Laurea triennale in Fisica
a.a. 2019 - 2020

FONDAMENTI DI ASTROFISICA

LEZIONE 2

Prof. Angelo Angeletti

angelo.angeletti@virgilio.it www.angeloangeletti.it

Sky Chart / Cartes du Ciel

Stellarium

www.angeloangeletti.it

Trasformazioni di coordinate celesti

Il problema delle trasformazioni di coordinate è fondamentale in astronomia e può essere affrontato in due modi:

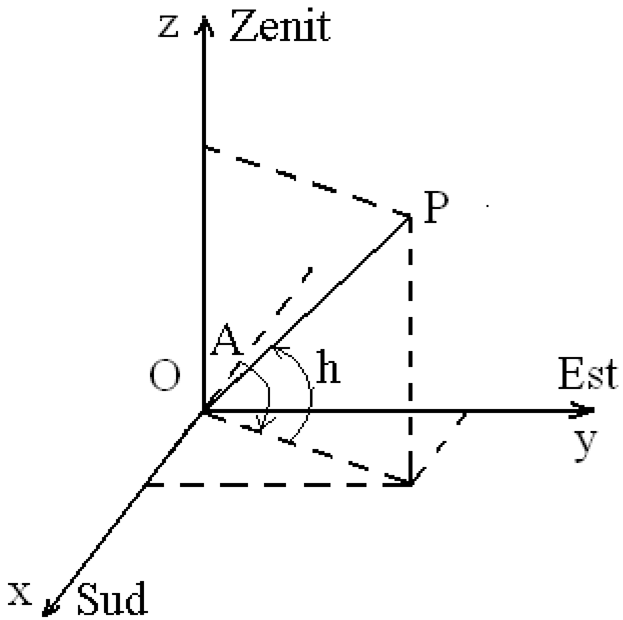
* attraverso vettori, traslazioni e rotazioni;

* attraverso la trigonometria sferica, cioè la trigonometria che si applica ai triangoli costruiti sulla superficie sferica.

Trasformazioni di coordinate celesti

Coordinate Altazimutali: A, h
Assi: x verso Sud, z verso lo Zenit quindi y verso Est (si noti che l'asse x punta in verso opposto all'origine degli azimut).

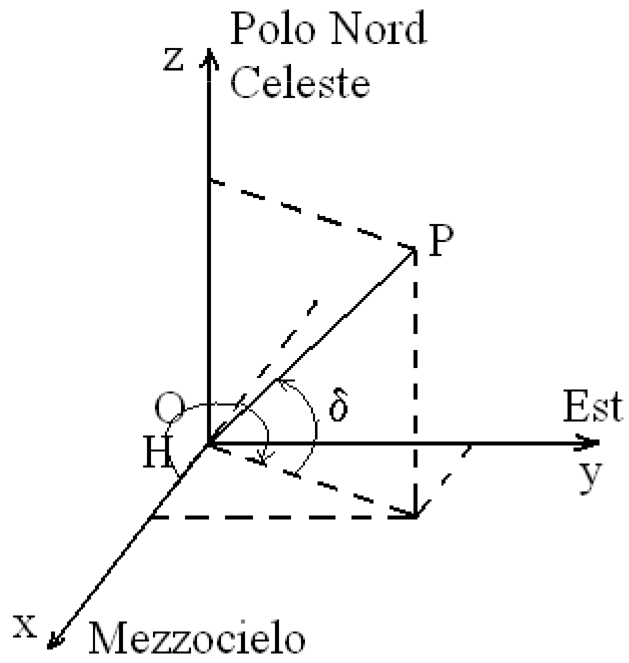
$$\begin{cases} x = -\cos h \cos A \\ y = \cos h \,\mathrm{sen} A \\ z = \mathrm{sen} h \end{cases}$$



Trasformazioni di coordinate celesti

Coordinate Orarie: H, δ
Assi: x verso il Mezzocielo superiore, z verso il Polo Nord Celeste quindi y verso Est.

$$\begin{cases} x = \cos\delta\cos H \\ y = -\cos\delta \,\mathrm{sen} H \\ z = \mathrm{sen}\,\delta \end{cases}$$

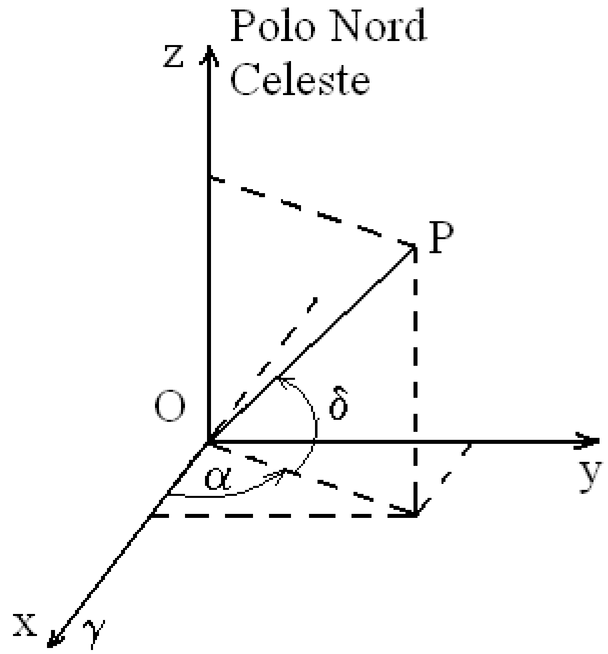


Trasformazioni di coordinate celesti

Coordinate Equatoriali: α, δ

Assi: x verso γ, z verso il Polo Nord Celeste.

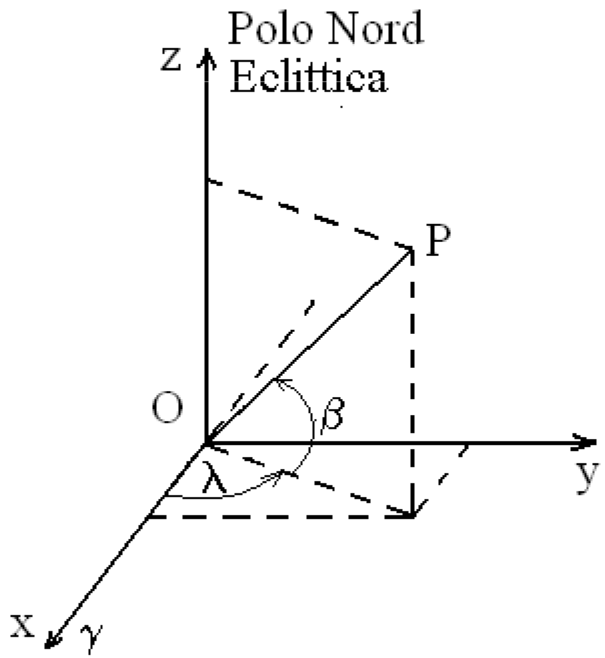
$$\begin{cases} x = \cos\delta\cos\alpha \\ y = \cos\delta\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ z = \mathrm{sen}\,\delta \end{cases}$$



Trasformazioni di coordinate celesti

Coordinate Eclittiche: λ, β
Assi: x verso γ, z verso il Polo Nord Eclittico.

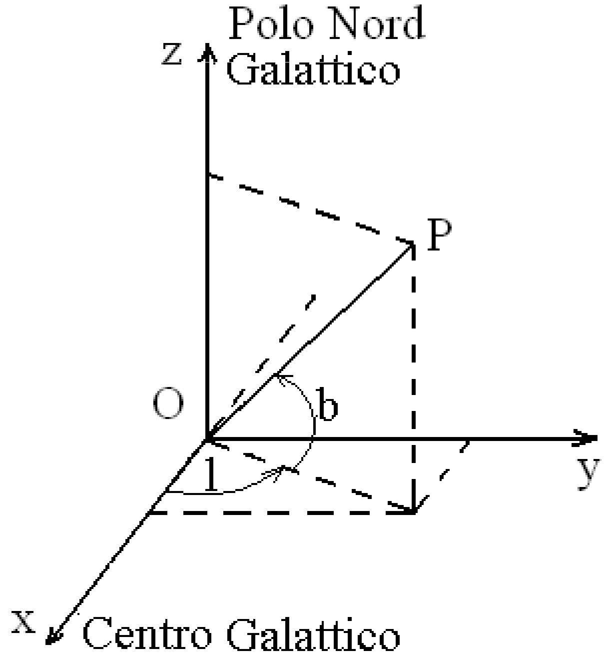
$$\begin{cases} x = \cos\beta\cos\lambda \\ y = \cos\beta \,\mathrm{sen}\,\lambda \\ z = \mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$



Trasformazioni di coordinate celesti

Coordinate Galattiche: l, b
Assi: x verso il centro della Galassia, z verso il Polo Nord Galattico.

$$\begin{cases} x = \cos b \cos l \\ y = \cos b \,\mathrm{sen}\, l \\ z = \mathrm{sen}\, b \end{cases}$$



Traslazioni

Le traslazioni più frequenti sono la trasformazione di coordinate eliocentriche a geocentriche e quella di coordinate geocentriche a topocentriche e ovviamente quelle inverse.

Detti $\mathbf{r_e}$ e $\mathbf{r_g}$ i vettori che individuano la posizione di un oggetto nei due riferimenti eliocentrico e geocentrico rispettivamente, se ρ descrive la posizione della Terra rispetto al Sole, la trasformazione sarà allora:

$$\mathbf{r_e} = \mathbf{r_g} + \rho$$

In modo del tutto analogo si passa dal sistema geocentrico a quello topocentrico quando sia noto il vettore ρ' che descrive la posizione della posizione della località rispetto al centro della Terra:

$$\mathbf{r_g} = \mathbf{r_t} + \rho'$$

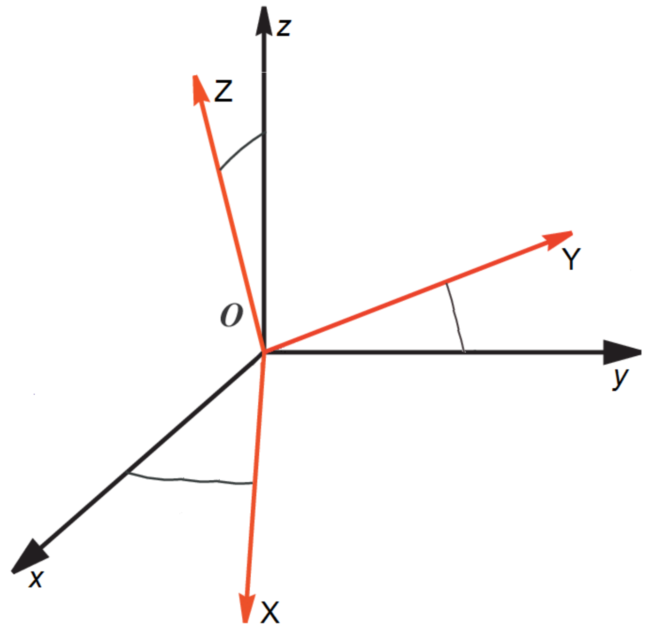
$\mathbf{r_t}$ dipende dal tempo a causa della rotazione terrestre, a meno che non si utilizzi un sistema locale, e il calcolo richiede la forma della Terra, delle coordinate geografiche del luogo e della sua altitudine.

Rotazioni

Le rotazione possono essere descritte da una matrice 3x3, ma non è sempre immediato individuare l'asse e l'angolo di rotazione.

È sempre possibile ridurre una trasformazione alla composizione di più trasformazioni successive: la trasformazione richiesta è data dal prodotto delle singole matrici.

Dati due sistemi di riferimento Oxyz e OXYZ aventi la stessa origine, per passare da uno all'altro si usano le relazioni :



$$\begin{cases} X = x\cos(xX) + y\cos(yX) + z\cos(zX) \\ Y = x\cos(xY) + y\cos(yY) + z\cos(zY) \\ X = x\cos(xZ) + y\cos(yZ) + z\cos(zZ) \end{cases}$$

$(xX), (xY),$ ecc. rappresentano gli angoli tra gli assi x e X, x e Y, ecc.

Rotazioni

Il sistema può essere scritto nella forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

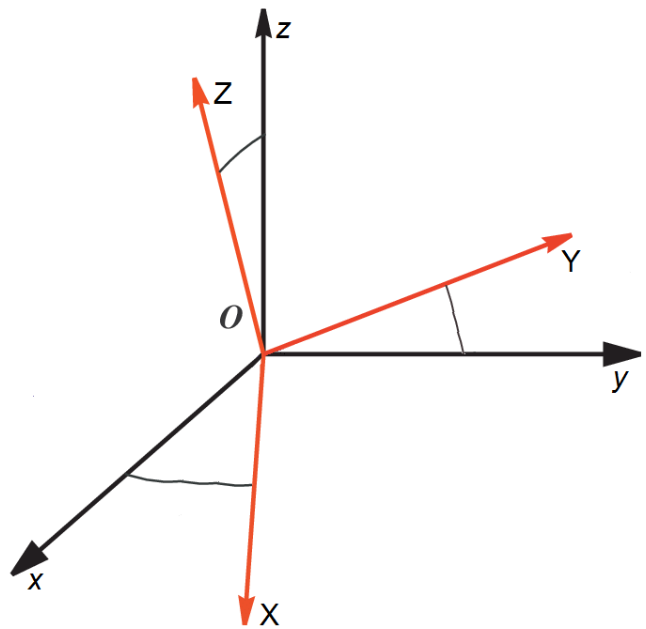
Dove R è la matrice di rotazione:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{pmatrix}$$

Rotazioni

Se nei sistemi di riferimento Oxyz e OXYZ introduciamo le coordinate polari, rispettivamente (ρ, φ, θ) e (ρ, Φ, Θ):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta \,\mathrm{sen}\varphi \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \rho\cos\Theta\cos\Phi \\ Y = \rho\cos\Theta \,\mathrm{sen}\Phi \\ Z = \rho\,\mathrm{sen}\Theta \end{cases}$$



Le trasformazioni diventano:

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\Phi \\ \cos\Theta\,\mathrm{sen}\Phi \\ \rho\,\mathrm{sen}\Theta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ \mathrm{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Che non dipendono da ρ.

Trasformazioni di coordinate celesti

Per ottenere le trasformazioni inverse, bisogna stare molto attenti al verso degli angoli, ma in sostanza basta porre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

La matrice di rotazione inversa è la trasposta di **R.**

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$$

ricordiamo che la matrice trasposta di una matrice data si ottiene scambiando le righe con le colonne.

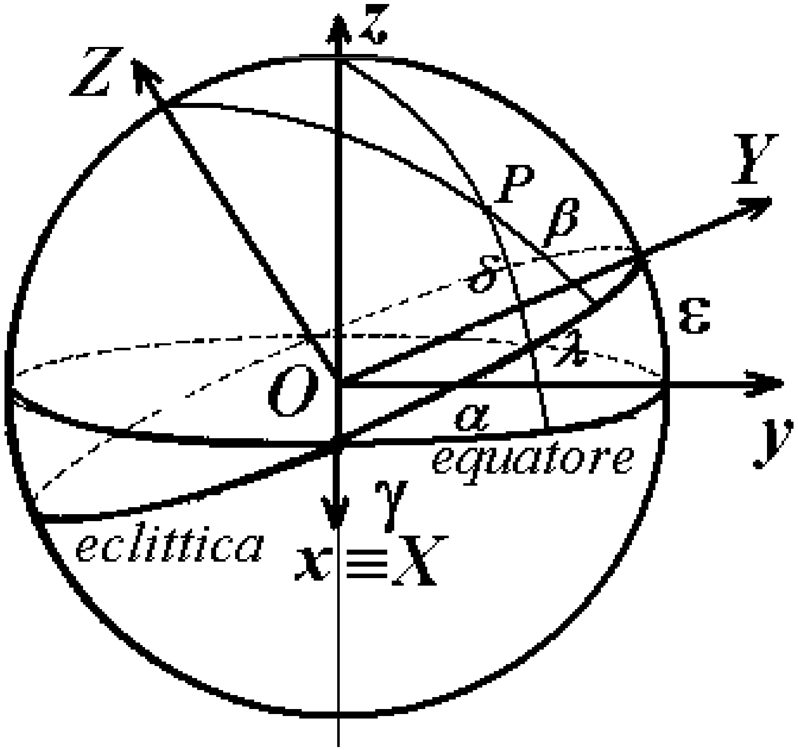
Trasformazioni di coordinate celesti

Da equatoriali a eclittiche

È una rotazione all'asse *x* di un angolo ε pari all'obliquità dell'eclittica. La matrice è:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CE}} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\varepsilon & \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right) \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) & \cos\varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \mathrm{sen}\varepsilon \\ 0 & -\mathrm{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}$$



Trasformazioni di coordinate celesti

Da equatoriali a eclittiche

La trasformazione è:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\,\mathrm{sen}\lambda \\ \mathrm{sen}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \mathrm{sen}\varepsilon \\ 0 & -\mathrm{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\,\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\delta \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:

$$\begin{cases} \cos\beta\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta \\ \cos\beta\,\mathrm{sen}\lambda = \mathrm{sen}\alpha\cos\delta\cos\varepsilon + \mathrm{sen}\delta\,\mathrm{sen}\varepsilon \\ \mathrm{sen}\beta = -\mathrm{sen}\alpha\cos\delta\,\mathrm{sen}\varepsilon + \mathrm{sen}\delta\cos\varepsilon \end{cases}$$

E l'inverso:

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\delta = \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\,\mathrm{sen}\alpha = \cos\beta\,\mathrm{sen}\lambda\cos\varepsilon - \mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\varepsilon \\ \mathrm{sen}\delta = \cos\beta\,\mathrm{sen}\lambda\,\mathrm{sen}\varepsilon + \mathrm{sen}\beta\cos\varepsilon \end{cases}$$

Trasformazioni di coordinate celesti

Per ottenere le trasformazioni inverse, bisogna stare molto attenti al verso degli angoli, ma in sostanza basta porre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

È facile notare che la matrice di rotazione inversa è la trasposta di **R.**

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$$

ricordiamo che la matrice trasposta di una matrice data si ottiene scambiando le righe con le colonne.

Sorgere e tramontare di un astro

Come altra applicazione vogliamo determinare l'istante in cui un astro di date coordinate equatoriali sorge o tramonta in una data località.

Il problema non è completamente risolubile con le conoscenze che abbiamo acquisito finora, ma possiamo dare una buona approssimazione della soluzione.

Supponiamo innanzi tutto che l'osservatore abbia un orizzonte perfettamente libero e che si trovi al livello del mare e che la Terra sia perfettamente sferica. Siano (λ, φ) le coordinate geografiche dell'osservatore O e (α, δ) le coordinate equatoriali dell'astro S.

Per prima cosa effettuiamo le trasformazioni tra coordinate altazimutali (A, h) ed orarie (H, δ), poi passeremo a quelle equatoriali tramite il tempo siderale.

Sorgere e tramontare di un astro

La trasformazione è:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ -\cos\delta \,\mathrm{sen} H \\ \mathrm{sen}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \mathrm{sen}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos h\cos A \\ \cos h\,\mathrm{sen} A \\ \mathrm{sen} h \end{pmatrix}$$

Da cui il sistema:

$$\begin{cases} \cos\delta\cos H = -\cos h\cos A\,\mathrm{sen}\varphi + \mathrm{sen} h\cos\varphi \\ \cos\delta\,\mathrm{sen} H = -\cos h\,\mathrm{sen} A \\ \mathrm{sen}\delta = \cos h\cos A\cos\varphi + \mathrm{sen} h\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$$

E l’inverso:

$$\begin{cases} \cos h\cos A = -\cos\delta\cos H\,\mathrm{sen}\varphi + \mathrm{sen}\delta\cos\varphi \\ \cos h\,\mathrm{sen} A = -\cos\delta\,\mathrm{sen} H \\ \mathrm{sen} h = \cos\delta\cos H\cos\varphi + \mathrm{sen}\delta\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$$

Sorgere e tramontare di un astro

Consideriamo la terza equazione; essa lega l'altezza dell'astro alla declinazione, all'angolo orario (e quindi al tempo) e alla latitudine del luogo.

Se escludiamo i poli ($\varphi = \pm 90°$), dove l'equazione perde di significato, quando l'astro è sull'orizzonte, $h = 0$, si può scrivere nella forma:

$$[*] \qquad \cos H = -\mathrm{tg}\delta\ \mathrm{tg}\varphi$$

Dalla prima

$$\cos h \cos A = -\cos\delta \cos H \,\mathrm{sen}\varphi + \mathrm{sen}\delta \cos\varphi$$

Ponendo $h = 0$ e sostituendo a $\cos H$ si ha l'azimut:

$$\cos A = \frac{\mathrm{sen}\delta}{\cos\varphi}$$

Sorgere e tramontare di un astro

È immediato notare che, per gli astri che hanno declinazione nulla (che stanno quindi sull'equatore celeste), $\cos H = 0$ qualunque sia la latitudine, quindi $H = 90°$ e $H = 270°$ che sono rispettivamente l'Ovest e l'Est.

Se ci troviamo all'equatore, $\varphi = 0$, qualunque sia la declinazione dell'astro $\cos H = 0$, quindi $H = \pm 90°$ e l'astro può descrivere un arco di angolo orario complessivo di 180°, quindi resta sopra l'orizzonte per 12 ore.

Se ci troviamo ai poli $\varphi = \pm 90°$, allora $\operatorname{sen} h = \pm \operatorname{sen} \delta$, ovvero $h = \pm \delta$; tutte le stelle che hanno la stessa declinazione si trovano alla stessa altezza e non sorgono né tramontano.

Sorgere e tramontare di un astro

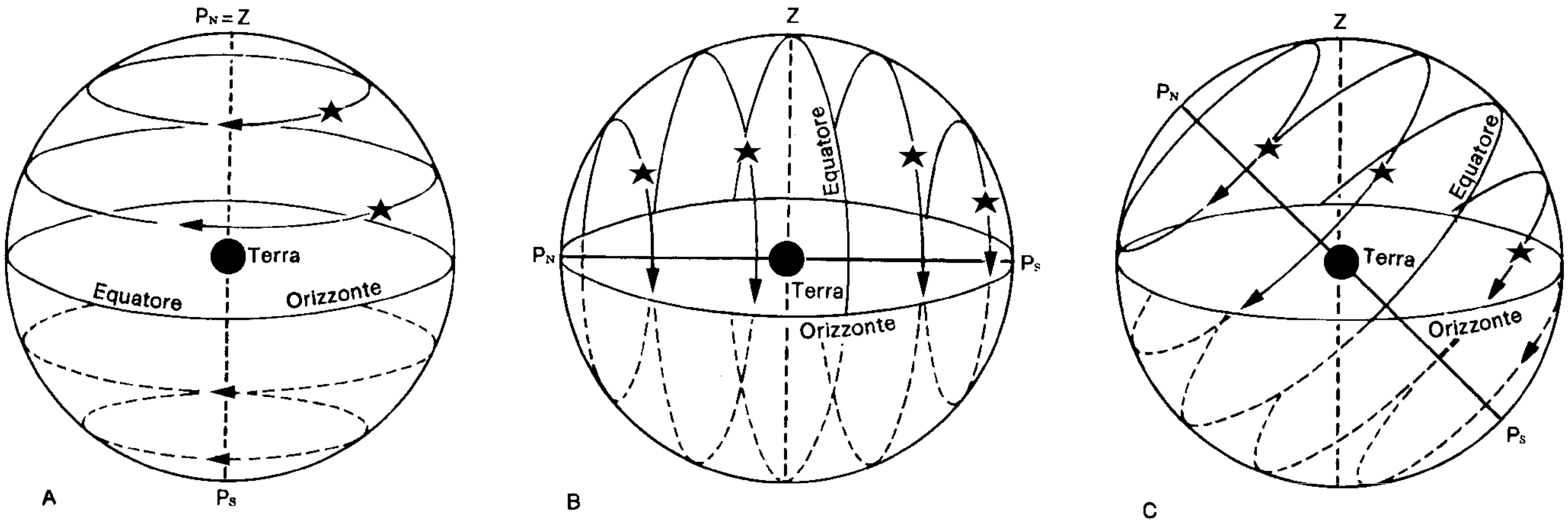
Se $\delta = 90° - \varphi$, allora $\cos H = -\operatorname{tg}(90° - \varphi)\operatorname{tg}\varphi = -1$, quindi $H = 180°$.
Ciò significa che l'astro "sorge" e "tramonta" nello stesso istante a Nord, quindi l'astro lambirà l'orizzonte Nord.

Se $\delta > 90° - \varphi$ allora $\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi > 1$ e l'equazione $\cos H = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi$ non ammette soluzioni, ciò significa che l'astro non sorge né tramonta mai, ma rimane sempre sopra l'orizzonte. È un astro circumpolare.

Se $\delta = \varphi - 90°$, allora $\cos H = -\operatorname{tg}(\varphi - 90°)\operatorname{tg}\varphi = 1$ quindi $H = 0$. Ciò significa che l'astro sorge e tramonta a Sud, quindi questo valore è il limite per gli astri che non sorgono mai.

Se $\delta < \varphi - 90°$, allora $\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi < 1$, quindi l'astro non sorge mai.

Sorgere e tramontare di un astro



La rotazione della sfera celeste.
A) L'osservatore si trova al polo nord: tutte le stelle descrivono cerchi paralleli all'orizzonte; nessuna stella sorge e nessuna tramonta.
B) L'osservatore si trova all'equatore: tutte le stelle descrivono cerchi attorno alla linea orizzontale nord-sud e tutte le stelle sorgono e tramontano.
C) L'osservatore si trova ad una latitudine intermedia settentrionale: tutte le stelle descrivono archi obliqui rispetto all'orizzonte; le stelle che distano dal polo nord celeste (PN) di un arco minore della latitudine del luogo non tramontano mai, quelle che distano dal polo sud celeste di un arco minore di tale latitudine non si vedono mai, le altre sorgono e tramontano.

Sorgere e tramontare di Sirio a Camerino

Vogliamo determinare gli istanti in cui sorge e tramonta la stella Sirio dal piazzale del Dipartimento di Fisica di Camerino ad una data ora di un dato giorno.

Le coordinate equatoriali di Sirio, al 2000, sono:

α = 6h 45,142m; δ = –16° 43,194’

Le coordinate geografiche del piazzale sono:

λ = 13° 4,067’; φ = 43° 8,400'

Da

$$\cos H = -\mathrm{tg}\delta\,\mathrm{tg}\varphi$$

si ha

$$\cos H = -\mathrm{tg}\left(-16,7199\right)\mathrm{tg}\left(43,1400\right) = 0,2815$$

da cui segue H = ±73,65°.

Sorgere e tramontare di Sirio a Camerino

Il valore negativo corrisponde al sorgere della stella, quello positivo al tramonto; tutto l'arco corrisponde a 147,3° = 9h 49,2m che è il tempo in cui la stella Sirio rimane sopra l'orizzonte di Camerino (se fosse piatto!!!).

L'angolo orario in ore è H = ±4h 54,6m.
quindi

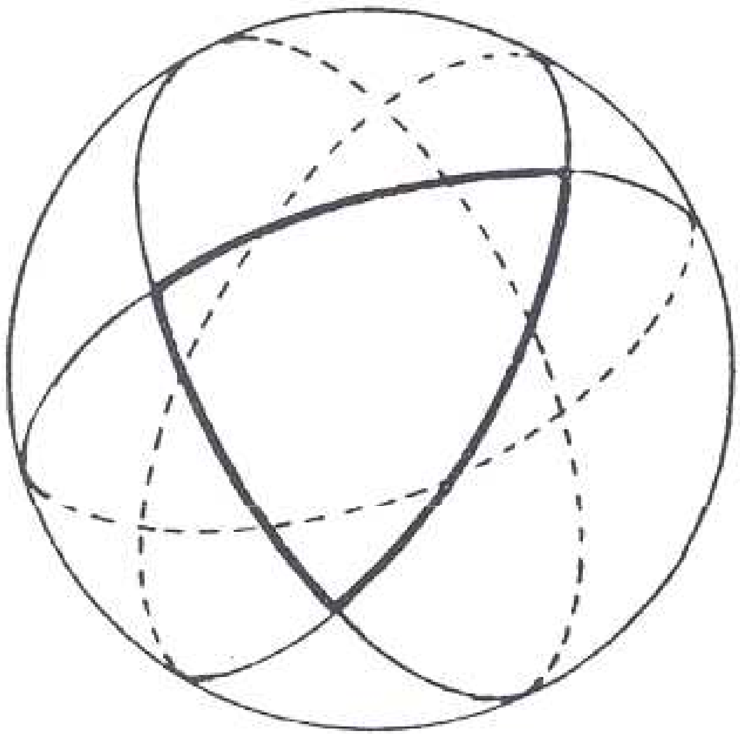
TSL = α + H = 6h 45,142m ± 4h 54,6m

Sirio sorge a TSL_S = 1h 50,5m
tramonta è TSL_T = 11h 39,7m.

Rimane da stabilire come fare a trasformare il tempo siderale locale in tempo civile.

Da $$\cos A = \frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\varphi}$$ si ricava che l'azimut di Sirio è A_S = 113,2° al sorgere e A_T = –113,2° = 246,8° al tramontare.

Elementi di trigonometria sferica

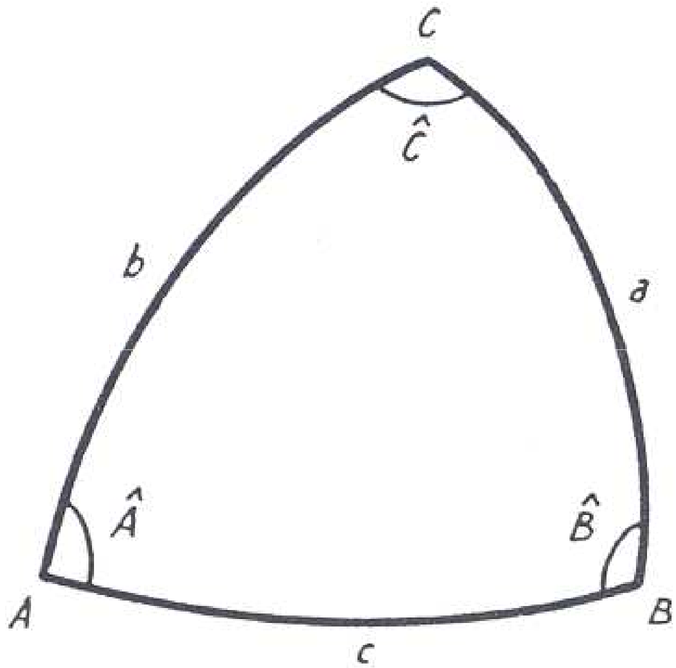


Si definisce ***triangolo sferico*** la superficie di sfera delimitata da tre archi (lati) di cerchi massimi congiungenti, a coppie, tre punti (vertici) della sfera.

Un triangolo sferico si dice ***semplice*** se i lati sono minori di una semicirconferenza; un triangolo sferico semplice appartiene ad una semisfera.

Elementi di trigonometria sferica

Se A, B e C sono i vertici del triangolo sferico semplice, siano a, b, c i lati e Â, B̂, Ĉ gli angoli opposti ai lati omonimi.



In un triangolo sferico semplice la somma degli angoli, contrariamente a quanto avviene per i triangoli piani, risulta maggiore di 180° (e minore di 540°); la somma dei lati è invece compresa tra 0 e 2π radianti (il raggio della sfera è unitario).

Si chiama ***eccesso sferico ε*** di un triangolo sferico la somma degli angoli del triangolo diminuita di 180° (è sempre ε > 0).

L'area di un triangolo sferico è uguale al semiprodotto dell'eccesso sferico (espresso in radianti) per il quadrato del raggio della sfera..

Elementi di trigonometria sferica

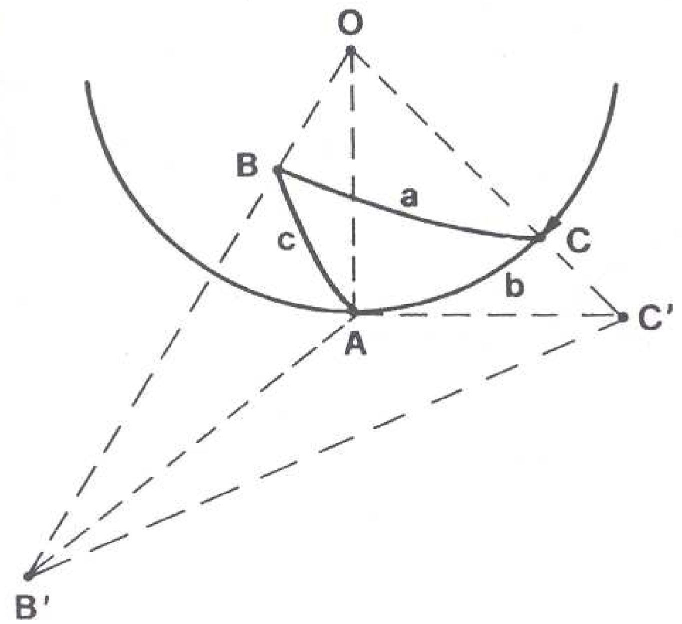
Le principali relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo sferico vanno sotto il nome di ***relazioni di Gauss*** e di solito sono riunite in vari gruppi del tipo:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \\ \operatorname{sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \end{cases}$$

Ricaviamo la prima di tali relazioni.

Elementi di trigonometria sferica

Dal centro O della sfera (che consideriamo per semplicità di raggio unitario) proiettiamo i due vertici B e C sul piano tangente in A; otteniamo così i triangoli piani AB'C', OAB', OAC'.



Consideriamo il triangolo OAB', in cui è:

$OA = 1, \qquad O\hat{A}B' = 90°, \qquad B'\hat{O}A = c,$

$AB' = \text{tg } c, \qquad OB' \cos c = 1$

Allo stesso modo nel triangolo OAC':

$AC' = \text{tg} b \qquad OC' \cos b = 1$

Nel triangolo B'AC' è per definizione l'angolo sferico A, da cui:

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A$$

Nel triangolo piano OB'C' è per definizione l'angolo sferico a, da cui:

$$B'C'^2 = OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cdot \cos a$$

Elementi di trigonometria sferica

$$AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A = OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cdot \cos a$$

Sostituendo si ricava:

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A = -\cos b \cos c + \cos a$$

Che è la prima equazione del primo gruppo di Gauss

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \\ \operatorname{sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \end{cases}$$

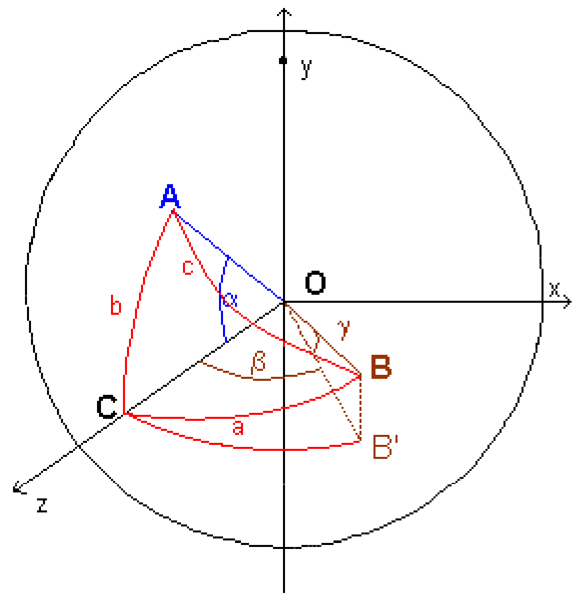
Se fosse A = 90°, nella prima si ha:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

Che rappresenta una sorta di teorema di Pitagora per un triangolo rettangolo sferico.

Distanza tra due punti

Siano A e B due punti sulla superficie della Terra (che supponiamo perfettamente sferica. Siano (λ_A, φ_A) e (λ_B, φ_B) le loro coordinate geografiche.
C è il punto sull'equatore sullo stesso meridiano di A che assumiamo come meridiano zero.
Fissiamo quindi il sistema di coordinate Oxyz come in figura.
B' è la proiezione di B sul piano xz.



$$\overrightarrow{OA} = R\left(\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{OB} = R\left(\cos\gamma\operatorname{sen}\beta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\gamma\,\vec{j} + \cos\gamma\cos\beta\,\vec{k}\right)$$

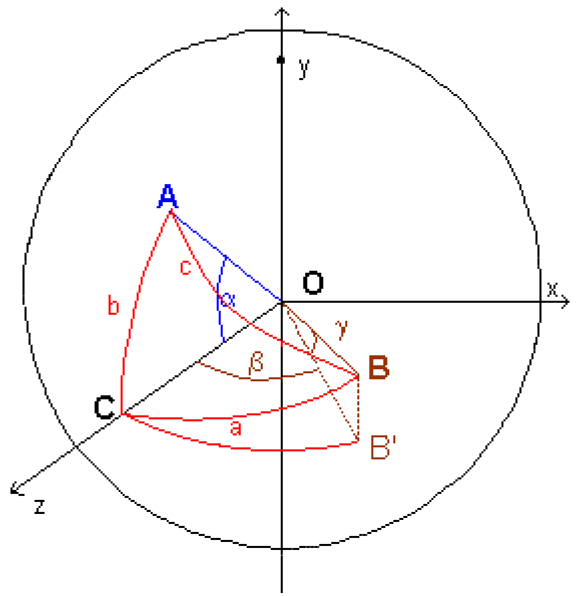
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2\left(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)$$

Ma è anche

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2\cos A\hat{O}B$$

Distanza tra due punti

$$\cos A\hat{O}B = \mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$



$$AB = R\arccos\left(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)$$

Se assumiamo la Terra sferica e se A e B sono due luoghi della superficie terrestre con (λ_A, φ_A) e (λ_B, φ_B) le loro coordinate geografiche, allora si dimostra che:

$$AB = R\arccos\left[\mathrm{sen}\varphi_A\,\mathrm{sen}\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos\left(\lambda_A - \lambda_B\right)\right]$$