

CORSO
di
AZZERAMENTO

di

MATEMATICA
GENERALE

Prof. A. Angeletti

a.a. 2015/2016

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

NOZIONE DI INSIEME

Il concetto di “insieme”, inteso come una qualsiasi collezione di oggetti (*enti* o *elementi*) aventi una qualche caratteristica comune, è considerato *primitivo*, nel senso che non può essere dedotto o ricavato da altri concetti noti. Il criterio di scelta degli elementi è soggetto a poche ma importanti restrizioni, che riportiamo qui di seguito:

- i) l'oggetto, o il criterio, non devono variare;
- ii) deve essere possibile stabilire con esattezza se un oggetto appartiene o no all'insieme;
- iii) gli elementi dell'insieme devono essere distinguibili l'uno dall'altro;
- iv) vanno evitate definizioni di insiemi che conducono a dilemmi insolubili.

Un esempio di contraddizione alla prima regola è voler definire un insieme di “persone felici” (non è possibile stabilire univocamente cosa significhi essere felici, e comunque gli elementi di un tale ipotetico insieme varierebbero di certo da un giorno all'altro), oppure anche un insieme di “pietanze gustose”, o altre definizioni analoghe. Parlare di “un insieme di città” è in contrasto con la seconda regola, poiché nulla viene detto a proposito di quali città possano appartenere all'insieme: la definizione fornita è troppo generica. La terza regola serve ad escludere la possibilità che un dato elemento venga più volte ripetuto all'interno dello stesso insieme.

Infine un classico esempio di definizione che viola la quarta regola è la celebre antinomia di Russell. Consideriamo gli insiemi che non contengono se stessi come elemento e definiamoli “insiemi normali”. Ci si chiede: l'insieme I degli insiemi normali è normale? Prendiamo un insieme a ; possiamo dire che

$$a \in I \text{ se e solo se } a \notin a.$$

In particolare, se a è l'insieme I , $I \in I$ se e solo se $I \notin I$. Quindi, se fosse $I \in I$, sarebbe anche $I \notin I$ e se fosse $I \notin I$, sarebbe $I \in I$. Qualunque cosa si dice di I si arriva ad una contraddizione e non è possibile decidere se I contiene o no se stesso.

SIMBOLI DI APPARTENENZA E NON APPARTENENZA (\in, \notin)

Con le regole appena stabilite possiamo dire con certezza se un oggetto appartiene o no ad un insieme. Per dire che l'elemento x appartiene all'insieme A si scriverà “ $x \in A$ ”, mentre in caso contrario sarà “ $x \notin A$ ”.

RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME

Esistono più modi per rappresentare un insieme. Le rappresentazioni comunemente utilizzate sono:

- Tabulare (o estensiva)
- Geometrica. Grafici di Eulero–Venn
- Caratteristica (o intensiva)

La rappresentazione tabulare è la scrittura di tutti gli elementi dell'insieme entro parentesi graffe. Come esempio si può considerare l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano: $\{a, e, i, o, u\}$.

Analogo discorso si può fare per la rappresentazione tabulare dell'insieme delle consonanti della parola “matematica”: $\{m, t, c\}$.

Le consonanti che si ripetono vengono scritte una sola volta, in accordo con la regola *iii*).

Un esempio di rappresentazione è dato dai grafici di Eulero–Venn disegnati nella figura 1 per due insiemi A e B : essi sono rappresentati da ovali (in generale va bene una figura chiusa qualsiasi: cerchio, quadrato, rettangolo, ecc.). I punti rappresentano gli elementi degli insiemi.

Infine, la rappresentazione caratteristica sfrutta l'eventuale proprietà comune degli elementi dell'insieme. Ad esempio, l'insieme C dei numeri naturali minori di 100 si scrive, in tale rappresentazione, come

$$C = \{n : n \text{ è un numero naturale minore di } 100\}$$

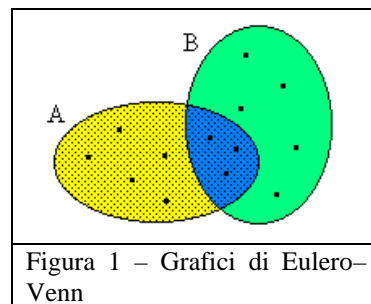


Figura 1 – Grafici di Eulero–Venn

(i due punti si leggono “tale che”) o, con la simbologia propria degli insiemi,

$$C = \{n : n \in \mathbb{N}, n < 100\}$$

È evidente in questo esempio il vantaggio di usare la rappresentazione intensiva invece dell'estensiva, che risulterebbe molto più prolissa.

INSIEME UGUALI. INSIEMI DISGIUNTI

Due insiemi A e B si dicono **uguali** quando sono formati con gli “stessi elementi”, cioè quando ogni elemento di A è anche elemento di B e viceversa: l'uguaglianza si scrive $A = B$.

Se A e B non sono uguali si scrive invece $A \neq B$.

Per esemplificare il concetto di uguaglianza, confrontiamo tra loro gli insiemi $A = \{\text{le vocali dell'alfabeto italiano}\}$ e $B = \{\text{le vocali della parola “aiuole”}\}$. La loro definizione è diversa, ma certamente $A = B$.

Due insiemi A e B si dicono **disgiunti** quando non hanno elementi in comune. I grafici di Eulero–Venn in questo caso sarebbero costituiti da due ovali che non si intersecano (per due insiemi uguali invece coinciderebbero).

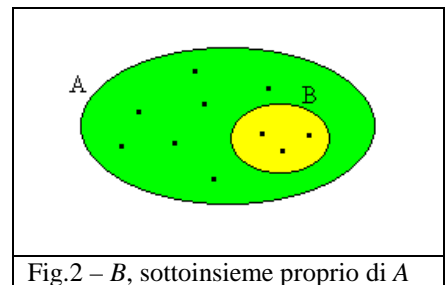
SOTTOINSIEME DI UN INSIEME

Dati due insiemi A e B , se ogni elemento di B è anche elemento di A , si dice che B è **sottoinsieme** di A (o che B è *incluso* in A) e si scrive $B \subseteq A$ oppure $A \supseteq B$. Se poi anche A è sottoinsieme di B , allora $A = B$.

Si noti che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso.

Se invece si ha $B \subseteq A$ e, in più, esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B , allora si parla di **inclusione stretta**, che si scrive $B \subset A$ oppure $A \supset B$; B in questo caso è detto sottoinsieme **proprio** di A .

La figura 2 rappresenta i grafici di Eulero–Venn per due insiemi A e B , con B sottoinsieme proprio di A .



Si faccia attenzione a non confondere nell'uso il simbolo di inclusione stretta \subset con quello di appartenenza \in : la questione non riguarda solo la grafia.

Per spiegarci meglio, consideriamo l'insieme $D = \{5, 7, 9\}$ ed il suo sottoinsieme proprio $E = \{7, 9\}$: è giusto scrivere $E \subset D$, ma non $E \in D$. Quest'ultima scrittura potrebbe essere corretta solo se D avesse per elementi degli insiemi anziché dei numeri.

Ricordiamo che con il simbolo a (o una lettera minuscola) intendiamo rappresentare un *elemento* di un insieme, mentre con $\{a\}$ intendiamo l'*insieme* che ha a come (unico) elemento. Dunque nell'esempio precedente si scriverà $7 \in D$, oppure $\{7\} \subset D$.

Per comodità è utile definire anche l'**insieme vuoto** (simbolo \emptyset) come l'insieme privo di elementi. Esso è per definizione contenuto in ogni insieme. Si può ottenere \emptyset in innumerevoli modi. “L'insieme degli uomini che passano le vacanze su Marte” oppure “l'insieme dei numeri negativi maggiori di zero” sono esempi di insieme vuoto e non c'è limite alle possibili definizioni. Tuttavia per definizione **l'insieme vuoto è unico**.

INSIEME DELLE PARTI

Per comprendere questo concetto è utile servirsi dell'insieme D definito nell'esempio precedente. Ci proponiamo di individuare tutti i possibili sottoinsiemi di D . Si trova:

$$\begin{aligned} &\emptyset \text{ (l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme)} \\ &\{5\}, \{7\}, \{9\} \text{ (i sottoinsiemi di } D \text{ composti da un solo elemento)} \\ &\{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 9\} \text{ (i sottoinsiemi di } D \text{ composti di due elementi)} \\ &\{5, 7, 9\} \text{ (l'insieme } D \text{ stesso)} \end{aligned}$$

I sottoinsiemi di D sono 8.

In generale si può dimostrare che un insieme costituito da N elementi possiede in tutto 2^N sottoinsiemi.

Consideriamo ora l'insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi di D :

$$\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{5, 7\}, \{7, 9\}, \{5, 9\}, \{5, 7, 9\}\}$$

L'insieme $\mathcal{P}(D)$ è detto **insieme delle parti** di D . Si tratta di un insieme i cui elementi sono a loro volta degli insiemi. Inoltre $E \in \mathcal{P}(D)$ implica $E \subseteq D$ e viceversa. Si noti che l'insieme delle parti *non è mai vuoto*, poiché si ha $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ e quindi perfino l'insieme delle parti di \emptyset contiene un elemento (\emptyset stesso).

INSIEME AMBIENTE. OPERAZIONI TRA INSIEMI

Prima di definire alcune operazioni essenziali tra gli insiemi, è bene notare che nelle applicazioni della teoria degli insiemi viene sempre considerato un insieme "totale" che contiene tutti quelli utilizzati: esso è detto **insieme ambiente** (o insieme universo). Ciò è indispensabile se si vuole evitare di cadere in assurdit  logiche come l'antinomia di Russell.

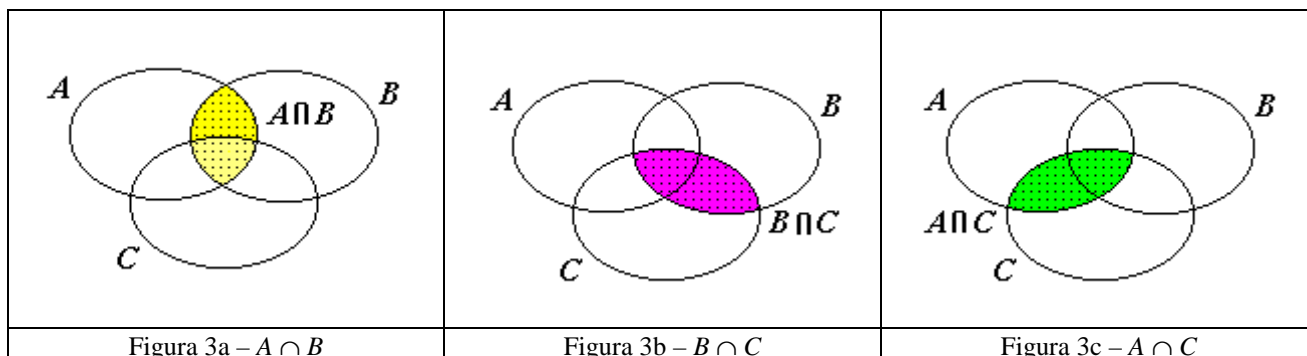
Intersezione

Si chiama **intersezione** (\cap) degli insiemi A e B l'insieme formato da tutti (e soli) gli elementi comuni ad A e B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Per l'intersezione si possono dimostrare le seguenti propriet :

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \quad (\text{commutativa}) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \quad (\text{associativa}) \\ A \cap A &= A \\ \emptyset \cap A &= A \cap \emptyset = \emptyset \\ \text{se } B \subseteq A &\text{ allora } A \cap B = B \end{aligned}$$



Le figure 3a, 3b, 3c rappresentano alcuni casi di intersezione fra tre insiemi.

Utilizzando i diagrammi di Eulero–Venn non   difficile rendersi conto della validit  delle propriet  enunciate.

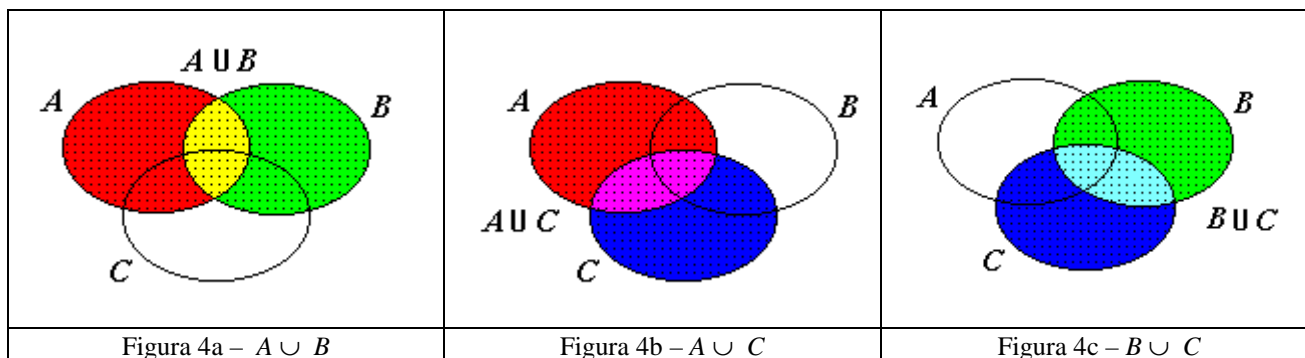
Unione

Si chiama **unione** (\cup) di due insiemi A e B l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad *almeno* uno degli insiemi A , B .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Per l'unione si possono dimostrare le seguenti propriet :

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \quad (\text{commutativa}) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \quad (\text{associativa}) \\ A \cup A &= A \\ \emptyset \cup A &= A \cup \emptyset = A \\ \text{se } B \subseteq A &\text{ allora } A \cup B = A \end{aligned}$$



Nelle figure 4a, 4b, 4c sono rappresentati esempi di unione fra tre insiemi. Come nel caso dell'intersezione, utilizzando i diagrammi di Eulero–Venn è facile verificare tali proprietà.

Altre proprietà dell'unione e dell'intersezione

- Proprietà *distributive*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Proprietà di *assorbimento*:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Ancora una volta si tratta di proprietà verificabili graficamente con i diagrammi di Eulero–Venn (attenzione: le serie di figure 3 e 4 rappresentano solo casi particolari).

Complementare

Se A è un insieme ed E è l'insieme universo in cui A è contenuto, allora si definisce *complementare* dell'insieme A l'insieme degli elementi che stanno in E ma non in A . Si scrive $\mathcal{C}_E A$ oppure \bar{A} :

$$\mathcal{C}_E A = \bar{A} = \{x : x \in E \text{ e } x \notin A\}.$$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà:

$$A \cup \bar{A} = E$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{E}} = \emptyset$$

$$\overline{\emptyset} = E$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Leggi di De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

La verifica con i diagrammi di Eulero–Venn è lasciata allo studente.

Prodotto cartesiano e rappresentazione grafica

Dati due insiemi non vuoti A e B , si consideri l'insieme che ha per elementi tutte le coppie (a, b) , dove a è un elemento di A e b è un elemento di B : tale insieme viene indicato con la notazione $A \times B$ e viene detto **prodotto cartesiano di A per B** . Gli elementi dell'insieme $A \times B$ sono delle coppie e si indicano con scritte del tipo (a, b) . Si noti che l'ordine è importante, cioè $(a, b) \neq (b, a)$: perciò in generale $A \times B \neq B \times A$.

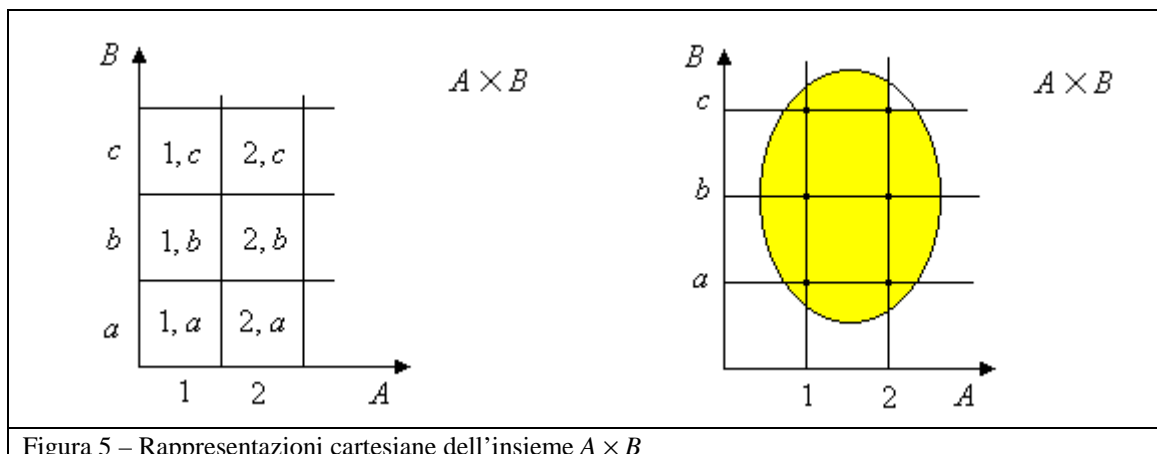


Figura 5 – Rappresentazioni cartesiane dell'insieme $A \times B$

Esempio

Sia $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. Allora $A \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$. Invece si avrà: $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

La rappresentazione grafica dell'insieme $A \times B$ si può fare in diversi modi.

La rappresentazione riportata in figura 5 è quella *cartesiana*.

Un altro tipo di rappresentazione grafica sfrutta invece i diagrammi di Eulero–Venn.

Il prodotto cartesiano si può definire anche all'interno di un unico insieme, quando $A = B$. In questo caso si scrive $A \times A$, o anche A^2 . Un esempio importantissimo è offerto dal prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali, \mathbf{R} , per se stesso: la rappresentazione cartesiana di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ è utilizzata in un'infinità di applicazioni. In essa ogni punto del piano corrisponde a una coppia di numeri reali (vedi figura 6).

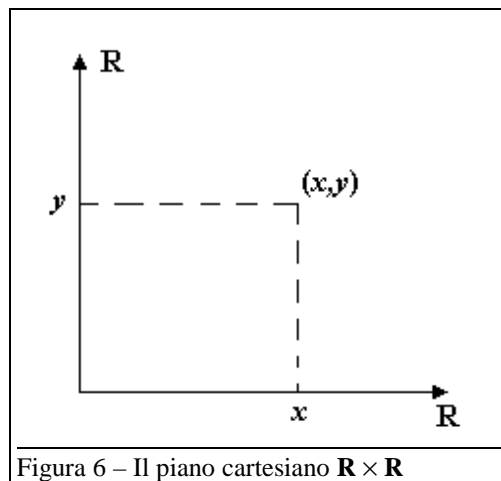


Figura 6 – Il piano cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

QUANTIFICATORI

Chiudiamo questo paragrafo con un cenno ai simboli quantificatori più usati in insiemistica.

Quantificatore universale (\forall)

Il simbolo \forall significa “per ogni”, “qualunque”.

Ad esempio, la scrittura “ $\forall a \in A$ ” significa “per ogni elemento a dell'insieme A ”.

Quantificatore esistenziale ($\exists, \exists!$)

Il simbolo \exists significa “c'è”, “esiste almeno un”: l'aggiunta del punto esclamativo modifica il significato del quantificatore in “esiste ed è unico”.

Esempi:

“ $\forall a \in A \exists f$ ” significa “per ogni elemento a di A esiste almeno un f ”

“ $\forall a \in A \exists! f$ ” significa “per ogni elemento a di A esiste un solo f ”.

RELAZIONI BINARIE E CONCETTO DI FUNZIONE

Il concetto di “relazione” nasce in modo naturale anche se nel linguaggio comune il termine è usato per indicare molte cose spesso diverse tra loro. Alcuni esempi: “la relazione tra clima e densità di popolazione di una certa area”, “la relazione tra le ore di studio e il rendimento scolastico”, “la relazione di parentela tra madre e figlia”, ecc..

Il significato più immediato è quello di collegamento: si stabilisce un legame (una relazione appunto) tra concetti separati.

In questo contesto ci limiteremo allo studio delle relazioni binarie, cioè quelle che coinvolgono due soli oggetti. Esprimendoci nel linguaggio dell'insiemistica è possibile precisare ancora meglio che cosa si intende per relazione.

DEFINIZIONE: Dati due insiemi A e B , non vuoti, si dice relazione binaria R una qualunque proprietà che lega gli elementi di A con quelli di B , in modo tale che $\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$ si verifichi una e una sola delle seguenti possibilità:

- 1) a è in relazione con b e si scrive $a R b$ oppure $R(a, b)$;
- 2) a non è in relazione con b e si scrive $\overline{a R b}$ oppure $\overline{R(a, b)}$;

Facciamo notare che una relazione binaria può essere definita all'interno di un singolo insieme, ovvero A e B potrebbero coincidere.

Esempio 1

Sia $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $R = \text{“}a \text{ è un multiplo di } b\text{”}$.

Esaminando tutte le possibilità risulta: ogni elemento dell'insieme dato è in relazione con se stesso (infatti ogni numero è multiplo di se stesso), tutti gli elementi dell'insieme sono in relazione con 1 ma non viceversa, ed infine 4 è in relazione con 2.

Nell'esempio considerato un elemento può essere in relazione con più elementi.

Esempio 2

Sia $A = B = \{\text{tutti gli abitanti del mondo}\}$, $R = \text{“}a \text{ è nato lo stesso anno di } b\text{”}$.

Come per gli esempi precedenti, alcune coppie dell'insieme soddisferanno R , altre no.

Esempio 3

Con lo stesso insieme definito nell'esempio 1, si consideri la relazione $R = \text{“}a \text{ è triplo di } b\text{”}$.

Chiaramente nessun elemento è in relazione con se stesso.

GRAFICO DI UNA RELAZIONE BINARIA

Gli esempi dati sopra mettono in evidenza che tutte le volte che si stabilisce una relazione R di A in B si genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Si ha la seguente definizione: il **grafico** \mathcal{G} della relazione R di A in B è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito dalle coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$ e tali che $a R b$.

Ovviamente la rappresentazione grafica è legata alla rappresentazione del prodotto cartesiano. In generale si utilizzano i seguenti metodi: tabella a doppia entrata, diagramma cartesiano, diagramma sagittale

Con un esempio si renderà conto delle diverse rappresentazioni.

Esempio 4

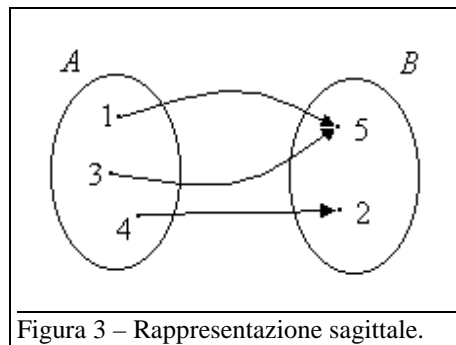
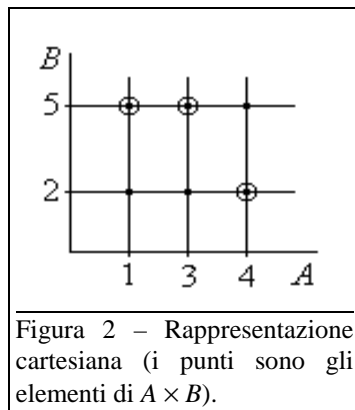
Si considerino gli insiemi $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{2, 5\}$.

Sia data la relazione tra A e B tale che $a R b$ se $a + b$ è un numero pari.

Il grafico è l'insieme $\mathcal{G} = \{(1, 5), (3, 5), (4, 2)\}$ e nelle figure 1, 2, 3 sono dati diversi tipi di rappresentazione.

$B \backslash A$	1	3	4
2			×
5	×	×	

Figura 1 – Rappresentazione mediante una tabella a doppia entrata.



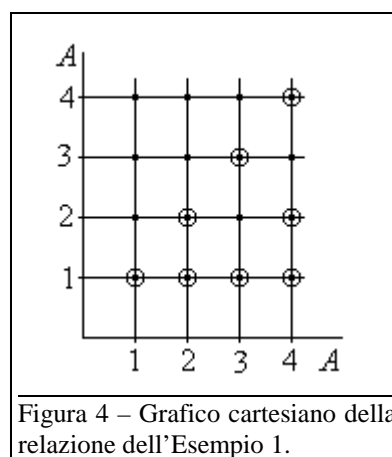
PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI BINARIE

- Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **riflessiva** se ogni elemento di A è in relazione con se stesso, cioè $\forall a \in A$ si ha $a R a$.

Esempio 5

Le relazioni definite dagli esempi 1 e 2 sono riflessive.

In figura 4 viene riportato il grafico cartesiano della relazione dell'esempio 1. Da questo si osserva che, poiché l'insieme delle coppie (a, a) è la diagonale di $A^2 = A \times A$, R è riflessiva se, e solo se, la diagonale di A^2 appartiene a \mathcal{G} .



- Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **antiriflessiva** se nessun elemento di A risulta in relazione con se stesso.

La relazione definita nell'esempio 3 è antiriflessiva.

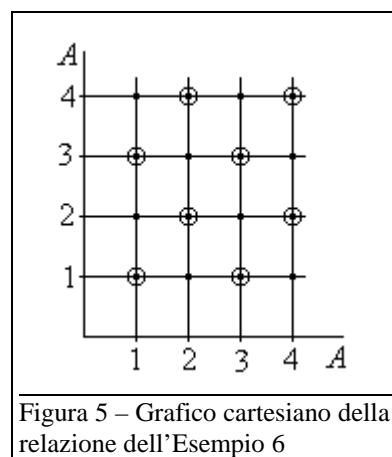
- Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **simmetrica** se da $a R b$ segue che $b R a$ dove $a, b \in A$.

Esempio 6

La relazione dell'esempio 3 è simmetrica.

In figura 5 riportiamo il grafico cartesiano della relazione: $a R b$ se $a + b$ è un numero pari, definita nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

In generale si osserva che nel grafico cartesiano di una relazione simmetrica i punti sono disposti "simmetricamente" rispetto alla diagonale del prodotto cartesiano A^2 . Notare anche come in questo caso gli elementi della diagonale appartengono al grafico della relazione che quindi è anche riflessiva.



- Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **antisimmetrica** se da $a R b$ e $b R a$ segue $a = b$ con $a, b \in A$.

Nell'esempio 1 è definita una relazione antisimmetrica.

- Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **transitiva** se dati $a, b, c \in A$, da $a R b$ e $b R c$ segue $a R c$. Le relazioni definite negli esempi 1 e 2 sono transitive.

Le proprietà ora viste consentono di definire due tipologie di relazioni molto importanti.

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **relazione di equivalenza** se essa è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempi

La relazione dell'esempio 2 è una relazione di equivalenza.

Nell'insieme di tutti gli esseri umani la relazione $R = "a \text{ ha la stessa altezza di } b"$ oppure $R = "a \text{ abita nella stessa regione di } b"$.

Nell'insieme delle rette del piano la relazione $R = "a \text{ è parallela a } b"$.

Per dire che a e b si corrispondono tramite una relazione di equivalenza a volte si scrive anche $a \sim b$.

RELAZIONI D'ORDINE

Una relazione binaria R definita in un insieme A si dice **relazione d'ordine** se essa è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Si dice anche che l'insieme A risulta ordinato dalla relazione R .

Esempi

La relazione dell'esempio 1 è una relazione d'ordine.

Nell'insieme dei numeri naturali \mathbf{N} (o nell'insieme dei numeri interi \mathbf{Z} o dei razionali \mathbf{Q} o anche dei reali \mathbf{R}) la relazione $R = "a \leq b"$ oppure $R = "a \geq b"$.

Nell'insieme delle parti di un insieme A , le relazioni di inclusione \subseteq oppure \supseteq .

Spesso una relazione d'ordine si indica con i simboli \leq oppure \geq .

Una relazione si dice di **ordine stretto** se: a e b sono in relazione solo se $a \neq b$.

Esempi

La relazione $R = "a < b"$ oppure $R = "a > b"$ negli insiemi numeri citati sopra.

Nell'insieme delle parti di un insieme A , le relazioni di inclusione \subset oppure \supset .

Una relazione d'ordine definita in un insieme A è di **ordine totale** se tutti gli elementi di A risultano confrontabili, cioè se $\forall a, b \in A$ si ha sempre che $a \leq b$ oppure $a \geq b$ (in questo caso i simboli \leq e \geq sono usati per intendere una relazione d'ordine generica).

In caso contrario l'ordine viene detto **parziale**.

Esempi

La relazione $R = "a \leq b"$ oppure $R = "a \geq b"$ negli insiemi numeri citati sopra è di ordine totale.

La relazione di inclusione nell'insieme delle parti di un insieme A è di ordine parziale.

CONCETTO DI FUNZIONE

Dati due insiemi qualunque, non vuoti, A e B , si definisce **applicazione o funzione f di A in B** una legge qualsiasi che fa corrispondere ad ogni elemento di A **uno e un solo elemento** di B . Si scrive:

$$y = f(x)$$

Si legge "y uguale effe di x"; x è variabile nell'insieme A , $f(x)$ si chiama valore della f in x o anche immagine di x . Si può anche scrivere:

$$f : A \mapsto B$$

$$f : x \in A \mapsto f(x) \in B$$

L'insieme A viene detto **insieme di definizione** o **dominio** della funzione f e generalmente si indica anche con $D(f)$.

L'insieme delle immagini degli elementi $x \in A$ viene chiamato **codominio** di f e si indica con $f(A)$. Risulta $f(A) \subseteq B$.

La x è detta anche variabile **indipendente**, mentre la y variabile **dipendente**.

Qualora gli insiemi A e B siano dei sottoinsiemi dei numeri reali si parla di funzioni reali di variabili reali.

Per definire una funzione esistono principalmente due modi: tramite una tabella, oppure in modo analitico tramite una relazione matematica tra le variabili.

Definire una funzione tramite una tabella significa dare le coppie di valori che si corrispondono; in questo caso si parla di funzione data "per punti".

Esempio 7

Nella seguente Tabella 1 viene definita la relazione che esprime la temperatura di un luogo in funzione dell'ora del giorno.

Definire una funzione analiticamente significa dare la relazione matematica che lega le due variabili x e y .

ora	temperatura
0	0
2	-0,5
4	-0,6
6	-0,3
8	0
10	1,2
12	2,4
14	4,0
16	5,2
18	4,1
20	2,2
22	1,3
24	0,5

Tabella 1

Esempio 8

Sono funzioni espresse analiticamente le seguenti:

1. $y = x^2 + 3x - 1$;
2. $y = \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$;
3. $y = \sqrt{4 - x^2}$;
4. $y = \text{sen}(2x)$;
5. $y = \text{cos}(3x)$;
6. $y = \text{tan}(x)$;
7. $y = \log_5(x - 2)$;
8. $y = 3^x$.

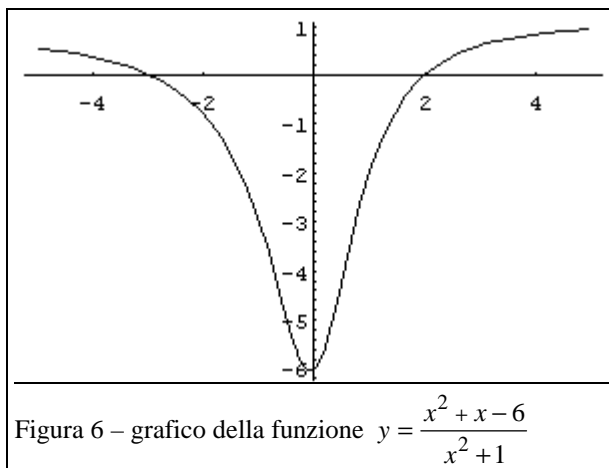
Le funzioni analitiche possono essere classificate in base al tipo di espressione che le rappresenta e possono essere funzioni **algebriche** o **trascendenti**. Le prime sono quelle che si possono scrivere nella forma

$$P(x,y) = 0$$

cioè un polinomio in x e y . Le seconde sono quelle che non sono algebriche.

Nell'esempio 8 le prime tre sono funzioni algebriche, le altre sono trascendenti. In particolare: la prima è una **funzione algebrica razionale intera**, la seconda è una **funzione algebrica razionale fratta**, la terza è una **funzione algebrica irrazionale**, la quarta la quinta e la sesta sono **funzioni goniometriche**, la settima è una **funzione logaritmica** e l'ottava è una **funzione esponenziale**.

Comunque si definisca una funzione il modo più efficace per studiarne la relazione tra le variabili consiste nel darle una rappresentazione grafica. Il **grafico** di una funzione è l'insieme di punti (x,y) del piano tali che $y = f(x)$. In altre parole un punto del piano di coordinate (a,b) appartiene al grafico di una funzione $y = f(x)$ se e solo se $b = f(a)$. Vedi la figura 6.



I NUMERI REALI

Nella scuola media si sono incontrati ed usati vari tipi di numeri. Li riassumiamo qui in breve, più che altro per stabilire la terminologia che useremo relativamente ad essi.

I NUMERI NATURALI \mathbf{N} . Sono i numeri 0, 1, 2, 3, ... eccetera. L'insieme dei numeri naturali è indicato con \mathbf{N} . Avvertiamo subito che non tutti sono d'accordo nel considerare 0 numero naturale, come noi invece faremo. Nell'insieme dei numeri naturali è possibile introdurre due operazioni "+" e "×" (l'addizione e la moltiplicazione) tali che $\forall m, n \in \mathbf{N}, m+n \in \mathbf{N}$ e $m \times n \in \mathbf{N}$, ovvero l'addizione e la moltiplicazione di due numeri naturali è un numero naturale. È altresì noto che la sottrazione e la divisione tra due numeri naturali non producono un numero naturale: per far sì che la sottrazione tra due numeri naturali abbia senso è necessario estendere l'insieme con i numeri negativi (si produce l'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi); per poter sempre effettuare la divisione è necessario introdurre le frazioni (allargandosi all'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali).

In \mathbf{N} esiste inoltre un ordinamento totale (\leq) e $\forall m, n \in \mathbf{N}$ risulta o $m \leq n$ o $n \leq m$.

I NUMERI INTERI \mathbf{Z} . I numeri interi o interi relativi sono i numeri ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... eccetera, cioè sono costituiti dai numeri naturali e dai loro opposti (0 coincide con il suo opposto). I numeri naturali sono dei particolari numeri interi, gli interi positivi o nulli; pertanto l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali è un sottoinsieme dell'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$). L'ordinamento vale anche in \mathbf{Z} .

I NUMERI RAZIONALI \mathbf{Q} . Sono quei numeri che si indicano come frazioni $\frac{a}{b}$ (o a/b) di numeri interi, in cui il denominatore b sia diverso da 0. Sono ad esempio numeri razionali i numeri $1/4, -2/3, 3/5, 0/10, 11/20$. Ricordiamo che i numeri razionali a/b e c/d sono uguali (o, in altre parole, le frazioni a/b e c/d rappresentano lo stesso numero razionale) quando risulta

$$a \times d = b \times c$$

da ciò segue il fatto che in una frazione numeratore e denominatore possono essere moltiplicati per uno stesso numero diverso da 0 senza alterare il valore della frazione stessa, ed inversamente la possibilità di ridurre ai minimi termini una frazione data. Tenendo conto delle regole del segno si può sempre scrivere un numero razionale in modo che il denominatore sia positivo. Non riepiloghiamo le regole di calcolo con le frazioni, che si suppongono ovviamente ben note. L'insieme \mathbf{Z} degli interi è un sottoinsieme di \mathbf{Q} (ricordiamo che se n è intero la frazione $n/1$ viene identificata con n).

L'ordinamento vale anche in \mathbf{Q} ($a/b \leq c/d$ significa $a \times d \leq b \times c$).

I NUMERI REALI \mathbf{R} . L'insieme dei numeri razionali non risolve però tutti i problemi. Il problema della misura porta infatti a situazioni in cui l'uso dei soli numeri razionali non è sufficiente per risolvere tutte le situazioni. Diamo le seguenti due definizioni.

Definizione 1: due grandezze omogenee si dicono commensurabili quando ammettono una grandezza sottomultipla comune; cioè quando esiste una terza grandezza, omogenea alle prime due, che è contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse. Il rapporto di due grandezze commensurabili è un numero razionale.

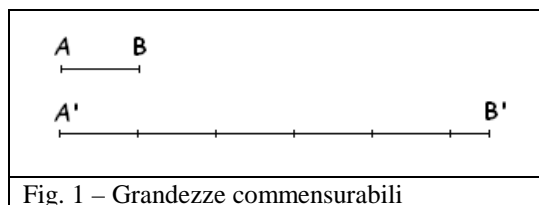


Fig. 1 – Grandezze commensurabili

I segmenti riportati in figura 1 sono commensurabili, infatti posto $AB = 1$, il segmento $A'B' = 11/2$.

Definizione 2: due grandezze omogenee si dicono incommensurabili quando non ammettono una grandezza sottomultipla comune; cioè quando non è possibile determinare una terza grandezza, omogenea alle prime due, che sia contenuta un numero intero di volte in ciascuna di esse. Il rapporto di due grandezze incommensurabili è un numero irrazionale.

Consideriamo quindi il seguente problema.

PROBLEMA: Si consideri il lato e la diagonale di un quadrato. Se $l = 1$ è la misura del lato del quadrato ABCD e d la misura della diagonale BD, il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABD ci permette di scrivere:

$$d^2 = l^2 + l^2 \quad \text{ossia} \quad d^2 = 2l^2 = 2$$

TEOREMA: Non esiste alcun $d \in \mathbf{Q}$ tale che $d^2 = 2$.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista un numero razionale $d = m/n$, con m ed n primi tra di loro, tale che $d^2 = m^2/n^2 = 2$. Questo implica che

$$(*) \quad m^2 = 2n^2,$$

cioè m^2 è pari e quindi anche m è pari, cioè esiste un numero intero s tale che $m = 2s$. Sostituendo in (*) si ottiene

$$(2s)^2 = 2n^2 \quad \text{cioè} \quad n^2 = 2s^2$$

e quindi anche n è pari. Ciò però è in contraddizione con la supposizione iniziale che m ed n siano primi tra di loro.

■

Come si è visto, la risoluzione di problemi via via più complessi ha richiesto il successivo ampliamento degli insiemi numerici. Il problema ora visto è uno dei tanti che porta alla necessità di ampliare anche l'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali e costruire un nuovo insieme numerico fondamentale: l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali. In \mathbf{R} è per esempio possibile il calcolo della radice quadrata di un qualsiasi numero positivo.

\mathbf{R} è l'unione di: \mathbf{Q} (numeri razionali) e di \mathbf{I} (numeri irrazionali):

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$$

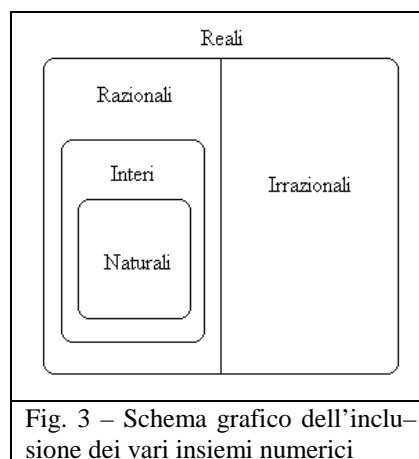
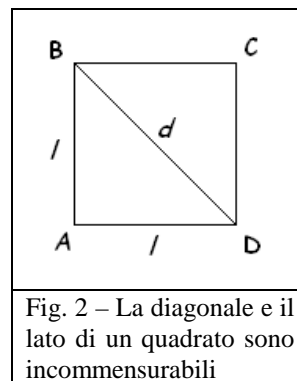
Gli insiemi numerici \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{I} sono dei sottoinsiemi di \mathbf{R} .

L'introduzione dei numeri irrazionali completa il quadro dei numeri decimali. I numeri reali possono essere infatti pensati come decimali, limitati e non, non necessariamente periodici cioè con un arbitrario allineamento di cifre dopo la virgola; in questo contesto i numeri razionali sono decimali limitati oppure periodici (almeno da una certa cifra in poi). I numeri reali irrazionali sono invece costituiti da un numero infinito di cifre decimali, che non hanno alcun periodo.

Un altro numero irrazionale molto importante in matematica è il numero che esprime il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro: π .

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989.....

Le prime 1000 cifre di π



I NUMERI COMPLESSI C. Si vuol risolvere, in \mathbf{R} , l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{ovvero} \quad x^2 = -1$$

in altre parole si vuol trovare un numero reale che elevato al quadrato dia -1 .

Un tale problema in \mathbf{R} non ammette soluzioni. Per parlare di radici di numeri negativi è necessario ampliare anche \mathbf{R} , introducendo in numeri immaginari che uniti ai reali costituiscono i numeri complessi \mathbf{C} .

Tralasciamo \mathbf{C} e diamo una definizione assiomatica dei numeri reali.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI \mathbf{R} .

- I numeri reali sono un insieme \mathbf{R} su cui sono definite:
 - **due applicazioni** che chiamiamo addizione (+) e moltiplicazione (\times), che ad ogni coppia di numeri reali a e b fanno corrispondere rispettivamente un numero reale $a+b$ e un numero reale $a \times b$,
 - **una relazione** tra coppie di \mathbf{R} , detta ordinamento totale (\leq).
- \mathbf{R} soddisfa l'**assioma della continuità** (o di Dedekind).

Le due applicazioni godono delle seguenti proprietà:

(+)

- I) $\forall a, b \in \mathbf{R}, a+b = b+a$ (proprietà commutativa)
- II) $\forall a, b, c \in \mathbf{R}, a+(b+c) = (a+b)+c$ (proprietà associativa)
- III) $\exists! 0 \in \mathbf{R}$ tale che $\forall a \in \mathbf{R}, a+0 = 0+a = a$ (esistenza e unicità dell'elemento neutro).
- IV) $\forall a \in \mathbf{R} \exists! 1' \text{ opposto } -a \in \mathbf{R}$ tale che $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (esistenza e unicità dell'opposto).

(\times)

- I) $\forall a, b \in \mathbf{R}, a \times b = b \times a$ (proprietà commutativa)
- II) $\forall a, b, c \in \mathbf{R}, a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (proprietà associativa)
- III) $\exists! 1 \in \mathbf{R}$ tale che $\forall a \in \mathbf{R}, a \times 1 = 1 \times a = a$ (esistenza e unicità dell'elemento neutro).
- IV) $\forall a \in \mathbf{R}, a \neq 0, \exists! 1/a \in \mathbf{R}$ tale che $a \times (1/a) = (1/a) \times a = 1$ (esistenza e unicità dell'inverso).

Come si può facilmente dimostrare (+) non può essere definita in \mathbf{N} (non è verificata la proprietà IV), ma può essere definita in \mathbf{Z} . In \mathbf{Z} però non può essere definita (\times) (non è verificata la IV). Le due applicazioni possono essere definite in \mathbf{Q} .

Annotazione sul simbolo $\frac{0}{0}$. Nella proprietà IV abbiamo visto che non può esistere reciproco per il numero 0; in quest'ottica l'espressione $a/0$ non ha mai significato, qualunque sia a , anche se $a = 0$. Pertanto $0/0$ non esiste, cioè è una scrittura alla quale non viene alcun senso.
In altri casi si usa dire che $0/0$ è indeterminato, cioè rappresenta qualsiasi numero. Ciò ha senso se si definisce l'espressione a/b come l'insieme delle soluzioni dell'equazione $b \cdot x = a$ (nell'incognita x). Infatti è chiaro che l'equazione $0 \cdot x = 0$ è soddisfatta da qualsiasi numero.

La relazione gode delle seguenti proprietà:

- I) $\forall a, b \in \mathbf{R}, a \leq b$ o $b \leq a$ (dicotomia)
- II) $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$ (proprietà transitiva)
- III) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$ (proprietà antisimmetrica)
- IV) $\forall a \in \mathbf{R}, a \leq a$ (proprietà riflessiva).

Si può facilmente notare che l'ordinamento totale è una relazione che vale sia in \mathbf{N} , sia in \mathbf{Z} , sia in \mathbf{Q} .

Altre proprietà di (+), (\times), (\leq)

- I) $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, se $a \leq b$ allora $a+c \leq b+c$
- II) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora $0 \leq a \times b$
- III) $\forall a, b, c \in \mathbf{R}, a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$ (proprietà distributiva).

Le proprietà date spiegano le regole che vengono normalmente usate operando con i numeri, per esempio:

- $a \times 0 = 0$; poiché $a \times 0 = a \times (0+0) = a \times 0 + a \times 0$, tale relazione sarà verificata se e solo se (\Leftrightarrow) $a \times 0 = 0$.
- $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $b = 0$; poiché se $a \neq 0 \exists 1/a$, allora $(1/a) \times (a \times b) = (1/a) \times 0$ implica che $b = 0$ (e viceversa se $b \neq 0$).
- Se $a \geq 0$, allora $-a \leq 0$; poiché $a \geq 0$, allora $a+(-a) \geq 0+(-a)$ e quindi $0 \geq -a$, ovvero $-a \leq 0$.
- Se $a \leq b$ e $c < 0$ allora $a \times c \geq b \times c$; poiché $c < 0$, allora $-c > 0$ e poiché $a \leq b$, allora $0 \leq b-a$, da ciò segue che $0 \leq (b-a) \times (-c)$ ovvero $a \times c - b \times c \geq 0$ da cui $a \times c \geq b \times c$.

Per chiarire l'assioma della continuità diamo prima la seguente definizione:
 se presi A e B, due sottoinsiemi non vuoti di \mathbf{R} ,

$$A \cup B = \mathbf{R}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B \text{ si ha } a < b$$

si dirà che la coppia di sottoinsiemi (A,B) è una sezione di \mathbf{R} .

Per esempio: $A = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 20\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} : x > 20\}$ è una sezione di \mathbf{R} .

L'assioma della continuità recita: $\forall (A,B)$ sezione di \mathbf{R} , $\exists ! L \in \mathbf{R}$ tale che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq L \leq b$.

Alcune conseguenze dell'assioma della continuità:

- $\forall a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ e $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists ! y \in \mathbf{R}$, $y > 0$ tale che $y^n = a$ (esistenza e unicità della radice ennesima di un numero positivo).
- $\forall a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, $\exists r \in \mathbf{Q}$ tale che $a < r < b$ (densità di \mathbf{Q} in \mathbf{R}).
- Ogni insieme limitato di numeri reali è dotato di estremo superiore e di estremo inferiore finiti.

Si consideri ora una retta e su di essa si prendano un punto O e un punto U. La retta può essere percorsa in due versi: il primo che porta da O verso U, il secondo che porta da U verso O. Per il seguito si porrà la convenzione di chiamare verso positivo il primo e verso negativo il secondo; in ogni rappresentazione della retta

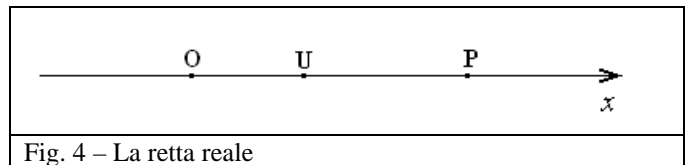


Fig. 4 – La retta reale

il verso positivo verrà indicato da una freccia e la retta con una lettera (figura 4). Una retta sulla quale sia stato scelto un verso positivo viene chiamata **retta orientata** o anche **asse**. Il punto O è chiamato **origine** e il segmento OU **unità di misura**. Quando su di una retta si fissano l'origine, l'unità di misura e l'orientamento, si parla di **asse cartesiano**.

Tutti in numeri razionali hanno una rappresentazione su un asse cartesiano; ad ogni numero razionale p corrisponderà un punto P tale che il segmento OU sia contenuto p volte nel segmento OP (vedi definizione di grandezze commensurabili). Attenzione, il viceversa non è vero!

Tra due numeri razionali distinti possiamo inserire infiniti altri numeri razionali; \mathbf{Q} è denso, nel suo ordinamento sulla retta.

Potrebbe sembrare che l'intera retta numerica sia completamente esaurita dai "punti" razionali, ma malgrado la loro densità, i numeri razionali lasciano sulla retta numerica dei "buchi", cioè dei punti che non corrispondono ad alcun numero razionale.

A ciascuno dei "buchi" di \mathbf{Q} corrisponde un numero irrazionale e poiché l'infinità dei numeri irrazionali è "maggiore" di quella dei numeri razionali, \mathbf{Q} non rappresenta che una piccola parte dei punti della retta.

L'insieme \mathbf{R} è in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta; cioè ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa, ad ogni punto di una retta corrisponde un numero reale.

Per effettuare ciò si consideri un punto P su di una retta orientata, ad esso resta associato un numero reale x che rappresenta quante volte l'unità di misura (il segmento OU) è contenuto nel segmento OP. x è un numero razionale se OP e OU sono commensurabili, x è un numero irrazionale se OP e OU sono incommensurabili.

Viceversa, dato un numero reale x , ad esso resta associato uno e un sol punto P di una retta orientata in modo che il segmento OP sia x volte l'unità di misura OU.

In base a ciò è possibile identificare un oggetto numerico (l'insieme \mathbf{R}) con un oggetto geometrico (la retta). Per questo motivo si parla anche di **retta reale**.

ALCUNE DEFINIZIONI SUGLI INSIEMI NUMERICI

Il sottoinsieme \mathbf{R}^+ di \mathbf{R} così definito:

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$$

è detto insieme dei numeri reali positivi; gli $x \in \mathbf{R}$ tali che $x > 0$ sono detti strettamente positivi (e quindi l'insieme degli strettamente positivi è $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$); avvertiamo subito che la terminologia ora introdotta non è universalmente accettata, e che molti per numero positivo intendono un numero strettamente positivo)

Analogamente l'insieme

$$\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$$

è detto insieme dei numeri negativi (e un valore $x < 0$ è detto strettamente negativo). Si noti che è $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^- = \mathbf{R}$ (discende dalla totalità dell'ordine) e $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{R}^- = \{0\}$. Indicheremo con \mathbf{R}_0 (leggi R zero) l'insieme $\mathbf{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$ dei numeri reali non nulli; con $\mathbf{R}_0^+ = \mathbf{R}_0 \cap \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ l'insieme dei reali strettamente positivi;

con $\mathbf{R}_0^- = \mathbf{R}_0 \cap \mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ l'insieme dei reali strettamente negativi. Risulta $\mathbf{R}_0^+ \cup \mathbf{R}_0^- = \mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_0^+ \cap \mathbf{R}_0^- = \emptyset$.

DEFINIZIONE 1 – Dato un insieme $A \subset \mathbf{R}$, diremo che un numero reale M è un **maggiorante** di A se, $\forall a \in A$, $a \leq M$. Con $M(A)$ indicheremo l'insieme dei maggioranti di A .

DEFINIZIONE 2 – Dato un insieme $A \subset \mathbf{R}$, diremo che un numero reale m è un **minorante** di A se, $\forall a \in A$, $a \geq m$. Con $m(A)$ indicheremo l'insieme dei minoranti di A .

DEFINIZIONE 3 – Un insieme $A \subset \mathbf{R}$ si dirà **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.

DEFINIZIONE 4 – Un insieme $A \subset \mathbf{R}$ si dirà **limitato inferiormente** se ammette un minorante.

DEFINIZIONE 5 – Un insieme $A \subset \mathbf{R}$ si dirà **limitato** se esso è limitato superiormente e inferiormente.

DEFINIZIONE 6 – Dato un insieme $A \subset \mathbf{R}$ limitato, si dirà che esso è dotato di **massimo** M e di **minimo** m , se esistono due numeri reali $M, m \in A$ tali che $m \leq a \leq M$, $\forall a \in A$ (si scrive anche $M = \max A$ e $m = \min A$).

N.B. Se M è il massimo di A , allora $M \in A$ ed è il minimo dei maggioranti; se m è il minimo di A , allora $m \in A$ ed è il massimo dei minoranti.

DEFINIZIONE 7 – Dato un insieme $A \subset \mathbf{R}$ limitato superiormente, si dirà **estremo superiore** di A ($\sup A$) il minimo dei maggioranti di A . Se $A \subset \mathbf{R}$ è limitato inferiormente, si dirà **estremo inferiore** di A ($\inf A$) il massimo dei minoranti di A .

OSSERVAZIONE – Se $M = \max A$ allora $M = \sup A$. Se $m = \min A$ allora $m = \inf A$. Viceversa non è vero: se $M = \sup A$, non è detto che $M = \max A$. Se $m = \inf A$, non è detto che $m = \min A$.

ESEMPIO – Sia $A = \{x \in \mathbf{R} : 2 < x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbf{R} : 5 \leq x \leq 7\}$.

Questo insieme è limitato in quanto dotato di maggioranti e di minoranti: $M(A) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 7\}$; $m(A) = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 2\}$.

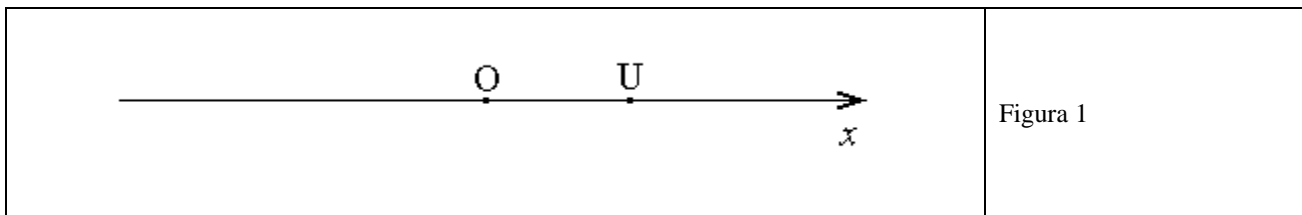
$\min M(A) = 7$ e $7 \in A$, quindi $7 = \max A$.

$\max m(A) = 2$ e $2 \notin A$, quindi 2 non è $\min A$, ma solamente $\inf A$.

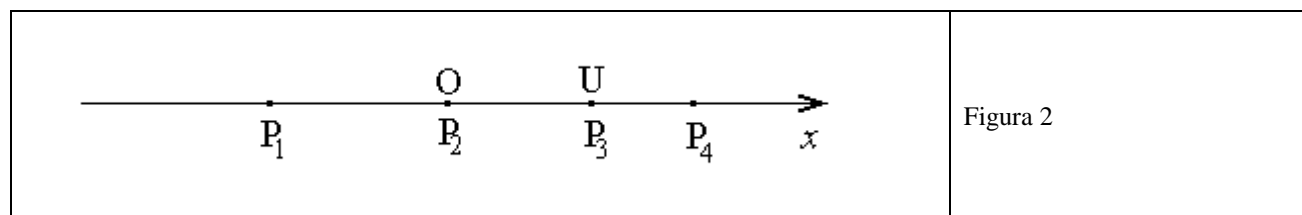
DEFINIZIONE 8 – Se un insieme $A \subset \mathbf{R}$ non limitato superiormente si porrà $\sup A = +\infty$; se un insieme $A \subset \mathbf{R}$ non limitato inferiormente si porrà $\inf A = -\infty$.

IL PIANO CARTESIANO

GENERALITÀ



Si consideri un asse cartesiano: si prenda su di esso un punto P e si consideri il segmento OP. Il rapporto OP/OU è un numero reale che prende il nome di ascissa del punto P.

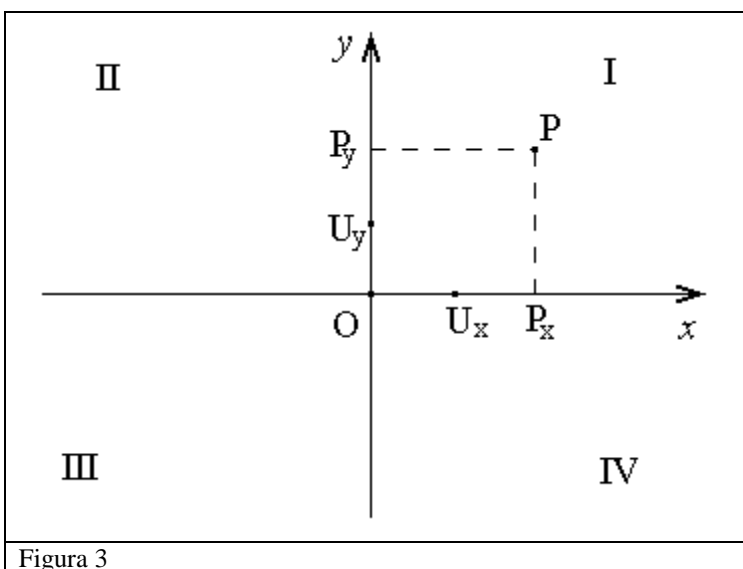


Con riferimento alla figura 2 si osservi che:

- P_1 si trova a sinistra di O, il segmento OP_1 è orientato in senso opposto rispetto all'orientamento del segmento OU: l'ascissa di P_1 è un numero negativo;
- P_2 coincide con O il segmento OP_2 si riduce ad un punto: l'ascissa di P_2 è 0;
- P_3 coincide con U, il segmento OP_3 coincide con il segmento OU: l'ascissa di P_3 è 1;
- P_4 si trova a destra di O, il segmento OP_4 è orientato nello stesso senso del segmento OU: l'ascissa di P_4 è un numero positivo.

Si consideri ancora un asse cartesiano. Sia a un numero reale assegnato: è possibile determinare uno ed un sol segmento OP tale che la sua misura rispetto all'unità scelta sia proprio a . Il punto P, estremo del segmento, è il punto associato al numero a .

Le considerazioni ora fatte conducono al seguente risultato: **esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'asse cartesiano e i numeri reali**. Cioè ad ogni numero reale corrisponde un punto e uno solo su di un asse cartesiano e, viceversa, ad ogni punto su di un asse cartesiano corrisponde un numero reale ed uno solo.



Si consideri ora un piano; su di esso si traccino due assi cartesiani perpendicolari¹ aventi l'origine in comune (vedi figura 3). L'unità di misura dei due assi non deve essere necessariamente la stessa. L'asse orizzontale verrà chiamato asse x o asse delle ascisse, quello verticale asse y o asse delle ordinate.

Sul piano resta allora stabilito un **sistema di assi cartesiani ortogonali**.

Sia P un punto del piano. Da esso si traccino la parallela all'asse y che incontra l'asse x nel punto P_x e la parallela all'asse x che incontra l'asse y nel punto P_y (vedi figura 3). P_x è un punto dell'asse x , sia a la sua ascissa; P_y è un punto dell'asse y , sia b la sua ordinata. In questo modo al punto P resta associata una coppia ordinata di numeri reali $(a; b)$ che vengono

¹ La perpendicolarità degli assi non è necessaria, è solo comoda per i calcoli.

chiamati **coordinate** di P.

Viceversa ad ogni coppia di numeri reali $(a; b)$ si può far corrispondere un punto di un piano. Infatti, fissato un piano cartesiano, si prenda sull'asse x un punto P_x la cui ascissa sia a e da esso si tracci la parallela all'asse y ; sull'asse y si prenda un punto P_y la cui ascissa sia b e da esso si tracci la parallela all'asse x . Le due rette si incontrano in un unico punto P.

In virtù di questo, se su di un piano si stabilisce un sistema di assi cartesiani, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali, cioè ad ogni punto P del piano corrisponde una e una sola coppia di numeri reali $(a; b)$ e, viceversa, ad ogni coppia di numeri reali $(a; b)$ corrisponde uno e un solo punto sul piano.

Un piano su cui stato fissato un sistema di assi cartesiani, in base alle definizioni date sopra, ha le seguenti caratteristiche (vedi figura 3):

- l'asse x e l'asse y dividono il piano in quattro parti dette quadranti;
- dato un punto P di coordinate $(a; b)$ si ha:
 - $a > 0$ e $b > 0$ se P sta nel I quadrante;
 - $a < 0$ e $b > 0$ se P sta nel II quadrante;
 - $a < 0$ e $b < 0$ se P sta nel III quadrante;
 - $a > 0$ e $b < 0$ se P sta nel IV quadrante;
- dato un punto P di coordinate $(a; b)$ si ha:
 - $a = 0$ se P sta sull'asse y ;
 - $b = 0$ se P sta sull'asse x .

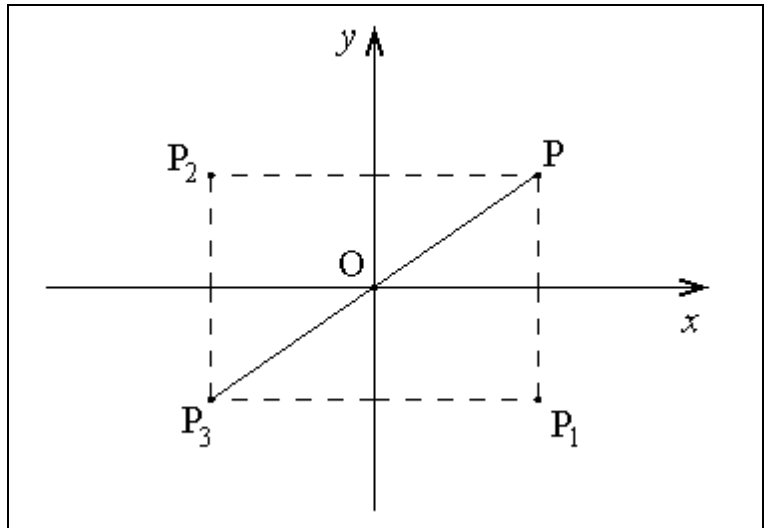


Figura 4

Fissato su di un piano un sistema di assi cartesiani ortogonali, dato un punto P di coordinate $(a; b)$, ci si pone il problema di determinare il simmetrico di P rispetto all'asse x , rispetto all'asse y e rispetto all'origine degli assi. Si ricordi che, dato un punto P, P_1 è simmetrico di P rispetto ad un asse se P_1 sta sulla

perpendicolare condotta da P all'asse e il punto medio del segmento PP_1 sta sull'asse stesso; P_1 è simmetrico di P rispetto ad un punto Q se Q il punto medio del segmento PP_1 .

Da ciò si deduce (figura 4) che il simmetrico di $P=(a; b)$ rispetto all'asse x è $P_1=(a; -b)$, rispetto all'asse y è $P_2=(-a; b)$, rispetto all'origine è $P_3=(-a; -b)$.

Siano $A = (x_A; y_A)$ e $B = (x_B; y_B)$ due punti di un piano in cui è stato fissato un riferimento cartesiano. Si dimostra che la distanza tra A e B (che scriveremo $d(A; B)$) è data dalla relazione:

$$d(A; B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

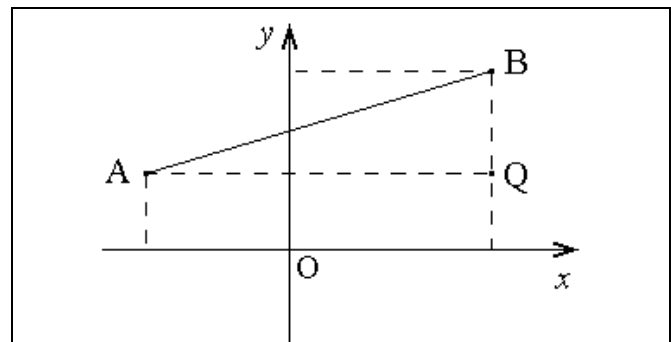


Figura 5

In figura 5 si può vedere come la dimostrazione discenda dall'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABQ.

L'EQUAZIONE DELLA RETTA

Per quanto detto sopra, un punto $P(x; y)$ che sta sull'asse x ha ordinata nulla, cioè $y=0$, quindi tale equazione è l'equazione dell'asse x ; un punto $P(x; y)$ che sta sull'asse y ha ascissa nulla, cioè $x=0$, quindi tale equazione è l'equazione dell'asse y .

Un'equazione del tipo $y = k$ (dove k è un numero reale) rappresenta l'insieme dei punti del piano che hanno ordinata uguale a k e quindi una retta parallela all'asse x ; mentre un'equazione del tipo $x = h$ (dove h è un numero reale) rappresenta l'insieme dei punti del piano che hanno ascissa uguale a h e quindi una retta parallela all'asse y .

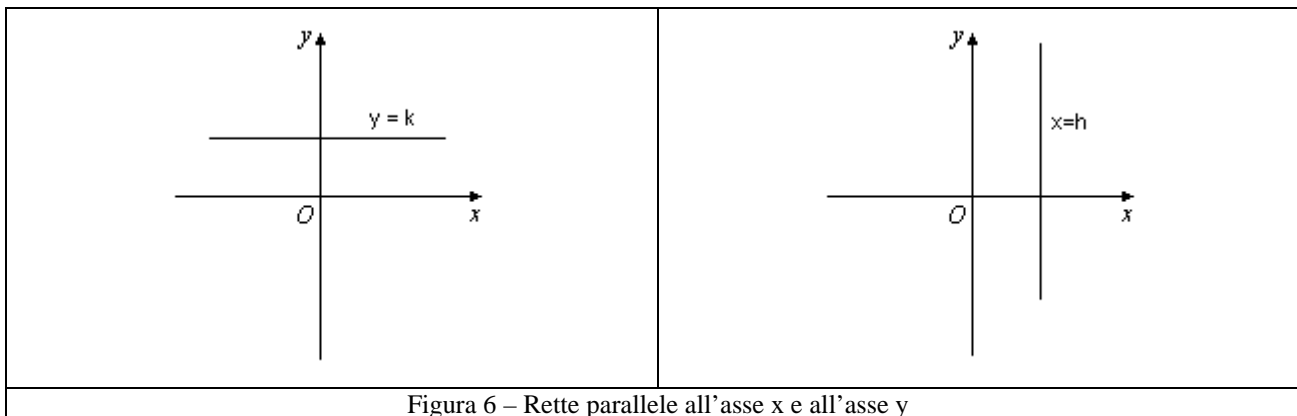


Figura 6 – Rette parallele all’asse x e all’asse y

Dalla geometria si sa che un punto appartiene alla bisettrice di un angolo se ha ugual distanza dai lati dell’angolo stesso. Sia $P(x; y)$ un punto sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, dalla definizione data, la sua distanza dall’asse x (cioè y) deve essere uguale alla sua distanza dall’asse y (cioè x). Si ha quindi $y = x$ che rappresenta quindi l’equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante.

Con ragionamento analogo si dimostra che $y = -x$ è l’equazione della bisettrice del secondo e quarto quadrante.

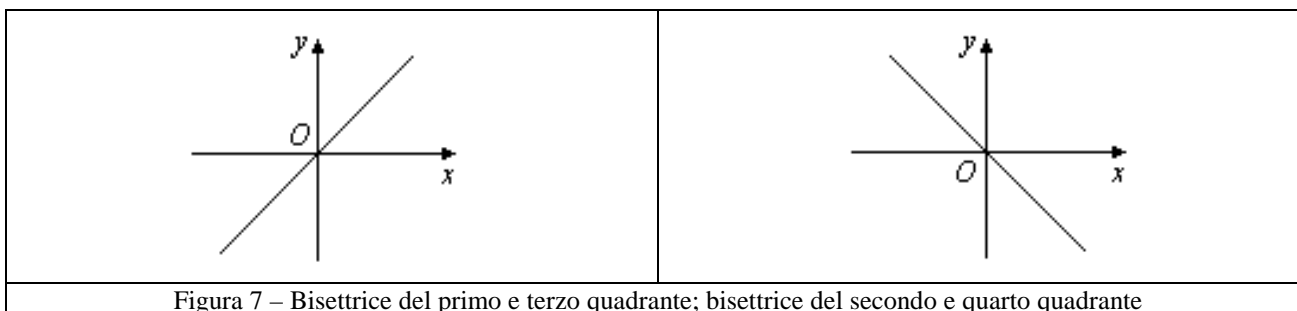


Figura 7 – Bisettrice del primo e terzo quadrante; bisettrice del secondo e quarto quadrante

Si dimostra che in un sistema di assi cartesiani una retta viene rappresentata da un’equazione del tipo:

$$(1) \quad ax + by + c = 0$$

con a, b, c numeri reali e a, b non contemporaneamente nulli².

Nel caso sia $b \neq 0$ si usa scrivere l’equazione nella forma

$$(2) \quad y = mx + q$$

dove $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$. Tale equazione rappresenta quindi tutte le rette del piano che non sono parallele all’asse y.

Infatti, se $b = 0$ l’equazione diventa: $ax + c = 0$ e, ponendo $h = -\frac{c}{a}$, si ha: $x = h$ che come detto sopra sono le rette parallele all’asse y.

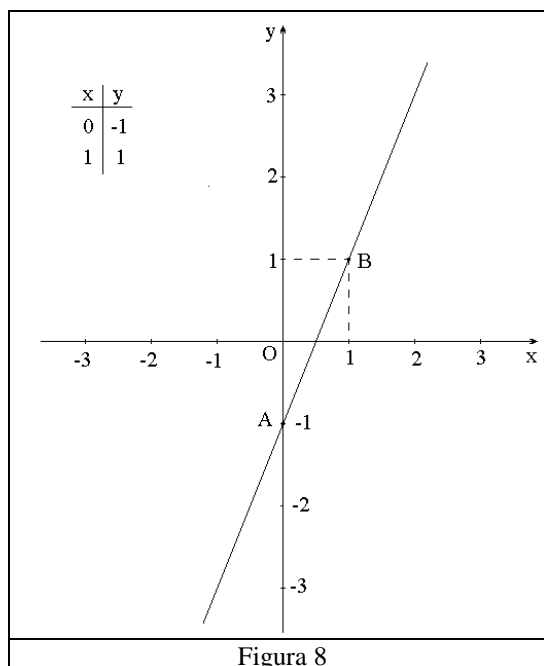
La geometria euclidea ci garantisce che per due punti passa una e una sola retta, questo fatto ci dà un modo per disegnare una retta sul piano cartesiano. Chiariremo con un esempio.

² Più in generale una curva si rappresenta su di un piano cartesiano con un’equazione del tipo $E(x; y)=0$.

Esempio 1

Si vuol rappresentare la retta di equazione $y = 2x - 1$.

Individuiamo quindi due suoi punti attribuendo ad x valori arbitrari e ricavando i corrispondenti valori di y . Per esempio se $x = 0$, allora $y = -1$; se $x = 1$ allora $y = 2(1) - 1 = 1$. La retta data passa quindi per i punti $A(0; -1)$ e $B(1; 1)$. Riportati i due punti sul piano cartesiano, si disegna la retta che li congiunge (vedi figura 8)



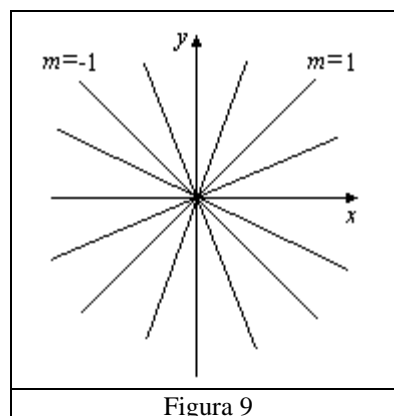
Consideriamo l'equazione (2). Il parametro m viene detto **coefficiente angolare** e al suo variare la retta presenta inclinazioni diverse con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Se $m > 0$ la retta forma un angolo compreso tra 0 e 90° con l'asse delle ascisse.

Se $m < 0$ la retta forma un angolo compreso tra 90° e 180° con l'asse delle ascisse.

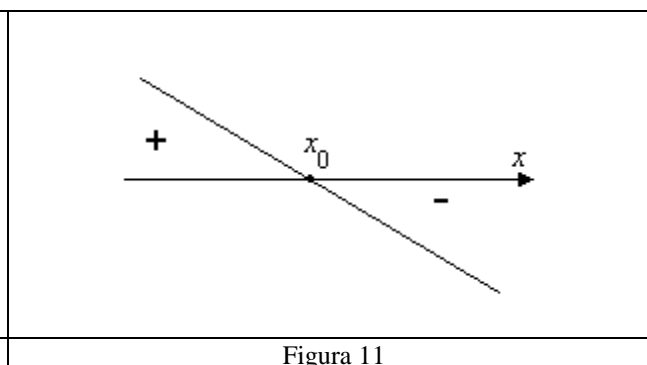
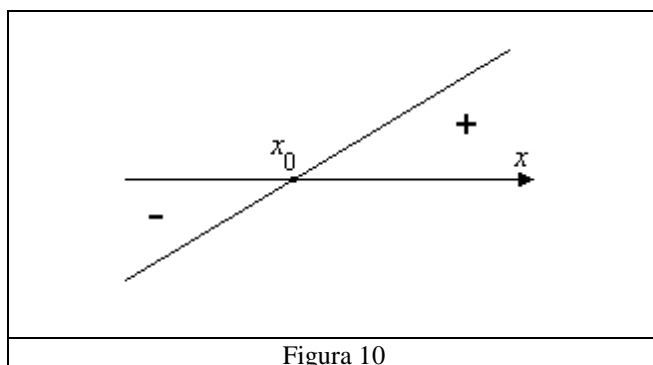
Se $m = 0$, come si è detto, la retta è parallela all'asse delle ascisse (nel caso fosse anche $q = 0$ allora si avrebbe $y = 0$ il cui grafico è l'asse delle x).

In figura 9 si riporta il grafico di alcune rette (per semplicità si è posto $q = 0$). Le rette comprese tra l'asse delle ascisse ($m = 0$) e la bisettrice del primo e terzo quadrante ($m = 1$) sono tali per cui risulta $0 < m < 1$, per le rette comprese tra la bisettrice del primo e terzo quadrante e l'asse delle ordinate risulta $m > 1$, per quelle comprese tra l'asse delle ordinate e la bisettrice del secondo e quarto quadrante si ha $m < -1$, infine le rette comprese tra la bisettrice del secondo e quarto quadrante e l'asse delle ascisse hanno $-1 < m < 0$. Si osservi anche che man mano che il valore di m cresce l'angolo che la retta forma con l'asse delle x cresce. Nel limite per m che tende all'infinito la retta tende a diventare verticale (a coincidere quindi con l'asse delle y di equazione $x = 0$).



Possiamo anche notare che nel caso in cui $m > 0$, qualunque sia q :

- se $x < -\frac{q}{m}$ i punti della retta si trovano al di sotto dell'asse delle x ed hanno quindi ordinata negativa
- se $x = -\frac{q}{m}$ il punto della retta si trova sull'asse delle x ed quindi ordinata nulla
- se $x > -\frac{q}{m}$ i punti della retta si trovano al di sopra dell'asse delle x ed hanno quindi ordinata positiva.



Nel caso in cui $m < 0$, qualunque sia q :

- se $x < -\frac{q}{m}$ i punti della retta si trovano al di sopra dell'asse delle x ed hanno quindi ordinata positiva
- se $x = -\frac{q}{m}$ il punto della retta si trova sull'asse delle x ed quindi ordinata nulla
- se $x > -\frac{q}{m}$ i punti della retta si trovano al di sotto dell'asse delle x ed hanno quindi ordinata negativa.

Il parametro q viene detto **termine noto** e al suo variare la retta presenta una diversa intersezione con l'asse delle ordinate, infatti per $x = 0$ si ha $y = q$.

La figura 12 mostra alcune rette del tipo $y = x + q$ (cioè rette con coefficiente angolare $m = 1$) per diversi valori di q .

Se $q > 0$ le rette incontrano l'asse delle ordinate in un punto del semiasse positivo (al di sopra dell'asse delle ascisse).

Se $q < 0$ le rette incontrano l'asse delle ordinate in un punto del semiasse negativo (al di sotto dell'asse delle ascisse).

Se $q = 0$, come è stato esaminato sopra, si ha la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Da quanto appena detto si deduce che tutte le rette che hanno lo stesso coefficiente angolare m e diversi valori di q sono parallele tra di loro. Se oltre ad m hanno uguale anche q , le rette coincidono.

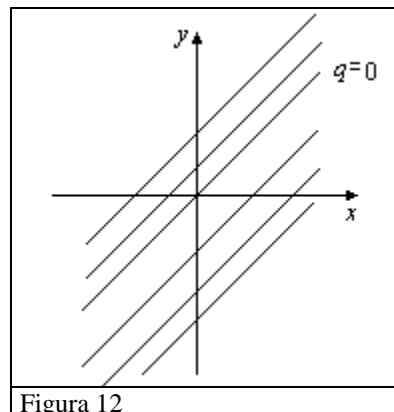


Figura 12

Due rette, se non sono parallele (o coincidono), hanno un punto in comune. La determinazione del punto comune tra due rette si riduce alla risoluzione di un sistema. Siano infatti:

$$y = mx + q \quad \text{e} \quad y = m'x + q'$$

le equazioni delle due rette, le coordinate del punto in comune devono soddisfare contemporaneamente le due equazioni e quindi essere soluzione del sistema³:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$$

Si dimostra anche che se due rette sono perpendicolari tra di loro, allora si ha :

$$m \cdot m' = -1.$$

Esempio 2

Dimostrare che le rette di equazione $y = x + 2$ e $y = 4 - x$ sono perpendicolari e trovare il punto di intersezione.

La perpendicolarità è facile da dimostrare in quanto la prima retta è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ($m = 1$), mentre la seconda è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante ($m = -1$); inoltre si ha:

$$m \cdot m' = (1) \cdot (-1) = -1.$$

Per determinare il punto di intersezione bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ricava $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ e quindi le due rette si incontrano nel punto $P(1; 3)$.

Dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ si vuol determinare la retta che passa per essi.

Se $x_A = x_B$ la retta è verticale ed ha equazione $x = x_A$.

Se $x_A \neq x_B$ allora l'equazione della retta è del tipo $y = mx + q$ e si avranno le due condizioni⁴:

³ Il concetto può essere generalizzato nel senso che le coordinate dei punti in comune tra due curve di generiche equazioni $E(x; y) = 0$ ed $E'(x; y) = 0$ sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} E(x; y) = 0 \\ E'(x; y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_A = mx_A + q \\ y_B = mx_B + q \end{cases}$$

da cui, risolvendo, segue:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$q = \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}$$

ovvero che la retta cercata ha equazione:

$$(3) \quad y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

Esempio 3

Si vuol determinare l'equazione della retta che passa per i punti A(-1; 5) e B(1; 3). Utilizzando l'equazione ora ricavata si ha:

$$y - 5 = \frac{3 - 5}{1 - (-1)} (x - (-1))$$

da cui segue $y = -x + 3$ che è una parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Qualora sia noto il coefficiente angolare m e si voglia trovare l'equazione della retta passante per un punto assegnato $A(x_A, y_A)$ l'equazione (3) si riduce a:

$$(4) \quad y - y_A = m(x - x_A)$$

Esempi 4

Si vuol determinare l'equazione della retta che passa per i punti A(-1; 3) ed avente coefficiente angolare $m = -2$. Utilizzando l'equazione (4) si ha:

$$y - 3 = -2 \cdot (x - (-1))$$

da cui segue $y = -2x + 1$.

L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Dalla geometria si ha la seguente definizione di circonferenza: **la circonferenza è l'insieme dei punti del piano per i quali è costante la distanza r (raggio) da un dato punto C (centro).**

Si consideri un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici e sia $C(\alpha; \beta)$ il centro di una circonferenza di raggio r , dalla definizione segue che

$$d(P; C) = r \quad \text{ovvero} \quad [d(P; C)]^2 = r^2$$

essendo $P(x; y)$ un generico punto del piano (vedi figura 13).

Dalla seconda delle uguaglianze di cui sopra si ottiene:

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

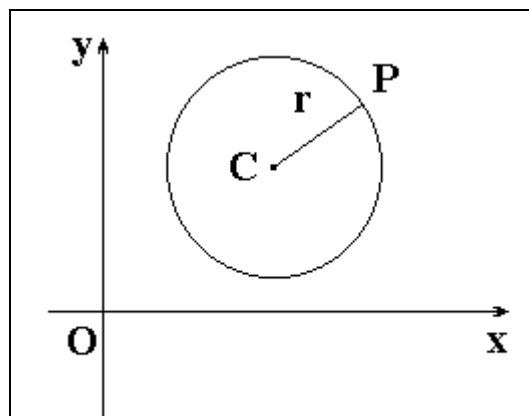


Figura 13

⁴ In questo calcolo si è utilizzato il fatto che un punto $P(x_0, y_0)$ appartiene ad una curva di equazione $E(x, y) = 0$ se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva, cioè se risulta $E(x_0, y_0) = 0$. Per esempio il punto $P(1; 2)$ appartiene alla curva di equazione $x^2 - y + 2x - 1 = 0$ in quanto risulta $1^2 - 2 + 2 \cdot 1 - 1 = 0$, ma non alla curva di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$ in quanto risulta $1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 5 \neq 0$.

da cui deriva l'equazione della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

dove si è posto:

$$(2) \quad \begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$

Nel caso in cui il centro della circonferenza coincidesse con l'origine degli assi, l'equazione (1) diventerebbe:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(vedi figura 14).

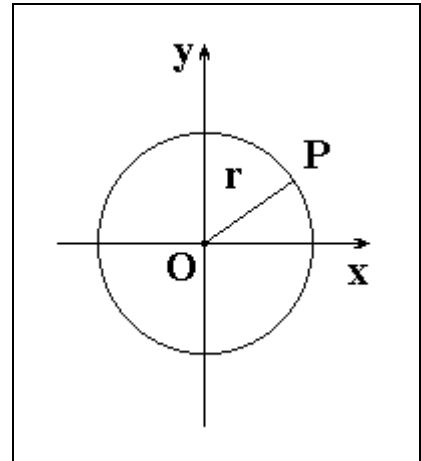


Figura 14

Esempio 5

Si scriva l'equazione della circonferenza di centro $C = \left(-5; \frac{3}{2}\right)$ e raggio $r = 6$.

Utilizzando l'equazione (1) si ha:

$$(x - (-5))^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 6^2$$

da cui con semplici calcoli si ottiene:

$$x^2 + y^2 + 10x - 3y - \frac{35}{4} = 0$$

Esempio 6

Si scriva l'equazione della circonferenza di centro $C = (3; 4)$ e passante per l'origine.

In questo caso non viene dato esplicitamente il valore del raggio r , ma viene detto che la circonferenza passa per l'origine, ciò significa che $r = d(O; C) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Utilizzando la (1) si ottiene l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Una generica equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

in un sistema di assi cartesiani, rappresenta una circonferenza di centro $C(\alpha; \beta)$ e raggio r , con

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \beta = -\frac{b}{2} \\ r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

se e soltanto se a, b, c sono numeri reali tali che $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Esempio 7

Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-4; 2)$, $B(0; 4)$ e $C(5; -1)$.

La circonferenza avrà equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e se deve passare per i punti A, B, C , le loro coordinate devono soddisfare l'equazione della circonferenza, deve cioè essere:

$$\begin{cases} (-4)^2 + (2)^2 + a(-4) + b(2) + c = 0 \\ (0)^2 + (4)^2 + a(0) + b(4) + c = 0 \\ (5)^2 + (-1)^2 + a(5) + b(-1) + c = 0 \end{cases} \quad \text{da cui segue: } \begin{cases} -4a + 2b + c + 20 = 0 \\ 4b + c + 16 = 0 \\ 5a - b + c + 26 = 0 \end{cases} \quad \text{ricavando } c \text{ dalla seconda e sostituendo nella}$$

prima e nella terza si ottiene:
$$\begin{cases} -4a + 2b + (-4b - 16) + 20 = 0 \\ c = -4b - 16 = 0 \\ 5a - b + (-4b - 16) + 26 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } \begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ c = -4b - 16 = 0 \\ a - b + 2 = 0 \end{cases} \text{ sommando la prima con la terza}$$

otteniamo $(2a + b - 2) + (a - b + 2) = 0$ ovvero $a = 0$. Sostituendo il valore di a così ottenuto nella terza equazione si ottiene $b = 2$ e sostituendo b nella seconda $c = -24$. Si ha quindi che l'equazione della circonferenza cercata è: $x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0$

Siano date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e la retta di equazione $y = mx + q$. Vogliamo studiare la posizione reciproca. Tre sono i casi (vedi figura 15)

1. La circonferenza e la retta hanno due punti in comune (retta s in figura)
2. La circonferenza e la retta non hanno punti in comune (retta e in figura)
3. La circonferenza e la retta hanno un punto in comune (o meglio, due punti coincidenti) (retta t in figura)

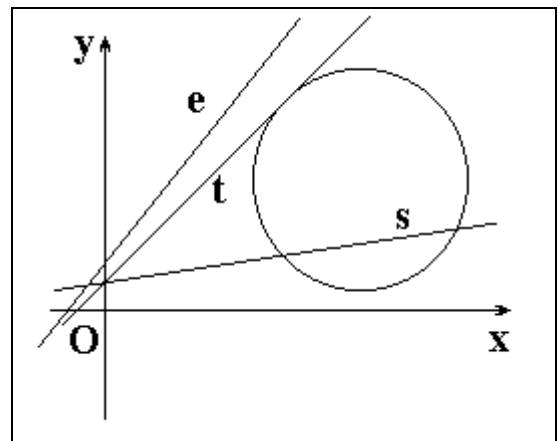


Figura 15

Nel primo caso si dice che la retta è secante, nel secondo esterna, nel terzo tangente.

Per determinare la posizione reciproca è quindi necessario studiare le intersezioni tra retta e circonferenza, cioè studiare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Esempio 8

Si considerino la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ e la retta di equazione $y = 3x - 10$.

Il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \\ y = 3x - 10 \end{cases}$$

ci permette di dare una risposta. Infatti, sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene un'equazione di secondo grado in x :

$$5x^2 - 37x + 60 = 0$$

le cui soluzioni sono: $x_1 = \frac{12}{5}$ e $x_2 = 5$ che sostituite nell'espressione della retta ci danno le coordinate dei punti

$P_1 = \left(\frac{12}{5}; -\frac{14}{5}\right)$ e $P_2 = (5;5)$, in comune tra la retta e la circonferenza.

L'esistenza di due punti in comune ci permette di concludere che la retta è secante alla circonferenza.

Esempio 9

Si vuol vedere ora la posizione della retta di equazione $y = -x - 5$ rispetto alla circonferenza data nell'esempio precedente.

Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

ottenendo l'equazione:

$$2x^2 + 12x + 25 = 0$$

che, come si può facilmente vedere risolvendola, non ammette soluzioni. Ciò permette di concludere che la retta è esterna alla circonferenza.

Esempio 10

Vediamo infine la posizione della retta di equazione $y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3}$ sempre rispetto alla stessa circonferenza.

Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3} \end{cases}$$

ottenendo l'equazione:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

che, come si può facilmente vedere risolvendola, ammette due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = 5$.

Da ciò segue che la retta interseca la circonferenza in un unico punto $P = (5; 5)$ e che quindi la retta è tangente alla circonferenza.

L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Dalla geometria si ha la seguente definizione di parabola: **la parabola è l'insieme dei punti del piano per i quali è uguale la distanza da un punto F (detto fuoco) e da una retta assegnata d (detta direttrice).**

Siano quindi F il fuoco e d la direttrice in questione; si consideri un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici in modo che il fuoco stia sull'asse delle y e abbia coordinate $F(0; m)$, con m numero reale diverso da zero e la direttrice sia parallela all'asse delle x e situata nel semipiano opposto a quello che contiene F ed avente distanza dall'origine uguale ad OF ovvero abbia equazione $y = -m$ (vedi figura 16).

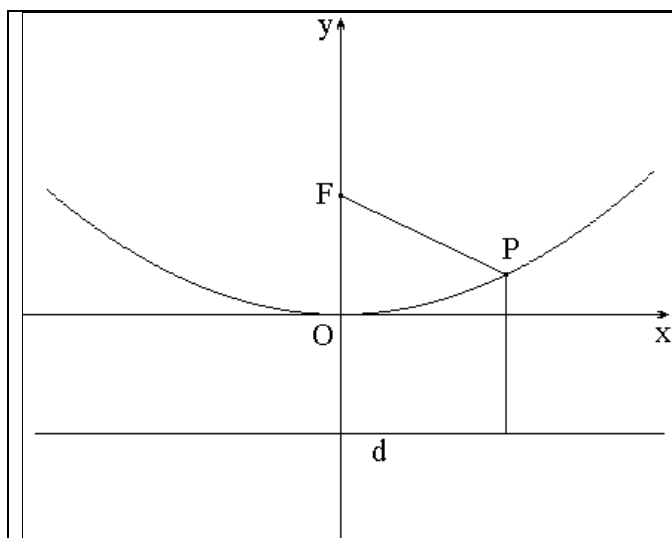


Figura 16

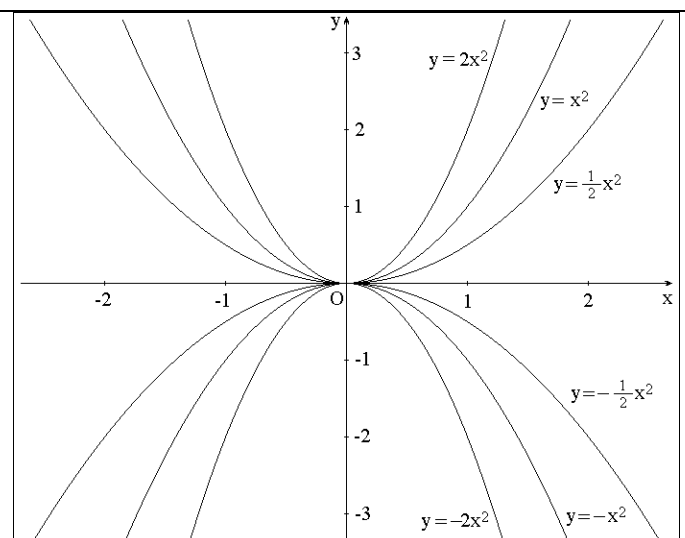


Figura 17

Dalla definizione, un punto generico $P(x,y)$ appartiene alla parabola se

$$d(P,F) = d(P,N).$$

Omettendo i calcoli, si dimostra che l'equazione della parabola è:

$$y = ax^2$$

dove $a = \frac{1}{4m}$ è un numero reale diverso da zero.

Alcune proprietà della parabola:

1. La parabola è simmetrica rispetto ad un asse (nel caso in esame l'asse delle y) che viene detto asse di simmetria;
2. L'asse di simmetria incontra la parabola in un punto detto vertice della parabola (nel caso in esame il vertice coincide con l'origine)
3. Se $a > 0$ tutti i punti della parabola hanno ordinata positiva ($y > 0$) ad eccezione del vertice la cui ordinata è nulla ($y = 0$) che risulta quindi essere il punto di ordinata minima
4. Se $a < 0$ tutti i punti della parabola hanno ordinata negativa ($y < 0$) ad eccezione del vertice la cui ordinata è nulla ($y = 0$) che risulta quindi essere il punto di ordinata massima
5. Qualunque sia a , al crescere indefinito del valore assoluto di x , cresce indefinitamente il valore assoluto di y .
6. Dalla figura 17, nella quale sono rappresentate parabole con diverso valore di a , si può dedurre che l'"apertura" o la "chiusura" della parabola sono legate al valore di a .

Nel caso più generale, una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y (fig. 18) ha equazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

con a, b, c numeri reali e $a \neq 0$. Ponendo $\Delta = b^2 - 4ac$ la parabola ha:

- Vertice $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$
- Fuoco $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
- Direttrice $y = -\frac{\Delta+1}{4a}$

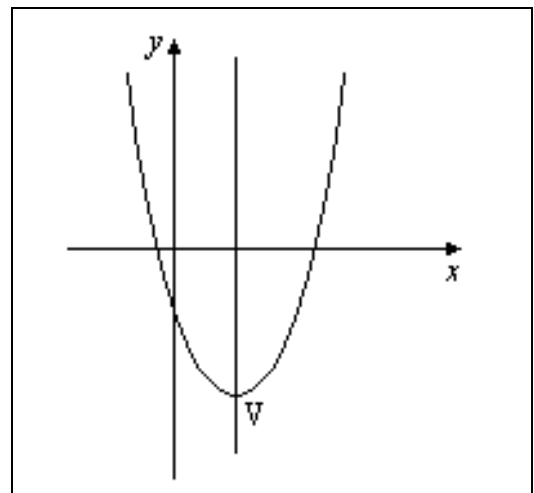


Figura 18

Esempio 11

Scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y e passante per i punti $A(0; 4)$, $B(1; 3/2)$, $C(2; 0)$.

L'equazione generica di una tale parabola è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

e, come nel caso della circonferenza bisogna imporre l'appartenenza dei punti alla parabola e quindi risolvere il sistema:

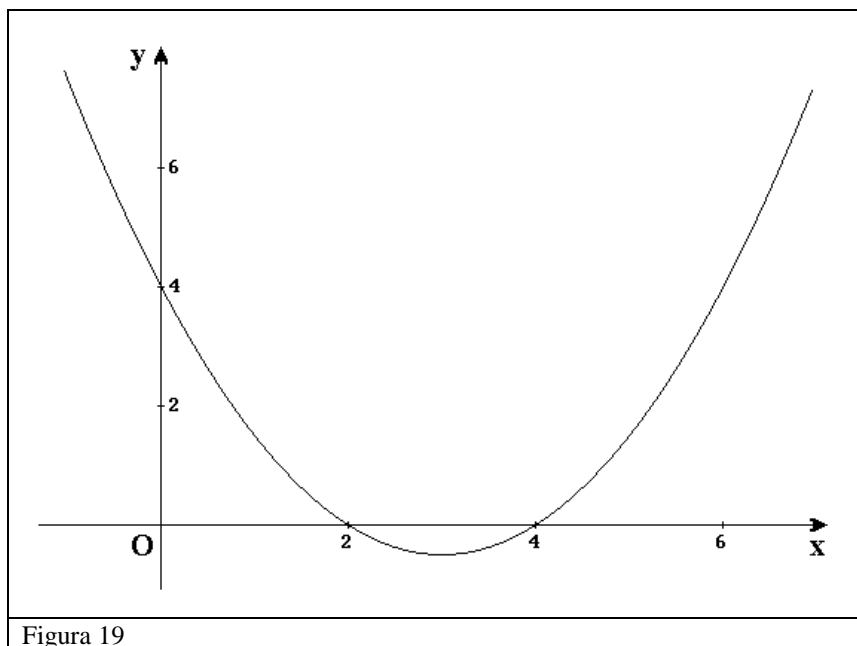
$$\begin{cases} 4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \frac{3}{2} = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

da cui segue:

$$\begin{cases} c = 4 \\ 2a + 2b + 2c = 3 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi la soluzione} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è quindi:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4.$$



Tale parabola ha vertice nel punto $V(3; -1/2)$, fuoco nel punto $F(3; 0)$, asse di simmetria la retta di equazione $x = 3$ e direttrice la retta $y = -1$.

Per la rappresentazione grafica è necessario disegnare alcuni punti, per esempio i punti di intersezione con gli assi cartesiani, il vertice ed altri eventuali punti meglio se a coppie simmetriche rispetto all'asse di simmetria.

Il problema della determinazione della posizione reciproca tra retta e parabola si risolve come per la circonferenza, cioè analizzando le soluzioni del sistema formato dall'equazione della parabola e da quella della retta:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Le soluzioni sono legate al segno del discriminante dell'equazione risolvente che si ottiene uguagliando le due equazioni. Si ottiene:

$$ax^2 + bx + c = mx + q$$

Da ciò deriva l'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + (b - m)x + (c - q) = 0$$

- La parabola e la retta hanno due punti in comune se il discriminante di tale equazione è positivo
- La parabola e la retta non hanno punti in comune se il discriminante è negativo
- La parabola e la retta hanno un punto in comune (o meglio, due punti coincidenti) se il discriminante è nullo.

Esempio 12

Determinare la posizione della retta $y = -x + 2$ rispetto alla parabola dell'esempio precedente.

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

da cui: $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = x - 2$ e quindi l'equazione risolvente: $x^2 - 8x + 12 = 0$ le cui soluzioni sono: $x = 2$ e $x = 6$. La retta incontra quindi la parabola nei punti di coordinate $(2; 0)$ e $(4, 6)$ ed è quindi secante. (Vedi retta "s" in figura 20)

Esempio 13

Sempre rispetto alla stessa parabola verificare che la retta di equazione $y = -2x - 3$ è esterna.

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$$

da cui: $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = x - 2$ e quindi l'equazione risolvente:

$$x^2 - 2x + 14 = 0$$

che non ha soluzioni reali. La retta è quindi esterna. (Vedi retta "e" in figura 20)

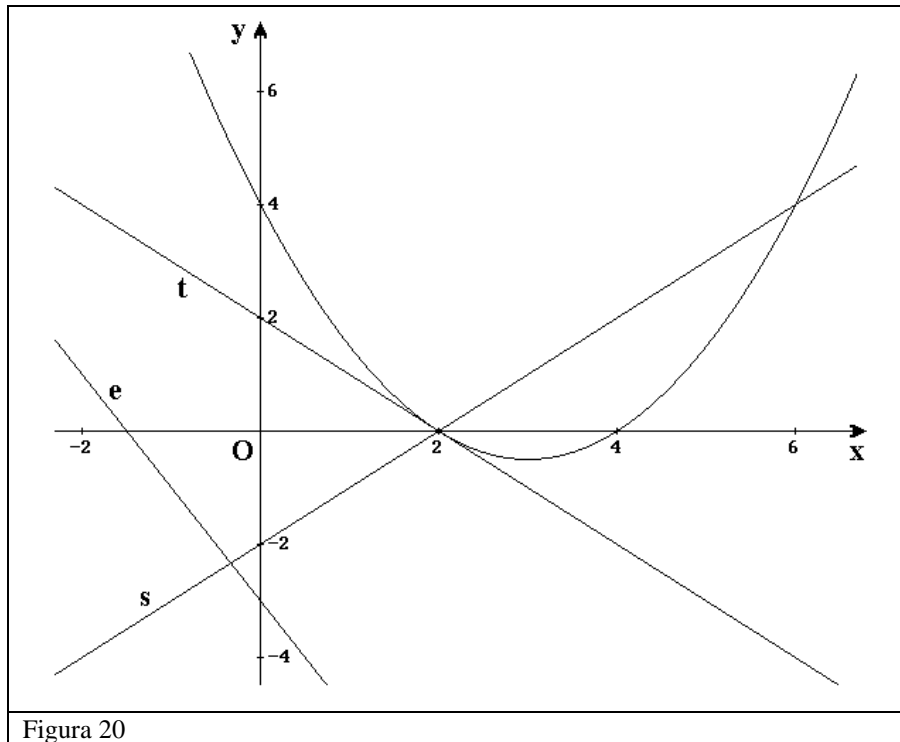


Figura 20

Esempio 14

Sempre rispetto alla stessa parabola verificare che la retta di equazione $y = -x + 2$ è tangente.

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

da cui: $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = -x + 2$

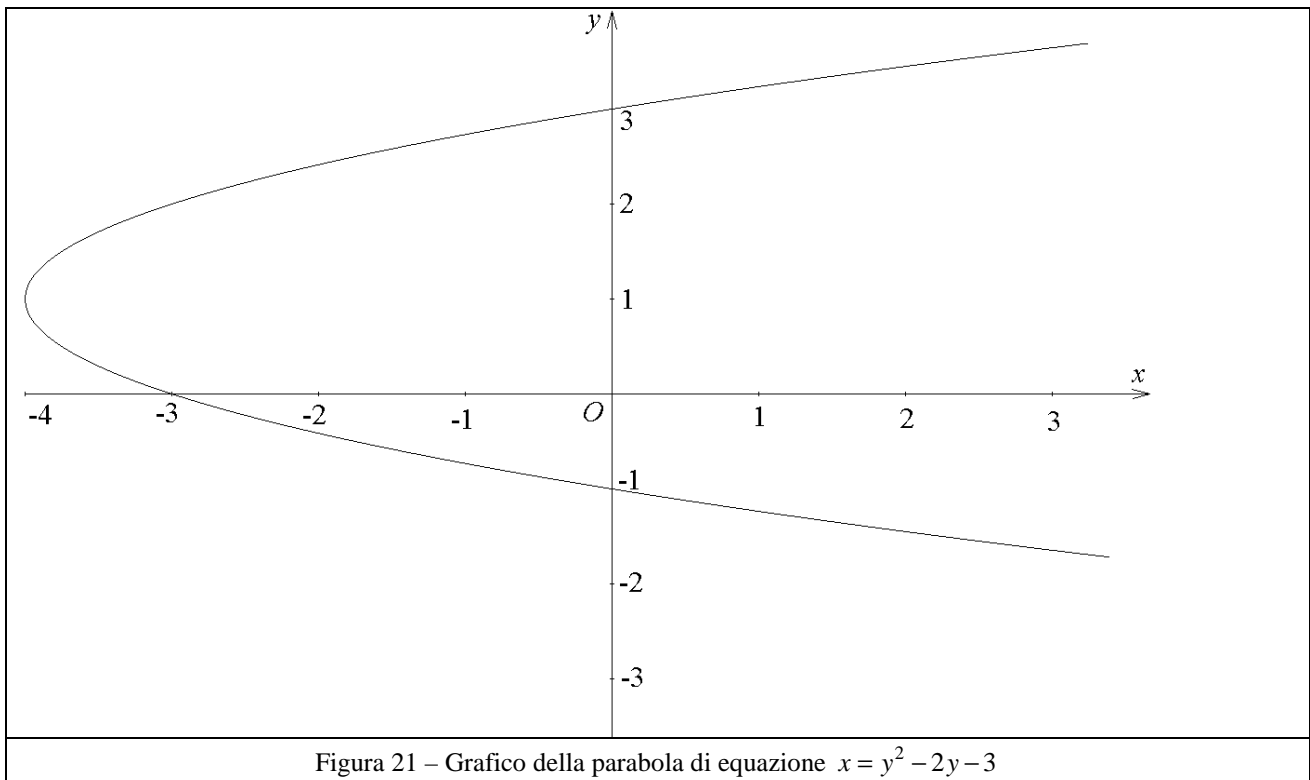
e quindi l'equazione risolvente: $x^2 - 4x + 4 = 0$ che ha soluzioni due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = 2$. La retta è quindi tangente nel punto A(2; 0). (Vedi retta "t" in figura 20)

Se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle x (anziché delle y come visto finora) la sua equazione è

$$x = ay^2 + by + c .$$

Il vertice e il fuoco hanno coordinate $V = \left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ e $F = \left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$; l'asse di simmetria e la direttrice hanno

equazione rispettivamente $y = -\frac{b}{2a}$ e $x = -\frac{\Delta+1}{4a}$.



L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Dalla geometria si ha la seguente definizione di ellisse: **l'ellisse è l'insieme dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.**

Siano quindi F_1 ed F_2 i due punti in questione; si consideri ora un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici in modo che i punti si trovino sull'asse x e tale che il loro punto medio sia l'origine (vedi figura 22). Indicata quindi con c (numero positivo) la distanza dell'origine da ognuno dei fuochi le loro coordinate sono $F_1(-c,0)$ ed $F_2(c,0)$.

Dalla definizione, un punto generico $P(x,y)$ appartiene all'ellisse se

$$|d(P, F_1) + d(P, F_2)| = 2a$$

dove a è un numero positivo.

Omettendo i calcoli, si dimostra che l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri reali positivi, con } a \geq b \text{ e } a^2 - c^2 = b^2$$

Alcune proprietà dell'ellisse:

1. l'ellisse è simmetrica rispetto all'asse x, rispetto all'asse y e di conseguenza rispetto all'origine O che viene detto centro dell'ellisse.
2. l'ellisse interseca l'asse delle x nei punti $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$ e l'asse delle y nei punti $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$; questi punti sono detti vertici dell'ellisse;
3. la retta A_1A_2 , contenente i fuochi F_1 e F_2 è detto asse maggiore dell'ellisse o asse focale;
4. la retta B_1B_2 è chiamata asse minore.

Nel caso in cui $a = b$ l'ellisse si riduce alla circonferenza di raggio $r = a = b$ e centro l'origine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{da cui} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Esempio 15

Determinare l'equazione dell'ellisse che ha fuochi nei punti $F_1(-3; 0)$ ed $F_2(3; 0)$ e semiasse maggiore $a = 5$.

Dalle definizioni date si ha: $c = 3$, da cui segue $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$. L'equazione è pertanto:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

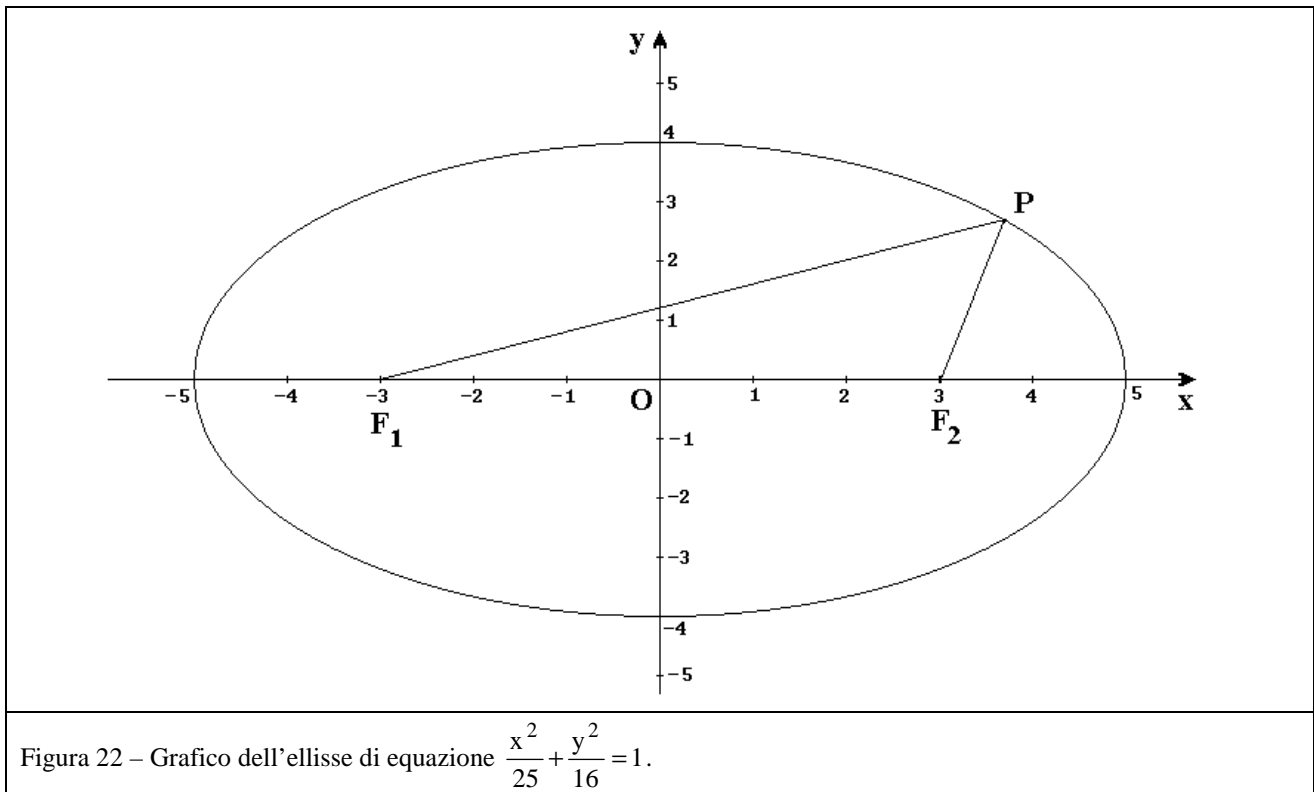


Figura 22 – Grafico dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

Dalla geometria si ha la seguente definizione di iperbole: **l'iperbole è l'insieme dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.**

Siano quindi F_1 ed F_2 i due punti in questione; si consideri ora un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici in modo che i punti si trovino sull'asse x e tale che il loro punto medio sia l'origine (vedi figura 23). Indicata quindi con c (numero positivo) la distanza dell'origine da ognuno dei fuochi le loro coordinate sono $F_1(-c,0)$ ed $F_2(c,0)$.

Dalla definizione, un punto generico $P(x,y)$ appartiene all'iperbole se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

dove a è un numero positivo.

Omettendo i calcoli, si dimostra che l'equazione dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri reali e } c^2 - a^2 = b^2$$

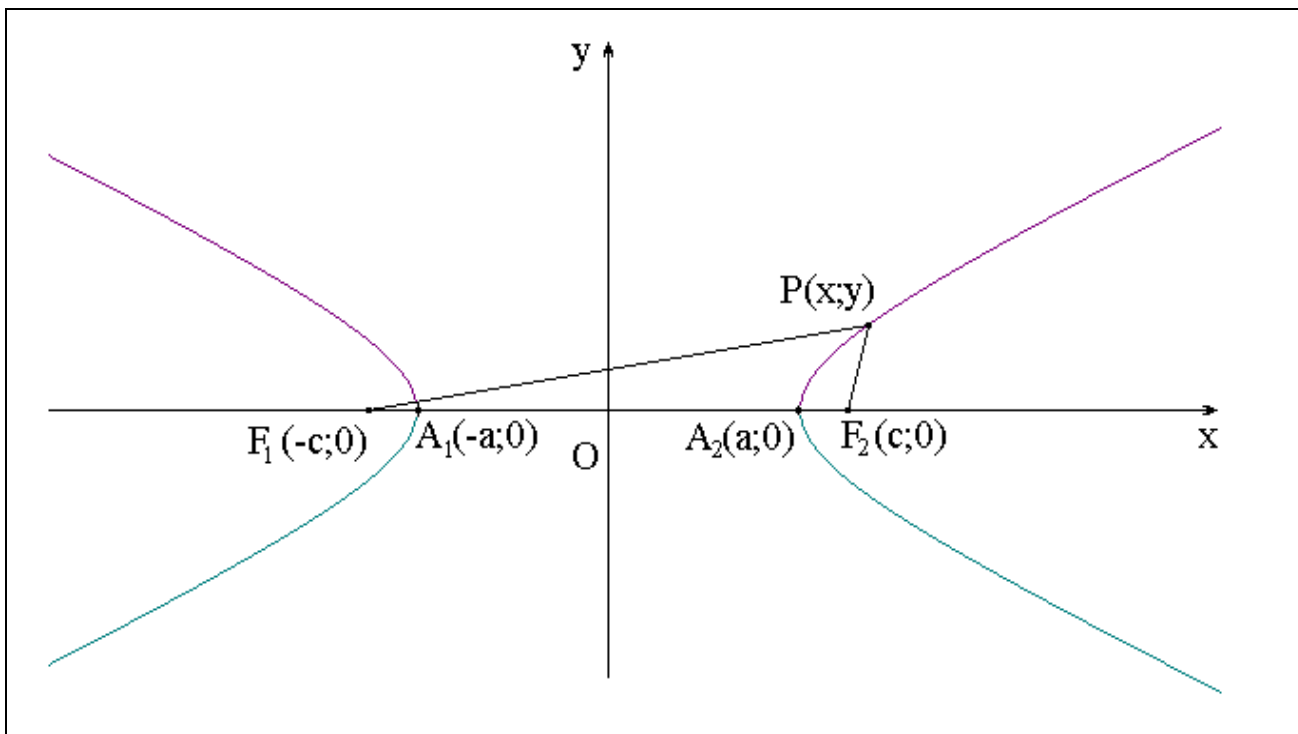


Figura 23

Alcune proprietà dell'iperbole:

1. l'iperbole è simmetrica rispetto all'asse x (detto anche asse focale, o trasverso, o principale dell'iperbole), rispetto all'asse y (detto anche asse non trasverso, o secondario) e di conseguenza rispetto all'origine O che viene detto centro dell'iperbole.
2. l'iperbole interseca l'asse delle x in due punti, detti vertici: $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$.
3. l'iperbole non interseca l'asse delle y.
4. le rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ sono i cosiddetti asintoti dell'iperbole, ovvero rette a cui l'iperbole si avvicina indefinitamente (Vedi figura 24).
5. se $a = b$ l'iperbole viene detta equilatera e la sua equazione si riduce a: $x^2 - y^2 = a^2$; in tal caso gli asintoti sono le rette $y = x$ e $y = -x$ ossia la bisettrice del primo e terzo quadrante e quella del secondo e quarto quadrante.

Esempio 16

Determinare l'equazione e gli asintoti dell'iperbole che ha fuochi nei punti $F_1(-5; 0)$ ed $F_2(5; 0)$ e $a = 3$.

Dalle definizioni date si ha: $c = 5$, da cui segue $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$. L'equazione è pertanto:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Gli asintoti sono quindi: $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

Se i fuochi stanno sull'asse y l'equazione dell'iperbole è del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Nel caso dell'iperbole equilatera, se si effettua una rotazione degli asintoti di 45° in un senso o nell'altro si ottiene sempre un'iperbole con gli asintoti coincidenti agli assi cartesiani la sua equazione diventa:

$$xy = k$$

- Se la rotazione avviene in senso orario (vedi figura 25) $k > 0$
- Se la rotazione avviene in senso antiorario (vedi figura 26) $k < 0$

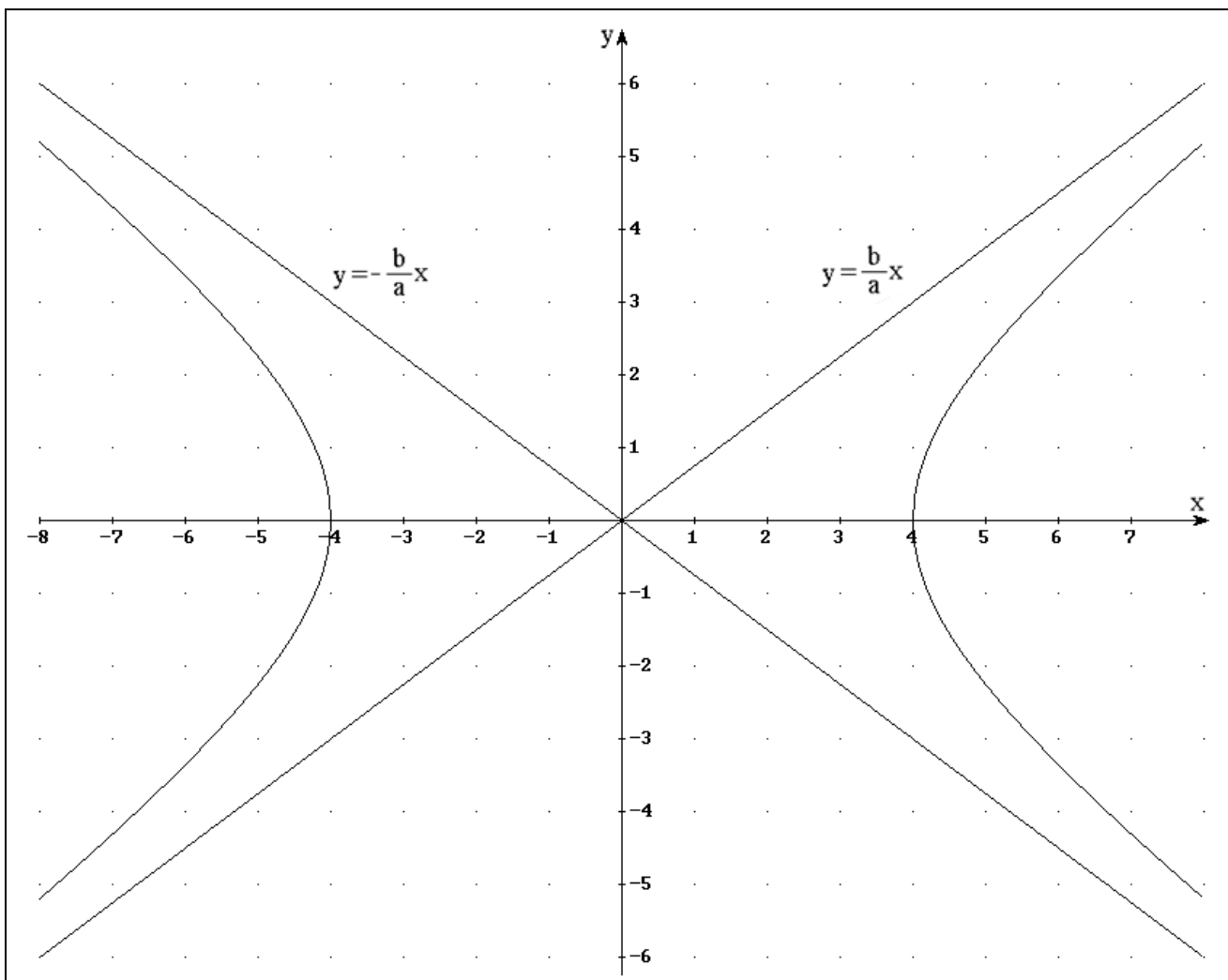


Figura 24 – Grafico dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

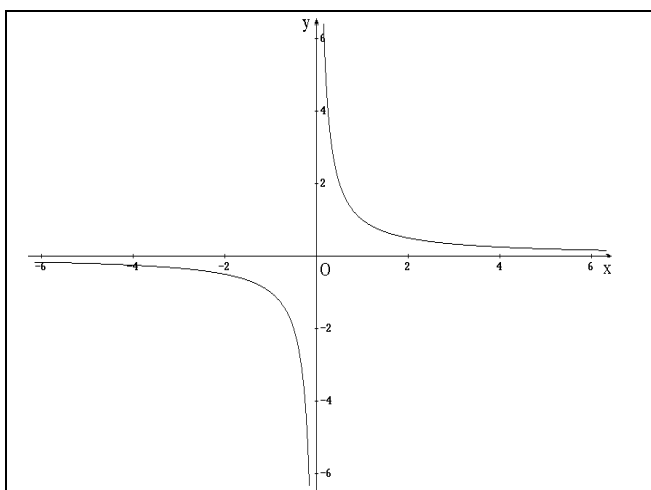


Figura 25

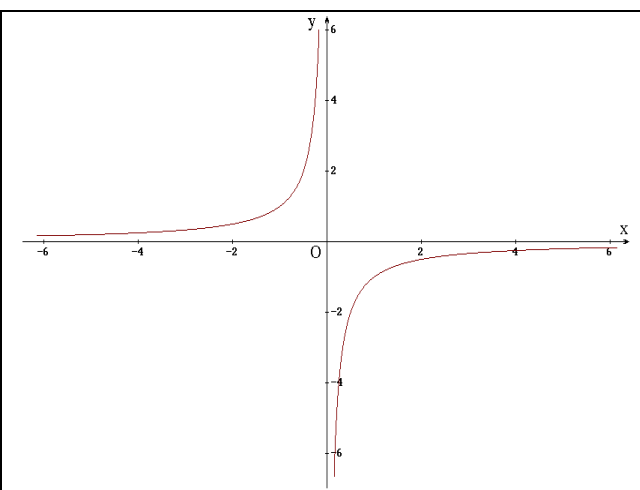


Figura 26

Si dimostra che una qualunque equazione del tipo

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con $c \neq 0$ e $ad \neq bc$, rappresenta un'iperbole equilatera i cui asintoti sono le rette $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ (in figura 27 è rappresentata l'iperbole di equazione $y = \frac{x+1}{x+2}$) e si intersecano nel punto $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ detto anche centro della curva. Tale espressione viene chiamata funzione omografica.

Sia per l'iperbole, sia per l'ellisse il problema della posizione reciproca con una retta viene affrontato come per la circonferenza e la parabola.

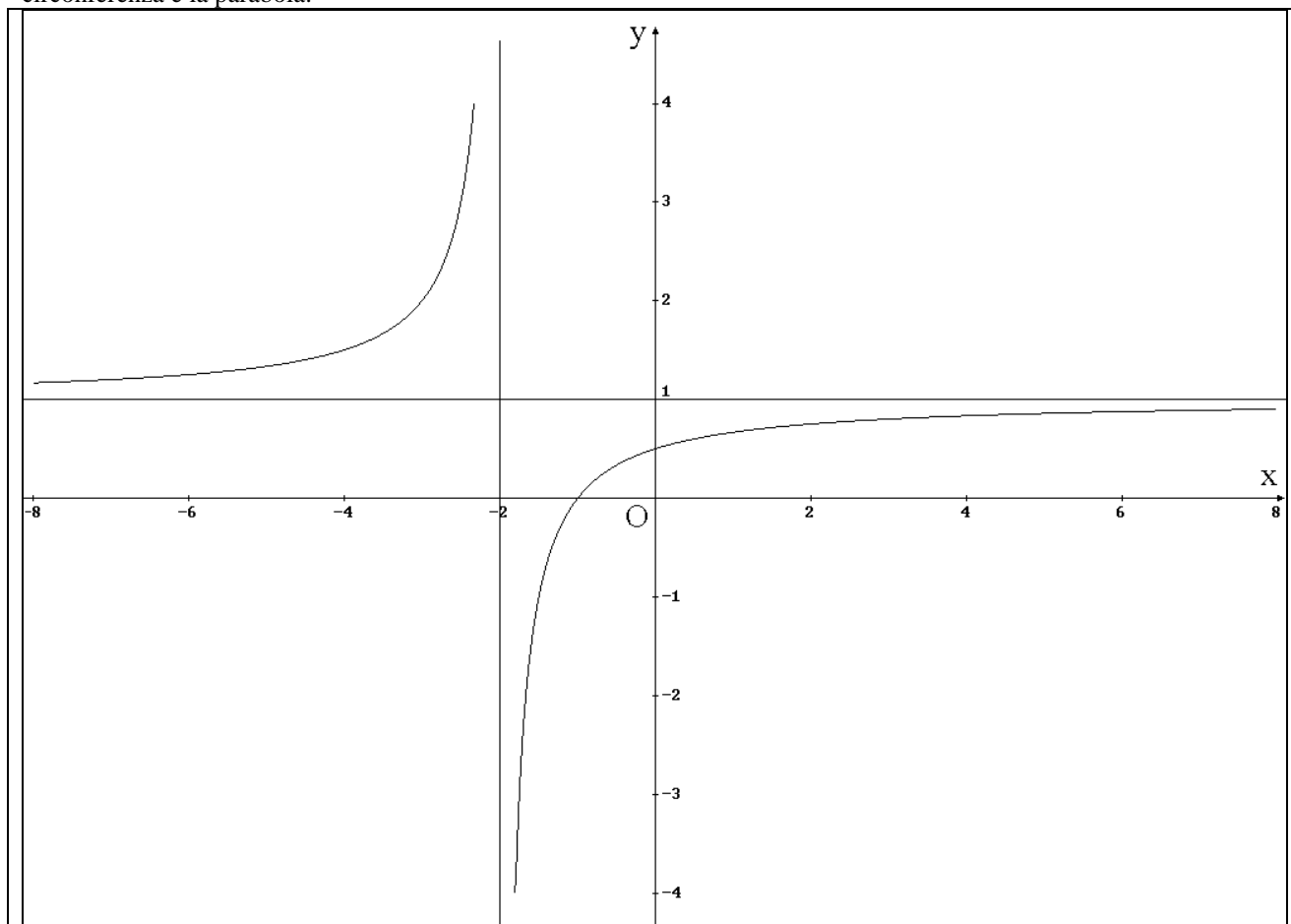


Figura 27 – Grafico della funzione omografica $y = \frac{x+1}{x+2}$.

Tutte le curve viste in questo capitolo (retta, circonferenza, parabola, ellisse e iperbole) appartengono alla famiglia delle coniche in quanto possono essere ottenute intersecando un cono infinito a due falde con un piano.

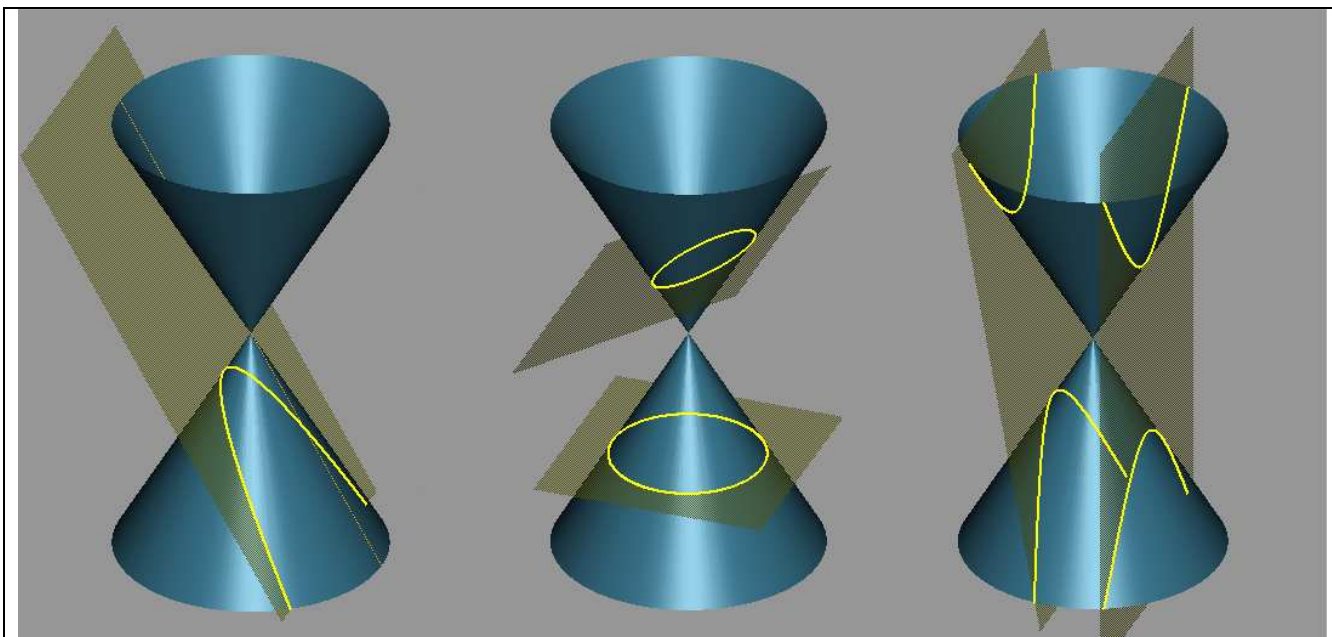


Figura 28 – Le coniche: a sinistra la parabola, al centro l’ellisse e la circonferenza; a destra l’iperbole

IL VALORE ASSOLUTO

Il valore assoluto di un numero reale x è definito come segue:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Consideriamo $|x-1|$ si ha $|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & \text{se } (x-1) < 0 \\ x-1 & \text{se } (x-1) \geq 0 \end{cases}$ ossia

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x < 1 \\ x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Il grafico di $y = |x|$ è dato in figura 29. Per la sua realizzazione, prima si rappresenta $y=x$, che è la bisettrice del primo e terzo quadrante, poi si osserva che per tutti i valori di x negativi, il valore di y è uguale a $-x$ e quindi la curva simmetrica rispetto all’asse x .

Più in generale, data una funzione $y = f(x)$, il cui grafico sia quello in verde nella figura 30, il grafico della funzione $y = |f(x)|$ si ottiene da precedente facendo l’immagine speculare della parte negativa del grafico di $y = f(x)$ (in figura 30 il grafico della funzione $y = |f(x)|$ è dato dalla parte in verde che si trova sopra l’asse delle x e dalla parte in rosso)

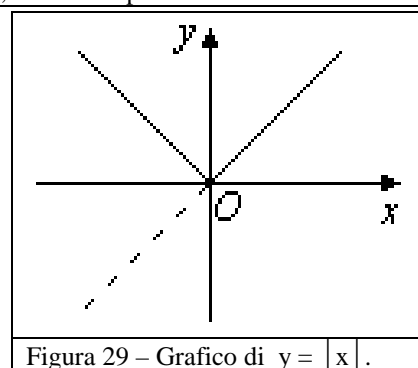


Figura 29 – Grafico di $y = |x|$.

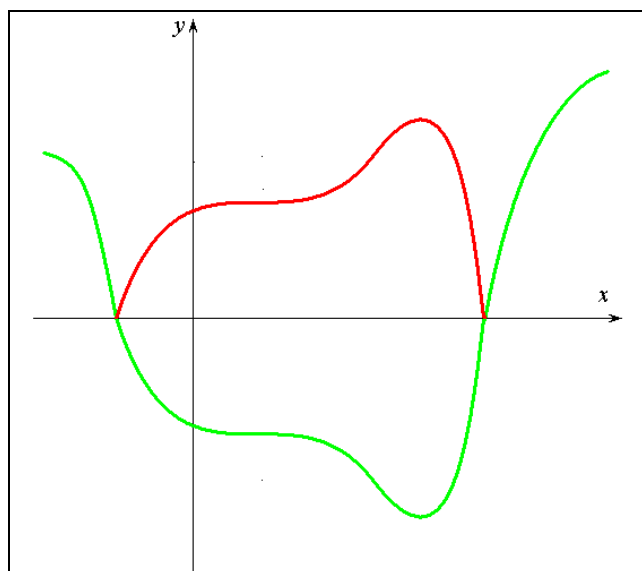


figura 30 – Grafico della funzione $y = f(x)$ e della funzione $y = |f(x)|$

DISEQUAZIONI

GENERALITA'

1 – Disuguaglianze fra numeri

E' opportuno ricordare proprietà elementari delle disuguaglianze fra numeri reali. Valgono i seguenti principi:

1°) Aggiungendo ad ambedue i membri di un disuguaglianza uno stesso numero, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso.

Per esempio, se $7 > 5$ allora anche $7+3 > 5+3$; in generale, dati due numeri reali a e b , se $a > b$ allora $a+m > b+m$ qualunque sia m numero reale.

2°) Due disuguaglianze dello stesso senso si possono sommare membro a membro ottenendo una disuguaglianza dello stesso senso.

Per esempio, se $3 > 2$ e $5 > 1$ allora $3+5 > 2+1$; in generale, se $a > b$ e $c > d$, allora $a + c > b + d$ per ogni numero a, b, c, d reale.

In generale non è lecito sottrarre membro a membro; infatti, pur essendo $7 > 6$ e $5 > 1$, non vero che $7-5 > 6-1$.

3°) Moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero POSITIVO, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso.

Per esempio, essendo $3 > 1$, moltiplicando per entrambi i membri per due si ha: $6 > 2$. In generale, se $m > 0$ e a e b sono numeri reali, da $a > b$ segue $ma > mb$.

4°) Moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero NEGATIVO, si ottiene una disuguaglianza di senso contrario.

Per esempio, $4 > 2$, moltiplicando per -3 si ha: a primo membro $-3 \cdot 4 = -12$, a secondo membro $-3 \cdot 2 = -6$, quindi $-12 < -6$. In generale, se $m < 0$ e a, b sono numeri reali, da $a > b$ segue $ma < mb$.

In particolare, se si cambiano i segni dei due membri di una disuguaglianza (cioè si moltiplica per -1), bisogna cambiare anche il senso. Per esempio, se $a > b$, allora $-a < -b$.

5°) Due disuguaglianze dello stesso senso tra due numeri POSITIVI moltiplicate membro a membro danno una disuguaglianza dello stesso senso.

Per esempio, se $5 > 1$ e $7 > 6$, allora $5 \cdot 7 > 1 \cdot 6$. In generale se a, b, c, d sono numeri positivi, da $a > b$ e $c > d$ segue $ac > bd$.

Il principio non vale se i numeri non sono tutti positivi, infatti pur essendo $1 > -4$ e $2 > -3$ si ha $1 \cdot 2 < (-4) \cdot (-3)$.

6°) Se a e b sono dello stesso segno: da $a > b$ segue $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ e da $a < b$ segue $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Per esempio, essendo $2 < 4$, si ha

$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

7°) Elevando a potenza con esponente intero e positivo i due membri di una disuguaglianza fra numeri POSITIVI, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso.

Per esempio, essendo $3 > 2$, elevando alla quarta, si ha $81 > 16$. In generale, se a e b sono positivi e n un intero positivo, da $a > b$ segue $a^n > b^n$ e viceversa.

2 – Definizione generale di disequazione e classificazione

Una disequazione è una disuguaglianza tra espressioni algebriche che è verificata per particolari valori delle incognite.

Esempio 1

Sono disequazioni le espressioni del tipo:

1) $4x - 3 > 7x + 4$

2) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$

3) $x^2 + 2y + 1 > 3x - 2xy$

4) $\frac{x^2-1}{x+4} > 0$

5) $\sqrt{x^2-1} > x+4$

6) $10^{x-3} > 1$

7) $\log_2(x-4) < 2$

Le disequazioni sono classificabili in:

- **Disequazioni razionali intere** se la disuguaglianza è tra due polinomi. Per esempio la (1) è ad una incognita e di primo grado, la (2) è ad una incognita e di secondo grado, infine la (3) è a due incognite e di secondo grado.
- **Disequazioni razionali fratte** se le incognite compaiono anche al denominatore di una frazione, per esempio la (4).
- **Disequazioni irrazionali** se le incognite compaiono sotto il segno della radice, per esempio la (5).
- **Disequazioni trascendenti** come le disequazioni esponenziali e logaritmiche, per esempio la (6) e la (7) [vedi cap.8]

3 – Risoluzione di una disequazione

Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S dei valori da attribuire alle incognite affinché la disuguaglianza sia verificata. Al fine di arrivare alla soluzione è necessario, facendo uso dei principi enunciati più sopra, ridurre le disequazioni ad altre equivalenti (cioè che hanno le stesse soluzioni).

Una disequazione si dice ridotta a forma normale quando è scritta in modo tale che il secondo membro sia zero. Per esempio, sono ridotte a forma normale le disequazioni (2) e (4); non lo sono le altre. Per esempio, per trovare la soluzione della disequazione (3) bisogna determinare l'insieme delle coppie (x;y) che rendono il primo membro della disuguaglianza maggiore del secondo; per esempio (0;0) un elemento di tale insieme.

DISEQUAZIONI DI I GRADO

Vogliamo risolvere le disequazioni di primo grado, cioè del tipo

- 1) $ax + b > 0$
- 2) $ax + b \geq 0$
- 3) $ax + b < 0$
- 4) $ax + b \leq 0$

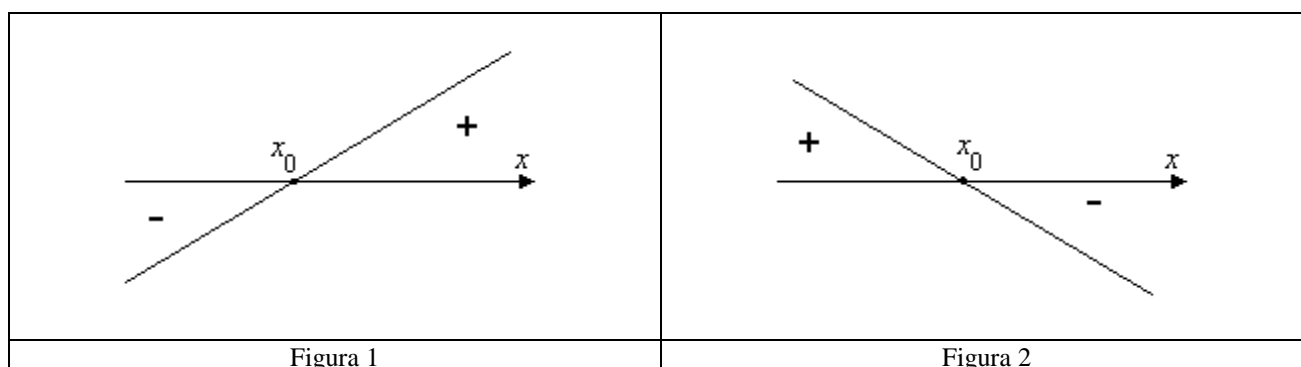
Si tratta di determinare l'insieme $I \subseteq \mathbf{R}$ che soddisfa alla relazione data.

Il problema può essere posto anche in questo modo: si ponga $y = ax + b$; la 1), per esempio, equivale al sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y > 0 \end{cases}$$

e risolverlo significa trovare tutti i punti del piano che stanno sulla retta $y = ax + b$ e la cui ordinata sia positiva.

La soluzione della disequazione sarà quindi data dall'insieme delle ascisse dei punti che soddisfano il sistema suddetto.



Si hanno quindi i seguenti casi:

$a > 0$: la retta ha coefficiente angolare positivo e il suo grafico è come quello di figura 1 in cui le ordinate dei punti della retta sono positive a destra di $x_0 = -b/a$ e negative a sinistra. Una disequazione tipo 1) sarà soddisfatta per $x > x_0$, una tipo 2) per $x \geq x_0$, una tipo 3) per $x < x_0$ e una tipo 4) per $x \leq x_0$.

$a = 0$: la retta è parallela all'asse delle x e sta sopra o sotto di esso per cui una disequazione tipo 1) o 2) sarà soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$ se $b > 0$ non sarà mai soddisfatta se $b < 0$. Viceversa per disequazioni tipo 3) e 4). Se $b = 0$ le disequazioni tipo 2) e 4) sono soddisfatte per ogni $x \in \mathbf{R}$, non sono mai soddisfatte disequazioni tipo 1) e 3).

$a < 0$: la retta ha coefficiente angolare negativo e il suo grafico è come quello di figura 2 in cui le ordinate dei punti della retta sono positive a sinistra di $x_0 = -b/a$ e negative a destra. Una disequazione tipo 1) sarà soddisfatta per $x < x_0$, una tipo 2) per $x \leq x_0$, una tipo 3) per $x > x_0$ e una tipo 4) per $x \geq x_0$.

Esempio2

Risolvere la disequazione $3x + 2 < 0$.

Essendo $a = 3 > 0$ si ricade nel caso di figura 7. Inoltre la disequazione è di tipo 3) e $x_0 = -2/3$. La soluzione è pertanto $x < -2/3$.

DISEQUAZIONI DI II GRADO

L'uso del grafico di una parabola è utile per la risoluzione di disequazioni di 2° grado che possono presentarsi nelle seguenti tipologie:

- 1) $ax^2 + bx + c > 0$
- 2) $ax^2 + bx + c \geq 0$
- 3) $ax^2 + bx + c < 0$
- 4) $ax^2 + bx + c \leq 0$

Come nel caso delle disequazioni di primo grado il problema può essere posto anche come segue:

si ponga $y = ax^2 + bx + c$; la 1), per esempio, equivale al sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

e risolverlo significa trovare tutti i punti del piano che stanno sulla parabola $y = ax^2 + bx + c$ e la cui ordinata sia positiva.

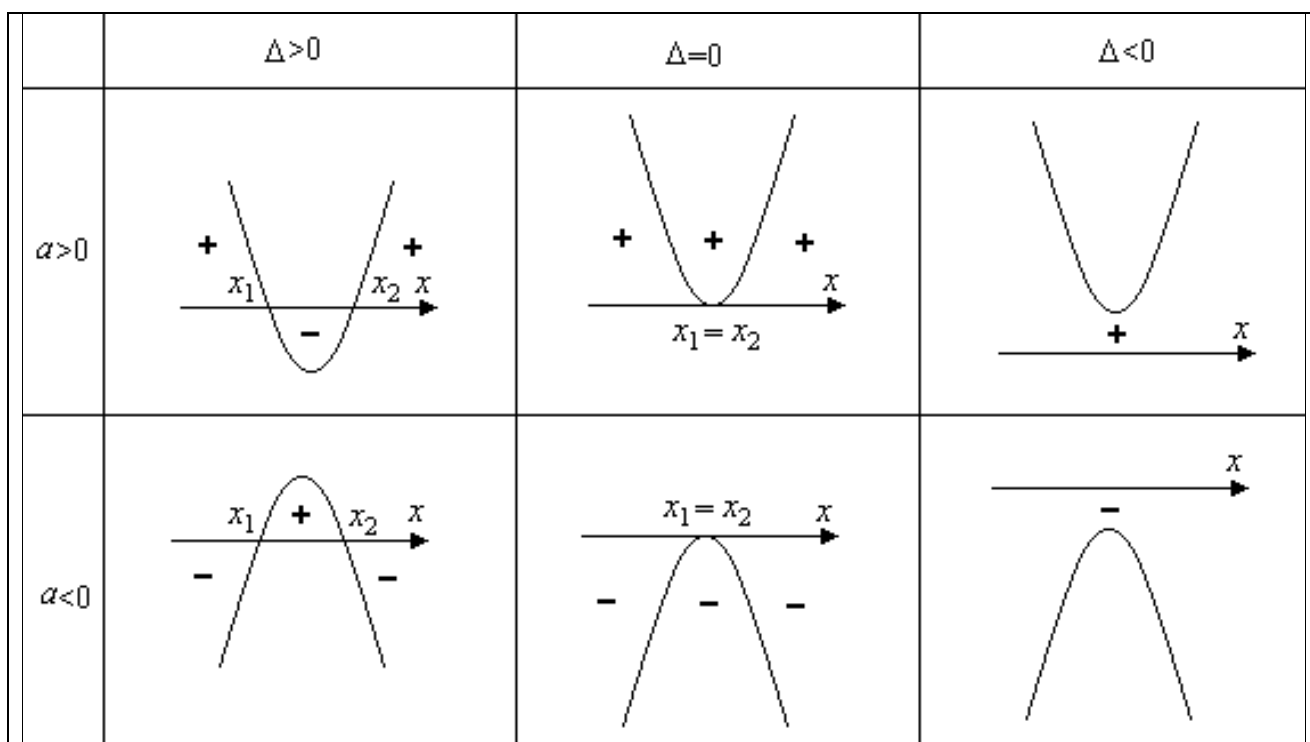


Figura 3 – Soluzione grafica di un'equazione di secondo grado.

La soluzione della disequazione sarà quindi data dall'insieme delle ascisse dei punti che soddisfano il sistema suddetto. E' quindi importante trovare la posizione della parabola rispetto all'asse delle x . Nella figura 3 sono riportati tutti i casi. Si ricordi che $\Delta = b^2 - 4ac$ e che

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A seconda del tipo di disequazione si hanno quindi soluzioni come riportato nella seguente tabella.

	a	Δ	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
1	$a > 0$	$\Delta > 0$	$]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$	$]-\infty, x_1] \cup]x_2, +\infty[$	$]x_1, x_2[$	$[x_1, x_2]$
2	$a > 0$	$\Delta = 0$	$]-\infty, x_1[\cup]x_1, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	\emptyset	$-b/2a$
3	$a > 0$	$\Delta < 0$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	\emptyset	\emptyset
4	$a < 0$	$\Delta > 0$	$]x_1, x_2[$	$[x_1, x_2]$	$]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$	$]-\infty, x_1] \cup]x_2, +\infty[$
5	$a < 0$	$\Delta = 0$	\emptyset	$-b/2a$	$]-\infty, x_1[\cup]x_1, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$
6	$a < 0$	$\Delta < 0$	\emptyset	\emptyset	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$

Esempio 3

Risolvere la disequazione di secondo grado: $2x^2 + 5x - 3 > 0$.

E' una disequazione di tipo 1) ed essendo $a = 2 > 0$ e $\Delta = 49 > 0$, si è nel caso 1 della tabella. Essendo inoltre $x_1 = -3$ e $x_2 = 1/2$, la soluzione sarà data dall'insieme $]-\infty, -3[\cup]1/2, +\infty[$.

Esempio 4

Risolvere la disequazione di secondo grado: $x^2 + x > 7x - 10$.

Portando i termini dal secondo al primo membro della disuguaglianza (ovviamente cambiando di segno) si ha:

$x^2 - 6x + 10 > 0$. E' una disequazione di tipo 1) ed essendo $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$, si è nel caso 3 della tabella. La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x .

Esempio 5

Risolvere la disequazione di secondo grado: $15 - x - 2x^2 \geq 0$.

E' una disequazione di tipo 2) ed essendo $a = -2 < 0$ e $\Delta = 121 > 0$, si è nel caso 4 della tabella. Essendo inoltre $x_1 = -3$ e $x_2 = 5/2$, la soluzione sarà data dall'insieme $[-3, 5/2]$.

Si osservi come cambiando di segno a tutti i termini della disequazione questa diventi $2x^2 + x - 15 \leq 0$ che è di tipo 4). Ora $a = 2 > 0$, mentre Δ rimane lo stesso; si è quindi nel 1) della tabella e la soluzione è data sempre dall'insieme $[-3, 5/2]$.

Esempio 6

Risolvere la disequazione di secondo grado: $x^2 - 10x + 32 \leq 0$.

E' una disequazione di tipo 4) ed essendo $a = 1 > 0$ e $\Delta = -28 < 0$, si è nel caso 3 della tabella e non ci sono soluzioni.

Esempio 7

Risolvere la disequazione di secondo grado: $24x - 16 - 9x^2 < 0$.

E' una disequazione di tipo 3) ed essendo $a = -9 < 0$ e $\Delta = 0$, si è nel caso 5 della tabella. La disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x tranne $x = -4/3$.

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Si ha spesso a che fare con disequazioni di grado superiore al secondo per esempio del tipo $P_n(x) > 0$ dove

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

è un polinomio di grado n in x .

In questi casi l'unica possibilità che si ha è quella di riuscire a scomporre il polinomio in termini di primo o di secondo grado.

Esempio 8

Vogliamo risolvere la disequazione di terzo grado: $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$.

Le tecniche fin qui date non possono essere applicate. Consideriamo il quadrimonio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ e cerchiamone una scomposizione. Osserviamo che $P(-1) = 0$ e quindi, facendo uso della regola di Ruffini, $P(x)$ può essere scomposto in fattori ottenendo:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6).$$

La disequazione diventa quindi: $(x + 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$.

Studiando separatamente il segno dei due termini del prodotto otteniamo:

$$x + 1 < 0 \text{ per } x < -1,$$

$$x + 1 = 0 \text{ per } x = -1,$$

$$x + 1 > 0 \text{ per } x > -1;$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ per } 2 < x < 3,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ per } x = 2 \text{ e } x = 3,$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ per } x < 2 \text{ e } x > 3.$$

Riportiamo in grafico la situazione utilizzando una linea tratteggiata per gli intervalli in cui l'espressione è negativa, una linea continua laddove è positiva e ponendo 0 dove è zero.

	-1		2		3		
$x + 1$	-	0	+		+		+
$x^2 - 5x + 6$	+		+	0	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Nell'ultima riga viene riportato il segno di $P(x)$ ottenuto con le consuete regole del prodotto. A questo punto è facile dare la soluzione della disequazione; infatti il problema chiedeva di determinare l'insieme dei valori di x per i quali il polinomio è minore o uguale a zero, dalla figura si desume:

$$]-\infty, -1] \cup [2, 3].$$

DISEQUAZIONI RAZIONALI FRATTE

Si prenda in considerazione la disequazione del tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

Il procedimento che permette di risolvere tale disequazione fratta (e quelle analoghe con i segni di $<$, \geq e \leq) è analogo a quello visto precedentemente per i prodotti; infatti, tale rapporto è positivo solo se il numeratore e il denominatore hanno segni concordi (tutti e due positivi o tutti e due negativi), è negativo se il numeratore e il denominatore hanno segni discordi. Per avere la soluzione basta quindi studiare il segno dei due termini e utilizzare la regola del prodotto dei segni. È importante ricordare che una frazione ha senso solo se il denominatore è diverso da zero.

Esempio 9

Risolvere la disequazione razionale fratta $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

Per risolvere questa disequazione è sufficiente quindi studiare il segno del numeratore N e del denominatore D :

$$N = x - 2;$$

$$N < 0 \text{ per } x < 2,$$

$$N = 0 \text{ per } x = 2,$$

$$N > 0 \text{ per } x > 2;$$

$$D = x + 1$$

$$D < 0 \text{ per } x < -1,$$

$$D = 0 \text{ per } x = -1,$$

$$D > 0 \text{ per } x > -1;$$

riassumendo in un grafico tipo quello dell'esempio precedente si ha:

	-1		2		
N	-		-	0	+
D	-	0	+		+
N/D	+	0	-	0	+

Poiché il rapporto deve risultare positivo, la soluzione è $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty [$.

E' da notare che per $x = -1$ il denominatore si annulla, quindi il rapporto non esiste (si usa il simbolo \sim oppure nel può essere lasciato un "buco").

Esempio 10

Risolvere la disequazione razionale fratta $\frac{x-5}{x+3} + \frac{x-8}{x-3} \geq \frac{1}{2}$.

Per poter procedere dobbiamo ridurre la disequazione alla forma $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Effettuati i calcoli si ottiene: $\frac{3x^2 - 26x - 9}{2(x+3)(x-3)} \geq 0$.

Ora si può studiare il segno del numeratore $N = 3x^2 - 26x - 9$ e del denominatore $D = 2(x+3)(x-3)$. Si osservi che in entrambi i casi si ha a che fare con disequazioni di secondo grado.

Il grafico riassume la situazione dei segni e ci permette di ottenere la soluzione.

		-3		-1/3		3		9		
N		+		+	0	-		-	0	+
D		+	0	-		-	0	+		+
N/D		+	/	-	0	+	/	-	0	+

Poiché il rapporto deve essere maggiore o uguale a zero la soluzione è $]-\infty, -3[\cup]-1/3, 3[\cup]9, +\infty [$.

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Risolvere un sistema di disequazioni tipo

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

significa trovare i valori di x che soddisfano contemporaneamente le due disequazioni (ovviamente si possono pensare anche sistemi di più di due disequazioni; in questo caso le soluzioni sono tutti i valori di x che soddisfano tutte le disequazioni).

Esempio 11

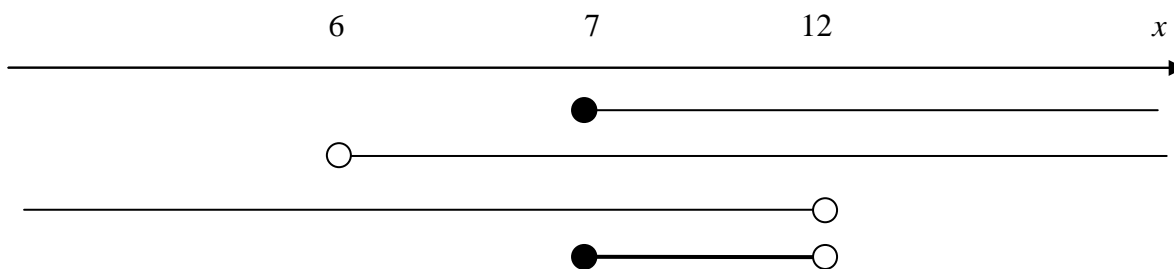
Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 7x - 8 \geq 41 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x > 5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x < 13 \end{cases}$$

Il sistema composto da tre disequazioni di I grado le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} 7x \geq 49 \\ \frac{5}{6}x > 5 \\ \frac{13}{12}x < 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 7 \\ x > 6 \\ x < 12 \end{cases}$$

Riportando in un grafico:



da cui la soluzione è data da $[7,12[$.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Si chiamano disequazioni irrazionali quelle disequazioni nelle quali l'incognita figura anche, o soltanto, sotto il segno di radice. Consideriamo solo alcuni casi particolari, per esempio casi del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

L'indice della radice, n , può essere ovviamente pari o dispari e ciò comporta differenti metodi di soluzione. Per il seguito consideriamo il secondo caso.

Se n è dispari, per esempio $n = 3$, la soluzione è basata sulle disuguaglianza tra i numeri:

$$a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$

per cui

$$\sqrt[3]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^3$$

Esempio 12

Si vuol risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x} < x - 2$$

Per quanto detto sopra si ha:

$$x^3 - 2x < (x - 2)^3$$

$$x^3 - 2x < x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$3x^2 - 7x + 4 < 0$$

da cui la soluzione

$$1 < x < \frac{4}{3}$$

Sia ora n pari, per esempio $n = 2$.

Consideriamo prima una disequazione del tipo:

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

risolverla equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

cioè trovare quei valori di x per i quali sono soddisfatte contemporaneamente le tre disequazioni.

Esempio 13

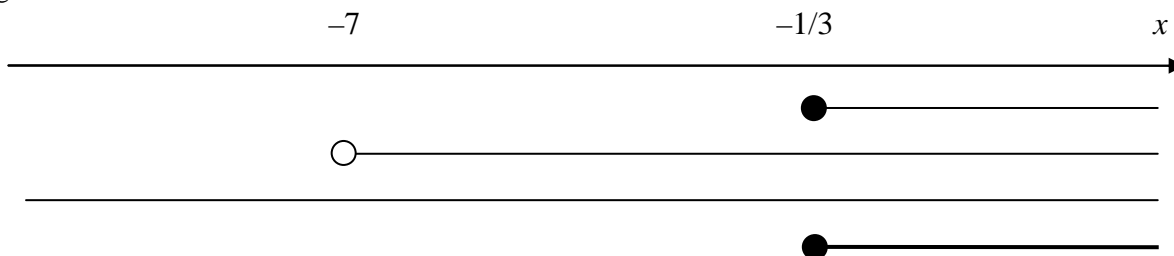
Risolvere la disequazione:

$$\sqrt{3x+1} < x+7$$

La soluzione è data dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x + 7 > 0 \\ 3x + 1 < [x + 7]^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x + 7 > 0 \\ 3x + 1 < x^2 + 4x + 49 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x + 7 > 0 \\ x^2 + 11x + 48 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > -7 \\ \text{sempre soddisfata} \end{cases}$$

in un grafico riassuntivo si ha:



da cui la soluzione $x \geq -1/3$.

Consideriamo ora la disequazione

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

la soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Nel secondo sistema la prima disequazione può essere eliminata in quanto è implicitamente verificata dalla terza e quindi i sistemi da risolvere sono:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Esempio 14

Risolvere la disequazione

$$\sqrt{4-x} > x-2.$$

Come detto sopra si devono risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x > (x-2)^2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 4-x > x^2 + 4 - 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzione l'intervallo $x < 2$, il secondo sistema l'intervallo $2 \leq x < 3$ per cui, facendo l'unione delle soluzioni, la disequazione è soddisfatta per $x < 3$.

DISEQUAZIONI IN DUE VARIABILI

Iniziamo lo studio di tali disequazione dalle disequazioni di primo grado. Un disequazione di primo grado in due incognite può essere sempre messa nella forma:

$$ax + by + c > 0.$$

Risolvere la disequazione significa trovare le coppie $(x; y)$ che soddisfano alla disuguaglianza data. Ricordando quanto detto sul piano cartesiano e sulle rette, a tale disequazione può essere associata la retta di equazione $ax + by + c = 0$. La soluzione della disequazione si riduce quindi a determinare

quale dei due semipiani in cui la retta divide il piano contiene i punti $P(x; y)$ che soddisfano la disequazione.

Un esempio chiarirà il concetto.

Esempio 15

Risolvere la disequazione

$$2 - y > \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

La disequazione è equivalente a: $2x + 4y - 5 < 0$.

Disegnando su di un piano cartesiano xOy la retta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ (vedi figura 4) il piano resta diviso in due semipiani: uno sopra la retta, l'altro sotto. Per determinare quale dei due è soluzione basta scegliere un punto e vedere se le sue coordinate soddisfano la disequazione; quando è possibile (come in questo caso) conviene prendere l'origine $O(0; 0)$.

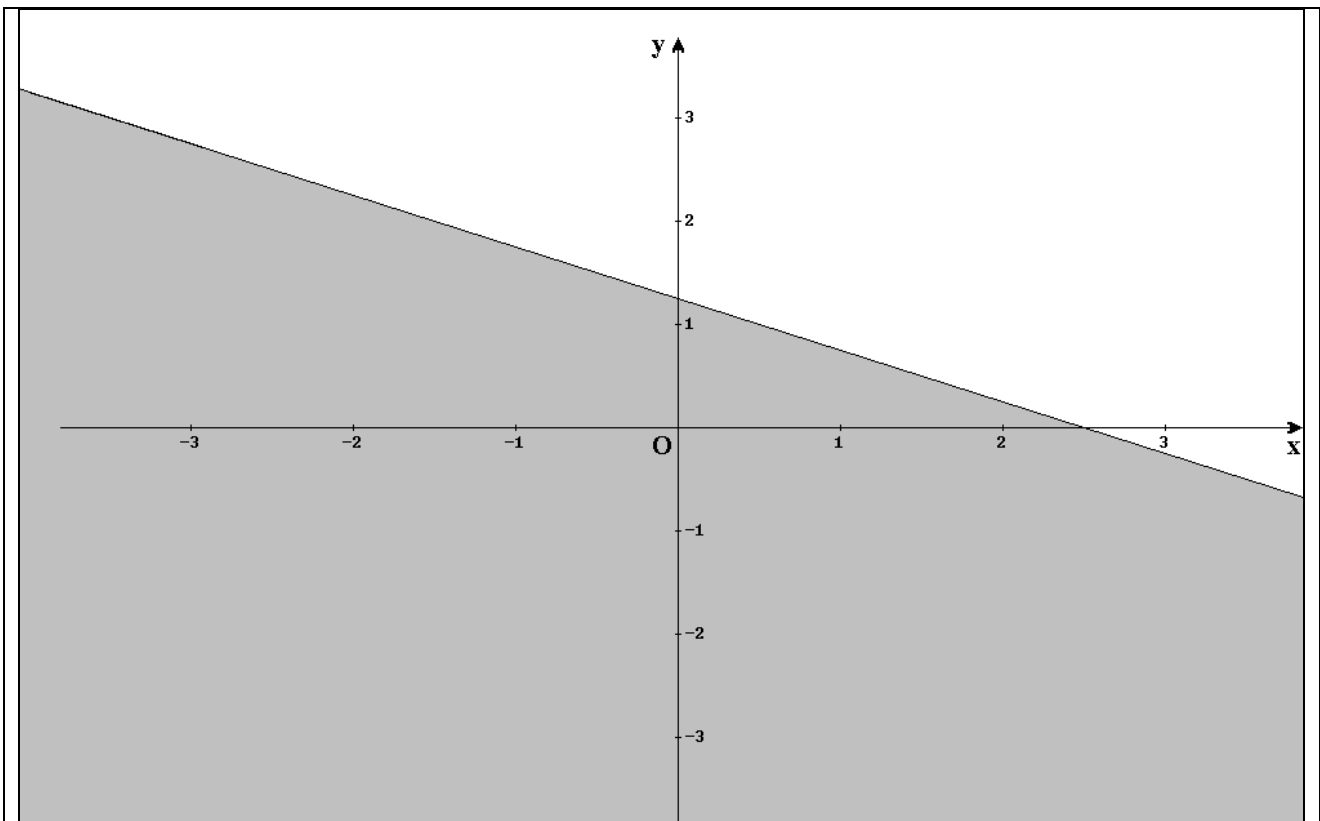


Figura 4

Si ottiene: $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$ e quindi la disequazione è soddisfatta. L'origine si trova quindi nel semipiano che soddisfa la disequazione (nella figura 4, in grigio il semipiano soluzione della disequazione).

Con ragionamento analogo si possono risolvere disequazioni in due variabili di qualunque tipo nella forma $E(x; y) > 0$, purché si sappia rappresentare la curva di equazione $E(x; y) = 0$. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 16

Risolvere la disequazione $y \geq x^2 - 1$.

L'equazione $y = x^2 - 1$ ha per diagramma la parabola in figura 5. L'origine $O(0; 0)$ soddisfa la disequazione ($0 \geq 0^2 - 1 = -1$) si trova quindi nel semipiano delle soluzioni (nella figura 5 in colore grigio). I punti della parabola soddisfano la disequazione (sono quelli per i quali vale l'uguaglianza)

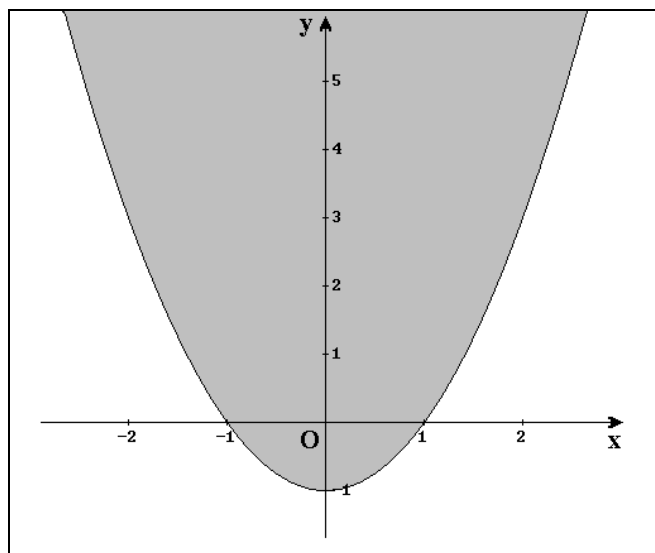


Figura 5 – Relativa all'Esempio 16

Esempio 17

Risolvere la disequazione $x^2 + 4y^2 > 4$.

L'equazione $x^2 + 4y^2 = 4$, che può essere scritta nella

forma $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ha per diagramma l'ellisse di figura 6.

L'origine $O(0; 0)$ non soddisfa la disequazione ($0^2 + 4 \cdot 0^2 = 0 < 4$) non si trova quindi nel semipiano delle soluzioni (nella figura 6 in colore grigio).

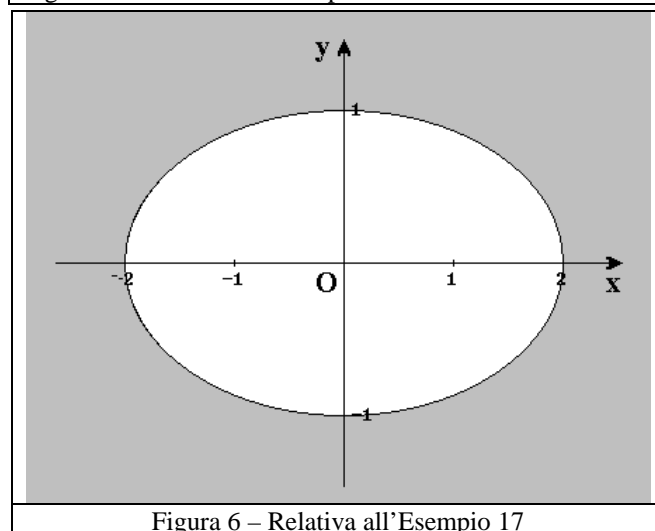


Figura 6 – Relativa all'Esempio 17

Esempio 18

Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2 + y^2} - 1 < 2\sqrt{2}$.

Poiché per $x^2 + y^2 - 1 < 0$ il primo membro della disequazione perde di significato, i valori che soddisfano tale disequazione devono essere esclusi dal piano. Elevando quindi al quadrato i due membri della disequazione si ha:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &< 8 \\ \text{ovvero} \\ x^2 + y^2 &< 9 \end{aligned}$$

Si osservi che $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ sono le equazioni di due circonferenze di centro l'origine e raggio rispettivamente 1 e 3. Come si può facilmente intuire la disequazione $x^2 + y^2 < 9$ è soddisfatta da tutti i punti interni alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$, ma per ottenere la soluzione bisogna togliere i punti interni alla circonferenza di raggio 1. La soluzione è pertanto la corona circolare di centro l'origine di raggio interno 1 e raggio esterno 3 (vedi figura 7).

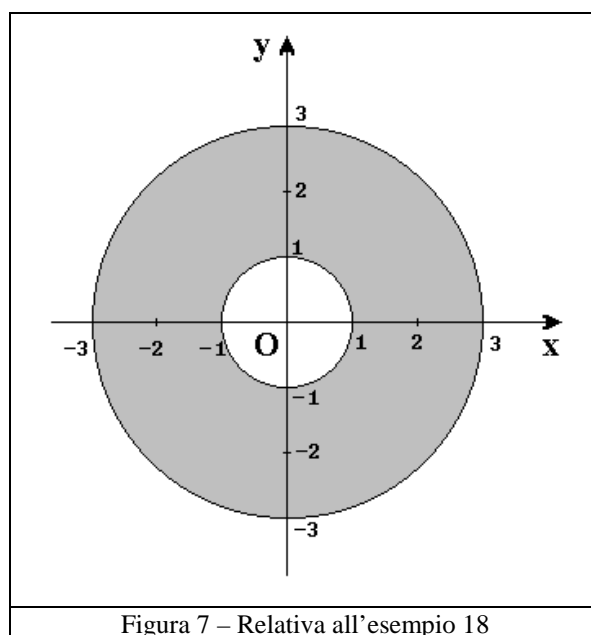


Figura 7 – Relativa all'esempio 18

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Generalità

Si consideri la circonferenza di raggio r e centro O di figura 1; su di essa si prendano due punti, A e B . Allora si può andare da A verso B percorrendo due strade, una in senso antiorario, l'altra in senso orario. Agli archi AB corrispondono due angoli $A\hat{O}B$.

Si stabilisce che sia la misura dell'angolo $A\hat{O}B$ sia la misura dell'arco AB siano espresse da un numero positivo quando sono percorsi in senso antiorario, siano espresse da un numero negativo quando sono percorsi in senso orario.

Per la misura degli angoli si possono usare due sistemi. Il primo è il sistema sessagesimale, la cui unità di misura è il grado (simbolo $^\circ$), definito come la 360^a parte dell'angolo giro; il grado ha come sottomultipli il primo (la sessantesima parte del grado, simbolo $'$) e il secondo (la sessantesima parte del primo, simbolo $''$).

Su di un piano cartesiano si consideri ora la circonferenza di centro l'origine e raggio r . Il punto $A(r; 0)$ è l'origine per la misura degli angoli e degli archi.

Poiché una semicirconferenza di raggio r è lunga πr e a tale arco corrisponde un angolo piatto (180°), si ha che, se ad un arco di lunghezza l corrisponde un angolo di ampiezza α , vale la seguente proporzione:

$$\pi r : 180^\circ = l : \alpha^\circ$$

Da questa relazione si ricava che:

$$(1) \quad \frac{l}{r} = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ$$

la quale indica che, qualunque sia il raggio della circonferenza, uno stesso angolo di misura α° dà sempre lo stesso rapporto l/r . Tale valore può quindi essere preso come misura di un angolo.

L'unità si ottiene prendendo un arco la cui lunghezza è uguale al raggio e tale unità viene chiamata **radiante**; la misura di un angolo in radianti è quindi espressa da un numero reale che verrà indicato con α , mentre per la misura in gradi si farà uso del simbolo α° .

Dalla (1) si ricava la formula di trasformazione da gradi a radianti:

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ$$

Nella Tabella 1 vengono riportate le misure in radianti di alcuni angoli.

Si osservi anche che se si considera una circonferenza di raggio $r = 1$ e si pensa di percorrerla, a partire da A , in senso antiorario, dopo un giro si sarà percorso un arco di lunghezza 2π , dopo 2 giri lo spazio percorso sarà di $2 \cdot 2\pi$, dopo 3 giri $3 \cdot 2\pi$ e in generale dopo k giri sarà $2k\pi$. Lo stesso ragionamento porta a definire l'arco percorso in senso inverso, per cui se si sono percorsi k giri si avrà un arco di $-2k\pi$. Inoltre essendo $r = 1$ la misura in radianti dell'angolo corrispondente all'arco l è proprio l , per cui è lecito dire che facendo k giri in senso antiorario si è descritto un angolo di $2k\pi$ radianti e che facendo k giri in senso orario si è descritto un angolo di $-2k\pi$ radianti. Ciò porta anche al fatto che un punto B sulla circonferenza non può essere individuato in modo univoco dall'angolo α , ma la sua posizione deve essere espressa dal numero $\alpha + 2k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ovvero l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi.

Seno e coseno di un angolo

In un sistema di assi cartesiani si consideri una circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$. Una tale circonferenza è detta **circonferenza goniometrica**. Sia P un punto di tale circonferenza, H la sua proiezione sull'asse x e $A\hat{O}P = \alpha$ (figura 2).

L'ordinata del punto P si chiama **seno** dell'angolo α e si indica con $\sin\alpha$. Si osservi che il segmento HP misura $\sin\alpha$.

L'ascissa del punto P si chiama **coseno** dell'angolo α e si indica con $\cos\alpha$. Il

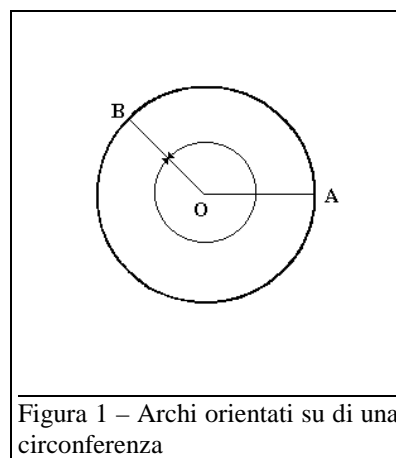


Figura 1 – Archi orientati su di una circonferenza

α°	α
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
180	π
270	$3\pi/2$
360	2π

Tabella 1

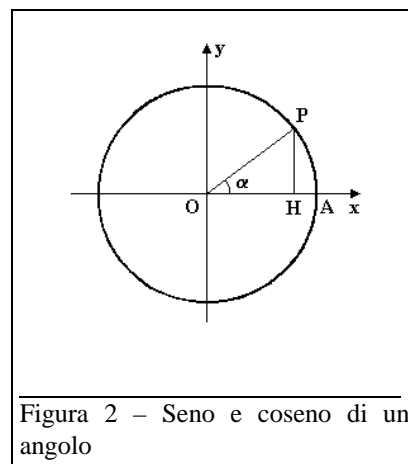


Figura 2 – Seno e coseno di un angolo

segmento OH misura $\cos\alpha$.

Il punto P ha quindi coordinate: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ e, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo POH , si ha:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

che viene chiamata **prima relazione fondamentale della goniometria**.

In base alle definizioni date sopra si possono definire due funzioni da \mathbf{R} in \mathbf{R} : la prima definita da $y = \sin x$, la seconda da $y = \cos x$. Con l'aiuto delle figure seguenti si vuol analizzare l'andamento di tali funzioni.

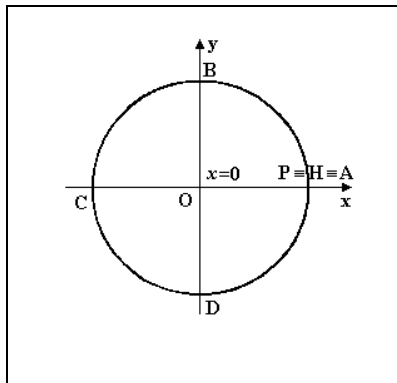


Figura 3 – Per $x=0$, P coincide con $A(1; 0)$ quindi $\sin 0=0$ e $\cos 0 = 1$.

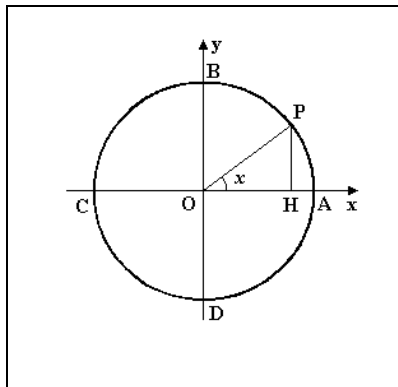


Figura 4 – Per $0 < x < \pi/2$, P è un punto del primo quadrante e quindi $\sin x$ e $\cos x$ assumono valori positivi; mentre il valore di $\sin x$ cresce, quello di $\cos x$ decresce.

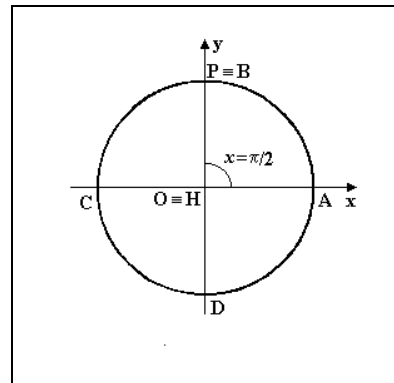


Figura 5 – Per $x = \pi/2$, P coincide con $B(0; 1)$; quindi $\sin \pi/2 = 1$ e $\cos \pi/2 = 0$.

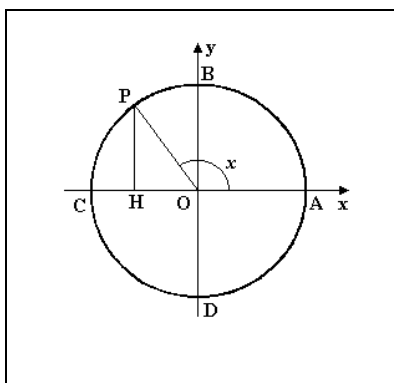


Figura 6 – Per $\pi/2 < x < \pi$, P è un punto del secondo quadrante, quindi $\sin x$ assume valori positivi e $\cos x$ valori negativi; sia il valore di $\sin x$ che quello di $\cos x$ decrescono.

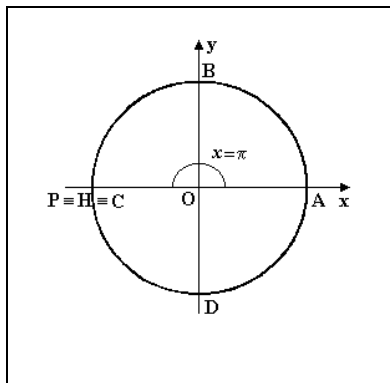


Figura 7 – Per $x = \pi$, P coincide con $C(-1; 0)$ quindi $\sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$.

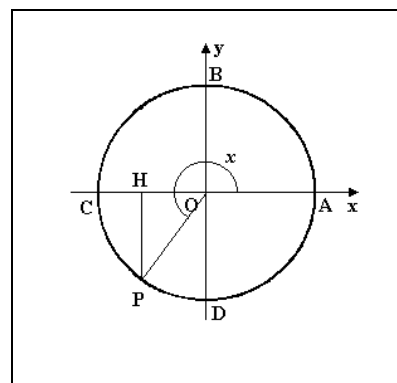


Figura 8 – Per $\pi < x < 3\pi/2$, P è un punto del terzo quadrante, quindi $\sin x$ e $\cos x$ assumono valori negativi; mentre il valore di $\sin x$ decresce, quello di $\cos x$ cresce.

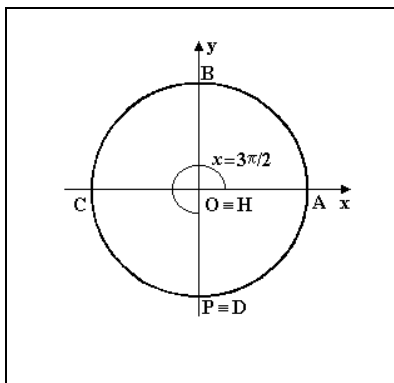


Figura 9 – Per $x = 3\pi/2$, P coincide con $D(0; -1)$ quindi $\sin(3\pi/2) = -1$ e $\cos(3\pi/2) = 0$.

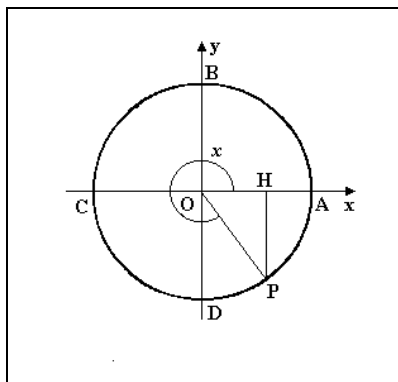


Figura 10 – Per $3\pi/2 < x < 2\pi$, P è un punto del quarto quadrante, quindi $\sin x$ assume valori negativi mentre $\cos x$ assume valori positivi; entrambi i valori di $\sin x$ e di $\cos x$ crescono.

Per $x = 2\pi$, P coincide di nuovo con $A(1; 0)$ per cui $\sin 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Dopodiché il ciclo si ripete. Le funzioni seno e coseno si dicono quindi periodiche, per il fatto che si verifica:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

e

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha.$$

La quantità 2π viene detta **periodo**.

In generale si dice che una funzione $y = f(x)$ di \mathbf{R} in \mathbf{R} è **periodica** di periodo p è il più

piccolo tra i valori per i quali si verifica:

$$f(x + p) = f(x).$$

Nella Tabella 2 sono riportati alcuni valori notevoli delle funzioni $y = \text{sen}x$ e $y = \text{cos}x$. Tali valori possono essere dedotti con delle semplici considerazioni geometriche.

Inoltre si può osservare che il codominio delle funzioni in esame è l'intervallo $[-1, 1]$.

I grafici di tali funzioni, limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, sono dati nelle figure 11 e 12.

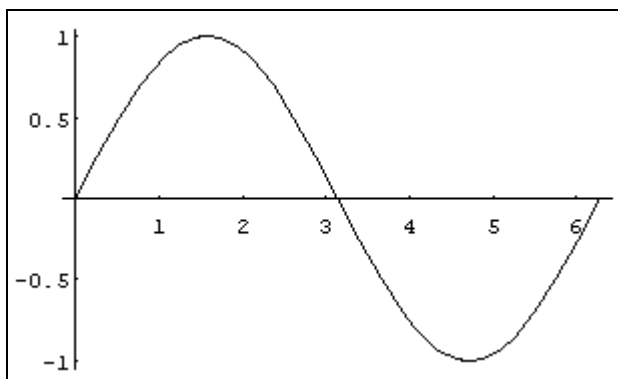


Figura 11 – Grafico di $y = \text{sen}x$, $x \in [0, 2\pi]$

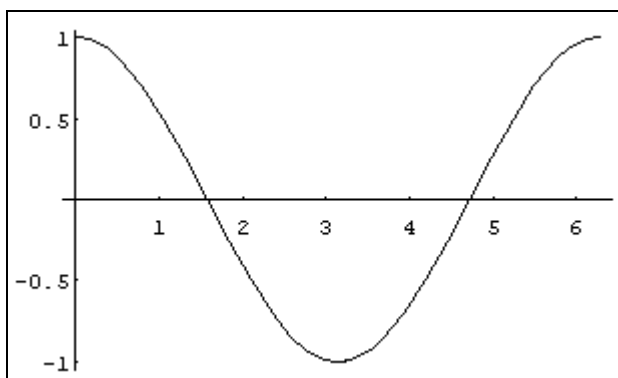


Figura 12 – Grafico di $y = \text{cos}x$, $x \in [0, 2\pi]$

x	x°	$\text{sen}x$	$\text{cos}x$	$\text{tg}x$
0	0°	0	1	0
$\pi/6$	30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	non esiste
$2\pi/3$	120°	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	135°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	150°	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	180°	0	-1	0
$7\pi/6$	210°	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$5\pi/4$	225°	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
$4\pi/3$	240°	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$
$3\pi/2$	270°	-1	0	non esiste
$5\pi/3$	300°	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
$7\pi/4$	315°	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$11\pi/6$	330°	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
2π	360°	0	1	0

Tabella 2

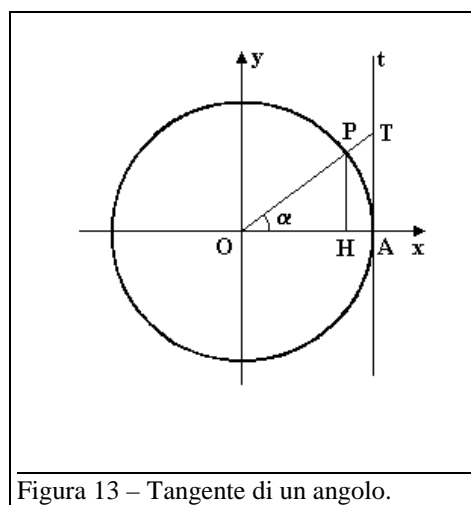


Figura 13 – Tangente di un angolo.

Tangente di un angolo

Consideriamo ancora una circonferenza goniometrica, sia P un punto di tale circonferenza e sia $\widehat{AOP} = \alpha$, sia $A(1; 0)$ il punto di incontro della circonferenza con il semiasse positivo delle x e da esso si conduca la tangente t alla circonferenza (figura 13).

Si consideri il raggio OP e lo si prolunghi fino ad intersecare la tangente t nel punto T .

L'ordinata del punto T si chiama **tangente** dell'angolo α e si indica con $\text{tg}\alpha$.

Si osservi che quando $\alpha = \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$ la tangente dell'angolo non esiste in quanto il raggio OP risulta parallelo alla retta t .

Sia H la proiezione di P sull'asse x e si considerino i triangoli OHP e OAT (figura 16). Tali triangoli sono simili, quindi vale la proporzione:

$$OH : OA = HP : AT$$

da cui:

$$\text{cos}\alpha : 1 = \text{sen}\alpha : \text{tg}\alpha$$

e ricavando $\text{tg}\alpha$ si ha:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha}$$

questa viene detta **seconda relazione fondamentale della goniometria**.

In base alle definizioni date sopra si può definire una funzione da $\mathbf{R} - \{x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ in \mathbf{R} definita da $y = \operatorname{tg}x$. Analizziamo l'andamento di tale funzione.

Per $x = 0$, T coincide con A e quindi $\operatorname{tg}0 = 0$.

Per $0 < x < \pi/2$, al crescere di x il punto T si sposta verso l'alto lungo la retta t quindi $\operatorname{tg}x$ è positiva e cresce; si osservi che il segmento OT , al crescere di x , tende a diventare verticale.

Per $x = \pi/2$, OP è parallelo alla retta t , quindi non c'è intersezione con la retta t . Per tale valore $\operatorname{tg}x$ non esiste.

Per $\pi/2 < x < \pi$, il punto T passa nel semipiano delle y negative e si avvicina all'asse delle x , quindi $\operatorname{tg}x$ risulta negativa e ancora crescente.

Per $x = \pi$, T coincide di nuovo con A quindi $\operatorname{tg}\pi = 0$.

Dopodiché il ciclo si ripete; quindi, anche la tangente è una funzione periodica e il periodo è π .

Nella Tabella 2 vengono riportati i valori della tangente di alcuni angoli notevoli. Inoltre si può osservare che il codominio della funzione in esame è tutto \mathbf{R} . Il grafico di tale funzione, limitatamente all'intervallo $[-\pi, \pi]$, è dato nella figura 14.

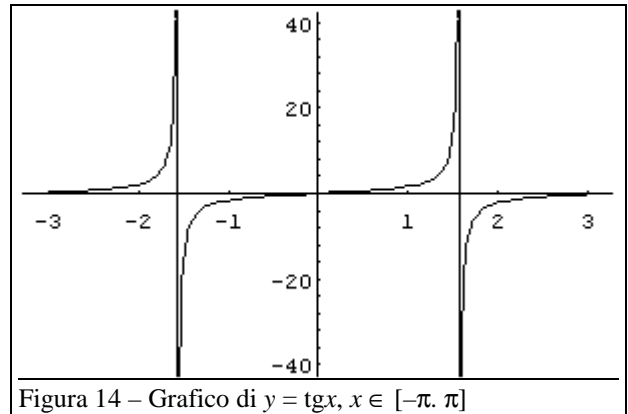


Figura 14 – Grafico di $y = \operatorname{tg}x, x \in [-\pi, \pi]$

Altre funzioni trigonometriche

Oltre alle funzioni date possono essere definite altre tre funzioni trigonometriche:

la **cosecante** definita da $y = \operatorname{cosec}x = \frac{1}{\operatorname{sen}x}$ il cui dominio è

$\mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ (per il grafico vedi figura 15);

la **secante** definita da $y = \operatorname{sec}x = \frac{1}{\operatorname{cos}x}$ il cui dominio è

$-\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ (per il grafico vedi figura 16);

la **cotangente** definita da $y = \operatorname{cotg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$ il cui dominio è

$\mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ (per il grafico vedi figura 17).

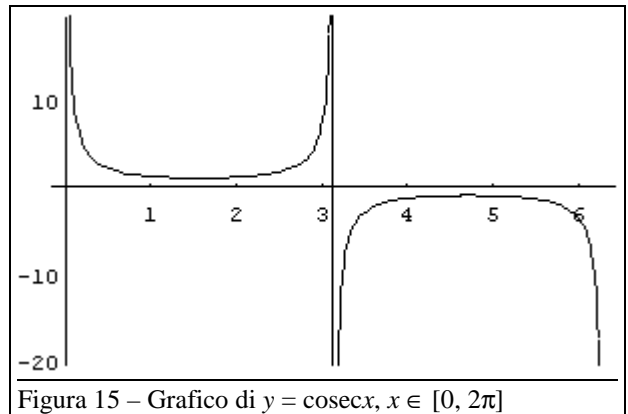


Figura 15 – Grafico di $y = \operatorname{cosec}x, x \in [0, 2\pi]$

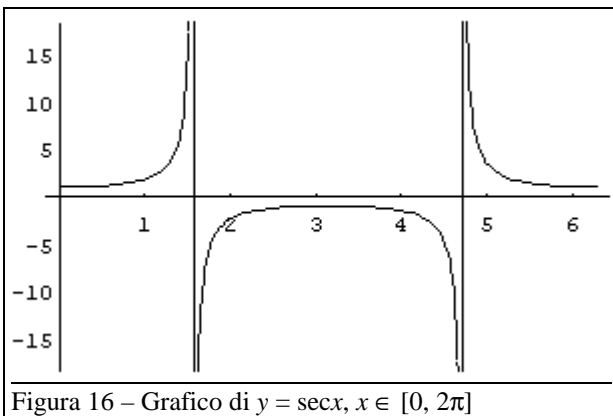


Figura 16 – Grafico di $y = \operatorname{sec}x, x \in [0, 2\pi]$

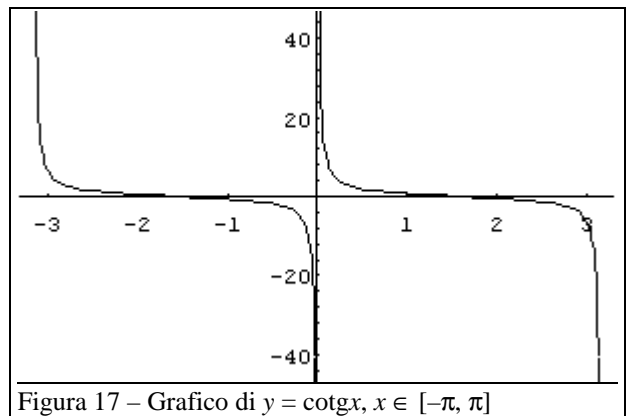


Figura 17 – Grafico di $y = \operatorname{cotg}x, x \in [-\pi, \pi]$

ALCUNE FORMULE UTILI

Trasformazioni delle funzioni trigonometriche

Le seguenti formule permettono di esprimere una funzione trigonometrica in funzione delle altre.

	$\text{sen}\alpha$	$\text{cos}\alpha$	$\text{tg}\alpha$
$\text{sen}\alpha$	$\text{sen}\alpha$	$\pm\sqrt{1-\text{cos}^2\alpha}$	$\pm\frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$
$\text{Cos}\alpha$	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\text{cos}\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$
$\text{tg}\alpha$	$\pm\frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\text{cos}^2\alpha}}{\text{cos}\alpha}$	$\text{tg}\alpha$

Archi associati

Le seguenti formule permettono di calcolare le funzioni trigonometriche di un qualsiasi angolo, noto il valore delle stesse per un angolo compreso tra 0 e $\pi/4$.

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{cos}\alpha$	$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{sen}\alpha$	$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{cotg}\alpha$	$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{tg}\alpha$
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\text{cos}\alpha$	$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\text{sen}\alpha$	$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\text{cotg}\alpha$	$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\text{tg}\alpha$
$\text{sen}(\pi-\alpha)=\text{sen}\alpha$	$\text{cos}(\pi-\alpha)=-\text{cos}\alpha$	$\text{tg}(\pi-\alpha)=-\text{tg}\alpha$	$\text{cotg}(\pi-\alpha)=-\text{cotg}\alpha$
$\text{sen}(\pi+\alpha)=-\text{sen}\alpha$	$\text{cos}(\pi+\alpha)=-\text{cos}\alpha$	$\text{tg}(\pi+\alpha)=\text{tg}\alpha$	$\text{cotg}(\pi+\alpha)=\text{cotg}\alpha$
$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\text{cos}\alpha$	$\text{cos}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\text{sen}\alpha$	$\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\text{cotg}\alpha$	$\text{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\text{tg}\alpha$
$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\text{cos}\alpha$	$\text{cos}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\text{sen}\alpha$	$\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\text{cotg}\alpha$	$\text{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\text{tg}\alpha$
$\text{sen}(2\pi-\alpha)=\text{sen}(-\alpha)=-\text{sen}\alpha$	$\text{cos}(2\pi-\alpha)=\text{cos}(-\alpha)=\text{cos}\alpha$	$\text{tg}(2\pi-\alpha)=\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\alpha$	$\text{cotg}(2\pi-\alpha)=\text{cotg}(-\alpha)=-\text{cotg}\alpha$

Formule di addizione e sottrazione

Permettono di calcolare le funzioni trigonometriche per la somma o la differenza di angoli.

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha \text{cos}\beta \pm \text{sen}\beta \text{cos}\alpha$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos}\alpha \text{cos}\beta \mp \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$$

$$\alpha, \beta \text{ e } \alpha + \beta \text{ oppure } \alpha - \beta \neq \pi/2 + k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{cotg}\alpha \cdot \text{cotg}\beta \mp 1}{\text{cotg}\beta \pm \text{cotg}\alpha}$$

$$\alpha, \beta \text{ e } \alpha + \beta \text{ oppure } \alpha - \beta \neq k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

Formule di duplicazione

Dalle formule di addizione discendono facilmente le formule di duplicazione (basta osservare che $2\alpha = \alpha + \alpha$)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\alpha) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \cos(2\alpha) &= \begin{cases} \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \alpha \neq \pi/2 + k\pi, \text{ e } \alpha \neq \pi/4 + k\pi/2, \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

$$\operatorname{cotg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha} \quad \alpha \neq k\pi/2, \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

Formule per la trasformazione di seno, coseno, tangente e cotangente in funzione della tangente dell'angolo metà.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} & \alpha \neq \pi + 2k\pi & \text{ con } k \in \mathbf{Z} & \cos\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} & \alpha \neq \pi + 2k\pi & \text{ con } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \alpha \neq \pi/2 + k\pi \text{ e } \alpha \neq \pi + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad \alpha \neq k\pi/2 \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

Formule di bisezione.

Permettono di calcolare le funzioni trigonometriche della metà di un angolo noto

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbf{Z} \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} \quad \alpha \neq 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

Formule di prostaferesi.

Permettono di trasformare somme o differenze tra seni e coseni in prodotti

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2} \quad \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2} \quad \cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Sono equazioni elementari le seguenti:

$$\operatorname{sen} x = l, \quad \cos x = m, \quad \operatorname{tg} x = n.$$

Cominciamo da $\operatorname{sen} x = l$.

La prima osservazione che dobbiamo fare è che essendo $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, l'equazione ha senso solo se $-1 \leq l \leq 1$.

Possiamo vedere anche l'equazione come la soluzione del sistema $\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = l \end{cases}$, ossia l'intersezione tra la sinusoidale e la retta parallela all'asse x , $y = l$.

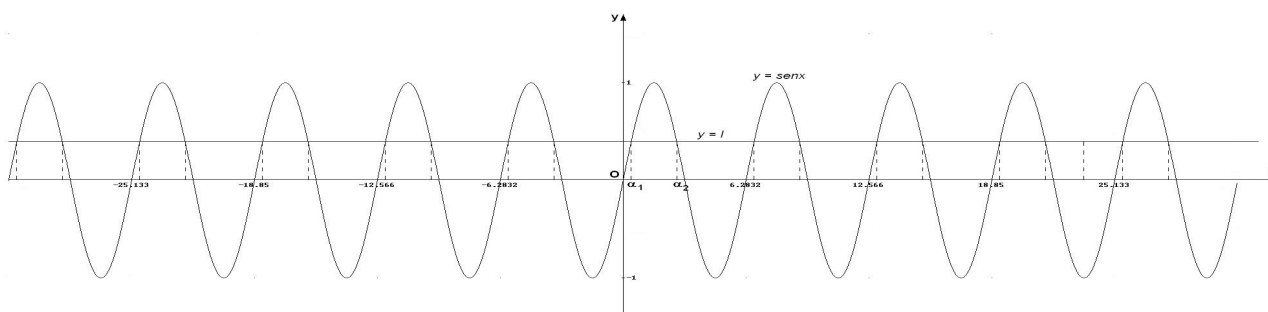


Fig. 18 – Risoluzione grafica dell'equazione goniometrica $\operatorname{sen} x = l$.

Come si può vedere dal grafico il sistema ammette infinite soluzioni a causa della periodicità della funzione seno, ma tutte le soluzioni si ottengono da due di esse (nel grafico indicate con α_1 e α_2) aggiungendo o sottraendo multipli di 2π .

Consideriamo ora una circonferenza goniometrica e la retta $y = l$, congiungendo O con i punti in cui la retta incontra la circonferenza vengono individuati i due angoli α_1 e α_2 e si vede che risulta $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$.

Possiamo quindi scrivere le tutte le soluzioni dell'equazione nella forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + 2k\pi \quad \text{e} \\ x_2 &= \alpha_2 + 2k\pi = \pi - \alpha_1 + 2k\pi = -\alpha_1 + (2k+1)\pi \\ &\text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Esempio 1

Risolvere l'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Dalla tabella 2 abbiamo che $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\alpha_2 = \frac{5}{6}\pi$. Le soluzioni sono quindi:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Volendo esprimere la soluzione in gradi dovremmo scrivere:

$$x_1 = 30^\circ + k360^\circ \quad \text{e} \quad x_2 = 150^\circ + k360^\circ = -30^\circ + (2k+1)180^\circ \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

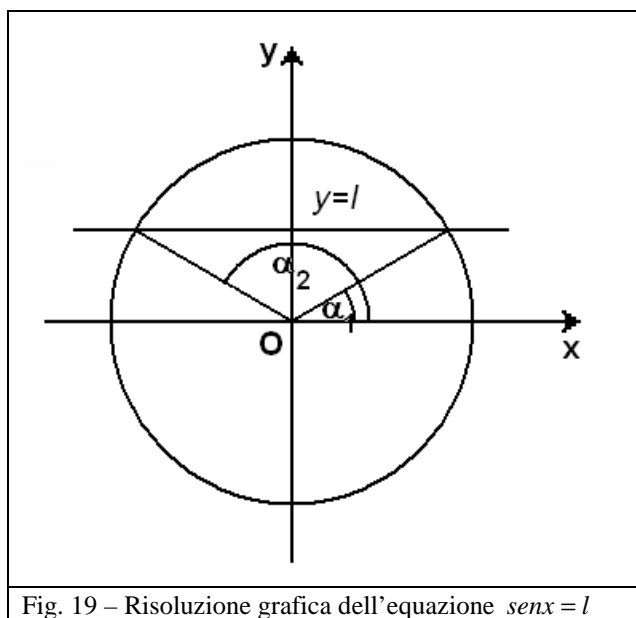


Fig. 19 – Risoluzione grafica dell'equazione $\operatorname{sen} x = l$

Per la risoluzione dell'equazione $\cos x = m$ si procede allo stesso modo. Per prima cosa si osserva che essendo anche $-1 \leq \cos x \leq 1$, l'equazione ha senso solo se $-1 \leq m \leq 1$.

Possiamo vedere l'equazione come la soluzione del sistema $\begin{cases} y = \cos x \\ y = m \end{cases}$ e quindi l'intersezione tra la cosinusoide e la retta parallela all'asse x , $y = m$, osservando dal grafico che ancora il sistema ammette infinite soluzioni.

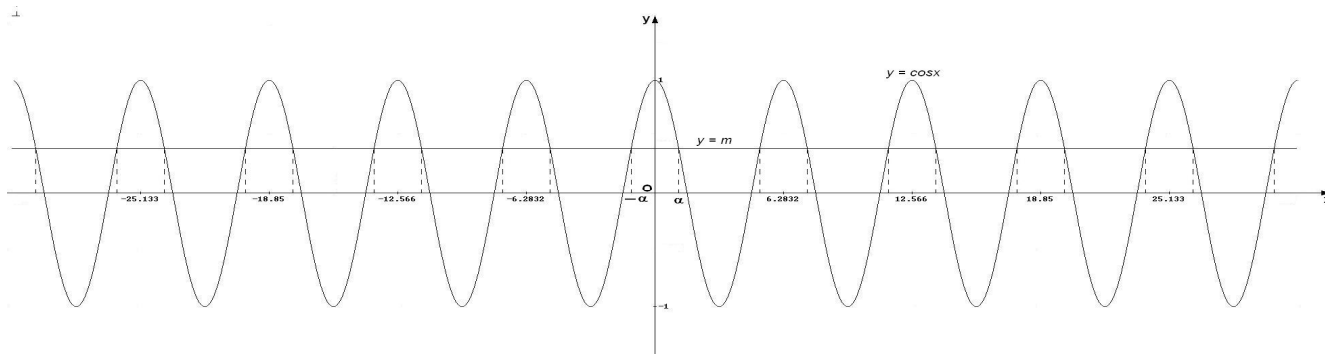


Fig. 20 – Risoluzione grafica dell'equazione goniometrica $\cos x = m$

Sempre dal grafico osserviamo che tutte le soluzioni possono essere ottenute partendo da due di esse indicate con α e $-\alpha$ aggiungendo o sottraendo multipli di 2π .

Se consideriamo ancora una circonferenza goniometrica e questa volta la retta $x = m$ congiungendo O con i punti in cui la retta incontra la circonferenza vengono individuati i due angoli α e $-\alpha$. Possiamo quindi scrivere le tutte le soluzioni dell'equazione nella forma:

$$x = \pm\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 2

Risolvere l'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$.

Dalla tabella riportata sopra abbiamo che $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Le soluzioni sono quindi:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

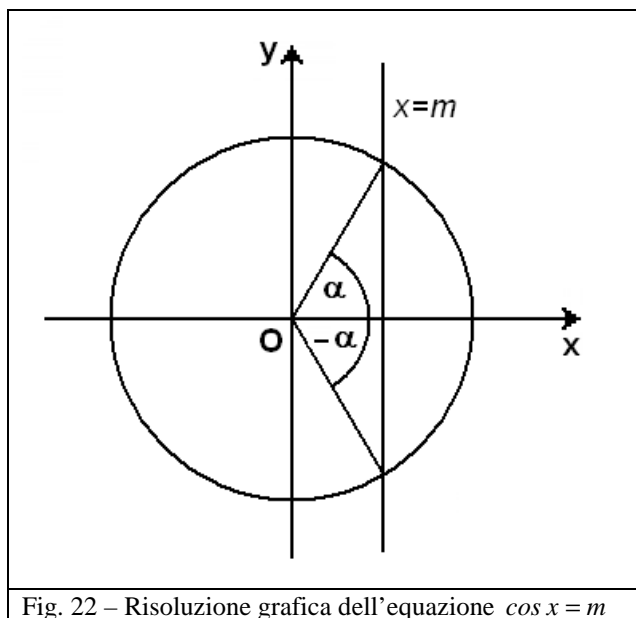


Fig. 22 – Risoluzione grafica dell'equazione $\cos x = m$

Consideriamo ora l'equazione $\operatorname{tg} x = n$.

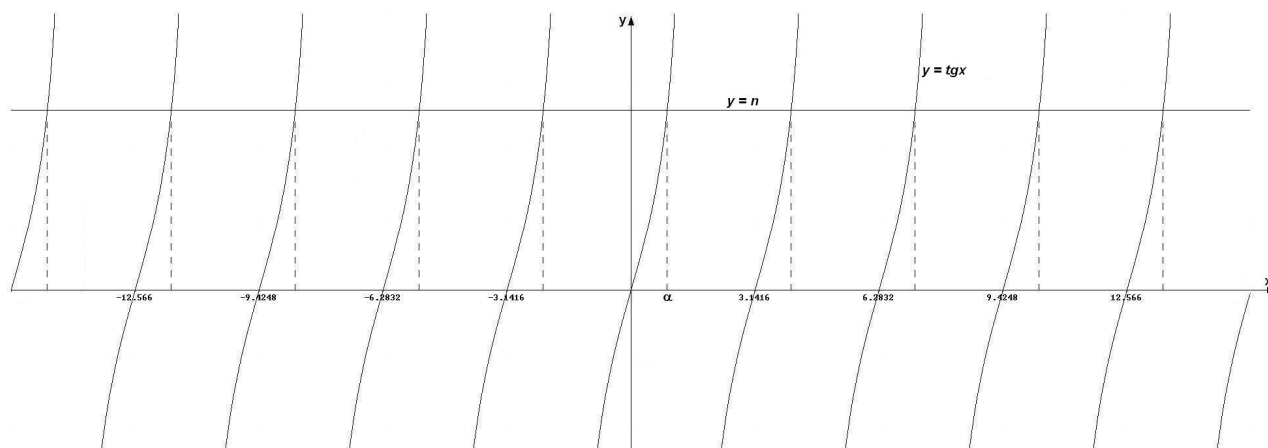
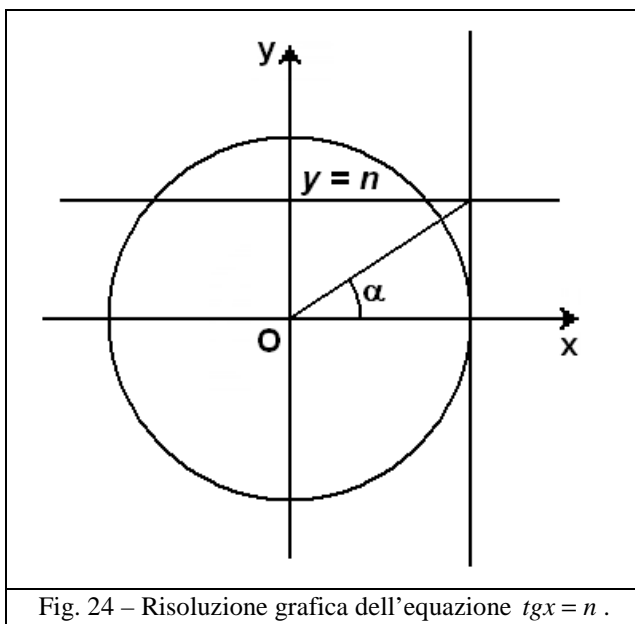


Fig. 23 – Risoluzione grafica dell'equazione goniometrica $\operatorname{tg} x = n$

Ancora possiamo vedere l'equazione come la soluzione del sistema $\begin{cases} y = \operatorname{tg}x \\ y = n \end{cases}$ e quindi l'intersezione tra la tangente e la retta parallela all'asse x , $y = n$, che, come possiamo osservare dal grafico ammette infinite soluzioni.

Sempre dal grafico osserviamo che tutte le soluzioni possono essere ottenute partendo da una di esse indicata con α aggiungendo o sottraendo multipli di π .

Consideriamo ancora una circonferenza goniometrica e la tangente nel punto in cui questa interseca il semiasse positivo delle x . Tracciamo quindi la retta $y = n$; congiungendo O con il punto di intersezione tra le due rette resta individuato un angolo α .



Le soluzioni dell'equazione hanno la forma:

$$x = \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 3

Risolvere l'equazione $\operatorname{tg}x = 1$.

Dalla tabella riportata sopra abbiamo che $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Le soluzioni sono quindi:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Sono disequazioni elementari le seguenti:

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{sen}x > l, & \operatorname{sen}x \geq l, & \operatorname{sen}x < l, & \operatorname{sen}x \leq l \\ \operatorname{cos}x > m, & \operatorname{cos}x \geq m, & \operatorname{cos}x < m, & \operatorname{cos}x \leq m \\ \operatorname{tg}x > n, & \operatorname{tg}x \geq n, & \operatorname{tg}x < n, & \operatorname{tg}x \leq n \end{array}$$

Risolviamo le disequazioni relative al seno, le altre si risolvono in modo analogo e ne vedremo solo degli esempi. Si ricordi sempre che $-1 \leq \operatorname{sen}x \leq 1$ e si tenga presente che la periodicità della funzione seno comporta l'esistenza di infiniti intervalli in cui la disequazione è verificata. Per capire la situazione utilizziamo di nuovo il grafico della funzione $y = \operatorname{sen}x$ e della retta $y = l$ e risolviamo la disequazione $\operatorname{sen}x > l$.

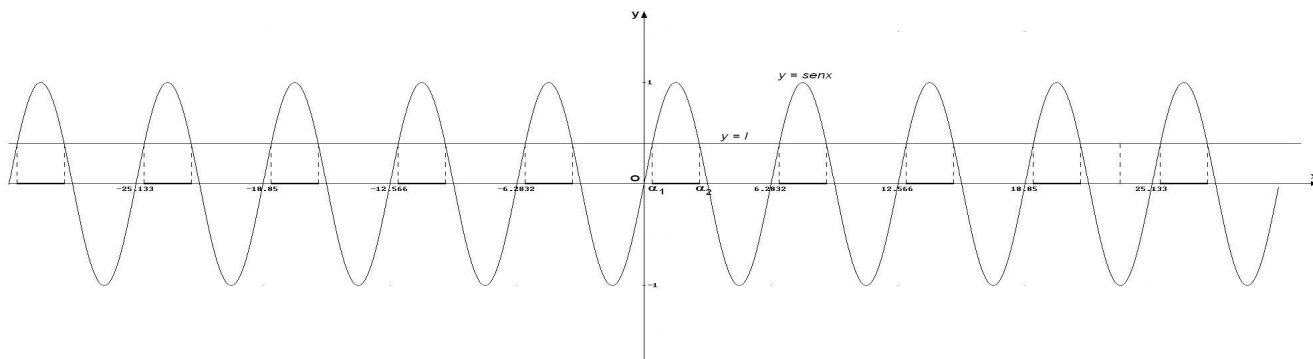


Fig. 25 – Risoluzione grafica della disequazione goniometrica $\operatorname{sen}x > l$

Dal grafico si ricava che le soluzioni della disequazione sono tutti i valori di x contenuti negli intervalli $\alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$ con α_1 e α_2 soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen}x = l$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ e $k \in \mathbb{Z}$, nei quali la funzione seno si trova al di sopra della retta $y = l$.

Un altro modo per vedere le soluzioni è quello di considerare la circonferenza goniometrica e la retta $y = l$.
 La soluzione dell'equazione sono gli angoli che definiscono il settore circolare compreso tra α_1 e α_2 ai quali vanno aggiunti tutti i settori che si ottengono quando aggiungiamo multipli interi di 2π (vedi figura 26).

Esempio 4

Risolvere la disequazione $\text{sen} x > \frac{1}{2}$.

Tenendo conto dell'equazione risolta precedentemente si ha che $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\alpha_2 = \frac{5}{6}\pi$. Le soluzioni sono quindi:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

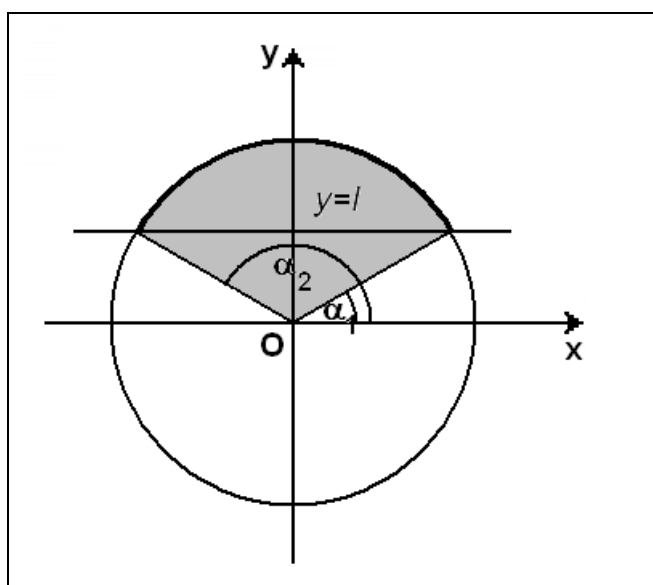


Fig. 26 – Risoluzione grafica della disequazione $\text{sen} x > l$.
 Nel grafico è $l = \frac{1}{2}$.

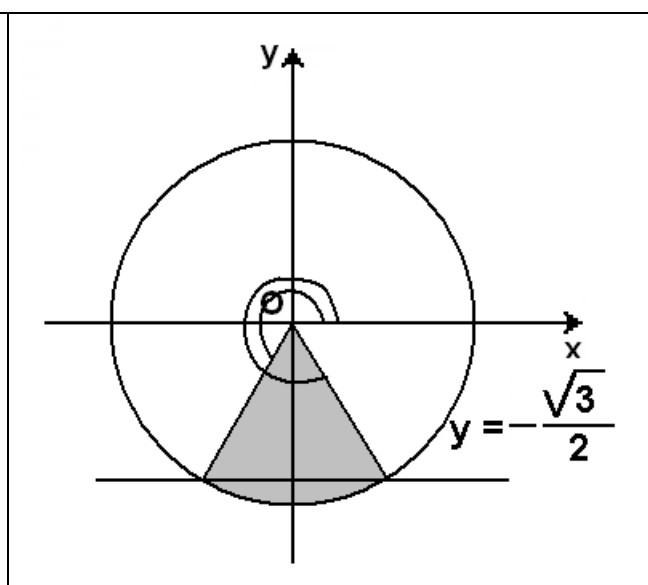


Fig. 27 – Risoluzione grafica della disequazione $\text{sen} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Esempio 5

Risolvere la disequazione $\text{sen} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Utilizzando la circonferenza goniometrica si ha $\alpha_1 = \frac{4}{3}\pi$ e $\alpha_2 = \frac{5}{3}\pi$. Le soluzioni sono quindi:

$$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Vedi figura 27.

Esempio 6

Risolvere la disequazione $\text{cos} x \leq \frac{1}{2}$.

Utilizzando la circonferenza goniometrica si ha che le soluzioni dell'equazione $\text{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$

sono $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\alpha_2 = \frac{11}{6}\pi$. Le soluzioni sono quindi:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Vedi figura 28.

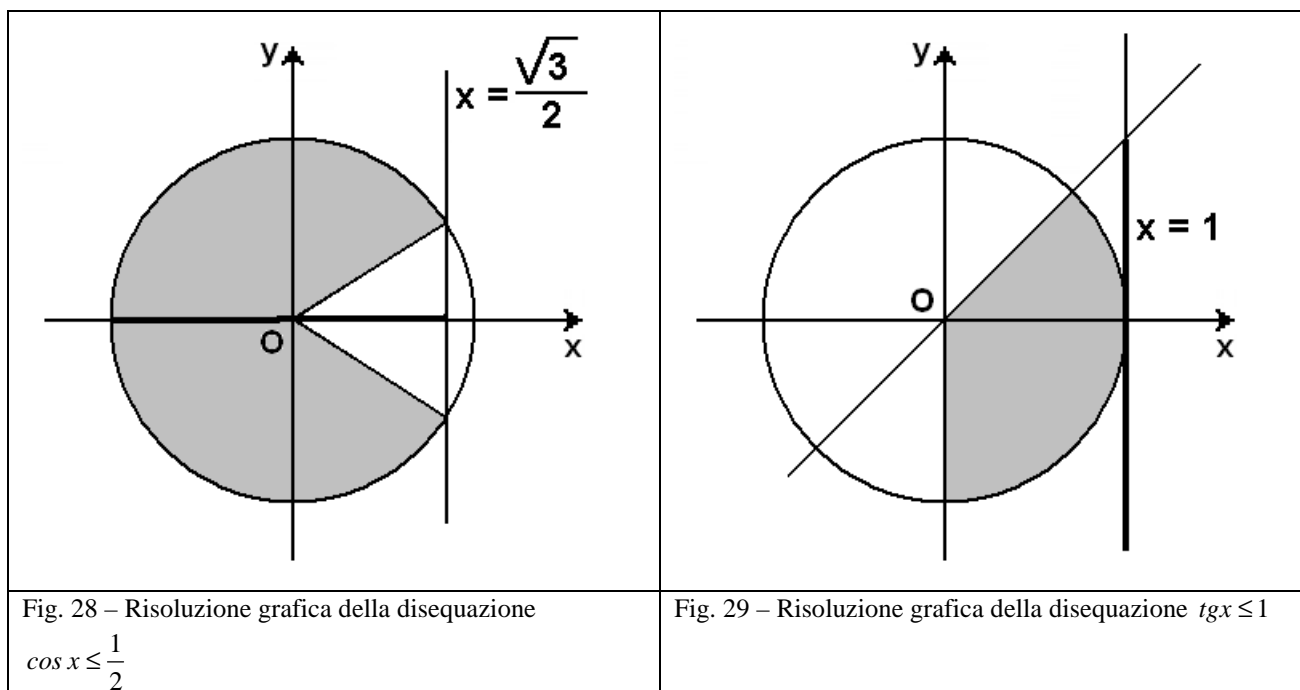
Esempio 7

Risolvere la disequazione $tgx \leq 1$.

Utilizzando la circonferenza goniometrica e la retta $x = 1$ si ha che le soluzioni dell'equazione $tgx = 1$ nell'intervallo di ampiezza π , $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ è $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Le soluzioni della disequazione sono quindi:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si ricordi che la tangente è periodica di periodo π . Vedi figura 29.



Nella risoluzione sia delle equazioni, sia delle disequazioni, può capitare che il valore dell'angolo non possa essere dedotto dalla tabella 2. In questi casi si deve far ricorso alla calcolatrice utilizzando le finzioni inverse sen^{-1} , cos^{-1} , tg^{-1} .

Attenzione che la calcolatrice può essere impostata per calcolare il valore dell'angolo in gradi (DEG o solamente D), radianti (RAD o R) e gradi centesimali (GRAD o G).

Esempio 8

Risolvere l'equazione $\text{sen}x = 0,7$.

Con la calcolatrice si ricava $\alpha_1 = \text{sen}^{-1}0,7 = 44,427^\circ$ e di conseguenza $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 135,573^\circ$; le soluzioni sono quindi:

$$x_1 = 44,427^\circ + k360^\circ \quad \text{e} \quad x_2 = 135,573^\circ + k360^\circ \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE E LA FUNZIONE LOGARITMICA

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Sono molti i problemi in cui interviene una funzione esponenziale.

Esempio 1

Se si dispone di un capitale C_0 e lo si investe al tasso di interesse annuo r , dopo un anno si avrà un interesse $I = C_0 \cdot r$ e quindi un capitale

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r = C_0(1 + r).$$

Supponiamo di reinvestire il nuovo capitale alle stesse condizioni, alla fine del secondo anno si avrà un capitale:

$$C_2 = C_1(1 + r) = C_0(1 + r)(1 + r) = C_0(1 + r)^2.$$

Se si continua a reinvestire sempre alle stesse condizioni, dopo n anni si avrà un capitale:

$$C_n = C_{n-1}(1 + r) = C_0(1 + r)^n.$$

Dall'esempio 1 è emerso un termine molto importante, cioè $(1 + r)^n$.

Generalizzando, si può prendere in considerazione l'espressione a^x ; essa prende il nome di **esponenziale**: a è la **base** e x è l'**esponente**.

È noto il significato dell'esponenziale quando $x \in \mathbf{N}$. Con alcune generalizzazioni è possibile estendere l'esponenziale anche per $x \in \mathbf{R}$. C'è da osservare che in questo processo di generalizzazione, ad un certo punto, è necessario supporre che la base dell'esponenziale sia positiva: $a \in \mathbf{R}^+$. Inoltre si definiscono l'esponenziale a potenza negativa

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

e l'esponenziale a potenza frazionaria

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ricordiamo le proprietà fondamentali degli esponenziali:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m / a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

che valgono anche per esponenti reali.

È possibile quindi definire una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ data da $y = a^x$.

Per un'analisi del grafico di una funzione esponenziale possiamo studiare quello della funzione $y = 2^x$. Nella Tabella 1 vengono riportati alcuni valori della funzione.

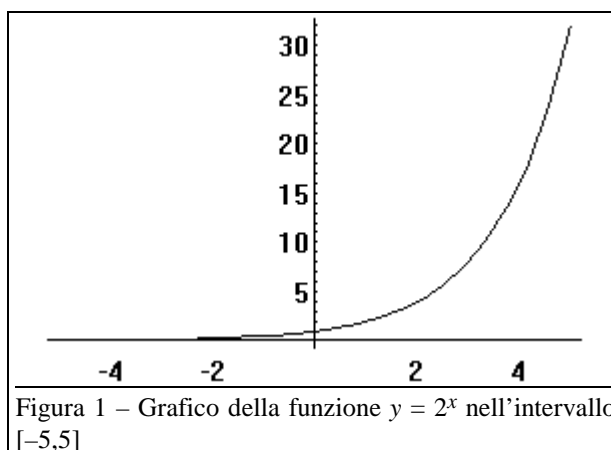
Il grafico della funzione è dato in figura 1.

Si possono dedurre le seguenti proprietà:

- il dominio della funzione è \mathbf{R} ;
- $\forall x \in \mathbf{R}, y > 0$;
- la funzione è crescente in \mathbf{R} e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

- per $x = 0, y = 1$.



x	2^x
-5	0,03125
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

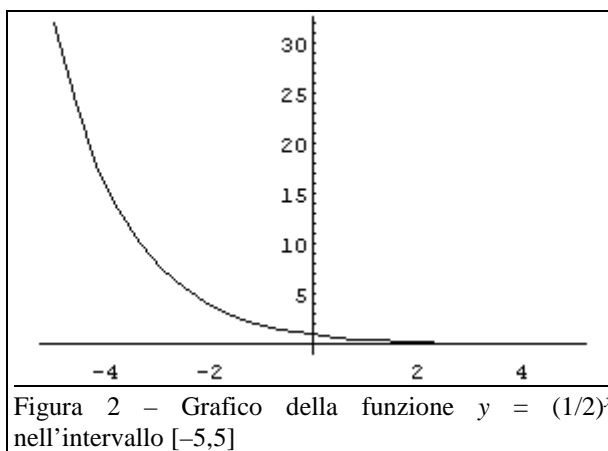
Tabella 1

Tali proprietà sono valide qualunque sia la base $a > 1$.

Come si è detto sopra a deve essere positivo. Il caso $a = 0$ è un caso banale ($0^x = 0$) ad eccezione di $x = 0$ per il quale non ha senso parlare del valore di 0^0 .

Anche il caso $a = 1$ è banale; dalla definizione si ha che $1^x = 1 \forall x \in \mathbf{R}$.

Rimane da analizzare il caso $0 < a < 1$; a tal fine studiamo la funzione $y = (1/2)^x$ calcolando i valori della y per qualche valore della x . Nella Tabella 1 vengono riportati alcuni valori della funzione. Il grafico della funzione è dato in figura 2.



x	$(1/2)^x$
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125

Tabella 2

Si possono dedurre le seguenti proprietà:

- il dominio della funzione è \mathbf{R} ;
- $\forall x \in \mathbf{R}, y > 0$;
- la funzione è decrescente in \mathbf{R} e si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/2)^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/2)^x = 0$$

- per $x = 0, y = 1$.

Tali proprietà sono valide qualunque sia la base $0 < a < 1$.

Da quanto detto si deduce che il codominio della funzione esponenziale è, in ogni caso, \mathbf{R}^+ .

LA FUNZIONE LOGARITMICA

Si consideri l'uguaglianza $b = a^c$, dove a e b sono numeri reali positivi noti; il problema che si pone è: **quale valore bisogna attribuire all'esponente c affinché si possa ottenere il valore di b ?** Ciò porta alla definizione del logaritmo:

$$c = \log_a b$$

che si legge " c uguale al logaritmo in base a di b " (b si chiama argomento del logaritmo).

Per esempio, si ha che: $2 = \log_{10} 100$ in quanto $100 = 10^2$.

In generale è possibile definire una funzione $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ data da $y = \log_a x$. Tale funzione è detta **funzione logaritmica**.

Per analizzare il grafico di una funzione logaritmo ci basiamo sulla Tabella 3 che contiene alcuni valori di $y = \log_2 x$ e che è stata costruita a partire dalla definizione e dalla Tabella 1. Il grafico della funzione è dato in figura 3.

Si possono dedurre le seguenti proprietà:

- la funzione è crescente in \mathbf{R}^+ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty$$

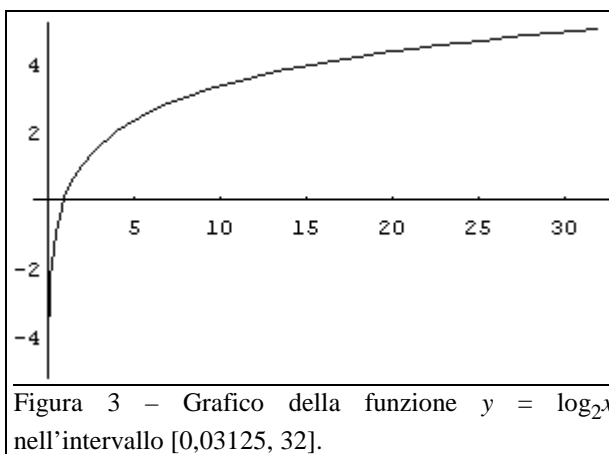
e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$$

- per $x = 1, y = 0$.

Tali proprietà sono valide qualunque sia la base $a > 1$.

In modo analogo procediamo per analizzare il grafico di una funzione logaritmo quando la base è compresa tra zero e uno. Ci basiamo sulla Tabella 4 contenente alcuni valori di $y = \log_{(1/2)} x$ e che è stata costruita a partire dalla definizione di logaritmo e dalla Tabella 2. Il grafico della funzione è dato in figura 4.



x	$\log_2 x$
0,03125	-5
0,0625	-4
0,125	-3
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5

Tabella 3

Si possono dedurre le seguenti proprietà:

- la funzione è decrescente in \mathbf{R}^+ e si ha

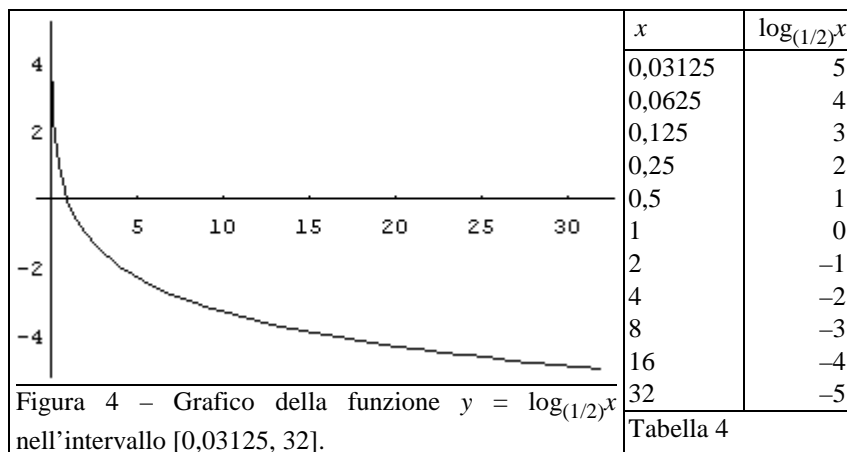
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{1/2} x = -\infty$$

- per $x = 1, y = 0$.

Tali proprietà sono valide qualunque sia la base $0 < a < 1$.



PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LOGARITMI

- 1) Dalla definizione di logaritmo segue che:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$x = \log_a a^x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$a^x = b^{x \cdot \log_b a}$$

- 2) Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori; in simboli

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ATTENZIONE : quando nel prodotto ci sono dei termini il cui segno può variare è necessario tenerne conto. Si può osservare che nell'espressione $\log_a [(x-2)(x-5)]$ il termine dentro parentesi quadra ha senso se $x < 2$ o $x > 5$, mentre l'espressione $\log_a (x-2) + \log_a (x-5)$ ha senso solo se $x > 5$. Il modo corretto per scrivere la cosa è:

$$\log_a [(x-2)(x-5)] = \begin{cases} \log_a (x-2) + \log_a (x-5) & x > 5 \\ \log_a (2-x) + \log_a (5-x) & x < 2 \end{cases}$$

- 3) Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza dei logaritmi dei termini; in simboli

$$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y.$$

La nota posta sopra vale anche in questo caso.

- 4) Dalle proprietà 2) e 3) deriva che il logaritmo di una potenza intera è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base; in simboli

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x.$$

- 5) La proprietà 4) vale anche per una potenza con esponente reale qualsiasi.

- 6) Cambiamento di base. Dalla definizione di logaritmo si ha che:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Infatti posto $y = \log_b x$ si ha, per definizione: $x = b^y$ e quindi:

$$\log_a x = \log_a b^y = y \cdot \log_a b = (\log_a x) \cdot (\log_a b)$$

da cui segue l'ipotesi.

La proprietà 6) riveste un ruolo particolarmente importante, in quanto per il calcolo dei logaritmi si fa generalmente uso di calcolatrici che in genere non permettono il calcolo per qualunque base ma solo per la base 10 e la base cosiddetta *naturale*, che è indicata dal numero di Nepero e definito da

$$e = 2,7182818... = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Nella tabella vengono riportate alcune cifre dei primi valori della successione

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037037037337
4	2,44140625
5	2,48832
6	2,52162637174211
7	2,54649969704071
8	2,56578451395034
9	2,5811747917132
10	2,5937424601

Per agevolare la scrittura dei logaritmi in base 10 e nella base naturale e si sottintende la base stessa scrivendo semplicemente \log e \ln rispettivamente.

Attenzione che alcuni autori utilizzano invece Log e \log rispettivamente.

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Si chiama equazione esponenziale una qualunque equazione in cui l'incognita compare come esponente.

Alcuni esempi di equazioni e disequazioni:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4 \quad 5^{2x-1} = 5^{x+2} \quad 2^x = 5 \quad 4 \cdot 5^{x+1} = 3 \cdot 2^{2x+3}$$

Consideriamo per prime le equazioni riconducibili alla forma

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

la cui soluzione si ottiene ponendo

$$f(x) = g(x).$$

Esempio 2

Risolvere l'equazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4$.

Per le proprietà delle potenze $4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, quindi l'equazione può essere scritta nella forma: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Si ricava quindi l'equazione: $x+1 = -2$ da cui segue la soluzione $x = -3$.

Esempio 3

Risolvere l'equazione $5^{2x-1} = 5^{x+2}$.

Si ha: $2x - 1 = x + 2$; risolvendo si ha $x = 3$.

Consideriamo ora equazioni esponenziali riconducibili al tipo:

$$m \cdot a^{f(x)} = n \cdot b^{g(x)}$$

con a, b numeri reali diversi da 1 e m, n numeri reali. Di norma tali equazioni si risolvono confrontando i logaritmi in una stessa base dei due membri. Normalmente si utilizza la base 10 ^[5] o la base e ^[6].

Noi utilizzeremo la prima notazione per cui $\log 3$ è il logaritmo in base 10 di 3, mentre $\ln 3$ è il logaritmo naturale di 3 o logaritmo in base e di 3.

Usando la base e , la soluzione dell'equazione si ottiene

$$\ln(m \cdot a^{f(x)}) = \ln(n \cdot b^{g(x)})$$

da cui segue l'equazione

$$\ln m + f(x) \ln a = \ln n + g(x) \ln b$$

Esempio 6

Risolvere l'equazione $2^x = 5$.

Usando il logaritmo in base e si ha: $x \ln 2 = \ln 5$, da cui la soluzione $x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$.

Esempio 7

Risolvere l'equazione $4 \cdot 5^{x+1} = 3 \cdot 2^{2x+3}$.

Passando al logaritmo in base 10 si ha:

$$\begin{aligned} \ln 4 + (x+1) \ln 5 &= \ln 3 + (2x+3) \ln 2 \\ \ln 4 + x \ln 5 + \ln 5 &= \ln 3 + 2x \ln 2 + 3 \ln 2 \\ x \ln 5 - 2x \ln 2 &= \ln 3 + 3 \ln 2 - \ln 4 - \ln 5 \end{aligned}$$

ricordando che $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$, si ha:

$$\begin{aligned} x \ln 5 - 2x \ln 2 &= \ln 3 + 3 \ln 2 - 2 \ln 2 - \ln 5 \\ x \ln 5 - 2x \ln 2 &= \ln 3 + \ln 2 - \ln 5 \\ x(\ln 5 - 2 \ln 2) &= \ln 3 + \ln 2 - \ln 5 \\ x &= \frac{\ln 3 + \ln 2 - \ln 5}{\ln 5 - 2 \ln 2} \end{aligned}$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Chiamiamo equazione logaritmica una qualunque equazione in cui l'incognita compare sotto il logaritmo. Alcuni esempi:

$$\log_4(3+2x) = 2 \log_4 x \quad \log_2 \frac{x+2}{x-1} = 1 \quad \log_{1/2}(x^2+2x) = \log_{1/2}(7x-6)$$

$$\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log(3x+5) = 1 \quad \frac{\log x + 5}{\log x + 2} - \frac{2}{5} (\log x + 5) = -\frac{2}{5}$$

Per risolvere un'equazione logaritmica bisogna cercare di ricondurla alla forma

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

e, dopo aver verificato che esista la condizione $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

la soluzione si ottiene risolvendo

^[5] $\log_{10} x$ si può anche scrivere più semplicemente $\text{Log} x$ o $\log x$

^[6] Se per il logaritmo in base 10 si è utilizzato $\text{Log} x$ allora per il logaritmo in base e si usa $\log x$, se invece utilizza si $\log x$ allora per la base e si usa $\ln x$ (logaritmo naturale).

$$f(x) = g(x).$$

Esempio 8

Risolvere l'equazione $\log_4(3+2x) = 2\log_4 x$.

$$\text{Deve essere } \begin{cases} 3+2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$$

Per le proprietà dei logaritmi $2\log_4 x = \log_4 x^2$, quindi l'equazione può essere scritta nella forma:

$$\log_4(3+2x) = \log_4 x^2.$$

Si ricava l'equazione:

$$3+2x = x^2$$

da cui seguono le soluzioni $x = -1$ e $x = 3$. La soluzione $x = -1$ non è accettabile perchè affinché l'equazione abbia senso deve essere $x > 0$.

Esempio 9

Risolvere l'equazione $\log_2 \frac{x+2}{x-1} = 1$.

Per prima cosa deve essere $\frac{x+2}{x-1} > 0$. Si ricava: $x < -2$ e $x > 1$.

Ricordando che $\log_2 2 = 1$ si ha:

$$\log_2 \frac{x+2}{x-1} = \log_2 2$$

da cui segue

$$\frac{x+2}{x-1} = 2$$

risolvendo si ha:

$$\frac{x+2-2x+2}{x-1} = 0 \Rightarrow -x+4 = 0$$

quindi $x = 4$. Dovendo essere $x < -2$ e $x > 1$, la soluzione è accettabile.

Esempio 10

Risolvere l'equazione $\log_{1/2}(x^2+2x) = \log_{1/2}(7x-6)$.

Deve essere

$$\begin{cases} x^2+2x > 0 \\ 7x-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, x > 0 \\ x > \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{6}{7}$$

Si ha: $x^2+2x = 7x-6$

da cui segue $x^2-5x+6 = 0$

le cui soluzioni sono: $x = 2$ e $x = 3$.

Entrambe accettabili.

Esempio 11

Risolvere l'equazione $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log(3x+5) = 1$.

Innanzitutto deve essere

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

Per le proprietà dei logaritmi l'equazione di partenza può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{x} + \log \sqrt{3x+5} &= \log 10 \\ \log \sqrt{x(3x+5)} &= \log 10 \end{aligned}$$

da cui si ricava che deve essere $\sqrt{x(3x+5)} = 10$. Elevando al quadrato e sviluppando i calcoli si ha $3x^2 + 5x - 100 = 0$.

Le soluzioni sono quindi: $x = -\frac{20}{3}$ e $x = 5$.

$x = -\frac{20}{3}$ non è accettabile perché abbiamo dimostrato che, affinché l'equazione abbia senso, deve essere $x > 0$.

Esempio 12

Risolvere l'equazione $\frac{\log x + 5}{\log x + 2} - \frac{2}{5}(\log x + 5) = -\frac{2}{5}$.

Innanzitutto si osserva che deve essere $x > 0$; inoltre, essendo in presenza di una equazione fratta il denominatore deve anche essere diverso da zero: $\log x + 2 \neq 0$, ossia $\log x \neq -2$ da cui segue $x \neq 10^{-2} = 0,01$. Riducendo allo stesso denominatore si ottiene:

$$5 \log x + 25 - 2(\log x + 5)(\log x + 2) = -2(\log x + 2)$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$2(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\log x$. Si pone quindi $\log x = t$ e si ottiene l'equazione di secondo grado: $2t^2 + 7t - 9 = 0$ le cui soluzioni sono: $t = -\frac{9}{2}$ e $t = 1$. Segue quindi che:

$$\log x = -\frac{9}{2} \quad \text{e} \quad \log x = 1$$

Le soluzioni sono quindi: $x = 10^{-\frac{9}{2}}$ e $x = 10$. Essendo positive sono entrambi accettabili.

I logaritmi possono essere utilizzati anche per risolvere alcuni tipi di equazioni esponenziali.

Esempio 13

Risolvere l'equazione $4,2^x = 3,75 \cdot 1,23^x$

L'equazione data può essere scritta anche nella forma: $\frac{4,2^x}{1,23^x} = 3,75$, ossia $\left(\frac{4,2}{1,23}\right)^x = 3,75$

Utilizzando il logaritmo naturale si ha:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{4,2}{1,23}\right)^x &= \ln 3,75 \\ x \ln\left(\frac{4,2}{1,23}\right) &= \ln 3,75 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\ln 3,75}{\ln\left(\frac{4,2}{1,23}\right)} = \frac{\ln 3,75}{\ln 4,2 - \ln 1,23} = 1,0763\dots$$

Esempio 14

Risolvere l'equazione $x^{\log x} = 10$.

Innanzitutto deve essere $x > 0$. Utilizzando il logaritmo in base 10 si ha $\log x^{\log x} = \log 10$ da cui $(\log x)^2 = \log^2 x = 1$ ovvero $\log x = \pm 1$.

Seguono le due soluzioni:

$$\log x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

e

$$\log x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 10.$$

Esempio 15

Risolvere l'equazione $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

Deve essere $x > 0$. Utilizzando il logaritmo in base e si ha:

$$\ln x^{\sqrt{x}} = \ln \sqrt{x^x}$$

da cui:

$$\sqrt{x} \ln x = \frac{x}{2} \ln x \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) \ln x = 0.$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto, l'equazione è soddisfatta per:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0, \text{ ossia } x = \frac{x^2}{4} \text{ da cui le due soluzioni } x = 0 \text{ (non accettabile) e } x = 4 \text{ (accettabile) e}$$

$$\ln x = 0, \text{ ossia } x = 1 \text{ (accettabile).}$$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Vediamo, con qualche esempio, le disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Chiameremo disequazione esponenziale una qualunque disequazione in cui l'incognita compare come esponente. Alcuni esempi di disequazioni:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 4 \quad 5^{2x-1} \geq 5^{x+2} \quad 2^x > 5 \quad 4 \cdot 5^{x+1} < 3 \cdot 2^{2x+3}$$

Chiameremo disequazione logaritmica una qualunque disequazione in cui l'incognita compare nell'argomento del logaritmo. Alcuni esempi di disequazioni:

$$\log_4(3+2x) > 2 \log_4 x \quad \log_2 \frac{x+2}{x-1} > 1 \quad \log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x) < \log_{\frac{1}{2}}(7x-6)$$

Come per le equazioni, consideriamo innanzitutto le disequazioni riconducibili alla forma

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}.$$

Per ottenere la soluzione bisogna tener conto che le funzioni esponenziali sono crescenti per $a > 1$ e decrescenti per $0 < a < 1$. Si ha quindi:

- se $a > 1$ la soluzione si ottiene risolvendo la disequazione $f(x) > g(x)$
- se $0 < a < 1$ la soluzione si ottiene risolvendo la disequazione $f(x) < g(x)$.

Esempio 16

Risolvere l'equazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 4$.

Per quanto visto nell'esempio 2 la disequazione può essere scritta nella forma: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Essendo la base $1/2$ compresa tra 0 e 1, la soluzione si ottiene dalla disequazione $x+1 > -2$ da cui segue: $x > -3$.

Esempio 17

Risolvere l'equazione $5^{2x-1} \geq 5^{x+2}$.

Si ha: $2x-1 \geq x+2$; risolvendo si ha $x \geq 3$.

Nel caso di disequazioni del tipo

$$m \cdot a^{f(x)} > n \cdot b^{g(x)}$$

(con a, b numeri reali diversi da 1 e m, n numeri reali), si può procedere come per le equazioni, ma bisogna tener conto che se la base dei logaritmi è maggiore di 1 allora la funzione logaritmica cresce, se invece è compresa tra 0 e 1 la funzione decresce. Se si sceglie però la base 10 o la base naturale e allora il problema non sussiste e la soluzione si ottiene risolvendo la disequazione:

$$\log(m \cdot a^{f(x)}) > \log(n \cdot b^{g(x)}) \quad \text{o} \quad \ln(m \cdot a^{f(x)}) > \ln(n \cdot b^{g(x)})$$

da cui segue:

$$\log m + f(x) \log a > \log n + g(x) \log b \quad \text{o} \quad \ln m + f(x) \ln a > \ln n + g(x) \ln b$$

Esempio 18

Risolvere la disequazione $2^x > 5$. Utilizzando i logaritmi nella base naturale si ha: $x \ln 2 > \ln 5$, da cui la soluzione $x > \frac{\ln 5}{\ln 2}$.

Esempio 19

Risolvere l'equazione $4 \cdot 5^{x+1} < 3 \cdot 2^{2x+3}$.

Passando al logaritmo in base 10 si ha:

$$\begin{aligned} \ln 4 + (x+1) \ln 5 &< \ln 3 + (2x+3) \ln 2 \\ \ln 4 + x \ln 5 + \ln 5 &< \ln 3 + 2x \ln 2 + 3 \ln 2 \\ x \ln 5 - 2x \ln 2 &< \ln 3 + 3 \ln 2 - \ln 4 - \ln 5 \end{aligned}$$

ricordando che $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$, si ha:

$$\begin{aligned} x \ln 5 - 2x \ln 2 &< \ln 3 + 3 \ln 2 - 2 \ln 2 - \ln 5 \\ x \ln 5 - 2x \ln 2 &< \ln 3 + \ln 2 - \ln 5 \\ x(\ln 5 - 2 \ln 2) &< \ln 3 + \ln 2 - \ln 5 \\ x &< \frac{\ln 3 + \ln 2 - \ln 5}{\ln 5 - 2 \ln 2} \end{aligned}$$

Esempio 20

Consideriamo la disequazione $5^{2x} - 27 \cdot 5^x + 50 \leq 0$.

In questo caso, ricordando le proprietà delle potenze la disequazione si può scrivere nella forma:

$$(5^x)^2 - 27 \cdot 5^x + 50 \leq 0.$$

Ponendo quindi $5^x = t$, la disequazione data si riconduce ad una disequazione di secondo grado in t :

$$t^2 - 27 \cdot t + 50 \leq 0$$

la cui soluzione è data da $2 \leq t \leq 25$, ovvero $2 \leq 5^x \leq 25$.

Quest'ultima catena di disuguaglianze conduce al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2 \leq 5^x \\ 5^x \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\ln 2}{\ln 5} \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 5} \leq x \leq 2.$$

Esempio 20

Risolvere la disequazione

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{3}{2} \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Ricordando le proprietà delle potenze la disequazione può essere scritta nella forma

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{3}{x-1}}$$

da cui segue:

$$-\frac{1}{2} < x < 1, x > 3.$$

Esempio 21

Risolvere la disequazione

$$\log_4(3+2x) > 2\log_4 x.$$

Deve essere

$$\begin{cases} 3+2x > 0 \\ x > 0 \\ \log_4(3+2x) > 2\log_4 x \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 0 \\ 3+2x > x^2 \end{cases}$$

da cui segue

$$0 < x < 3.$$

Esempio 22

Risolvere la disequazione

$$\log_2 \frac{x+2}{x-1} > 1.$$

Deve essere

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} > 0 \\ \log_2 \frac{x+2}{x-1} > \log_2 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} > 0 \\ \frac{x+2}{x-1} > 2 \end{cases}$$

basta risolvere $\frac{x+2}{x-1} > 2$ la cui soluzione è $1 < x < 4$.

Esempio 23

Risolvere la disequazione

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x) < \log_{\frac{1}{2}}(7x - 6).$$

Deve essere

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ 7x - 6 > 0 \\ x^2 + 2x > 7x - 6 \end{cases}$$

da cui segue:

$$\frac{6}{7} < x < 2 \quad \text{e} \quad x > 3.$$

Esempio 24

Risolvere la disequazione

$$\left[\log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]^2 - \log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right) - 12 > 0.$$

La soluzione si ottiene risolvendo il sistema
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} > 0 \\ \left[\log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]^2 - \log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right) - 12 > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione dà:

$$x + \frac{1}{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + 1}{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0.$$

Per risolvere la seconda disequazione poniamo $t = \log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right)$. Otteniamo la disequazione di secondo grado:

$$t^2 - t - 12 > 0$$

che risolta dà: $t < -3$ e $t > 4$.

Risostituendo otteniamo

$$\log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right) < -3 \quad \text{e} \quad \log_{0.5} \left(x + \frac{1}{x} \right) > 4$$

La prima conduce alla disequazione $x + \frac{1}{x} > \left(\frac{1}{2} \right)^{-3}$ da cui segue $\frac{x^2 - 8x + 1}{x} > 0$ la cui soluzione è

$$0 < x < 4 - \sqrt{15}, x > 4 + \sqrt{15}.$$

La seconda conduce a $x + \frac{1}{x} < \left(\frac{1}{2} \right)^4$ da cui segue $\frac{16x^2 - x + 16}{x} < 0$ la cui soluzione è $x < 0$.

La soluzione della seconda disequazione è quindi $x < 0$ e $0 < x < 4 - \sqrt{15}, x > 4 + \sqrt{15}$.

La soluzione del sistema e quindi della disequazione di partenza è

$$0 < x < 4 - \sqrt{15}, x > 4 + \sqrt{15}.$$

ESERCIZI

- 1) $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) > \log_2(2x-1)$ $x > 3$
- 2) $\log_4(\log_4 x^2) \leq 0$ $-2 \leq x < -1, 1 < x \leq 2$
- 3) $\log_2 x > 1 - \log_2(x-1)$ $x > 2$
- 4) $\log_3(x^2 - 5x + 6) < \log_3(x-4)$ nessuna soluzione
- 5) $\log_3(2-x) < \log_3(2+x) - \log_3(x+1)$ $-1 < x < 0, 0 < x < 2$
- 6) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4) < 0$ $x < -\sqrt{5}, x > \sqrt{5}$
- 7) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ $1 - \sqrt{2} < x < 0, 1 < x < 1 + \sqrt{2}$
- 8) $\log_{\frac{1}{3}}(3-x) > \log_{\frac{1}{3}}(2x+6)$ $-1 < x < 3$
- 9) $\frac{\log_2 x - 4(\log_4 x)}{1 - \sqrt{x-1}} > 0$ $x > 2$
- 10) $(1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} < \sqrt{3}$ $-2 < x < \frac{2}{3}$
- 11) $\frac{3^x \cdot 2^{1+x}}{3 \cdot 2^{x-1}} > \sqrt{\frac{6^x}{3^{x-1}}}$ $x > \frac{3 \ln 3 - 4 \ln 2}{2 \ln 3 - \ln 2}$
- 12) $\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{3-x} > 0$ $x < 1, x > 2$
- 13) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$ $1 < x < \frac{5}{2}$
- 14) $\frac{\log_2(x^2 - 1) + 2}{\log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) - 1} > 0$ $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x < -1, 1 < x < \frac{\sqrt{5}}{2}, x > 3$
- 15) $\frac{\ln x - 2}{\sqrt{\ln x + 3}} \leq 0$ $e^{-3} < x \leq e^2$

SOLUZIONI

1) $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) > \log_2(2x-1)$

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-2 > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ (x+2)(x-2) > 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x < -1, x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

2) $\log_4(\log_4 x^2) \leq 0$

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 0 < \log_4 x^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \neq 0 \\ 1 < x^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < -1, 1 < x \leq 2$$

3) $\log_2 x > 1 - \log_2(x-1)$

$$\log_2 x + \log_2(x-1) > \log_2 2 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x(x-1) > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x < -1, x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

4) $\log_3(x^2 - 5x + 6) < \log_3(x-4)$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x - 4 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2, x > 3 \\ x > 4 \\ x^2 - 6x + 10 < 0 \end{cases} \quad \text{nessuna soluzione in quanto } x^2 - 6x + 10 < 0 \text{ non è mai soddisfatta.}$$

5) $\log_3(2-x) < \log_3(2+x) - \log_3(x+1)$

$$\log_3(2-x) + \log_3(x+1) < \log_3(2+x) \Rightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ x+1 > 0 \\ 2+x > 0 \\ (2-x)(x+1) > 2+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \\ x > -2 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0, 0 < x < 2$$

6) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4) < 0$

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 > 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5 > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{5}, x > \sqrt{5}$$

7) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x^2 - x < x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, x > 1 \\ x > -1 \\ 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 0, 1 < x < 1 + \sqrt{2}$$

8) $\log_{\frac{1}{3}}(3-x) > \log_{\frac{1}{3}}(2x+6)$

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ 2x+6 > 0 \\ 3-x < 2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -3 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

$$9) \frac{\log_2 x - 4(\log_4 x)}{1 - \sqrt{x-1}} > 0$$

È una disequazione fratta, quindi si deve studiare il segno del numeratore e del denominatore. Per prima cosa osserviamo che $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} = \frac{1}{2} \log_2 x$. Riscriviamo quindi la disequazione nella forma:

$$\frac{\log_2 x - 2 \log_2 x}{1 - \sqrt{x-1}} = -\frac{\log_2 x}{1 - \sqrt{x-1}} > 0 \text{ e quindi } \frac{\log_2 x}{1 - \sqrt{x-1}} < 0$$

Studiamo quindi il segno del numeratore e del denominatore.

Numeratore

$$\log_2 x > 0 \text{ per } x > 1$$

$$\log_2 x < 0 \text{ per } 0 < x < 1$$

$$\log_2 x = 0 \text{ per } x = 1$$

Denominatore

$$1 - \sqrt{x-1} > 0 \text{ per } \sqrt{x-1} < 1 \text{ da cui segue } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$1 - \sqrt{x-1} < 0 \text{ per } \sqrt{x-1} > 1 \text{ da cui segue } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

Riassumendo

	0	1	2			
N	∄	∄	-	0	+	+
D	∄		∄		+	0
N/D	∄	∄	∄	0	+	∄

la disequazione è soddisfatta per $x > 2$

$$10) (1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} < \sqrt{3}$$

Osserviamo innanzitutto che deve essere $1-x > 0$ da cui segue $x < 1$.

Passando al logaritmo in base 3 in entrambi i membri si ha:

$$\log_3 \left[(1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} \right] < \log_3 \sqrt{3} \Rightarrow \left[\log_3 (1-x) \right]^2 < 1$$

in quanto

$$\log_3 \left[(1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} \right] = (\log_3 \sqrt{1-x}) [\log_3 (1-x)] = \left[\frac{1}{2} \log_3 (1-x) \right] [\log_3 (1-x)] = \frac{1}{2} [\log_3 (1-x)]^2$$

$$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi $-1 < \log_3 (1-x) < 1$ da cui segue

$$\begin{cases} \log_3 (1-x) > -1 \\ \log_3 (1-x) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 3^{-1} \\ 1-x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < \frac{2}{3}$$

$$11) \frac{3^x \cdot 2^{1+x}}{3 \cdot 2^{x-1}} > \sqrt{\frac{6^x}{3^{x-1}}}$$

Utilizzando le proprietà delle potenze, l'espressione si può scrivere nella forma: $3^{x-1} \cdot 2^{1+x-x+1} > \left(\frac{6^x}{3^{x-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$3^{x-1} \cdot 2^2 > \left(\frac{2^x \cdot 3^x}{3^{x-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{x-1} \cdot 2^2 > 2^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3^{x-1} \cdot 2^2}{2^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} > 1 \Rightarrow 3^{x-\frac{3}{2}} \cdot 2^{2-\frac{x}{2}} > 1$$

Passando al logaritmo naturale: $\left(x - \frac{3}{2}\right) \ln 3 + \left(2 - \frac{x}{2}\right) \ln 2 > 0 \Rightarrow x \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{x}{2} \ln 2 > 0 \Rightarrow$
 $2x \ln 3 - 3 \ln 3 + 4 \ln 2 - x \ln 2 > 0 \Rightarrow x(2 \ln 3 - \ln 2) > 3 \ln 3 - 4 \ln 2 \Rightarrow x > \frac{3 \ln 3 - 4 \ln 2}{2 \ln 3 - \ln 2}.$

12) $\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{3-x} > 0$

È una disequazione fratta, quindi si deve studiare il segno del numeratore e del denominatore.

Numeratore

$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8$. Ponendo $2^x = t$ al numeratore si deve studiare il segno di $t^2 - 6t + 8$. Risulta:

$t^2 - 6t + 8 < 0$ per $2 < t < 4$ da cui segue $2 < 2^x < 4$ e quindi $1 < x < 2$

$t^2 - 6t + 8 > 0$ per $t < 2$ e $t > 4$ da cui segue $2^x < 2$ e $2^x > 4$ e quindi $x < 1$ e $x > 2$

$t^2 - 6t + 8 = 0$ per $t = 2$ e $t = 4$ da cui segue $2^x = 2$ e $2^x = 4$ e quindi $x = 1$ e $x = 2$

Denominatore

$3 - x > 0$ per $x < 3$

$3 - x < 0$ per $x > 3$

$3 - x = 0$ per $x = 3$

Riassumendo

		1		2		3	
N		+	0	-	0	+	+
D		+		+		0	-
N/D		+	0	-	0	∅	-

la disequazione è soddisfatta per $x < 1$, $2 < x < 3$

13) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$

Ancora una disequazione fratta.

Numeratore

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1 > 0$ per $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1 < 0$ per $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1 = 0$ per $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Denominatore

$\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}} > 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{x-1}{3}} > 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{x-1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{x-1}{3} \Rightarrow x < \frac{5}{2}$

$\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}} < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

$\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Riassumendo

		1		5/2	
N		+	0	-	-
D		+		+	0
N/D		+	0	-	∅

la disequazione è soddisfatta per $1 < x < \frac{5}{2}$.

$$14) \frac{\log_2(x^2 - 1) + 2}{\log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) - 1} > 0$$

È una disequazione fratta, bisogna studiare il segno del numeratore e del denominatore

Numeratore

$$\log_2(x^2 - 1) + 2 > 0 \text{ per } \log_2(x^2 - 1) > -2 \text{ da cui } \begin{cases} (x^2 - 1) > 0 \\ (x^2 - 1) > 2^{-2} \end{cases} \Rightarrow (x^2 - 1) > 2^{-2} \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ e } x > \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\log_2(x^2 - 1) + 2 < 0 \text{ per } \log_2(x^2 - 1) < -2 \text{ da cui } \begin{cases} (x^2 - 1) > 0 \\ (x^2 - 1) < 2^{-2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < -1 \text{ e } 1 < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\log_2(x^2 - 1) + 2 = 0 \text{ per } \log_2(x^2 - 1) = -2 \text{ da cui } x = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Denominatore

$$\log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) - 1 > 0 \text{ per } \log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) > 1 \text{ da cui } \begin{cases} \frac{x+3}{3} > 0 \\ \frac{x+3}{3} > 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{3} > 2 \Rightarrow x > 3$$

$$\log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) - 1 < 0 \text{ per } \log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) < 1 \text{ da cui } \begin{cases} \frac{x+3}{3} > 0 \\ \frac{x+3}{3} < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{x+3}{3} < 2 \Rightarrow 0 < x+3 < 6 \Rightarrow -3 < x < 3$$

$$\log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) - 1 = 0 \text{ per } \log_2\left(\frac{x+3}{3}\right) = 1 \text{ da cui } \frac{x+3}{3} = 2 \Rightarrow x = 3$$

Riassumendo

		-3		$-\frac{\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		3		
N		+		+	0	-	/	/	/	-	0	+		+
D		/	/	-		-		-		-		-	0	+
N/D		/	/	-	0	+	/	/	/	+	0	-	/	+

la disequazione è soddisfatta per $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x < -1$, $1 < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x > 3$

$$15) \frac{\ln x - 2}{\sqrt{\ln x + 3}} \leq 0$$

Ancora una disequazione fratta.

Numeratore:

$$\ln x - 2 > 0 \text{ per } \ln x > 2 \text{ e quindi } \begin{cases} x > 0 \\ x > e^2 \end{cases} \text{ da cui } x > e^2$$

$$\ln x - 2 < 0 \text{ per } \ln x > 2 \text{ e quindi } \begin{cases} x > 0 \\ x < e^2 \end{cases} \text{ da cui } 0 < x < e^2$$

$$\ln x - 2 = 0 \text{ per } \ln x = 2 \text{ e quindi } x = e^2$$

Denominatore, quando esiste è sempre positivo o nullo

$$\sqrt{\ln x + 3} \geq 0 \text{ per } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq -3 \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e^{-3} \end{cases} \text{ da cui } x \geq e^{-3}$$

Riassumendo		0		e^{-3}		e^2	
N	\neq	\neq	-		-	0	+
D	\neq	\neq	\neq	0	+		+
N/D	\neq	\neq	\neq	\neq	-	0	+

la disequazione è soddisfatta per $e^{-3} < x \leq e^2$

NOTE BIBLIOGRAFICHE

Per approfondimenti sul concetto di insieme e sulle relazioni si rimanda ad un qualunque testo del biennio della scuola media superiore; gli altri argomenti sono trattati nei testi del triennio delle scuole medie superiori, ma in quelli dei Licei Scientifici sono generalmente più completi.