Prof. Angelo Angeletti – Liceo Scientifico "G.Galilei" Macerata

LA SIMILITUDINE

La similitudine è una particolare trasformazione geometrica, nel piano o nello spazio, che conserva i rapporti tra le distanze. Questo vuol dire che, per ogni similitudine *f*, esiste un numero reale positivo *k* tale che

$$d\left[f(A), f(B)\right] = k \cdot d(A,B)$$

per ogni coppia di punti (A,B).

Triangoli simili

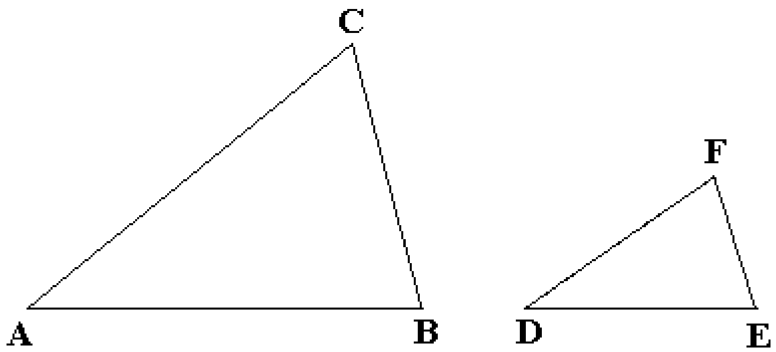


Figura 1

Due triangoli sono simili se hanno ordinatamente i tre angoli congruenti. Ne seguono i seguenti corollari:

- **Corollario 1**. Due triangoli equilateri sono simili
- **Corollario 2**. Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
- **Corollario 3**. Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.

Si possono dimostrare tre criteri di similitudine:

1. Due triangoli ABC e DEF sono simili se hanno due angoli ordinatamente congruenti.

2. Due triangoli ABC e DEF sono simili se hanno due lati ordinatamente in proporzione e gli angoli fra essi compresi congruenti. Ad esempio se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ e gli angoli in B e in E sono uguali allora i due triangoli sono simili.

   - **Corollario**. Due triangoli rettangoli sono simili se hanno i cateti in proporzione

3. Due triangoli ABC e DEF sono simili se hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, ossia se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

L’ELLISSE

In geometria, un'ellisse è una figura che assomiglia ad un cerchio allungato in una direzione. Questa figura è un esempio di sezione conica e può essere definita come il luogo dei punti, in un piano, la cui somma delle distanze da due punti fissi dati (detti fuochi) è costante. Secondo le leggi di Keplero, l'orbita di un pianeta è un'ellisse, con il Sole in uno dei due fuochi.

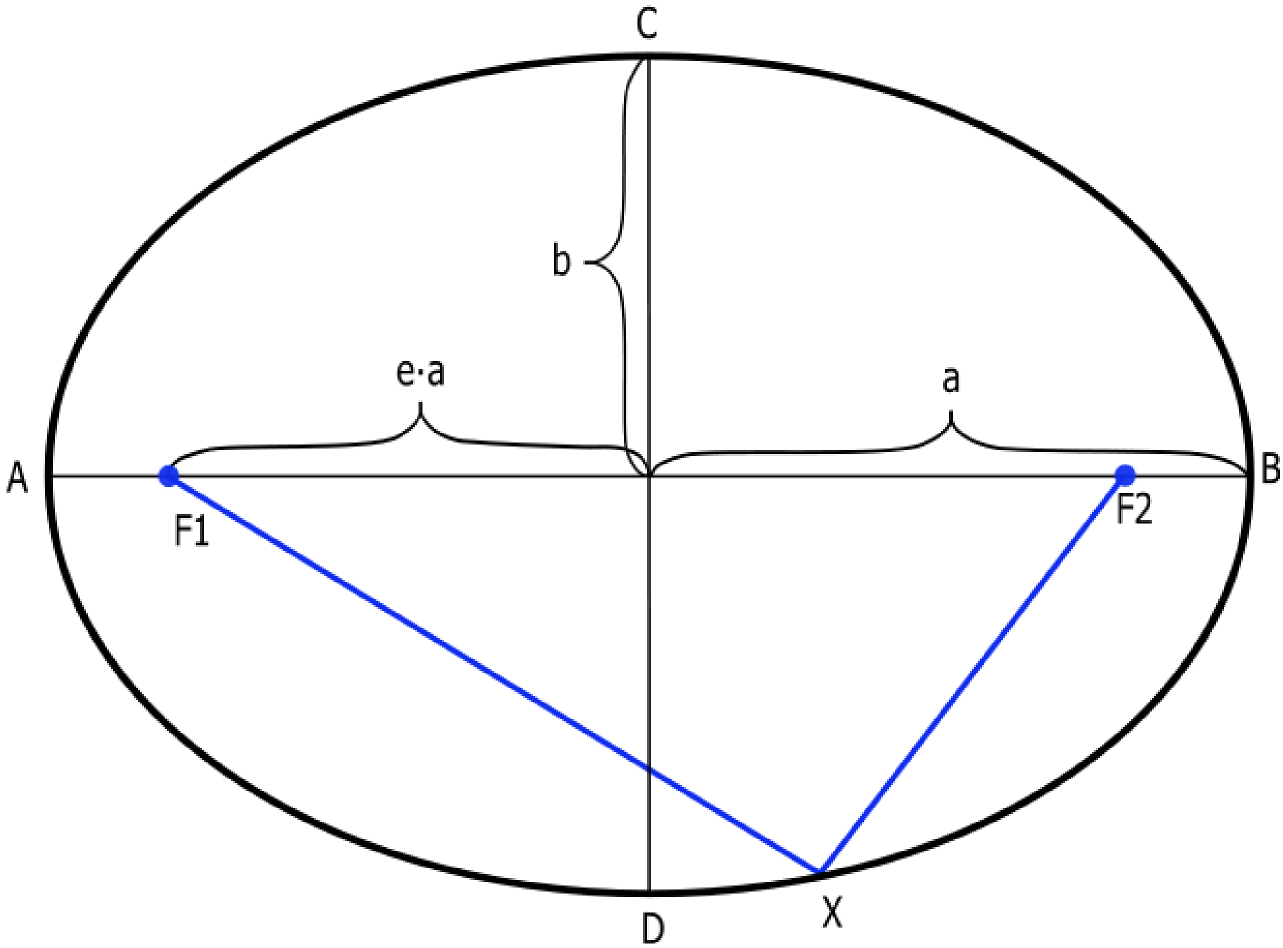


Figura 2

Se i due fuochi coincidono, si ha una circonferenza, che può considerarsi quindi un caso particolare di ellisse.

Il segmento AB che passa dai due fuochi è detto asse maggiore ed è anche il più lungo segmento contenuto nell'ellisse. Il segmento CD passante per il centro, ortogonale all'asse maggiore, è l'asse minore. Il semiasse maggiore è una delle metà dell'asse maggiore; parte dal centro, passa attraverso un fuoco e va fino all'ellisse. Analogamente il semiasse minore è metà dell'asse minore. I due assi sono l'equivalente per la circonferenza del diametro, mentre i due semiassi sono l'equivalente del raggio.

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, dette convenzionalmente *a* e *b*. La costante *a* è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante *b* è la lunghezza del semiasse minore.

Se fissiamo un sistema di assi cartesiani con l’asse delle x che passa per i fuochi e l’asse delle y che passa per il punto medio dei fuochi, se i fuochi hanno coordinate $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$, si può determinare l'equazione dell'ellisse eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico $P(x;y)$ e il doppio del semiasse maggiore.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$

Sviluppando i calcoli si ottiene l’equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Dove $a^2=b^2+c^2$.

L’eccentricità *e* è un numero che ci dice quanto l’ellisse è schiacciata: si definisce come $e=\frac{c}{a}$. L'eccentricità è un numero positivo compreso tra 0 e 1, (se è 0, l'ellisse è una circonferenza, se è 1 è degenerata in un segmento di lunghezza 2*a*). Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra *a* e *b*, quindi l'ellisse è più allungata.

L'area racchiusa dell’ellisse è πab.

LOGARITMI

Si consideri l'uguaglianza esponenziale

$$b = a^c \,,$$

dove a e b sono numeri reali positivi noti.
Assegnati $a > 0$ e c qualunque, il problema ammette sempre una soluzione.

Il problema inverso, ovvero: **quale valore bisogna attribuire all'esponente** c **affinché, noto** a**, si possa ottenere un dato valore** b porta alla definizione del logaritmo.
Si ha infatti per definizione che

$$c = \log_a b$$

che si legge "c uguale al logaritmo in base a di b" (b si chiama argomento del logaritmo).

Per esempio, è elementare osservare che: $2 = \log_{10} 100$ in quanto $100 = 10^2$, oppure $3 = \log_3 27$. Ma, quanto vale c in modo che $7 = 2^c$? il valore di c, che è irrazionale, lo esprimiamo scrivendo $c = \log_2 7$.

É possibile definire una funzione f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ data da $y = \log_a x$. Tale funzione è detta **funzione logaritmica** e gode delle seguenti proprietà:

- la funzione è definita appunto per ogni $x > 0$ e assume ogni valore di x;
- per $x = 1$, $y = 0$;

- se $a > 1$ la funzione è crescente in $x > 0$ e si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$
- se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente in $x > 0$ e si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$.

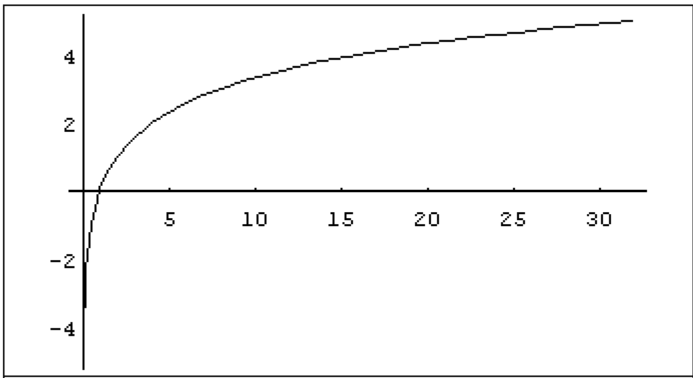


Grafico della funzione logaritmo per a = 2

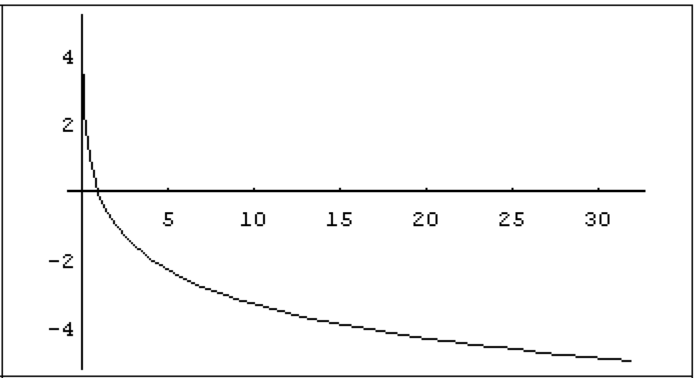


Grafico della funzione logaritmo per a = ½.

Proprietà fondamentali dei logaritmi

1) Dalla definizione di logaritmo segue che:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$x = \log_a a^x$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$a^x = b^{x \cdot \log_b a}$$

2) Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori; in simboli

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y .$$

3) Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza dei logaritmi dei termini; in simboli

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y .$$

4) Dalle proprietà 2) e 3) deriva che il logaritmo di una potenza con esponente intero è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base; in simboli

$$log_a(x^n) = n \cdot log_a x .$$

5) La proprietà 4) vale anche per una potenza con esponente reale qualsiasi.
6) Cambiamento di base. Dalla definizione di logaritmo si ha che:

$$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b} .$$

La proprietà 6) è molto utile in quanto per il calcolo dei logaritmi si fa generalmente uso di tavole o di una calcolatrice che consentono tale calcolo solo per la base 10 (in genere indicata con *log* o *Log*) e la base cosiddetta *naturale* *e*[1] (in genere indicata con *ln* o *log*).

[1] Il numero *e* è detto numero di Nepero ed è definito dalla relazione: $e = \lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818...$

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA

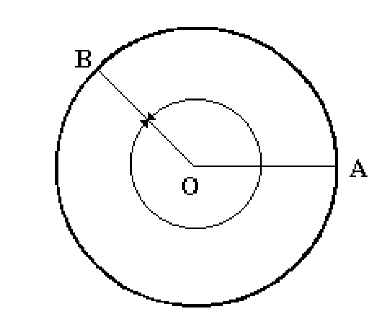


Figura 1 - Archi orientati su di una circonferenza

Si consideri la circonferenza di raggio r e centro O di figura 1; su di essa si prendano due punti, A e B. Allora si può andare da A verso B percorrendo due strade, una in senso antiorario, l'altra in senso orario. Agli archi AB corrispondono due angoli $A\hat{O}B$.
Si stabilisce che sia la misura dell'angolo $A\hat{O}B$ sia la misura dell'arco AB siano espresse da un numero positivo quando sono percorsi in senso antiorario, siano espresse da un numero negativo quando sono percorsi in senso orario.

Per la misura degli angoli si possono usare due sistemi. Il primo è il sistema sessagesimale, la cui unità di misura è il grado (simbolo °), definito come la 360ª parte dell'angolo giro; il grado ha come sottomultipli il primo (la sessantesima parte del grado, simbolo ') e il secondo (la sessantesima parte del primo, simbolo ").

Su di un piano cartesiano si consideri ora la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Una semicirconferenza di raggio r è lunga πr e a tale arco corrisponde un angolo piatto (180°), si ha che, se ad un arco di lunghezza l corrisponde un angolo di ampiezza π, vale la seguente proporzione:

$$\pi r : 180° = l : \alpha°$$

α°	α
0	0
30	π/6
45	π/4
60	π/3
90	π/2
180	π
270	3π/2
360	2π

Tabella 1

Da questa relazione si ricava che:

(1) $$\frac{l}{r} = \frac{\pi}{180°}\alpha°$$

la quale indica che, qualunque sia il raggio della circonferenza, uno stesso angolo di misura $\alpha°$ dà sempre lo stesso rapporto l/r. Tale valore può quindi essere preso come misura di un angolo. L'unità si ottiene prendendo un arco la cui lunghezza è uguale al raggio e tale unità viene chiamata **radiante**; la misura di un angolo in radianti è quindi espressa da un numero reale che verrà indicato con α, mentre per la misura in gradi si farà uso del simbolo $\alpha°$.
Dalla (1) si ricava la formula di trasformazione da gradi a radianti:

(2) $$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°}\alpha° .$$

Nella Tabella 1 vengono riportate le misure in radianti di alcuni angoli.

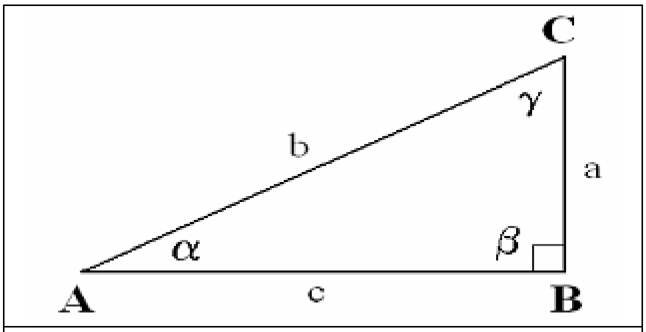


Figura 2 - Gli elementi di un triangolo

Si consideri un triangolo rettangolo ABC, siano a, b, c i suoi lati e α, β, γ gli angoli (vedi figura 2).

Si definisce ***seno*** dell'angolo α (si scrive senα) il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa, cioè: $sen\alpha = \frac{a}{b}$.
Si definisce ***coseno*** dell'angolo α (si scrive cosα) il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa, cioè: $cos\,\alpha = \frac{c}{b}$.

Dalle definizioni si ricavano facilmente i due cateti, se conosciamo l'ipotenusa b e l'angolo α: $a = b \cdot sen\alpha$ e $c = b \cdot cos\,\alpha$. Applicando inoltre il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ricava la prima relazione fondamentale della goniometria: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Si definisce ***tangente*** dell'angolo α (si scrive tgα o anche tanα) il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e il cateto adiacente, cioè: $tg\alpha = \frac{a}{c}$. Utilizzando le relazioni trovate sopra per a e c si ricava la seconda relazione fondamentale della goniometria: $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\,\alpha}$.

Si osservi che sia il seno che il coseno, essendo il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, non potranno mai essere maggiori di 1.

Con considerazioni geometriche si può determinare la tabella 2.
Il calcolo dei valori di seno, coseno e tangente di angoli non riportati nella tabella possono essere calcolati con la calcolatrice.

α	α °	sen α	cos α	tg α
0	0°	0	1	0
π/6	30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
π/4	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
π/3	60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
π/2	90°	1	0	non esiste
2π/3	120°	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
3π/4	135°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
5π/6	150°	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	180°	0	-1	0
7π/6	210°	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
5π/4	225°	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
4π/3	240°	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$
3π/2	270°	-1	0	non esiste
5π/3	300°	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
7π/4	315°	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
11π/6	330°	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
2π	360°	0	1	0

Tabella 2

Per esempio sen(37°) = 0,601815023… il valore è in genere un numero irrazionale (con infinite cifre dopo la virgola); nei calcoli, per evitare approssimazioni troppo grossolane, è consigliabile prendere 5 cifre dopo la virgola.

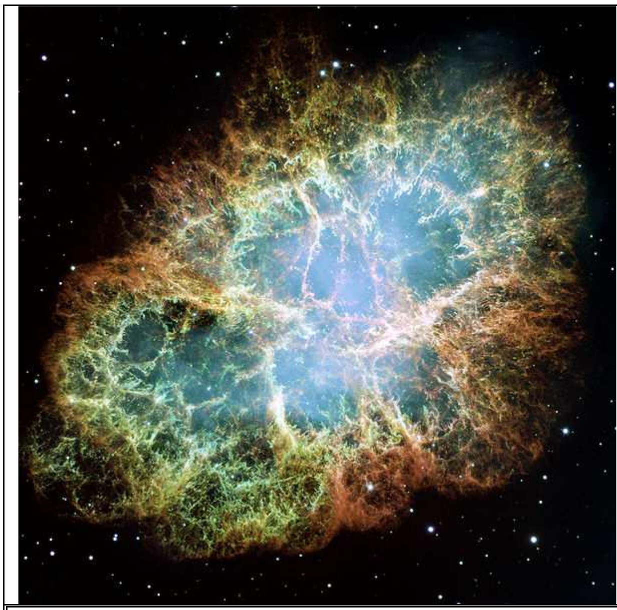
Noto il valore della tangente o del seno o del coseno, si può ricavare l'angolo facendo uso della calcolatrice.

Per esempio, se nel triangolo di figura 2 si ha: *a* = 10 cm e *c* = 50 cm, allora $tg\alpha = \frac{10}{50} = 0,2$; con la calcolatrice, facendo $\tan^{-1}$ di 0,2 si ha α = 11,30993247… Tale valore è in gradi e frazione di gradi. Se vogliamo l'angolo in gradi primi e secondi bisogna operare come segue:

1. la parte intera del numero (nel nostro esempio 11) sono i gradi;
2. si toglie dal numero la parte intera (11,30993247… – 11) e si moltiplica il risultato per 60, in effetti si fa la seguente proporzione 0,30993247… : 1 = *x* : 60';
3. la parte intera del numero ottenuto (18,59594844…) sono i primi (18);
4. si toglie ancora dal numero ottenuto la parte intera (18,59594844… – 18) e si moltiplica il numero così ottenuto ancora per 60, in effetti si fa la seguente proporzione 0,59594844… : 1 = *x* : 60";
5. quelli ottenuti sono i secondi (35,7569064…). Non avendo senso portarsi dietro un'infinità di cifre dopo la virgola si può approssimare il risultato a 35,8.

Si ha quindi che α = 11° 18' 35.8".
Un problema che spesso si presenta in astronomia è la misura di un oggetto nota la sua distanza e le sue dimensioni angolari.

Per esempio sappiamo che la Crab Nebula (vedi figura 3), il resto della supernova esplosa nel 1054 che si trova nella costellazione del Toro a 6500 ± 1600 anni luce (ovvero 2,0 ± 0,5 kpc), è all'incirca un'ellisse di assi 420″ × 290″. Vogliamo trovare le dimensioni lineari degli assi.



Consideriamo prima l'asse maggiore.
Nella figura 4 è riportato lo schema della situazione: T è la posizione della terra, A e B gli estremi dell'asse della nebulosa, l'angolo è ovviamente esagerato. Essenzialmente si tratta di determinare la lunghezza del segmento AB noto TH e l'angolo α.

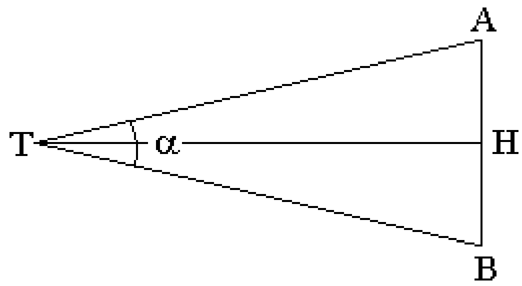


Figura 4 – Schema per la determinazione delle dimensioni lineari di un oggetto astronomico nota la distanza e le dimensioni angolari.

Dalla trigonometria possiamo osservare che $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{TH}$, quindi $\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \cdot \overline{TH} \cdot tg\,\frac{\alpha}{2}$.
Attenzione che la calcolatrice può calcolare la tangente di un angolo solo quando questo è espresso in gradi o in radianti (vale la stessa cosa per il seno e il coseno). Trasformiamo quindi l'angolo in gradi mediante la relazione:

(3) $$\alpha° = \frac{\alpha''}{3600}$$

in quanto, ricordiamo, 1° = 3600".
Si ha pertanto:
$\overline{AB} = 2 \cdot 6500 \cdot tg\,\frac{420}{7200} = 13{,}2$ anni luce.
Osserviamo ora una cosa molto utile che semplifica notevolmente questo tipo di calcolo.
Se misuriamo l'angolo in radianti invece che in gradi, allora è facile rendersi conto che per angoli piccoli vale l'approssimazione:

(4) $$tg\alpha = sen\alpha = \alpha\,.$$

Nel caso dell'esempio dato sopra 420″ × 290″ sono circa 0,00203 × 0,00141 radianti[2] e quindi molto piccoli. Per esempio: si ha $tg 0{,}00203 = 0{,}002030002$ e $sen 0{,}00203 = 0{,}002029998$.
Molto più rapidamente quindi si ha:
$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \cdot \overline{TH} \cdot tg\,\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \overline{TH} \cdot \frac{\alpha}{2} = \overline{TH} \cdot \alpha = 6500 \cdot 0{,}00203 = 13{,}2$ anni luce.
Con questo metodo è anche facile stimare l'errore che è $1600 \cdot 0{,}00203 = 3{,}2$ anni luce e quindi l'asse maggiore della nebulosa è (13,2 ± 3,2) anni luce. L'asse minore è
0,00141 · (6500 ± 1600) = (9,2 ± 2,3) anni luce.

Un altro esempio. Sappiamo che la stella di Barnard è quella che si muove più velocemente in cielo. Ha una componente trasversale della velocità che fa sì che in un anno si sposti di 10,3″ e dista 5,9 anni luce.
Vogliamo calcolare di quanti chilometri si sposta, trasversalmente, in un anno.
Utilizzando lo schema di figura 4, T è la posizione della terra, A e B la posizione iniziale e quella finale (dopo un anno) della stella di Barnard; anche in questo caso l'angolo è esagerato.
Si tratta di determinare la lunghezza del segmento AB noto TA e l'angolo α.

[2] dopo aver trasformato i secondi in gradi mediante la (3) si sono trasformati i gradi in radianti con la (2).

Dalla trigonometria abbiamo che $sen\frac{\alpha}{2}=\frac{AH}{TA}$, quindi $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\cdot\overline{TA}\cdot sen\frac{\alpha}{2}$.

Ricordando di trasformare in gradi si ha:

$\overline{AB}=2\cdot 5{,}9\cdot sen\frac{10{,}3}{7200}=0{,}0002946$ anni luce = $2{,}8\cdot 10^9 km$. Si è utilizzato 1 anno luce = $9{,}461\cdot 10^{12}$ km.

Utilizzando il metodo rapido 10,3″ = 0,0000499 radianti, quindi

$\overline{AB}=5{,}9\cdot 0{,}0000499=0{,}0002944$ anni luce = $2{,}8\cdot 10^9 km$.