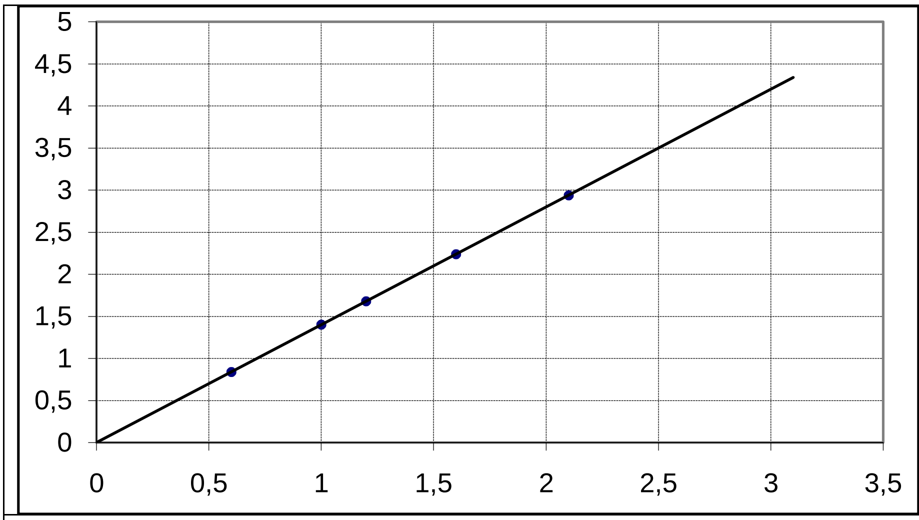


Figura 1 - Rappresentazione dei valori della tabella 2 con la retta che unisce tutti i punti

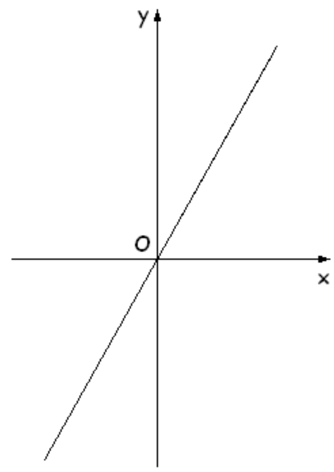


Figura 2 - Rappresentazione grafica della relazione y = k·x

La proporzionalità diretta è un caso particolare di **dipendenza lineare**.

Si dice che la grandezza* y *dipende linearmente dalla grandezza* x *(o, che è lo stesso, che tra* y *e* x *c’è una dipendenza lineare) se tra le due grandezze esiste una relazione del tipo

$$y = k \cdot x + q$$

con* k *e* q *valori costanti.

x	y
0,5	0,90
0,8	1,14
1,1	1,38
1,7	1,86
2,2	2,26

Tabella 3 - Dipendenza lineare

Se scriviamo la relazione nella forma equivalente:

$$y - q = k \cdot x$$

possiamo dire che c’è una proporzionalità diretta tra y-q e x.
Consideriamo per esempio le grandezze x e y i cui valori sono dati nella tabella 3.
Come si può verificare: y = 0,8·x + 0,5.

Graficamente una legge di dipendenza lineare viene rappresentata da una retta che non passa per l’origine degli assi (vedi figura 4).

Il valore q rappresenta l’ordinata del

x	y	Δx	Δy	k=Δy/Δx	q=y-kx
0,5	0,90	0,3	0,24	0,8	0,5
0,8	1,14	0,3	0,24	0,8	0,5
1,1	1,38	0,6	0,48	0,8	0,5
1,7	1,86	0,5	0,40	0,8	0,5
2,2	2,26				

Tabella 4 - Determinazione delle costanti nella dipendenza lineare punto in cui la retta taglia l'asse y, mentre il valore di k rappresenta la pendenza della retta.

La determinazione delle costanti può essere fatta come segue: si calcolano le differenze Δx tra i valori delle x (0,8 - 0,5 = 0,3; 1,1 - 0,8 = 0,3; ecc.) e Δy tra i valori delle y (1,14 - 0,90 = 0,24; 1,38 - 1,14 = 0,24; ecc.); si ha quindi

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad q = y - k \cdot x.$$

Nella tabella 4 riportiamo i risultati di tutti i calcoli.

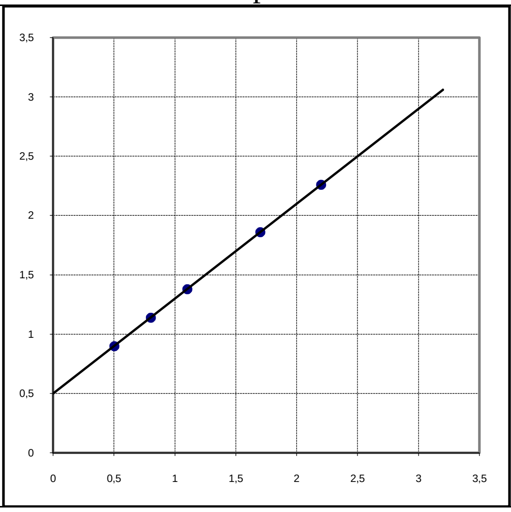


Figura 3 - Rappresentazione dei valori della tabella 4 con il tratto di parabola che unisce tutti i punti

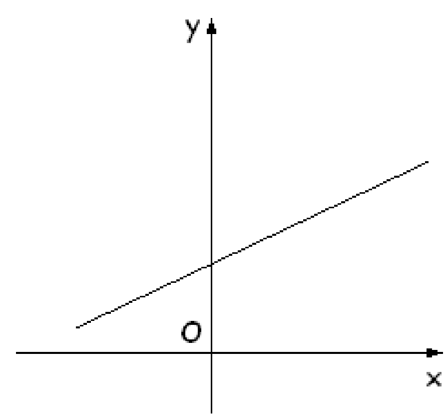


Figura 4 - Rappresentazione grafica della relazione y = k·x + q.

2.2 - La proporzionalità inversa

Due grandezze,* x *ed* y*, si dicono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante.

$$x \cdot y = k$$

Consideriamo per esempio le grandezze x e y i cui valori sono dati nella tabella 5. Come si può facilmente verificare, il prodotto tra i valori delle due grandezze è sempre lo stesso (lo indichiamo con la lettera k): k = 6,0. Concludiamo quindi dicendo che x e y sono inversamente proporzionali e possiamo scrivere

x	Y
1,2	5,00
1,5	4,00
1,6	3,75
2,4	2,50
4,8	1,25

Tabella 5 - Proporzionalità inversa

(10) $$y = \frac{k}{x}$$

con k = 6,0 o, più semplicemente $y = \frac{6,0}{x}$.

2.3 - La proporzionalità quadratica.

Si dice che tra due grandezze,* x *ed* y*, c'è una proporzionalità quadratica se è costante il rapporto tra una di esse e il quadrato dell'altra.

$$\frac{y}{x^2} = k$$

Consideriamo per esempio le grandezze x e y i cui valori sono dati nella tabella 6. Come si può verificare, il rapporto tra i valori della grandezza y e i quadrati dei corrispondenti valori della grandezza x danno sempre lo stesso valore: k = 0,5. Concludiamo quindi dicendo che y è direttamente proporzionale al quadrato di x

x	y
0,6	0,18
0,8	0,32
1,4	0,98
2,0	2,00
2,2	2,42

Tabella 6 - Proporzionalità quadratica

e possiamo scrivere

(11) $$y = k \cdot x^2$$

con k = 0,5; oppure $y = 0,5 \cdot x^2$.

Se riportiamo su di un grafico i valori della tabella 6, risulta che la linea che li unisce è un tratto di parabola (vedi figura 7), più in generale, la relazione (11), su di un piano cartesiano, è rappresentata da una parabola che passa per l'origine degli assi cartesiani e che ha la concavità rivolta verso l'alto (vedi figura 8).

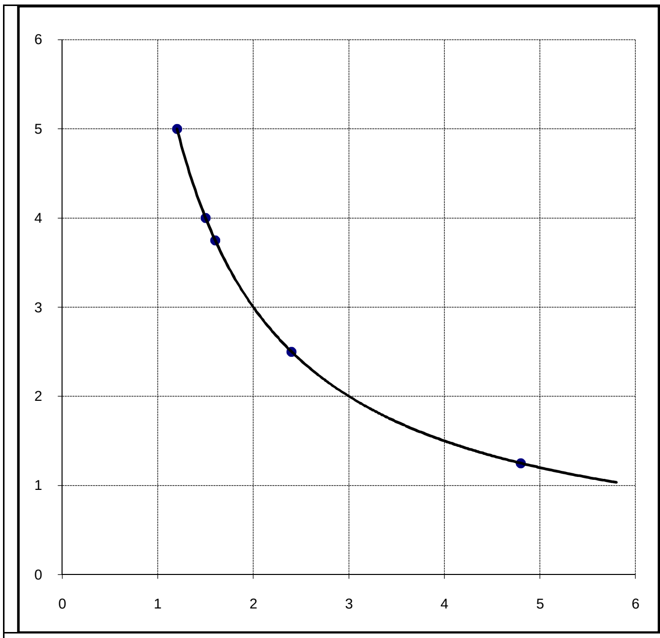


Figura 5 - Rappresentazione dei valori della tabella 5 con l'iperbole equilatera che unisce tutti i punti

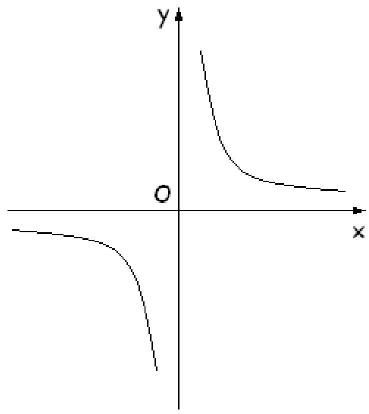


Figura 6 - Rappresentazione grafica della relazione y = k/x, con k>0; il ramo di sinistra corrisponde a valori di x< 0.

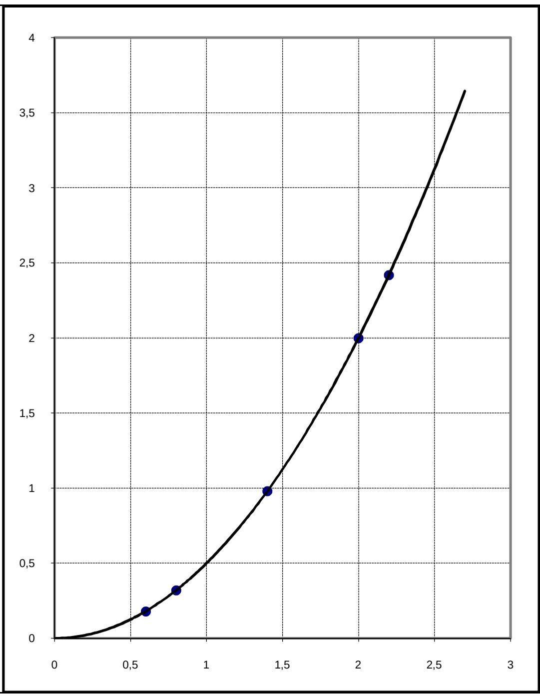


Figura 7 - Rappresentazione dei valori della tabella 6 con il tratto di parabola che unisce tutti i punti

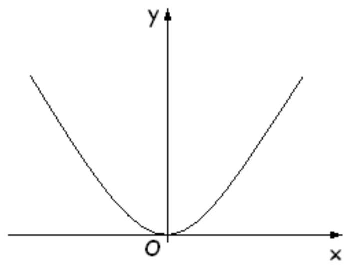


Figura 8 - Rappresentazione grafica della relazione $y = k \cdot x^2$.

Ovviamente esistono infiniti tipi di leggi matematiche, ma per il momento ci limitiamo a quelle esposte sopra perché sufficienti per comprendere molti fenomeni fisici. Quando se ne presenterà l'occasione ne introdurremo altre.

3 - UN ESEMPIO DI DETERMINAZIONE DI UNA LEGGE FISICA

Iniziamo con un primo esempio di determinazione di una legge fisica.

Tutti sappiamo che se prendiamo due pezzetti di uno stesso metallo e di diverso volume, quello più grande ha una massa maggiore. Vogliamo appunto provare che tra la massa e il volume di un metallo c'è una proporzionalità diretta. In altre parole vogliamo calcolare la densità δ di un certo metallo.

Questo è in effetti il lavoro che abbiamo fatto in laboratorio: abbiamo preso 4 serie di 10 cilindretti (una di ferro, una di rame, una di ottone, una di alluminio). I dieci cilindretti di ogni serie avevano lo stesso diametro, ma altezze diverse. Studenti diversi, con il calibro, hanno misurato diametro e altezza di uno stesso cilindretto arrivando a determinarne i valori con le relative incertezze. Per la massa si è utilizzata una bilancia elettronica che permette di apprezzare il centesimo di grammo. È stato quindi calcolato il volume di ogni cilindretto e, tenendo conto delle incertezze[7], abbiamo realizzato delle tabelle (di seguito riportiamo solo la tabella e i calcoli effettuati per i cilindretti di ferro).

m (g)	Δm (g)	V (cm^3)	ΔV (cm^3)	k (g/cm^3)	Δk (g/cm^3)	k-Δk (g/cm^3)	k+Δk (g/cm^3)
22,44	0,01	3,08	0,06	7,2857	0,1452	7,1405	7,4309
27,98	0,01	3,83	0,07	7,3055	0,1361	7,1694	7,4416
33,50	0,01	4,55	0,08	7,3626	0,1317	7,2309	7,4943
39,67	0,01	5,40	0,09	7,3463	0,1243	7,2220	7,4706
44,97	0,01	6,14	0,11	7,3241	0,1328	7,1913	7,4569
50,66	0,01	6,90	0,11	7,3420	0,1185	7,2235	7,4605
56,03	0,01	7,65	0,12	7,3242	0,1162	7,2080	7,4404
62,01	0,01	8,44	0,15	7,3472	0,1318	7,2154	7,4790
67,69	0,01	9,23	0,15	7,3337	0,1203	7,2134	7,4540
73,33	0,01	10,00	0,16	7,3330	0,1183	7,2147	7,4513

Tabella 7 - Determinazione della legge di proporzionalità tra densità e volume dei cilindretti di ferro

Per ogni cilindretto abbiamo quindi calcolato il rapporto tra la massa e il volume (nella tabella lo abbiamo indicato con k) e, sempre tenendo conto della propagazione delle incertezze abbiamo calcolato l'incertezza Δk[8]; si noti che nei calcoli abbiamo conservato più cifre decimali di quelle strettamente necessarie per migliorare la precisione del risultato[9]). A questo punto ci si è chiesti se i risultati ottenuti fossero compatibili, cioè se esistesse in intervallo di valori di k comune

[7] Per quanto riguarda la determinazione delle incertezze: più studenti hanno misurato le dimensioni dello stesso cilindretto e quindi fatto le medie e determinato le incertezze. Per il calcolo dell'incertezza sul volume abbiamo utilizzato le regole per la propagazione dell'errore in base alle quali si può dimostrare che se il diametro d è dato con un'incertezza Δd e l'altezza h con un'incertezza Δh, allora il volume è $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$ e l'incertezza $\Delta V = \frac{\pi}{4}\left(2dh\Delta d + d^2 \Delta h\right)$.

[8] L'incertezza sulla densità è data da $\Delta k = \frac{V\Delta m + m\Delta V}{V^2}$, che scaturisce dalle regole di propagazione delle incertezze in un rapporto.

[9] In effetti, in questi appunti, i calcoli sono stati tutti effettuati con Excel.

a tutti i cilindretti. A tal fine abbiamo calcolato gli intervalli (k-Δk, k+Δk) ed abbiamo osservato che l'intervallo (7,2309; 7,4309) è comune, quindi le misure sono compatibili.

Per stabilire il valore della densità del ferro abbiamo fatto la media di tutti i valori di k; per l'incertezza abbiamo calcolato la media dei valori di Δk[10]. Il risultato ottenuto è:

$$\delta = (7,33 \pm 0,13)\ g/cm^3.$$

Il risultato è buono in quanto l'incertezza è abbastanza piccola (1,8% circa). Gli stessi calcoli sono stati effettuati per gli altri cilindretti ottenendo lo stesso buoni risultati.

Possiamo quindi affermare che, ENTRO GLI ERRORI DI MISURA, TRA LA DENSITA' E IL VOLUME DI QUESTI CILINDRETTI C'E' PROPORZIONALITA' DIRETTA.

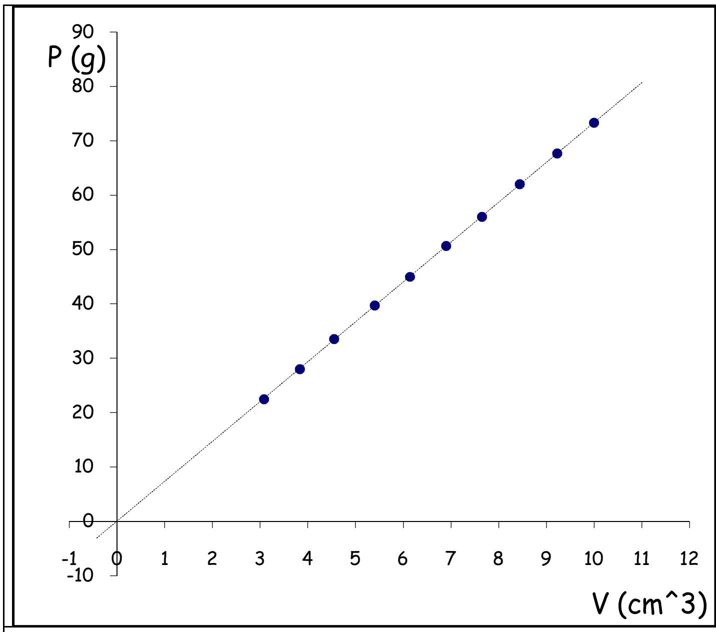


Figura 9 - Rappresentazione dei valori della densità e del volume della tabella 7. Come si può vedere anche graficamente la relazione è una proporzionalità diretta.

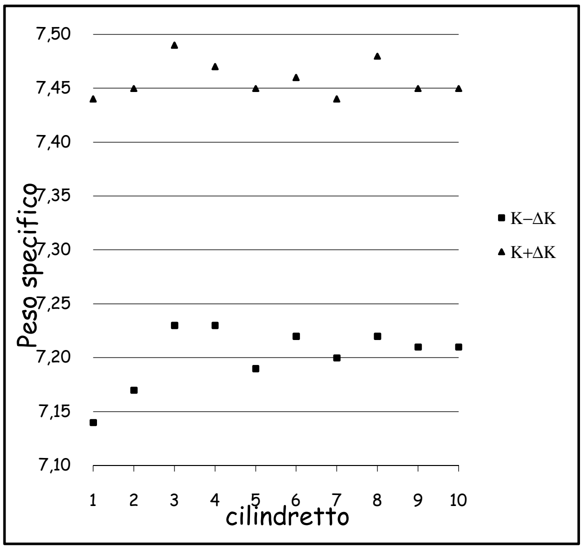


Figura 10 - Riportando in un grafico, per ogni cilindretto, il valore di k-Δk e di k+Δk, si può osservare che esiste un intervallo comune e che quindi le determinazioni di k (densità) sono compatibili.

C'è però da fare un'ultima osservazione molto importante. Sulla base del nostro risultato, possiamo affermare che la densità del ferro è (7,33 ± 0,13) g/cm^3? Purtroppo in qualunque libro di fisica troviamo che la densità del ferro è 7,86 g/cm^3 [11] del tutto incompatibile con il valore da noi trovato. In una situazione come questa è necessario rivedere tutte le misure e tutti i calcoli fatti; nonostante questo[12], nel nostro caso il risultato non è cambiato. Dobbiamo quindi concludere che i nostri cilindretti non sono di ferro puro.

[10] Sarebbe meglio utilizzare la deviazione standard $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2}$ dove N è il numero di osservazioni (10) e m la media.

[11] Ricordo che in questo caso, non essendo specificato l'errore, si deve intendere che esso cade sull'ultima cifra decimale, cioè (7,86 ± 0,01) g/cm^3.

[12] Ricordo che nel nostro caso abbiamo anche notato che i cilindretti erano leggermente smussati, ma che la quantità di volume che mancava era minore dell'errore calcolato nella misura del volume stesso e quindi non influente ai fini del risultato.

4 - RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI DATI SPERIMENTALI

Come è stato ricordato, i dati sperimentali sono affetti da incertezze e in una rappresentazione grafica si deve tener conto anche di queste. Tenendo presente che la misura con la sua incertezza rappresenta un intervallo di valori possibili, in un sistema di riferimento cartesiano i valori delle grandezze non definiranno un punto, ma un rettangolo all'interno del quale ci sono i possibili valori della coppia (x,y).

Per comprendere il procedimento rappresenteremo i dati della tabella (1).

Per avere dei grafici il più possibile precisi si devono usare dei fogli di carta millimetrata, una matita con una punta molto fine, una riga che abbia una lunghezza almeno pari alla diagonale del foglio di carta millimetrata, una gomma e materiale da disegno in genere.

Nella rappresentazione grafica dei dati è necessario procedere attraverso la seguente serie di passi.

1 - **Orientare il foglio**

Poiché il foglio è rettangolare, per prima cosa è necessario orientarlo (in orizzontale o in verticale) a seconda delle misure da rappresentare. In ciò ci si regola tenendo conto del principio generale secondo il quale il grafico deve essere il più grande possibile. Contando i centimetri del foglio di carta millimetrata della figura 11, vediamo che ce ne sono 25 in verticale e 17 in orizzontale, il numero dipende dalle dimensioni del foglio. Nel nostro esempio, visto che i valori della grandezza y arrivano fino a 21,5 mentre quelli della x fino a 7,4 conviene mettere il foglio in verticale e sul lato orizzontale (in basso) rappresenteremo la x, mentre su quello verticale (a sinistra) la y. Possiamo quindi assumere questa regola generale: rappresentiamo sul lato più lungo la grandezza che assume i valori maggiori.

2 - **Definire la scala**

In genere le grandezze da rappresentare non sono dello stesso tipo e certamente non sono sempre centimetri; è quindi necessario stabilire a cosa corrisponde 1 cm sulla carta millimetrata, sia in orizzontale sia in verticale. Dobbiamo cioè definire il fattore di scala sia per l'asse x (lo indicheremo fsx), sia per l'asse y (lo indicheremo fsy). Vale la seguente proporzione:

$$\frac{\text{Valore massimo da rappresentare}}{\text{Numero cm}} = \frac{\text{fs}}{1\ \text{cm}}$$

Quando si valuta il massimo valore bisogna tener conto anche dell'incertezza. Nel nostro caso, per l'asse x, si ha: $\frac{7{,}8}{17\ \text{cm}} = \frac{\text{fsx}}{1\ \text{cm}}$ da cui segue: $\text{fsx} = \frac{7{,}8}{17} = 0{,}45882...$ È sempre bene approssimare il fs ad un numero tipo 0,1; 0,2; 0,5 o addirittura alle unità, ma **l'approssimazione deve essere fatta sempre per eccesso** (se approssimiamo per difetto il valore massimo non entra nel foglio). Nel nostro caso conviene prendere fsx = 0,5.

Facendo i calcoli si può vedere facilmente che sull'asse y conviene fsy = 1.

Tabella 8 - Ricalcalo dei dati sperimentali per la rappresentazione grafica

x (cm)	y (cm)
1,8 ± 0,2	3,6 ± 0,1
5,4 ± 0,2	8,8 ± 0,2
7,0 ± 0,4	10,4 ± 0,2
8,2 ± 0,4	13,1 ± 0,3
10,6 ± 0,6	16,3 ± 0,3
13,0 ± 0,6	20,0 ± 0,4
14,8 ± 0,8	21,5 ± 0,4

3 - **Rappresentare i dati**

Dopo aver determinato i fattori di scala fsx e fsy è consigliabile costruire una nuova tabella dove i valori dei dati sperimentali siano espressi nei centimetri da riportare sulla carta millimetrata (tabella 8); se ne può fare a meno, ma bisogna stare molto attenti a rappresentare correttamente i valori. I nuovi valori di x si ottengono dividendo quelli dati nella tabella 1 per fsx, cioè per 0,5 (in questo caso risultano moltiplicati per 2), quelli di y dividendo per fsy, cioè per 1 (in questo caso rimangono invariati).

ATTENZIONE: Vanno calcolati anche i nuovi valori delle incertezze.

Nella figura 11 si può vedere il risultato finale di queste operazioni. (Si eviti di tracciare troppe righe).

5 - ANALISI GRAFICA DEI DATI E DETERMINAZIONE DELLA LEGGE FISICA

Il procedimento illustrato nel paragrafo precedente è valido in generale indipendentemente dal tipo di relazione che si ricerca. Il passo successivo è la determinazione di questa relazione; si può procedere in due modi: un modo grafico e un modo numerico (nel paragrafo 3 abbiamo già visto qualcosa). In questo paragrafo descriveremo il procedimento grafico, nel paragrafo successivo quello numerico[13].

5.1 - Proporzionalità diretta e dipendenza lineare.

La determinazione della proporzionalità diretta o della dipendenza lineare è simile, basta osservare che la proporzionalità diretta altro non è che una dipendenza lineare in cui q = 0. Ci riferiremo quindi solo alla dipendenza lineare.

Una prima analisi deve essere fatta "ad occhio", nel senso che bisogna stabilire, anche con l'aiuto di una riga, se attraverso i rettangoli disegnati passa una linea retta. Nel nostro caso si vede facilmente che i rettangoli dei dati si dispongono lungo una linea che però non passa per l'origine: tra la y e la x cercheremo quindi una dipendenza lineare, una relazione del tipo:

$$y = k \cdot x + q.$$

Un'altra considerazione da fare è che i nostri valori sono affetti da incertezza, quindi anche i valori di k e q dovranno essere determinati con le relative incertezze; cercheremo quindi:

$$k = \bar{k} \pm \Delta k \qquad \text{e} \qquad q = \bar{q} \pm \Delta q\,.$$

Per prima cosa, con la riga, bisogna individuare e disegnare le rette che, passando attraverso tutti i rettangoli (o se non è possibile tutti, la maggior parte di essi), hanno l'inclinazione massima (k_{MAX}) e quella minima (k_{MIN}). Queste incontrano l'asse y in due punti che sono rispettivamente q_{MIN} e q_{MAX} (vedi figura 11).

Dal grafico si ricava che: $q_{MIN} = 0{,}4$ e $q_{MAX} = 1{,}6$. Quindi possiamo ricavare q:

$$\bar{q} = \frac{q_{MAX} + q_{MIN}}{2} = \frac{1{,}6 + 0{,}4}{2} = 1{,}0 \qquad \text{e} \qquad \Delta q = \frac{q_{MAX} - q_{MIN}}{2} = \frac{1{,}6 - 0{,}4}{2} = 0{,}6$$

Per la determinazione di k invece scegliamo due valori di x a piacere, li indichiamo con x_1 e x_2 (possono essere anche due dei valori assegnati); abbiamo scelto $x_1 = 1{,}0$ e $x_2 = 6{,}5$. Sul grafico troviamo i corrispondenti valori di y sia sulla retta che corrisponde a k_{MAX} (li indichiamo con y_1 e y_2 e nel nostro caso abbiamo $y_1 = 3{,}5$ e $y_2 = 20{,}4$) sia su quella che corrisponde a k_{MIN} (li indichiamo con y_3 e y_4 e abbiamo $y_3 = 4{,}2$ e $y_4 = 18{,}8$)[14]. I valori di k_{MAX} e k_{MIN} verranno ricavati dalle relazioni:

[13] Daremo dei metodi numerici che si basano su semplici calcoli alla portata di studenti del primo anno del liceo scientifico. Esistono delle tecniche matematiche molto più sofisticate che si basano su calcoli statistici alcune delle quali verranno illustrate in quarto o in quinto.

[14] Per determinare y_3 e y_4 non è necessario prendere gli stessi valori x_1 e x_2, si potrebbero prendere altri due valori x_3 e x_4. La scelta è dettata solo dalla convenienza.

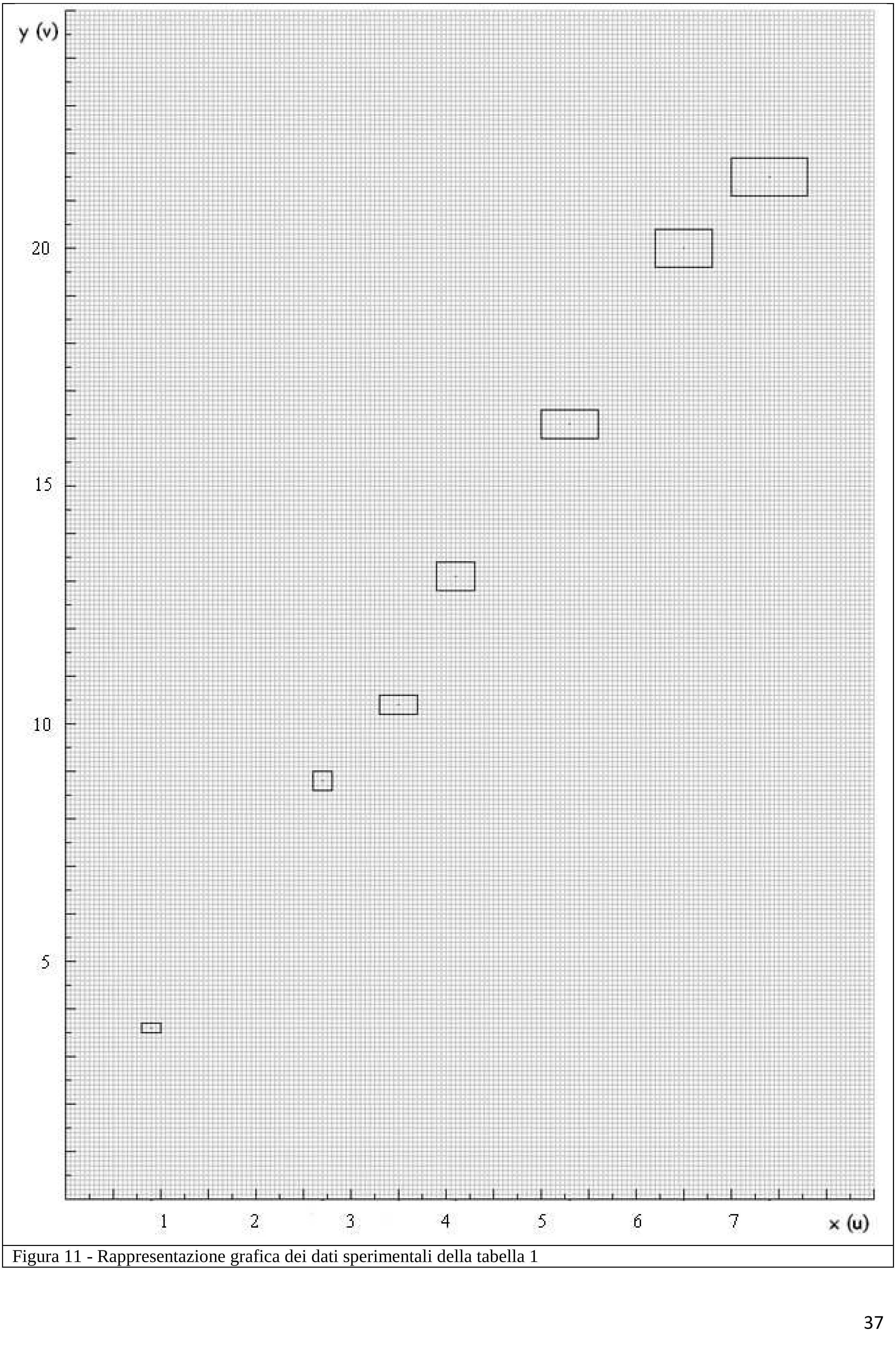


Figura 11 - Rappresentazione grafica dei dati sperimentali della tabella 1

$$k_{MAX} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20,4 - 3,5}{6,5 - 1,0} = \frac{16,9}{5,5} = 3,0727...$$[15]

e

$$k_{MIN} = \frac{y_4 - y_3}{x_2 - x_1} = \frac{18,8 - 4,2}{6,5 - 1,0} = \frac{14,6}{5,5} = 2,6545...$$

Da questi si ricava k:

$$\bar{k} = \frac{k_{MAX} + k_{MIN}}{2} = \frac{3,0727... + 2,6545...}{2} = 2,8636...$$

e

$$\Delta k = \frac{k_{MAX} - k_{MIN}}{2} = \frac{3,0727... - 2,6545...}{2} = 0,2091... \cdot\sim 0,2$$[16].

Concludiamo dicendo che la legge che lega i valori della tabella 1 è una dipendenza lineare del tipo:

$$y = k \cdot x + q$$

con

$k = (2,9 \pm 0,2)(v/u)$ e $q = (1,0 \pm 0,6)v$[17].

5.2 - Proporzionalità inversa.

Per la determinazione della legge di proporzionalità inversa mediante la rappresentazione grafica, si procede come segue: dopo avere stabilito graficamente che si tratta di una legge di proporzionalità inversa (il grafico "assomiglia" a un ramo di iperbole), si costruisce quindi una tabella (vedi tabella 9) dove è stata introdotta una nuova variabile che abbiamo chiamato z e che è $z = \frac{1}{x}$. Ovviamente della nuova variabile devono essere calcolati anche gli errori Δz[18]. Si costruisce quindi il grafico y, z. Ricordando che stiamo cercando una legge del tipo $y = \frac{k}{x}$ e avendo posto $z = \frac{1}{x}$, si può determinare una legge del tipo $y = k \cdot z$, cioè una proporzionalità diretta. Procedendo nel modo illustrato nel paragrafo precedente si determina il valore di k.

Tabella 9 - Ricalcalo dei dati sperimentali per determinare la legge di proporzionalità inversa

z = 1/x	y

[15] E' opportuno scrivere questi risultati parziali con un numero di cifre significative maggiore del necessario; alla fine del calcolo si faranno le approssimazioni necessarie

[16] In base alle regole che abbiamo stabilito bisognerebbe esprimere l'errore su k con due cifre significative (visto che la prima cifra è un 2); poiché però l'errore sulle grandezze x e y è dato con una sola cifra significativa, possiamo esprimerlo con una sola cifra significativa.

[17] Attenzione: sia k che q sono delle grandezze che hanno la loro unità di misura, durante i calcoli sono state omesse, ma alla fine vanno indicate. Per la precisione: k, essendo il rapporto di y diviso x, ha come unità di misura il rapporto dell'unità di misura di y diviso quella di x; q ha la stessa unità di misura di y.

[18] Dalle regole della propagazione dell'errore si ricava che $\Delta z = \frac{\Delta x}{x^2}$

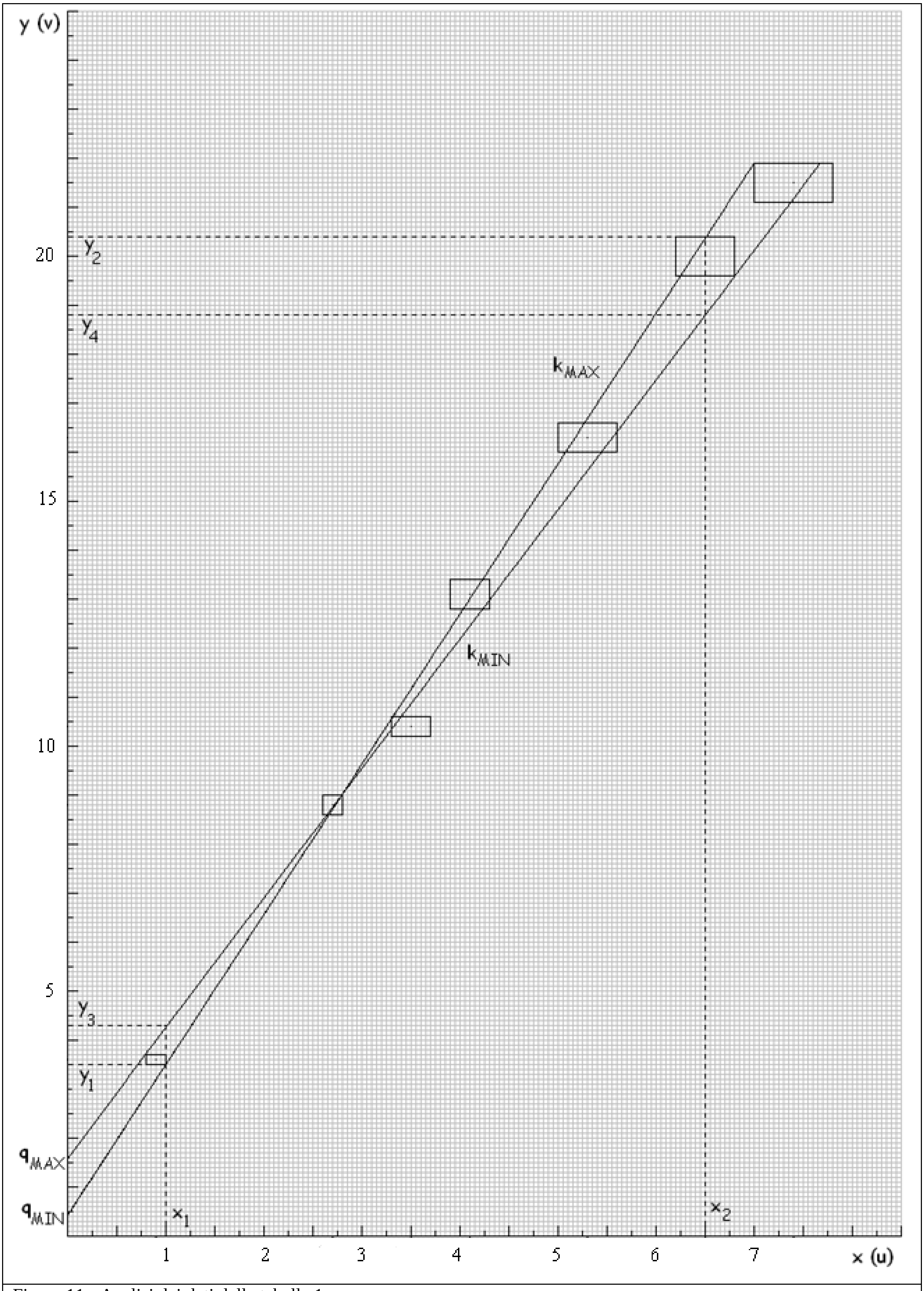


Figura 11 - Analisi dei dati della tabella 1

5.3 - Proporzionalità quadratica.

Tabella 10 - Ricalcalo dei dati sperimentali per determinare la legge di proporzionalità quadratica	
$z = x^2$	y

Allo stesso modo si procede per determinare una legge di proporzionalità quadratica; con la differenza che, cercando una legge del tipo $y = k \cdot x^2$, si dovrà calcolare una tabella tipo la tabella 10 dova ancora una volta è stata introdotta una nuova variabile z che è $z = x^2$. Anche in questo caso vanno calcolati gli errori Δz[19], si costruisce il grafico y, z e si cerca una legge del tipo $y = k \cdot z$, cioè una proporzionalità diretta. Procedendo nel modo illustrato nel paragrafo 5.1 si determina il valore di k.

6 - ANALISI NUMERICA DEI DATI E DETERMINAZIONE DELLA LEGGE FISICA

Come detto sopra l'analisi dei dati sperimentali può essere fatta anche per via numerica. Dopo aver rappresentato graficamente i dati ed aver individuato il tipo di relazione che meglio si adatta ad essi (proporzionalità diretta, inversa, quadratica o dipendenza lineare), si procede numericamente rielaborando i dati a partire dalle tabelle. Nel paragrafo 3 abbiamo già dato un esempio, in questo generalizzeremo il metodo.

Il computer, con un programma di foglio elettronico tipo Excel, aiuta notevolmente in questo lavoro, ma prima impararne l'uso procederemo manualmente con degli esempi.

6.1 - Proporzionalità diretta e dipendenza lineare[20]

Riprendiamo la tabella 1 ed ampliamola aggiungendo quattro colonne. Nella prima mettiamo in valori degli scarti delle x (il secondo valore meno il primo: 2,7 - 0,9 = 1,8; il terzo meno il secondo: 3,5 - 2,7 = 0,8; ecc.), nella seconda i valori degli scarti delle y (il secondo valore meno il primo: 8,8 - 3,6 = 5,2; il terzo meno il secondo: 10,4 - 8,8 = 1,6; ecc.), che indichiamo Dx e Dy, nella terza i valori dei rapporti k = Dy/Dx. Quindi calcoliamo il valor medio di k facendo la media dei valori della quinta colonna e l'errore $\Delta k = \frac{k_{MAX} - k_{MIN}}{2}$. Nella sesta colonna mettiamo i valori di q calcolati con la relazione $q = y - \bar{k} \cdot x$ (il primo valore deriva dal calcolo: 3,6 - 2,8·0,9). Infine si fa la media tra tutti i valori della colonna 6 e si ottiene il valore medio di q. L'errore di q si calcola: $\Delta q = \frac{q_{MAX} - q_{MIN}}{2}$.

Tabella 11 - Determinazione semplificata della dipendenza lineare tra due grandezze fisiche

x	y	Dx	Dy	k	q
0,9 ± 0,1	3,6 ± 0,1	1,8	5,2	2,889	0,99
2,7 ± 0,1	8,8 ± 0,2	0,8	2,3	2,875	0,97
3,5 ± 0,2	11,1 ± 0,2	0,6	2,0	3,333	0,95
4,1 ± 0,2	13,1 ± 0,3	1,2	3,2	2,667	1,21
5,3 ± 0,3	16,3 ± 0,3	1,2	3,7	3,083	0,93
6,5 ± 0,3	20,0 ± 0,4	0,9	2,5	2,778	1,15
7,4 ± 0,4	22,5 ± 0,4				1,04
		valori medi		2,9	1,03
		incertezze		0,3	0,14

[19] Dalle regole della propagazione dell'errore si ricava che $\Delta z = 2x\Delta x$

[20] Questo non è il modo migliore per arrivare alla determinazione della legge, ma è l'unico che al momento possiamo applicare. Gli altri presentano delle complessità di tipo matematico al di sopra delle conoscenze di uno studente di primi ani del Liceo Scientifico.

Nei calcoli è consigliabile utilizzare qualche cifra decimali in più, le approssimazioni vengono fatte alle fine. Nel caso in esame, dopo aver determinato Δk, è stato espresso il valore di k. Successivamente sono stati calcolati i valori di q.

Come si può osservare i valori di k e q sono compatibili con quelli ricavati con il metodo grafico.

Il caso della proporzionalità diretta dà q = 0.

6.2 - Proporzionalità inversa

Si consideri la tabella di dati sperimentali data qui sotto. Il procedimento è identico a quello utilizzato per determinare la densità dei cilindretti, riportato nel paragrafo 3 con la differenze che invece di fare il rapporto tra le grandezze, bisogna fare il prodotto. Si completa quindi la tabella con il calcolo dei valori di k e di Δk. Le colonne con i valori di k-Δk e k+Δk servono per stabilire se le misure sono compatibili: il ragionamento è identico a quello già illustrato (nel caso dei valori della tabella 12 c'è compatibilità).

Per il valor medio di k facciamo la media tra tutti i valori ottenuti, per l'errore assoluto la media degli errori assoluti. Si ha quindi che la legge cercata è una legge di proporzionalità l'errore per averne una stima si ottiene che la legge è una proporzionalità inversa $y = \frac{k}{x}$ con k = 5,04 ± 0,05.

Tabella 12 - Determinazione della proporzionalità inversa.

x	Δx	y	Δy	k = xy	Δk	k-Δk	k+Δk
1,81	0,01	2,79	0,01	5,050	0,046	5,004	5,096
2,24	0,01	2,23	0,01	4,995	0,045	4,950	5,040
2,89	0,01	1,75	0,01	5,058	0,046	5,012	5,104
3,70	0,01	1,37	0,01	5,069	0,051	5,018	5,120
4,07	0,01	1,23	0,01	5,006	0,053	4,953	5,059

5.3 - Proporzionalità quadratica

In laboratorio sono state fatte le seguenti misure relative al tempo che una pallina impiega a cadere da un'altezza h. Per ogni altezza fissata (misurata in metri) sono state fatte 5 misure del tempo di caduta con un cronometro elettronico (espresso in secondi). I valori ottenuti sono stati riportati nella tabella 13.

Tabella 13 - Dati di laboratorio della caduta di una pallina da varie altezze

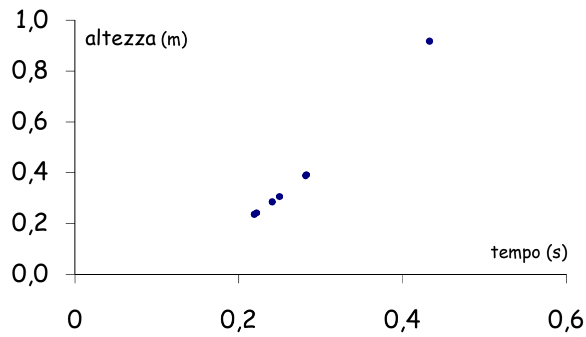
h	t1	t2	t3	t4	t5
0,235	0,21893	0,21903	0,21899	0,21894	0,21895
0,241	0,22179	0,22176	0,22173	0,22177	0,22174
0,284	0,24100	0,24099	0,24098	0,24096	0,24099
0,305	0,24966	0,24973	0,24966	0,24969	0,24974
0,388	0,28154	0,28157	0,28154	0,28154	0,28163
0,391	0,28248	0,28250	0,28247	0,28245	0,28246
0,917	0,43270	0,43266	0,43270	0,43269	0,43269

Dalla tabella 13 è stata ricavata una seconda tabella (tabella 14) in cui i dati sono stati ridotti, ovvero sono state effettuate delle medie e stimati gli errori.

Tabella 14 - Dati ridotti della caduta di una pallina

h (m)		t (s)	
0,235	0,001	0,21897	0,00005
0,241	0,001	0,22176	0,00003
0,284	0,001	0,24098	0,00002
0,305	0,001	0,24970	0,00004
0,388	0,001	0,28156	0,00004
0,391	0,001	0,28247	0,00002
0,917	0,001	0,43269	0,00002

Figura 12 - Grafico relativo ai dati della tabella 14



Per determinare la legge fisica che lega questi valori aggiungiamo delle colonne alla tabella (tabella 15). Dal grafico si intuisce che non può trattarsi di una relazione lineare perché è evidente che se h = 0, anche t = 0, né di una proporzionalità diretta o inversa, ricerchiamo quindi una proporzionalità quadratica e calcoliamo il rapporto h/t^2 (vedi tabella 15). Come si può osservare questi valori sono molto simili, calcoliamo gli errori relativi su h e su t, Er(h) e Er(t), e l'errore relativo su k [Er(k) = Er(h) + 2Er(t)]; infine calcoliamo l'errore assoluto Δk. Dalla media dei valori di k e di Δk otteniamo il risultato cercato: k = (4,897 ± 0,015) m/s^2.

Tabella 15 - Dati ridotti della caduta di una pallina e calcoli per determinare la costante di proporzionalità e l'incertezza

h (m)	Δh (m)	t (s)	Δt (s)	$k=h/t^2$ (m/s^2)	Er(h)	Er(t)	Er(k)	Δk (m/s^2)
0,241	0,001	0,22176	0,00003	4,900615	0,0041	0,000125	0,00442	0,02166
0,284	0,001	0,24098	0,00002	4,890535	0,0035	0,000083	0,00369	0,01805
0,305	0,001	0,2497	0,00004	4,891733	0,0033	0,000160	0,00360	0,01761
0,388	0,001	0,28156	0,00004	4,894291	0,0026	0,000142	0,00286	0,01400
0,391	0,001	0,28247	0,00002	4,900406	0,0026	0,000071	0,00270	0,01323
0,917	0,001	0,43269	0,00002	4,897964	0,0011	0,000046	0,00118	0,00578

APPENDICE 2
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA E ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI CON EXCEL

1 – RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Per l'analisi dati con Excel si fa riferimento alla versione 2007 di Office, le versioni successive non differiscono di molto.

Per prima cosa effettuiamo una rappresentazione grafica dei dati di laboratorio, come riferimento prendiamo una serie di misure fittizie, x e y con i corrispondenti errori Δx e Δy e unità di misura arbitrarie [v] e [u]. Nella tabella di figura 1 sono riposrtati i valori.

1.1 – Tabella dei dati e calcolo degli errori

Dopo aver aperto Excel riportiamo i valori delle variabili x ed y e dei corrispondenti errori come indicato nella figura 1 (nelle colonne A e C i valori, nelle colonne B e D gli errori).

	A	B	C	D
1	y	Δy	x	Δx
2	[u]	[u]	[v]	[v]
3	9,9	0,5	0,4	0,1
4	19,9	1,0	0,7	0,1
5	30,0	1,5	1,2	0,1
6	39,9	2,0	1,5	0,1
7	49,9	2,5	2	0,1
8	60,1	3,0	2,4	0,1
9	70,1	3,5	2,8	0,1
10	80,1	4,0	3,1	0,1
11	90,2	4,5	3,6	0,1
12	100,2	5,0	4	0,2
13	110,2	5,5	4,4	0,2
14	120,2	6,0	4,8	0,2
15	130,3	6,5	5,2	0,2
16	140,2	7,0	5,6	0,2
17	150,2	7,5	6	0,2
18	160,2	8,0	6,4	0,2
19	170,2	8,5	6,9	0,2
20	180,2	9,0	7,3	0,2
21	190,1	9,5	7,7	0,2
22	200,1	10,0	8,1	0,2

Figura 1 – Tabella delle misure.

1.2 – Rappresentzione grafica

Per rappresentare graficamente i dati riportati nella tabella procediamo come segue:

- cliccare sull'icona del grafico, o, nel menu INSERISCI e quindi GRAFICO a dispersione 

.
- dal menu cliccare su SELEZIONA DATI 

,
- appare la finesta di figura 2,
- cliccare su Aggiungi
- appare una nuova finestra (vedi figura 3)
- cliccare su  di Valori X serie
- compare 

- selezionare sul foglio di lavoro i valori da inserire sull'asse delle ascisse, nel nostro caso i valori contenuti nelle caselle C3:C22
- cliccare su 
- ripetere la stessa operazione per i dati da inserire sull'asse delle ordinate
- compare il grafico grezzo di figura 4
- l'asse X, nel nostro caso la tensione, al termine dell'operazione nella zona bianca compare l'indirizzo della zona selezionata
- clicca Ok per uscire dalle varie finestre aperte

Per ripulire il grafico è necessario effettuare le seguenti operazioni:

- cliccare sull'icona del menu grafico 

, appare la finestra di figura 5

- cliccare su grafico a dispersione (XY) e quindi selezionare  .

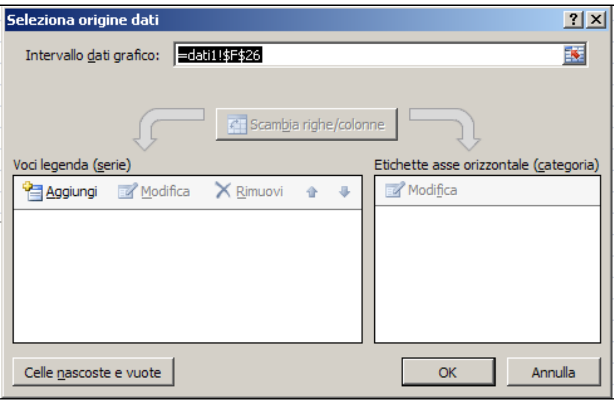


Figura 2 – Finestra Excel per la selezione dei dati

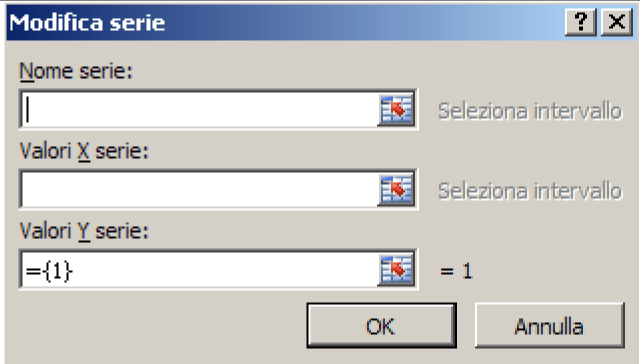


Figura 3 – Finestra Excel per la selezione dei dati

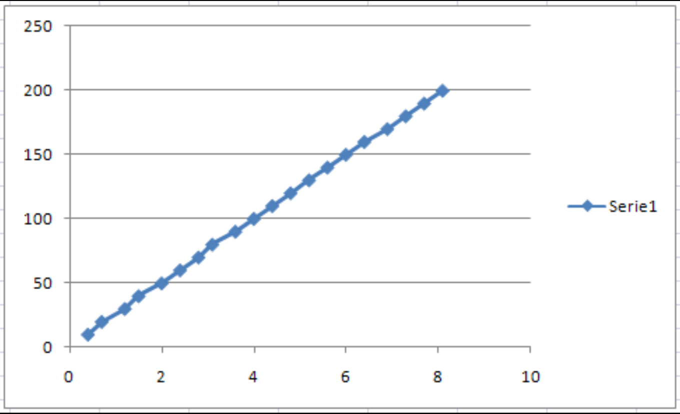


Figura 4 – Finestra Excel grafico grezzo

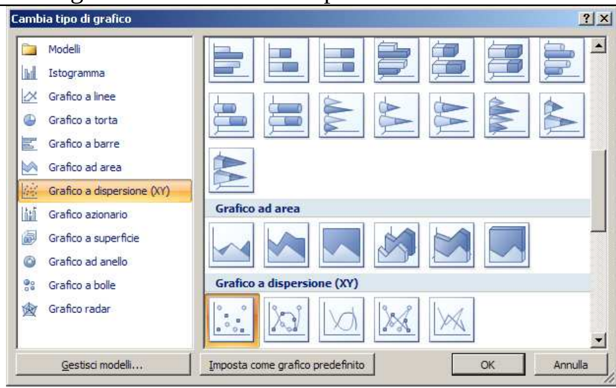


Figura 5 – Finestra Excel per la selezione del tipo di grafico

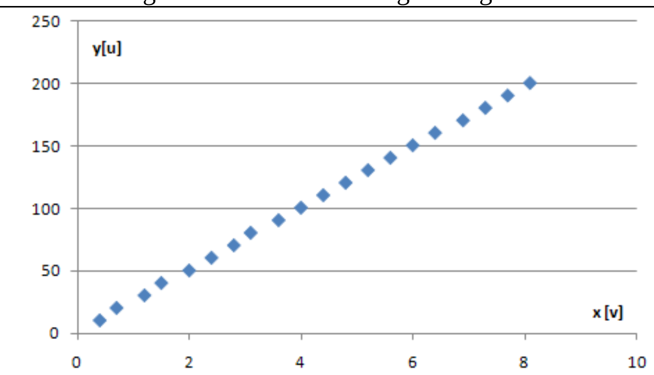


Figura 6 – Titoli sugli assi

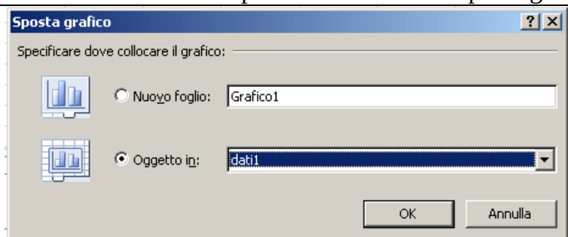
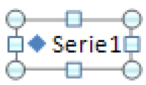


Figura 7 – Sposta grafico

- Cliccare sopra 

e quando diventa 

cancellare con il tasto [Canc]

- Per aggiungere i titoli degli assi cliccare su 

Layout e quindi su 

; selezionare e aggiunge i titoli al termine dell'operazione si ottiene un grafico come quello di figura 6.
- cliccando con il tasto destro del mouse sul grafico appare un menu a tendina in cui è possibile selezionare [sposta grafico], cliccando con il tasto sinistro appare il menu di figura 7
- mettere la spunta su Nuovo foglio, inserire un nome e clicare OK

1.3 – Inserimento delle barre d'errore

Procediamo ora all'inserimento nel grafico delle barre d'errore, sia per i valori della x, sia per quelli della y.

- Cliccare su Layout del menu 

Strumenti grafico
- cliccare su 

e scegliere "Altre opzioni barre di errore" appare il menu di figura 8.

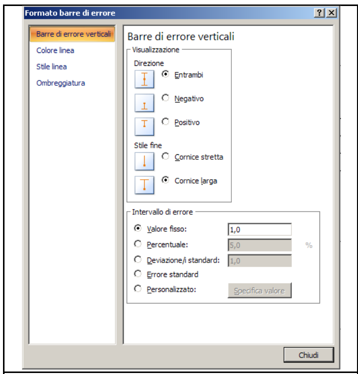


Figura 8 – Menu per le barre d'errore verticali

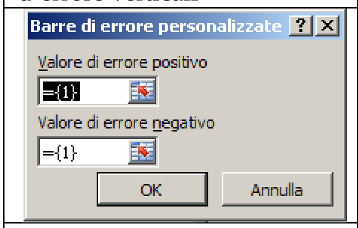


Figura 9 – Inserimento barre di errore

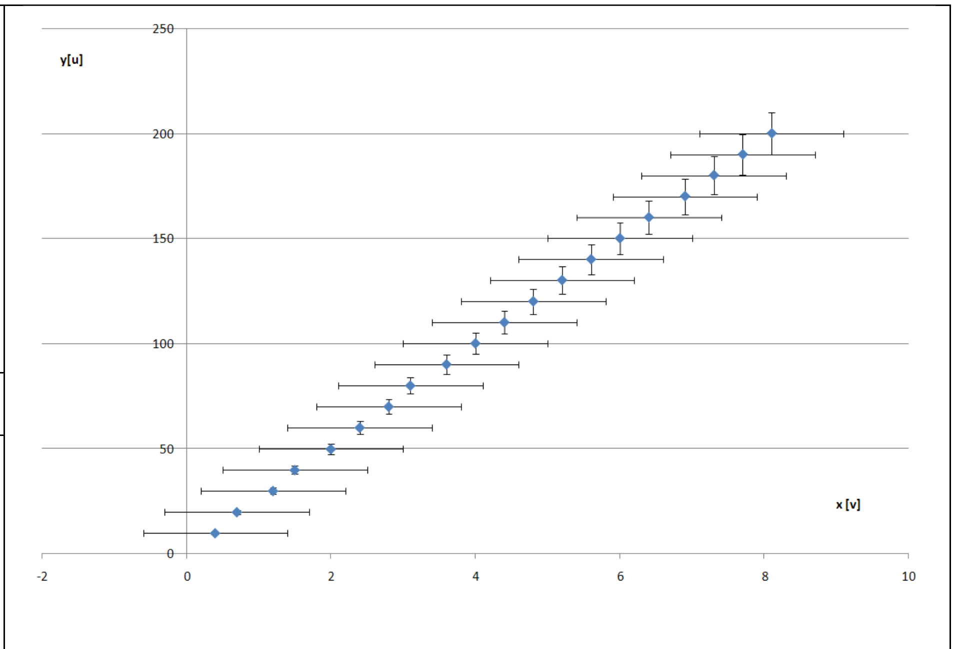


Figura 10 – Grafico con gli errori

- mettere la spunta su Personalizzato, appare il menu di figura 9, scegliere sia per il valore di errore positivo, che per quello negativo il contenuto della zona B3:B22, si ottiene il grafico di figura 10 in cui sono state inserite in modo automatico le barre di errore sui valori di X, che però non sempre corrispondono a quelle volute.
- per sistemare le cose, dal grafico, posizionarsi su una delle barre d'errore delle X e cliccare con il tasto destro, nel menu che appare selezionare Formato barre d'errore, appare la finestra di figura 11

- procedere come nella selezione degli errori su Y prendendo i valori per gli errori nella zona D3:D22. Appare il grafico di figura 12.

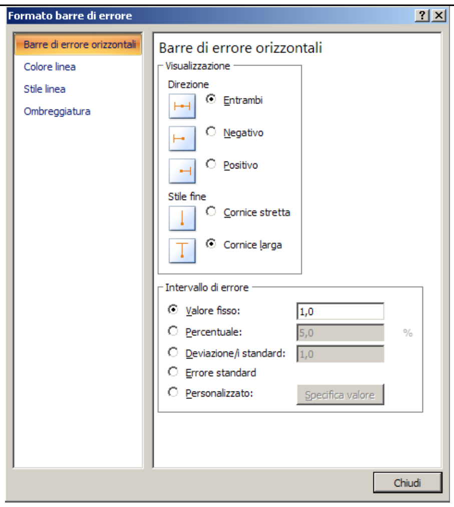


Figura 11 – Barre d’errore X

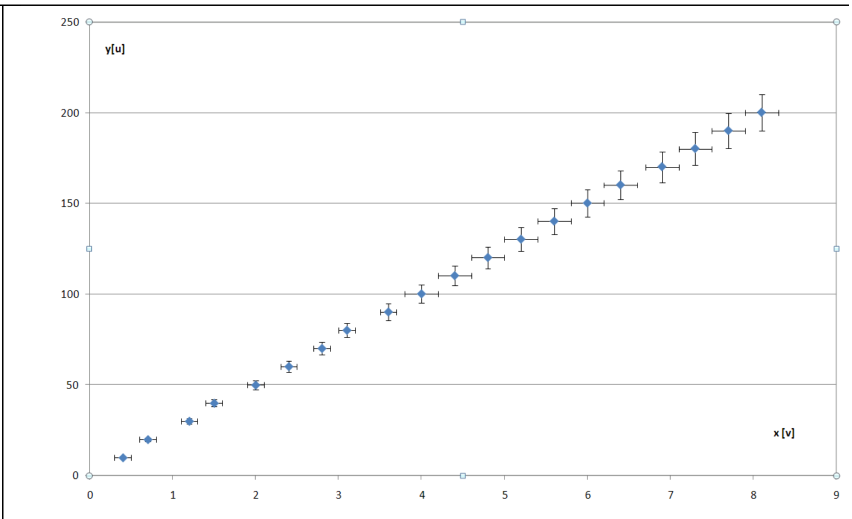


Figura 12 – Grafico con le barre d’errore

2 – LA REGRESSIONE LINEARE CON EXCEL

2.1 – Calcolo dei coefficienti della retta di regressione

La regressione lineare permette di determinare la retta che meglio approssima un insieme di dati sperimentali utilizzando il metodo dei minimi quadrati. Tale metodo consiste nel determinare la retta di equazione $y = kx + q$ per la quale la quantità

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - Y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(kX_i + q - Y_i\right)^2$$

risulta minima; le coppie $\left(X_i ; Y_i\right)$ sono i dati sperimentali.

Dopo aver realizzato il grafico dei dati sperimentali, si può vedere “a occhio” se i valori si allineano lungo una retta, in tal caso si cerca la retta dei minimi quadrati. L’intercetta *q*, ovviamente, può essere zero se la proporzionalità è diretta.

Excel permette di determinare i valori di *k* e *q* in modo automatico con le loro incertezze (errore standard) e altri parametri della regressione, alcuni dei quali non sono necessari per i fini del nostro lavoro. La sintassi della funzione è:

=REGR.LIN(y_nota;x_nota;cost;stat)

dove

Y_nota è l'insieme dei valori y già noti della relazione $y = kx + q$.

X_nota è l’insieme dei valori x già noti della relazione $y = kx + q$.

Cost è un valore logico che specifica se la costante *q* deve essere uguale a 0

- Se cost è VERO o è omesso, *q* verrà calcolata secondo la normale procedura.
- Se cost è FALSO, *q* verrà impostata a 0 è i valori *k* verranno calcolati in modo che sia $y = kx$.

Stat è un valore logico che specifica se restituire statistiche aggiuntive di regressione.

- Se stat è VERO, REGR.LIN restituirà le statistiche aggiuntive di regressione.
- Se stat è FALSO o è omesso, REGR.LIN restituirà solo i coefficienti *k* e la costante *q*.

Il risultato della funzione REGR.LIN viene visualizzato in una zone di 5 righe e due colonne contenenti rispettivamente:

k	q
σ_k	σ_q
r^2	σ_y
F	gdl
sqreg	sqres

dove

k, q	Sono il coefficiente angolare e il termine noto della retta
σ_k	Il valore dell'errore standard su k
σ_q	Il valore di errore standard per la costante q (σ_q = #N/D quando cost è FALSO).
r^2	Il coefficiente di determinazione. Confronta i valori y previsti con quelli effettivi e può avere un valore compreso tra 0 e 1. Se è uguale a 1, significa che esiste una correlazione perfetta nel campione, vale a dire, non sussiste alcuna differenza tra il valore previsto e il valore effettivo di y. Se invece il coefficiente di determinazione è uguale a 0, l'equazione di regressione non sarà di alcun aiuto nella stima di un valore y.
σ_y	L'errore standard per la stima di y.
F	La statistica F o il valore osservato di F. Utilizzare la statistica F per determinare se la relazione osservata tra le variabili dipendenti e indipendenti è casuale.
gdl	I gradi di libertà. Utilizzare i gradi di libertà per trovare i valori critici di F in una tabella statistica. Confrontare i valori trovati nella tabella con la statistica F restituita dalla funzione REGR.LIN, per stabilire un livello di confidenza per il modello. Per informazioni sul calcolo dei gradi di libertà, vedere la sezione Osservazioni di questo argomento. Nell'esempio 4 viene illustrato l'utilizzo di F e dei gradi di libertà.
sqreg	La somma della regressione dei quadrati.
sqres	La somma residua dei quadrati. Per informazioni sul calcolo di sqreg e sqres, vedere la sezione Osservazioni di questo argomento.

Nel caso che abbiamo analizzato nel capitolo precedente, dobbiamo trovare la retta $y = kx + q$. operiamo come segue:

- o Ci spostiamo in una casella libera del foglio, per esempio nella casella K1, e, con riferimento ai dati della tabella di figura 1,
- o scriviamo: **=REGR.LIN(A3:A22;C3:C22;VERO;VERO)**
- o posizioniamo il cursore sulla casella K1 e facciamo un clic con il tasto sinistro del mouse
- o tenendo premuto il tasto sinistro del mouse evidenziamo una zona di 2 colonne e 5 righe,
- o rilasciamo il mouse
- o premiamo il tasto funzione F2 e quindi, insieme, i tasti [Ctrl][⇧][Invio] ([⇧] è il tasto delle maiuscole)
- o Nelle caselle K1:L5 compare la statistica relativa ai valori selezionati. Nel caso in esame si ottengono i valori della tabella di figura

	K	L
1	24,5728	1,78149
2	0,10187	0,49073
3	0,99969	1,07055
4	58180,3	18
5	66679,7	20,6296

Figura 13 – Dati della regressione lineare

La casella K1 contiene il valore di k, la casella K2 il suo errore, la casella L1 il valore di q, la casella L2 il suo errore. Il valore della casella K3 ci dice quanto è buona la relazione lineare (se il valore è prossimo a 1 la correlazione è buona, se è vicino a 0 non c'è correlazione; in questo caso è molto buona).

2.2 – Rappresentazione sul grafico Excel della retta di regressione

Per visualizzare sul grafico la retta di regressione operiamo come segue:

- posizioniamo il cursore sul grafico, su uno qualunque dei dati
- clicchiamo con il tasto destro del mouse
- selezioniamo Aggiungi linea di tendenza, appare la finestra di figura 14
- nel caso in questione le tendenza è ovviamente lineare, quindi mettiamo la spunta li Lineare
- mettiamo anche la spunta su Visualizza l'equazione sul grafico
- mettiamo Futura = 0,5 e Verifica[21] = 0,4
- si ottiene il grafico finale di figura 15.

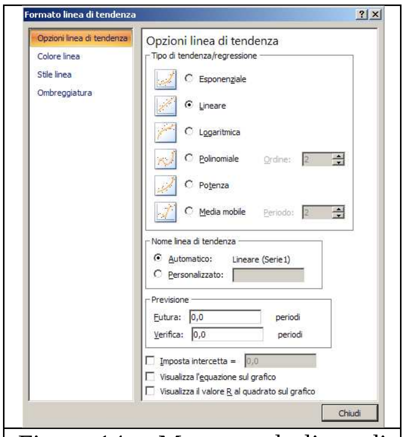


Figura 14 – Menu per la linea di tendenza.

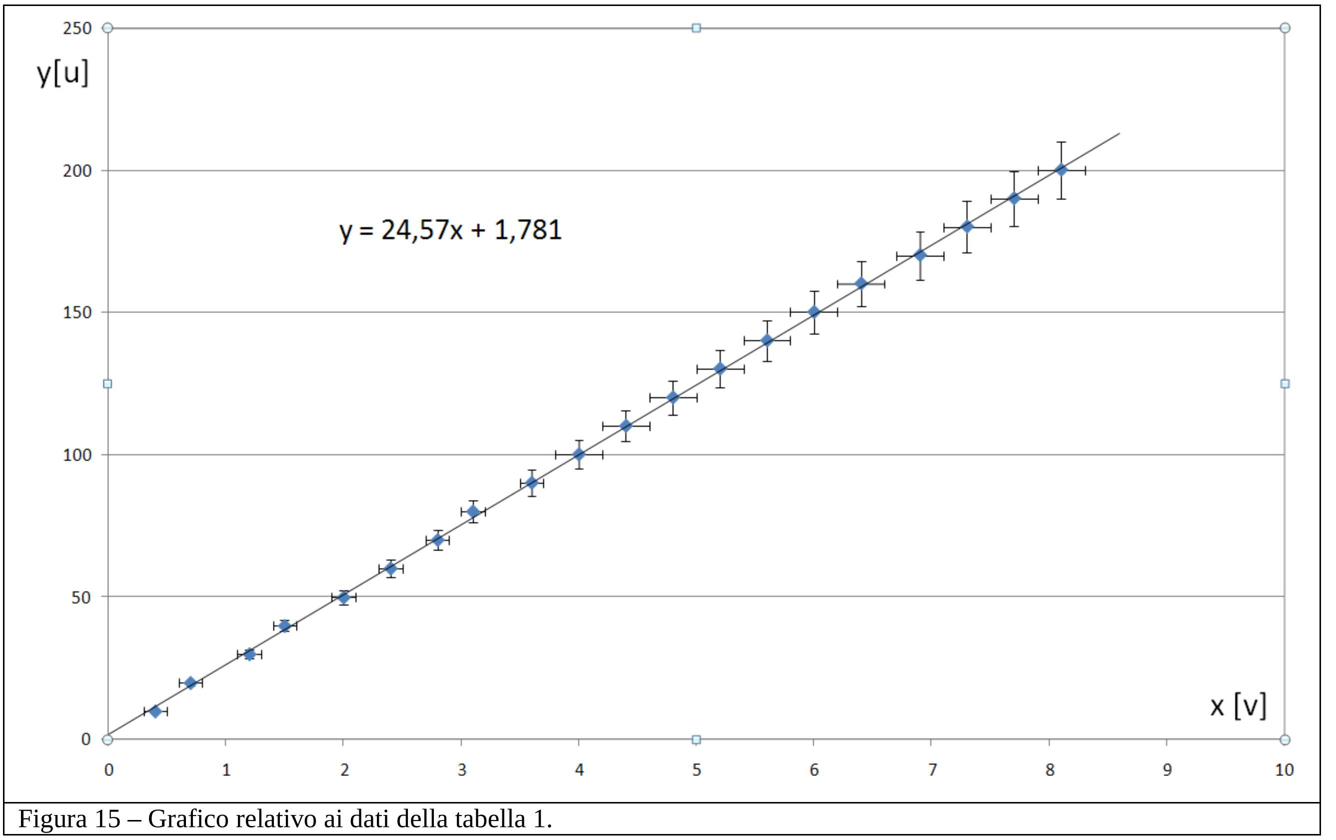


Figura 15 – Grafico relativo ai dati della tabella 1.

[21] Verifica va posta uguale al più piccolo valore di x in modo tale che la retta parta da un punto dell'asse y.

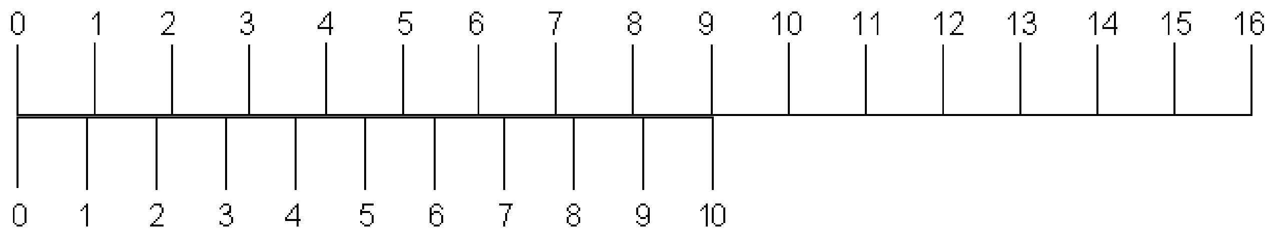
APPENDICE 3
IL CALIBRO

Il calibro è uno strumento che permette di misurare lunghezze al massimo di una ventina di centimetri con una sensibilità migliore del decimo di millimetro.

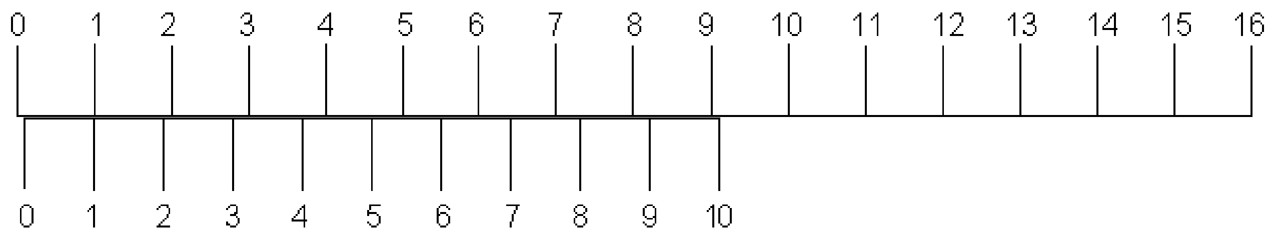
Il calibro è costituito da un’asta graduata fissa e da un cursore mobile, con le quali si può stringere un oggetto. Sulla parte fissa c'è una scala in centimetri, con divisioni di un millimetro, mentre sulla parte mobile detta **nonio** c'è un'altra piccola scala che serve ad aumentare di molto la sensibilità di lettura, anche di qualche decimo di millimetro.

Nel nonio decimale 9 unità della scala superiore vengono divise in 10 parti; questo permette di poter ottenere i decimi dell’unità della scala superiore. Dividendo infatti 9 unità in dieci parti la distanza tra due tacche del nonio è pari a 0,9 unità della scala superiore.

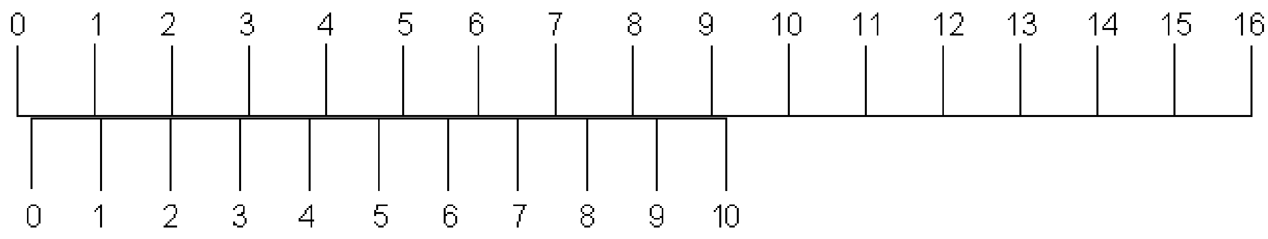
Se la scala superiore fosse in cm, la distanza tra due tacche del nonio sarebbe 9:10 cm = 0,9 cm = 9 mm e il nonio avrebbe la sensibilità di 1 mm.



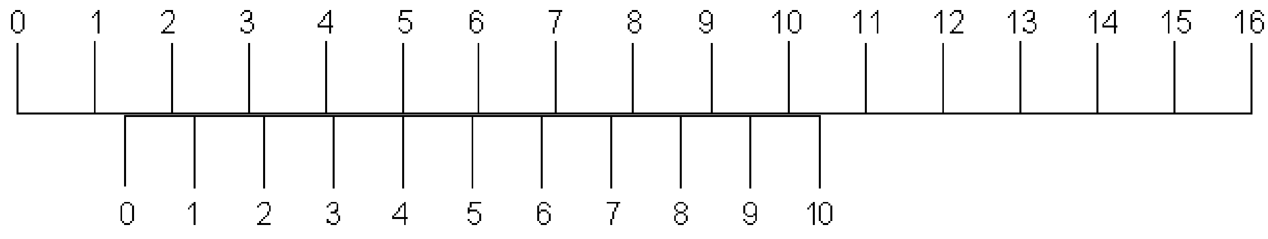
Facendo in modo che l’1 del nonio coincida con l’1 della scala superiore i due zeri distano tra loro 0,1 unità della scala superiore



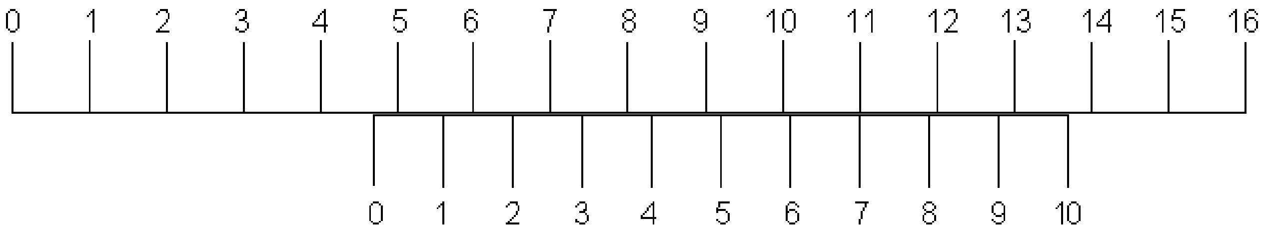
Facendo in modo che il 2 del nonio coincida con il 2 della scala superiore i due zeri distano tra loro 0,2 unità della scala superiore

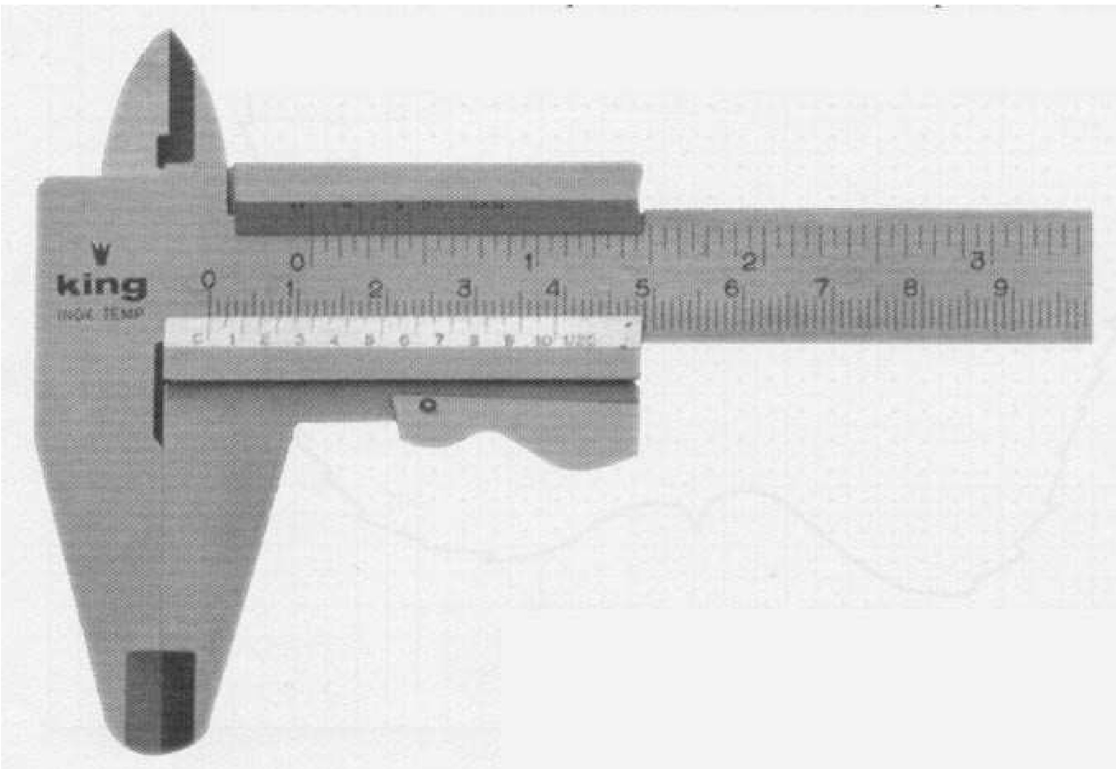


In generale la tacca del nonio che coincide con la tacca della scala superiore ci dice di quale frazione dell’unità della scala superiore lo zero del nonio è spostato rispetto all’unità. Per esempio, nella figura sotto lo zero del nonio si trova tra l’1 e il 2 della scala superiore, mentre la tacca del nonio che coincide con quella superiore è il 4, questo significa che i due zeri distano 1,4 unità della scala superiore.



Nel caso di quest’altra figura la misura è 4,7.

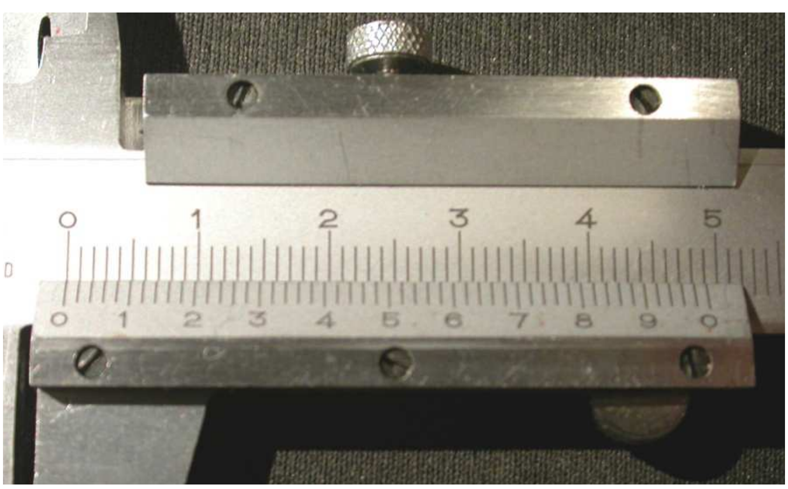




I calibri più diffusi sono i calibri ventesimali, cioè con il nonio diviso in venti parti.
39 mm vengono divisi in 20 parti, questo significa che la distanza tra due tacche del nonio è

$$39 : 20 \text{ mm} = 1{,}95 \text{ mm}.$$

La sensibilità del calibro è di 0,05 mm



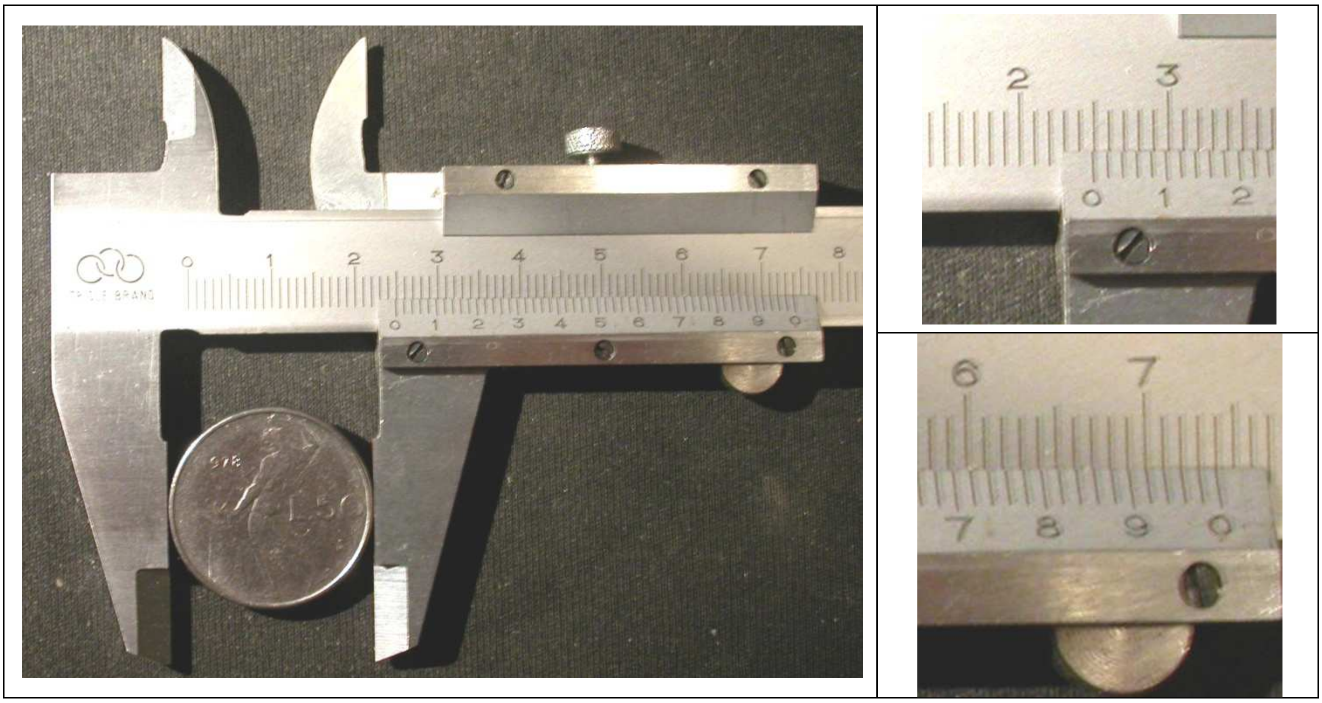
La scala del nonio è di solito numerata da 1 a 10 e vi è una tacca non numerata a metà dell'intervallo fra due tacche numerate successive.

Ci sono anche calibri con noni divisi in un diverso numero di parti; il calibro a cui si fa riferimento nell'esempio riportato qui sotto è un calibro cinquantesimale in cui il nonio è diviso in 50 parti. Cioè 49 mm vengono divisi in 50 parti e quindi la distanza tra due tacche del nonio è

49 : 50 mm = 0,98 mm.

La sensibilità di questo calibro è di 0,02 mm.
In questo caso la scala del nonio è numerata da 1 a 10, e tra due tacche numerate ce ne sono 4 più piccole.

Per fare un esempio misuriamo il diametro di una vecchia moneta da 50 lire italiane. Stringiamo la moneta tra i due becchi, facendo scorrere la parte mobile e osserviamo che lo 0 del nonio si colloca tra la tacca dei 24 mm e quella dei 25 mm, più vicina a quella dei 25 mm; posiamo quindi dire che il diametro della nostra moneta è circa 25 mm. Ma possiamo essere più precisi andando a vedere quale tacca del nonio coincide con la tacca della scala fissa. Nel nostro caso, essendo il calibro cinquantesimale osserviamo che la tacca i questione è la terza a partire dall’8, concludiamo che la misura della moneta è 24,86 mm.



Per effettuare una misurazione di un diametro o di uno spessore dobbiamo quindi:

- stringere l'oggetto tra i due becchi,
- leggere la misura sulla scala fissa,
- individuare quale tacca del nonio coincide esattamente con la scala fissa,
- indicare la misura ottenuta dell'oggetto.

Per misurare il diametro interno di fori cilindrici si utilizzano i due becchi opposti alle ganasce.

L'asta terminale collegata alla parte mobile può essere usata per misurare la profondità di un foro.

APPENDICE 4
SPECIFICHE DEI MULTIMETRI

MODELLO DMM-105

DC VOLTAGE	± (0,5% LETTURA + 2 DIGITS)
AC VOLTAGE	± (1 % LETTURA + 4 DIGITS)
DC CURRENT da 2 mA a 200 mA 20 A	 ± (1 % LETTURA + 2 DIGITS) ± (2 % LETTURA + 2 DIGITS)
RESISTANCE da 200 Ω a 2 MΩ 20 MΩ	 ± (0,7 % LETTURA + 2 DIGITS) ± (1,5 % LETTURA + 2 DIGITS)

MODELLO DVM840

DC VOLTAGE

Range	Resolution	Accuracy
200 mV	100 µV	± (0,5 % LETTURA + 4 DIGITS)
2 V	1 mV	
20 V	10 mV	
200 V	100 mV	
600 V	1 V	± (1,0 % LETTURA + 5 DIGITS)

AC VOLTAGE

Range	Resolution	Accuracy
200 V	100 mV	± (1,2 % LETTURA + 10 DIGITS)
600 V	1 V	

DC CURRENT

Range	Resolution	Accuracy
200 µA	0,1 µA	± (1,5 % LETTURA + 3 DIGITS)
2 mA	1 µA	
20 mA	10 µA	
200 mA	100 µA	
10 A	10 µA	± (2,0 % LETTURA + 5 DIGITS)

RESISTANCE

Range	Resolution	Accuracy
200 Ω	0,1 Ω	± (0,8 % LETTURA + 5 DIGITS)
2 kΩ	1 Ω	± (0,8 % LETTURA + 5 DIGITS)
20 kΩ	10 Ω	
200 kΩ	100 Ω	
2 MΩ	1 kΩ	
20 MΩ	10 kΩ	± (1,0 % LETTURA + 15 DIGITS)

MODELLO DT830B

DC VOLTAGE

Range	Resolution	Accuracy
200 mV	100 µV	± (0,5 % LETTURA + 3 DIGITS)
2 V	1 mV	± (0,8 % LETTURA + 2 DIGITS)
20 V	10 mV	
200 V	100 mV	
1000 V	1 V	± (1,0 % LETTURA + 2 DIGITS)

AC VOLTAGE

Range	Resolution	Accuracy
200 V	100 mV	± (1,2 % LETTURA + 10 DIGITS)
750 V	1 V	

DC CURRENT

Range	Resolution	Accuracy
200 µA	0,1 µA	± (1,8 % LETTURA + 2 DIGITS)
2 mA	1 µA	
20 mA	10 µA	
200 mA	100 µA	± (2,0 % LETTURA + 2 DIGITS)
10 A	10 mA	± (2,0 % LETTURA + 10 DIGITS)

RESISTANCE

Range	Resolution	Accuracy
200 Ω	0,1 Ω	± (1,0 % LETTURA + 10 DIGITS)
2 kΩ	1 Ω	± (1,0 % LETTURA + 4 DIGITS)
20 kΩ	10 Ω	
200 kΩ	100 Ω	
2 MΩ	1 kΩ	