



OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2016

Gara Interregionale - 22 Febbraio

Categoria Senior

1. Il pianeta più "differente"



Quale degli otto pianeti del Sistema Solare ha la massima differenza tra la distanza al perielio e all'afelio ?

Soluzione. Detti "a" il semiasse maggiore ed "e" l'eccentricità dell'orbita, le distanze di un pianeta all'afelio (D_A) e al perielio (D_P) sono date dalle relazioni:

$$D_A = a(1+e) \text{ e } D_P = a(1-e), \text{ da cui sottraendo membro a membro: } \Delta = D_A - D_P = 2 \cdot a \cdot e$$

Utilizzando i dati per i semiasse e le eccentricità riportati nella tabella fornita ai partecipanti calcoliamo: $\Delta_{\text{Mercurio}} = 23.81 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Venere}} = 1.472 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Terra}} = 4.997 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Marte}} = 42.57 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Giove}} = 75.35 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Saturno}} = 154.7 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Urano}} = 271.0 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{\text{Nettuno}} = 77.37 \cdot 10^6$ km. Quindi il pianeta con la maggior differenza tra la distanza al perielio e all'afelio è **Urano**.

2. Osservando Elliot ed E.T.



In una famosa scena del film "E.T. l'extraterrestre" si vede Elliot (il protagonista) transitare in bicicletta davanti alla Luna, con E.T. nel cestino della bicicletta. Immaginate di guardare verso sud stanotte e vedere, come nell'immagine a sinistra, Elliot che transita davanti alla Luna, con la Luna al meridiano.

- Che ore sono ?
- In estate Elliot dovrebbe spiccare un volo più in alto o più in basso rispetto a oggi, per farvi vedere la stessa scena ?
- Sarebbe possibile riprendere la scena al solstizio d'inverno al Polo Sud? Perché?

Soluzione.

- Nell'immagine la Luna è piena, quindi si trova in direzione opposta al Sole. Di conseguenza transita al meridiano in direzione sud a mezzanotte.
- La Luna piena è opposta al Sole. In inverno a mezzanotte il Sole è più basso sotto l'orizzonte (la declinazione del Sole al solstizio d'inverno è: $\delta_{\odot} = -23^{\circ} 27'$) rispetto all'estate (la declinazione al solstizio d'estate è: $\delta_{\odot} = +23^{\circ} 27'$), quindi in inverno la Luna piena raggiunge a mezzanotte un'altezza maggiore. In estate la Luna piena transita al meridiano verso sud a un'altezza minore rispetto all'inverno: Elliot deve spiccare un salto più basso.
- La scena NON è visibile al solstizio d'inverno al Polo Sud perché quel giorno il Sole è sempre sopra l'orizzonte, a un'altezza costante di 23.5° , e, di conseguenza, la Luna piena, che si trova dalla parte opposta dell'eclittica, è sempre sotto l'orizzonte (a un'altezza di $-23.5^{\circ} \pm 5^{\circ}$) e quindi non è visibile in cielo.

3. Una stella lontana



La luminosità apparente di una stella risulta $5.20 \cdot 10^{11}$ volte minore di quella del Sole, mentre la sua magnitudine assoluta è la stessa. Calcolare la magnitudine apparente della stella e la sua distanza dal Sole in m, pc e anni luce.

Soluzione 1. Dalla relazione $m_{\odot} - m_{stella} = 2.5 \log \frac{L_{\odot}}{L_{stella}}$ ricaviamo: $m_{\odot} - m_{stella} = 29.29$ e infine $m_{stella} = 2.55$

Il Sole e la stella irradiano con la stessa potenza totale mentre le energie luminose sono inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dalla Terra:

$$\frac{E_{\odot}}{E_{stella}} = \frac{d_{stella}^2}{d_{\odot}^2}; \quad d_{stella} = \sqrt{\frac{E_{\odot}}{E_{stella}} \cdot d_{\odot}^2} = \sqrt{5.20 \cdot 10^{11} \cdot 2.24 \cdot 10^{22}} = 1.08 \cdot 10^{17} \text{ m} = 3.50 \text{ pc} = 11.4 \text{ anni luce}$$

Soluzione 2. In alternativa per questa seconda parte del problema si può considerare la relazione: $M = m + 5 - 5 \log d$, che con $M = 4.83$ e $m = 2.55$ porta agli stessi risultati.

4. Intorno a un piccolo Sole



Supponete che la massa del Sole sia $M_{\odot} = 1.00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Mantenendo inalterati il periodo di rotazione della Terra e il semiasse maggiore dell'orbita, da quanti giorni sarebbe formato un anno? Quanto varrebbero, in km, un parsec e un anno luce?

Soluzione. Dalla III Legge di Keplero ricaviamo: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.348 \cdot 10^{33}}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.00 \cdot 10^{30}}} = 44.5 \cdot 10^6 \text{ s} = 515 \text{ giorni}$

Quindi un anno durerebbe circa 515 giorni. Poiché il semiasse della Terra resterebbe invariato la lunghezza del parsec non cambierebbe e sarebbe sempre: $1 \text{ pc} = 206265 \text{ UA} = 30.86 \cdot 10^{12} \text{ km}$. Cambierebbe invece la lunghezza di un anno luce, che sarebbe definito come: $1 \text{ a.l.} = 299792 \text{ km/s} \cdot 44.5 \cdot 10^6 \text{ s} = 1.33 \cdot 10^{13} \text{ km}$ (ben diverso dal valore attuale di $0.946 \cdot 10^{13} \text{ km}$). **Nota:** il valore dell'anno luce è definito utilizzando l'Anno Giuliano (=365.25 giorni), mentre nella soluzione si utilizza l'anno siderale, che fornisce comunque una buona approssimazione del valore cercato.

5. Le velocità al perielio e all'afelio



Ricavate dalla legge di conservazione dell'energia meccanica e dalla seconda legge di Keplero le relazioni che forniscono le velocità di un pianeta al perielio e all'afelio e calcolate le velocità orbitali della Terra quando si trova al perielio e all'afelio.

Soluzione. L'energia meccanica totale di un pianeta è data da: $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{d}$, dove "m" è la massa del pianeta, "v" la sua velocità di rivoluzione, "d" la sua distanza al Sole e "M" la massa del Sole. L'energia meccanica totale si conserva e, in particolare, il suo valore all'afelio è uguale al suo valore al perielio. Indichiamo con i pedici "a" e "p" i valori all'afelio e al perielio, rispettivamente:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{Mm}{d_a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{Mm}{d_p};$$

ricordando che: $d_a = a(1 + e)$ e $d_p = a(1 - e)$ e semplificando "m" avremo infine:

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{a(1 + e)} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{a(1 - e)}$$

Inoltre, dalla II Legge di Keplero sappiamo che vale la relazione: $v_a a (1 + e) = v_p a (1 - e)$

Con pochi semplici passaggi matematici si ricava, in definitiva:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \quad v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}$$

Si noti che queste espressioni sono valide per ciascun corpo orbitante intorno al Sole e, più in generale, intorno a un qualsiasi corpo di massa M, su un'orbita avente semiasse maggiore a ed eccentricità e.

Per la Terra si ricava:

$$v_p = 30.3 \text{ km/s} \quad v_a = 29.3 \text{ km/s}$$



Olimpiadi Italiane di Astronomia 2016

Gara Interregionale – 22 Febbraio 2016

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km	Età stimata	$4.57 \cdot 10^9$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	Classe spettrale	G2 V
Temperatura superficiale	5778 K	Posizione nel diagramma HR	Sequenza Principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.74	Distanza media dal centro galattico	$27 \cdot 10^3$ anni luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83	Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 \cdot 10^8$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	Venere	Terra	Luna	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71493	60267	25557	24766
Massa (kg)	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.69 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
Semiassse maggiore dell'orbita (km)	$57.91 \cdot 10^6$	$108.2 \cdot 10^6$	$149.6 \cdot 10^6$	$384.4 \cdot 10^3$	$227.9 \cdot 10^6$	$778.4 \cdot 10^6$	$1.427 \cdot 10^9$	$2.871 \cdot 10^9$	$4.498 \cdot 10^9$
Periodo orbitale	87.969 ^g	224.70 ^g	365.26 ^g	27.322 ^g	686.97 ^g	11.863 ^a	29.447 ^a	84.017 ^a	164.79 ^a
Eccentricità dell'orbita	0.2056	0.0068	0.0167	0.0549	0.0934	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

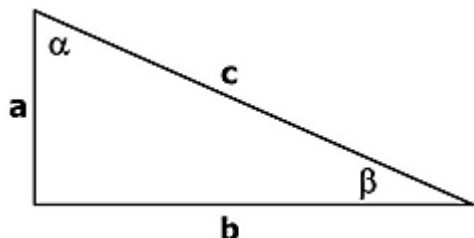
	Triangolo	Rettangolo	Quadrato	Cerchio	Ellisse	Sfera
Area	$b h / 2$	$L_1 L_2$	L^2	πR^2	$\pi a b$	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	Simbolo	Valore	Unità di misura
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$W m^{-2} K^{-4}$
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	$km s^{-1}$
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Accelerazione di gravità al livello del mare	g	9.81	$m s^{-2}$

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

Teorema di Pitagora	$c^2 = a^2 + b^2$
Funzioni trigonometriche	$a = c \sin \beta$ $a = c \cos \alpha$ $a = b \tan \beta$



Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono tutti in notazione scientifica

Olimpiadi di Astronomia 2016

Istruzioni dettagliate per lo svolgimento delle gare scritte

Norme e raccomandazioni generali:

- 1) Il lavoro di ciascun partecipante deve essere eseguito in modo **indipendente** dal lavoro degli altri partecipanti. L'infrazione a questa regola comporta l'immediata squalifica del partecipante.
- 2) I valori numerici presenti nei testi e nella tabella delle costanti sono in notazione scientifica.
- 3) Non è necessario riportare sui fogli dei compiti la **formulazione** dei problemi; le soluzioni possono fare riferimento solo ai numeri ordinali dei problemi, che devono però essere indicati con la massima chiarezza nel testo. Le soluzioni devono essere separate l'una dall'altra da un intervallo libero di circa 5 cm.
- 4) Prestare la massima attenzione a eventuali **informazioni aggiuntive** fornite nel corso della gara. Eventuali domande ai componenti la Giuria nel corso della gara saranno rese note a tutti i partecipanti.
- 5) **"Brutta copia"**: se non avete più tempo per copiare in "bella copia" le soluzioni o parti di esse, scrivete accanto al numero del problema la frase "*vedi brutta copia*". Senza questi due riferimenti, il lavoro sulla brutta copia non sarà preso in considerazione. Se le soluzioni della brutta copia e della bella copia differiscono, varrà il testo della bella copia.
- 6) Se potete descrivete chiaramente il **modello fisico** considerato, citate le approssimazioni e i fattori ritenuti trascurabili. Dato che saranno valutate soluzioni puramente scritte, è opportuno che descrivate anche i passaggi e le vostre considerazioni, anche se possono sembrare ovvie.
- 7) Una risposta del tipo "sì", "no" non costituisce da sola una valida soluzione, a meno che non sia accompagnata da un'**argomentazione** o dalla descrizione dei criteri che l'hanno determinata.
- 8) Prestare la giusta **attenzione** a ciò che viene richiesto nella formulazione del problema. Ad esempio se viene chiesto il raggio di una stella, dare il diametro non costituisce una soluzione del tutto corretta.
- 9) Si possono portar via i fogli con i testi dei problemi alla fine della gara.

Che cos'è vietato:

- **È VIETATO** indicare sulla bella copia o sulla brutta copia nome, cognome o altri **dati individuali**. I dati devono essere indicati **unicamente** nel foglio presente all'interno della busta bianca, in modo da rendere il vostro lavoro anonimo nei confronti della giuria. L'infrazione a questa regola comporta la squalifica.
- **È VIETATO parlare** con altri partecipanti; detenere e adoperare nel corso delle gare qualsiasi tipo di **libro, tabella, catalogo, computer, tablet o telefono portatile**.
- **È VIETATO** usare calcolatrici e fogli di carta **differenti** da quelle fornite dalla giuria.
- **È VIETATO** scrivere oltre il **tempo scaduto, disturbare** con rumori fastidiosi e superflui.
- **È VIETATO** consegnare il compito e lasciare l'aula prima di **un'ora** dall'inizio della gara.
- **È VIETATO lasciare l'aula** della gara in più di una persona alla volta.

Che cos'è permesso:

- **SI POSSONO** scrivere le soluzioni in **ordine arbitrario**.

Che cos'è consigliato:

- **SI CONSIGLIA** di **usare simboli** per i passaggi matematici intermedi e sostituirli con valori numerici solo nel calcolo finale (ciò rende minima la possibilità di errori).
- **SI CONSIGLIA** di definire chiaramente i **simboli** delle varie quantità in gioco (esempio: sia "E" l'energia totale del corpo celeste...).

Buon lavoro !