

Capitolo 1

Sistemi di riferimento astronomici e trasformazioni di coordinate

1.1 – La sfera celeste

Una prima osservazione del cielo, diurno o notturno che sia, rivela che esso appare come una superficie continua, sulla quale sembrano fissate le stelle e vediamo muoversi il Sole, la Luna e i Pianeti. Questa superficie appare rotonda, giustificando quindi il nome che le si dà: **sfera celeste**. Questo nome compete dunque a quella superficie continua che sembra avvolgere tutto il nostro globo; il fatto di assimilarla ad una sfera ha una giustificazione geometrica: l'osservazione ad occhio nudo non è in grado di rivelare che le stelle sono a diverse distanze dalla Terra, esse appaiono tutte come fossero egualmente distanti da noi. In tutti i nostri studi di Astronomia di posizione parleremo quindi di sfera celeste. Quando sarà necessario parlare della distanza dei corpi celesti, lo diremo espressamente.

Un'osservazione più accurata rivela che tutta la volta celeste sembra ruotare durante la giornata in modo uniforme intorno a due punti fissi, opposti tra loro, che chiameremo **poli celesti**. Congiungendo i due poli tra loro con una retta otteniamo l'**asse del mondo**.

Oggi sappiamo che la rotazione del cielo intorno all'asse del mondo è dovuta alla rotazione della Terra intorno al proprio asse.

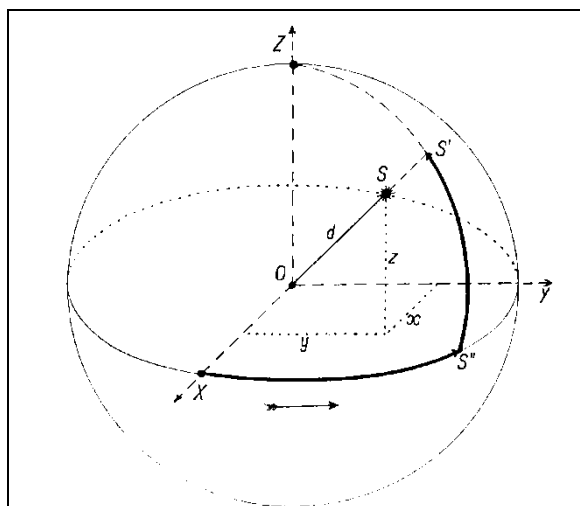


Figura 1.1 – Coordinate di un astro S visto da un punto O . x, y, z , sono le sue coordinate rettilinee rispetto al sistema di assi $OXYZ$; le ampiezze degli archi XS'' e $S''S'$, corrispondenti alla posizione sferica S' di S , sono le coordinate sferiche dell'astro.



Figura 1.2 – Rotazione della volta celeste; a sinistra rispetto al polo nord celeste, a destra rispetto al polo sud celeste.

L'asse del mondo e l'asse della Terra sono coincidenti e di conseguenza i poli celesti e i poli terrestri sono allineati (vedi Figura 1.3). Possiamo dire che i poli celesti sono la proiezione sulla volta celeste dei poli terrestri e prendono gli stessi nomi. Quindi la proiezione del polo Nord Terrestre si chiama Polo Nord Celeste (PN) ed analogamente per il Polo Sud (PS).

Definiti i poli, definiamo **centro della Terra** il punto medio del segmento che ha per estremi i poli terrestri. Occorre tenere presente che, al momento, considereremo la Terra perfettamente sferica e omogenea, pertanto il baricentro della Terra ed il suo centro geometrico coincidono. Quando questa approssimazione non potrà essere utilizzata lo preciseremo.

Se indichiamo con *O* la posizione di un osservatore sulla superficie terrestre, la retta verticale (**verticale astronomica**) per *O*, fisicamente rappresentata dalla direzione del filo a piombo, individua sulla sfera celeste i due punti lo **zenit** *Z* e il **nadir** *N* posti rispettivamente verso la testa e verso i piedi dell'osservatore. Il piano per *O* perpendicolare alla verticale prende il nome di **piano orizzontale**, la sua intersezione con la sfera celeste definisce un cerchio massimo che si chiama **orizzonte celeste**. La sfera celeste è intersecata dai piani paralleli al piano orizzontale nei **cerchi di altezza** e dai piani verticali passanti per la verticale nei **cerchi verticali**. Il piano definito dalla verticale e dalla linea dei poli prende il nome di **piano meridiano**, esso interseca la sfera celeste lungo il **meridiano celeste** (il nome trae origine dal fatto che esso è attraversato dal Sole ad ogni mezzogiorno) ed il piano orizzontale lungo la **linea meridiana** (vedi Figura 1.4). Il piano definito dalla verticale e dalla normale per *O* al piano meridiano è detto **primo verticale**. I quattro punti cardinali sono individuati dalle intersezioni con la sfera celeste della linea meridiana e della sua perpendicolare per *O* nel piano orizzontale (il punto Nord è dalla parte del polo Nord; i punti Nord, Est, Sud e Ovest si susseguono in verso orario).

Evidentemente, per ogni osservatore c'è una verticale e quindi uno zenit e un nadir, mentre i poli celesti sono gli stessi per tutti gli osservatori.

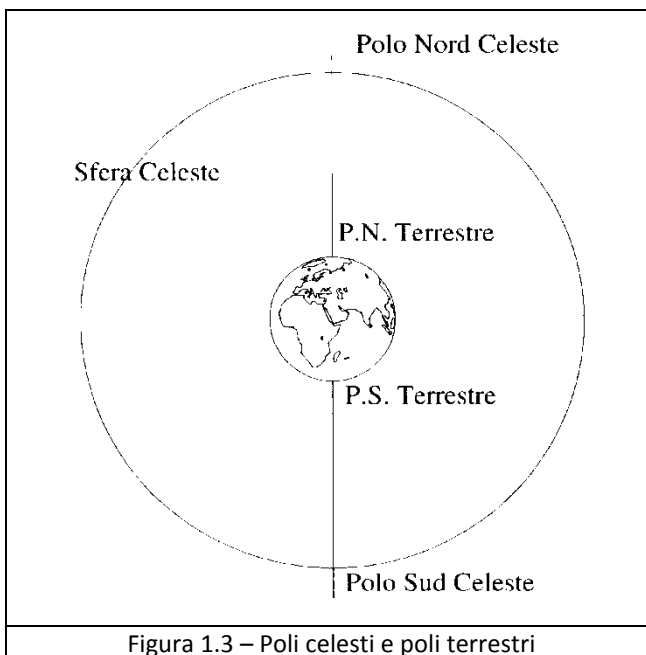


Figura 1.3 – Poli celesti e poli terrestri

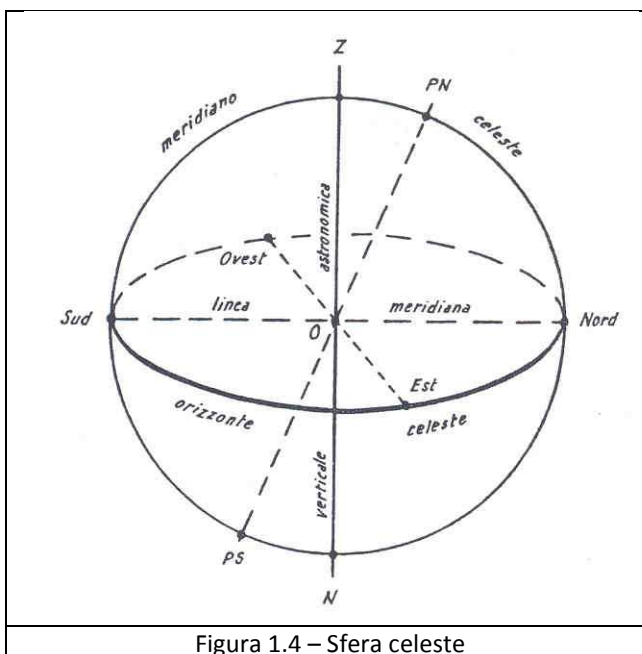


Figura 1.4 – Sfera celeste

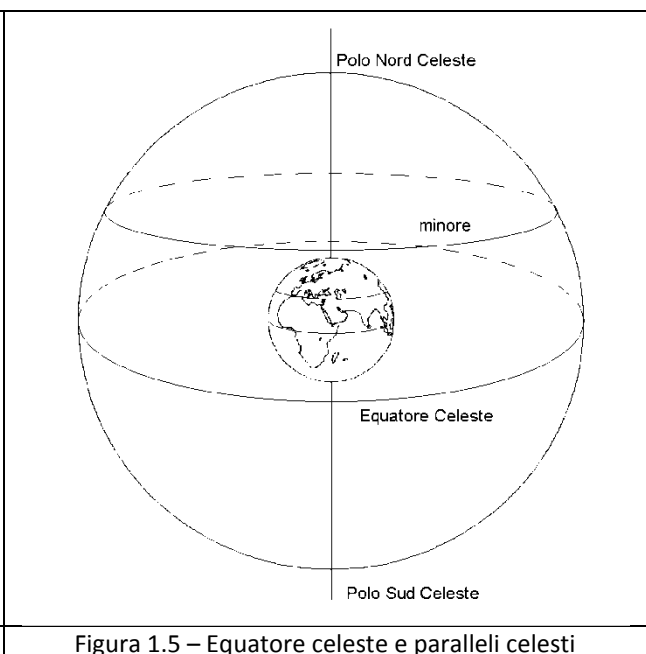


Figura 1.5 – Equatore celeste e paralleli celesti

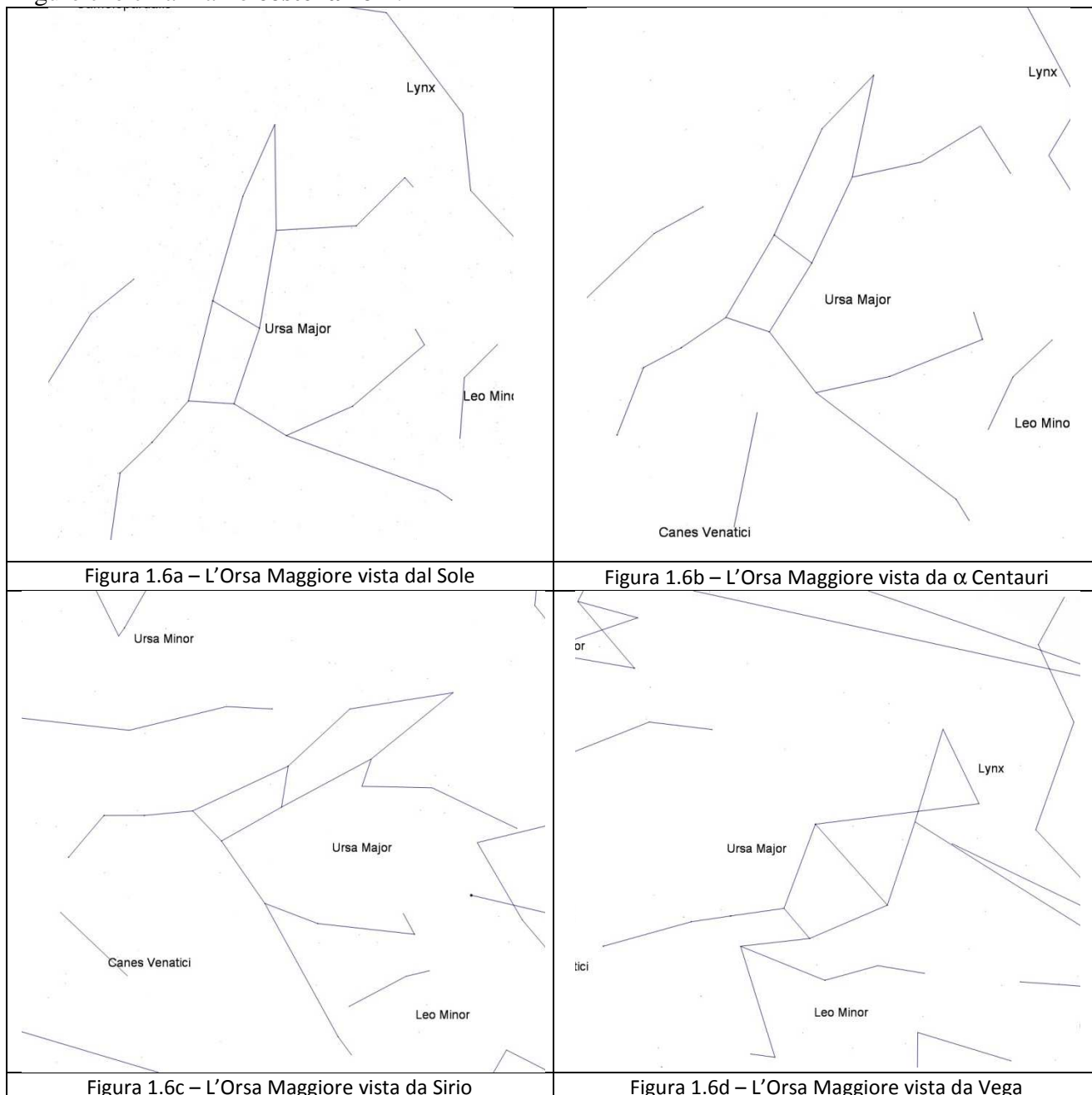
Una delle proprietà della sfera è che tutti i piani passanti per il centro determinano su di essa dei **cerchi massimi**. I cerchi determinati invece da piani non passanti per il centro prendono il nome di **cerchi minori**. Consideriamo allora il piano passante per il centro della Terra e perpendicolare

all'asse di rotazione: questo piano determina sulla superficie della Terra un cerchio massimo che prende il nome di **equatore terrestre** e sulla sfera celeste un cerchio massimo che viene chiamato **equatore celeste** (vedi Figura 1.5).

Il meridiano locale incontra l'equatore celeste in due punti, uno sopra l'orizzonte, l'altro sotto; quello sopra l'orizzonte e verso il sud geografico si chiama **mezzocielo** (vedi Figura 1.11).

1.2 – Le costellazioni

Fin dall'antichità le stelle sulla sfera celeste sono state arbitrariamente raggruppate a formare delle figure che chiamiamo **costellazioni**.



Oggi, una costellazione è ognuna delle 88 parti in cui la sfera celeste è convenzionalmente suddivisa allo scopo di mappare le stelle. I raggruppamenti così formati sono delle entità esclusivamente prospettiche, a cui non si riconosce alcun reale significato, infatti:

* nello spazio tridimensionale le stelle che formano una stessa costellazione possono essere

separate anche da distanze enormi, così come diverse possono essere le dimensioni e la luminosità,

- * viceversa, due o più stelle che sulla sfera celeste appaiono magari lontanissime tra di loro, nello spazio tridimensionale possono essere al contrario separate da distanze minori di quelle che le separano dalle altre stelle della propria costellazione,
- * la forma della costellazione dipende dall'osservatore (vedi figure 6a, 6b, 6c, 6d),
- * nel corso del tempo sono state definite costellazioni differenti, alcune sono state aggiunte, altre sono state unite tra di loro.
- * nel corso del tempo, a causa del moto proprio delle stelle le costellazioni cambiano (vedi Figura 1.7).

Una costellazione "ufficiosa", ossia un allineamento di stelle che formano semplici figure geometriche, si chiama **asterismo** (ad esempio il Grande Carro non è una costellazione ufficiale)

Il sistema delle costellazioni che viene usato ufficialmente oggi si è sviluppato a partire dalle 48 costellazioni indicate da Tolomeo nell'Almagesto intorno al 150 d.C. e i cui nomi sono associati a personaggi della mitologia greca. Egli prese i nomi di queste costellazioni dalla tradizione classica, prima di lui, infatti, scrittori quali Omero ed Esiodo (circa 700 a.C.) nelle loro opere avevano citato raggruppamenti stellari come l'Orsa Maggiore, Orione, le Pleiadi.

Oggi è dimostrato che gli sviluppi maggiori in questo campo si verificarono presso i popoli che abitarono la Mesopotamia. Gli storici ritengono che questo sistema abbia avuto origine addirittura dai Sumeri, vissuti nella zona intorno al 2000 a.C..

Si ritiene che Eudosso (circa 390 – 340 a.C.), per primo, abbia introdotto in Grecia un sistema completo di costellazioni che si pensa possa aver acquisito dai sacerdoti egiziani (alcuni studiosi ritengono che questo popolo avesse delle conoscenze di astronomia addirittura 10.000 anni prima di Cristo !!!). Molto antico è anche il sistema di costellazioni dei cinesi.

La prima opera scritta che ci è pervenuta e che fornisce una guida completa alle costellazioni dei Greci è dovuta ad Arato (circa 315 – 245 a.C.).

Nei secoli successivi furono compilati molti cataloghi stellari: in pratica ogni astronomo aveva il suo elenco di costellazioni e fissava i confini tra di esse. Nel 1922 in occasione della prima Assemblea Generale dell'IAU (International Astronomical Union) vennero fissate una volta per tutte le costellazioni (numero, nomi, e confini).

L'IAU provvede anche all'assegnazione dei nomi delle stelle e degli altri corpi celesti. Molti dei nomi oggi in uso sono stati in realtà ereditati dalle tradizioni vigenti prima che l'IAU esistesse. Altri nomi, specialmente per le stelle variabili (incluse le novae e le supernovae), vengono continuamente aggiunti. La maggior parte delle stelle poco brillanti, e quasi tutte quelle non visibili ad occhio nudo, non hanno nome, e per riferirsi ad esse si usano i numeri di catalogo.

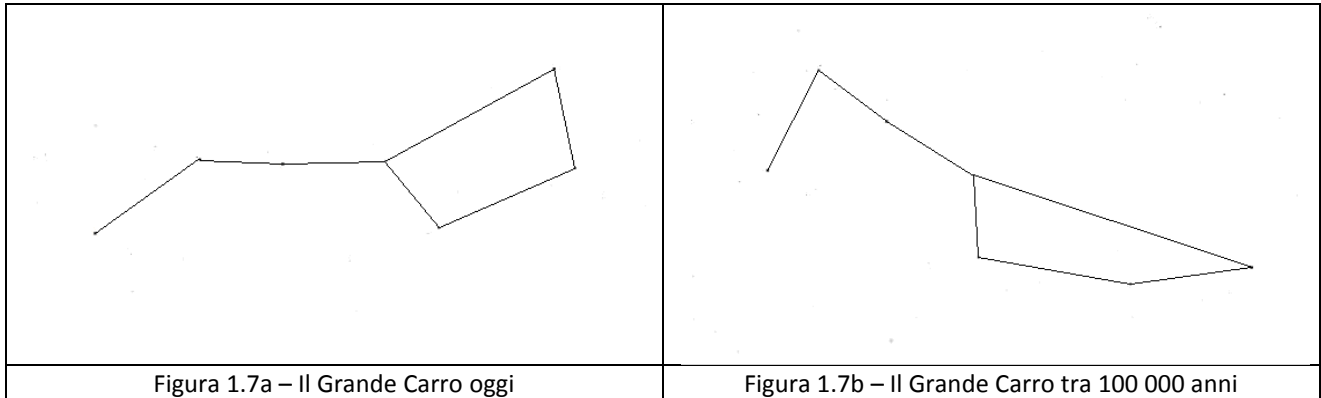
Molte delle stelle più brillanti, oppure interessanti per altri motivi, hanno nomi propri. La maggior parte deriva dall'arabo, ma ci sono alcuni nomi derivati dal latino, dal greco e da altre fonti, tra cui anche l'inglese.

Nel 1603 l'astronomo tedesco Johann Bayer (1572 – 1625), pubblicò il primo atlante stellare completo: Uranometria. In questa opera introdusse un sistema di nomenclatura per designare le stelle più brillanti di ogni costellazione con una lettera dell'alfabeto greco, seguita dal nome latino della costellazione (per esempio Betelgeuse è alfa Orionis), a partire dalla stella più luminosa (al posto del nome della costellazione, quando si scrive si mette un'abbreviazione di tre lettere, per esempio α Ori è alfa Orionis). Il sistema di Bayer è ancora oggi molto usato.

La nomenclatura dovuta all'astronomo inglese Flamsteed (1646 – 1719) è un sistema per assegnare nomi alle stelle simile alla nomenclatura di Bayer, ma che usa numeri invece delle lettere greche. Ad ogni stella è assegnato un numero, più il genitivo latino del nome della costellazione in cui si trova. Per ogni costellazione il conto ricomincia da 1. I numeri furono originariamente assegnati alle stelle in base alla loro posizione (in ordine crescente di Ascensione Retta in ogni costellazione), ma

a causa degli effetti della precessione e dei moti propri stellari, sono oggi nell'ordine sbagliato in alcuni punti. Esempi di stelle conosciute per le quali si usano i numeri di Flamsteed sono 51 Pegasi (la prima stella intorno alla quale è stato riconosciuto un pianeta) e 61 Cygni (la prima stella di cui si è misurata la parallasse).

Anche i numeri di John Flamsteed sono molto usati, anche se si preferisce usare le lettere di Bayer se è possibile. Le stelle di ogni costellazione sono numerate secondo la loro posizione, senza riguardi per la luminosità. Inoltre, in genere sono considerate anche stelle molto più deboli di quelle di Bayer.



1.3 – Le coordinate geografiche

Consideriamo la sfera terrestre. Siano N e S i poli Nord e Sud rispettivamente (vedi Figura 1.8). Definiamo **paralleli** tutti e soli i cerchi ottenuti dall'intersezione di piani paralleli all'Equatore con la sfera terrestre. Useremo anche il termine **paralleli nord** per i cerchi contenuti nella semisfera compresa tra l'equatore ed il polo nord, e **paralleli sud** per quelli compresi tra l'equatore e il polo Sud. Indichiamo i paralleli Nord anche premettendo il segno +, e i paralleli Sud premettendo il segno -.

I **meridiani** sono tutti i cerchi massimi passanti per entrambi i Poli, li indicheremo con un numero a partire da un meridiano scelto come meridiano zero, positivo in un determinato verso di percorrenza, negativo nell'altro.

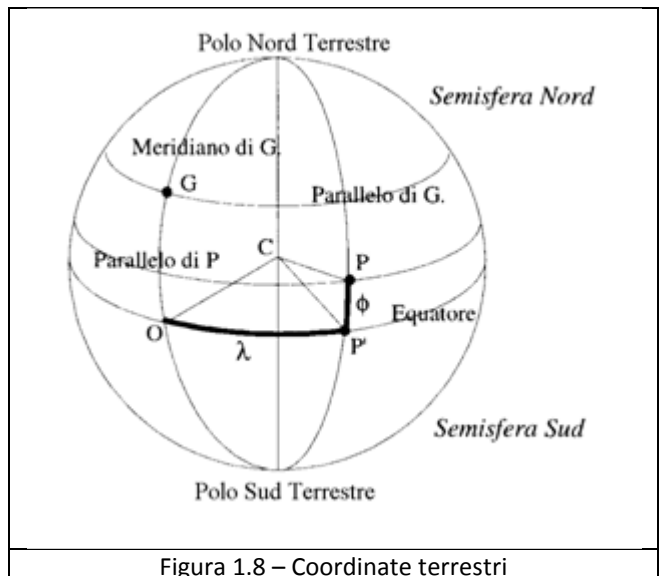


Figura 1.8 – Coordinate terrestri

Come conseguenza di tutto questo, per determinare la posizione di un punto sulla Terra basterà indicare quali sono il parallelo ed il meridiano passanti per quel punto. Ad esempio, se nella Figura 1.8 vogliamo determinare la posizione del punto P, per prima cosa dobbiamo fissare il meridiano zero, scegliamo quello passante per G, e come verso positivo quello verso est (in Figura 1.8 quello che va da O verso P'). Sia O la sua intersezione con l'equatore. Sia quindi P' il punto in cui il meridiano passante per P incontra l'equatore. Per determinare la posizione di P sulla sfera è sufficiente dare la misura degli archi P'P e OP', o, che è la stessa cosa, degli angoli P'CP' e OCP'. L'angolo OCP', indicato con λ , tra il meridiano fondamentale e il meridiano per P viene misurato in gradi lungo l'equatore e prende il nome di **longitudine** del punto P. L'angolo ϕ tra l'equatore ed il

parallelo per P prende il nome di **latitudine** del punto ed è positivo nell'emisfero Nord e negativo nell'emisfero Sud.

Come meridiano fondamentale o **meridiano origine** si assume il meridiano passante per l'Osservatorio di Greenwich, esattamente quello che passa per il centro dell'antico strumento dei passaggi di Flamsteed. Questo meridiano prende il numero zero e viene comunemente detto **meridiano zero**. Per definire la posizione di un punto sulla Terra basta quindi dare una coppia di coordinate λ , φ di questo punto. Si deduce immediatamente dall'esame della Figura 1.5 che le latitudini vanno da $+90^\circ$ a -90° , mentre le longitudini vanno da 0° a 360° . Per le longitudini a volte si utilizzano angoli da 0 a 180° nel verso antiorario e da 0 a -180° nel verso orario.

1.4 – Sistemi di coordinate astronomiche.

Per individuare univocamente la posizione di un punto sulla sfera celeste è necessario definire un sistema di riferimento celeste. Per far questo è necessario premettere alcune nozioni sulla geometria della sfera.

Definiamo **asse** della sfera una qualunque retta passante per il suo centro; **poli** i due punti diametralmente opposti in cui l'asse interseca la superficie sferica, **piano fondamentale** il piano passante per il centro della sfera e perpendicolare all'asse, **cerchio base** il cerchio intersezione del piano fondamentale con la superficie della sfera, **cerchi ausiliari** i cerchi intersezione di piani perpendicolari al piano fondamentale e passanti per il centro. I cerchi ausiliari sono ortogonali, per costruzione, al cerchio base e passano tutti per i poli.

Cerchio base e cerchi ausiliari sono esempi di **cerchi massimi**, cioè di quella famiglia di cerchi che nascono dall'intersezione della superficie sferica con piani passanti per il centro della sfera e che sono chiamati così perché sono quelli di lunghezza massima che è possibile tracciare sulla superficie sferica; qualunque altro cerchio tracciato sulla superficie di una sfera viene generato dall'intersezione con un cerchio non passante per il centro: chiameremo questi **cerchi minori**. Ne sono esempi sulla superficie terrestre i paralleli di latitudine.

Per determinare un sistema di riferimento sulla sfera si procede quindi così (vedi Figura 1.9):

1. Si sceglie un asse; questa scelta determina i poli, il piano fondamentale, il cerchio base e i cerchi ausiliari.
2. Sul cerchio base si sceglie un punto O come **origine** e un **verso** di percorrenza lungo il cerchio.
3. Dato un punto S qualsiasi sulla superficie sferica si traccia il cerchio ausiliario passante per esso: viene determinato così il punto P intersezione del cerchio ausiliario col cerchio base.
4. A partire dall'origine, sul cerchio base, ci si muove nel verso prescelto verso il punto P: l'ampiezza dell'arco così descritto rappresenta la prima coordinata sferica del punto S che si chiama **ascissa sferica**.
5. Dal punto P, lungo il cerchio ausiliario ci si muove verso S descrivendo un arco la cui ampiezza angolare è la seconda coordinata di S detta **ordinata sferica**. A seconda che il punto S si trovi in uno o nell'altro dei due emisferi in cui il cerchio base divide la superficie sferica, ci si muoverà lungo il cerchio ausiliario verso l'uno o l'altro dei poli: si sceglie una volta per tutte uno dei due versi come positivo e il valore dell'ordinata sferica sarà di conseguenza positivo o negativo a seconda che si percorra il cerchio ausiliario in verso concorde o meno con quello prescelto. Di

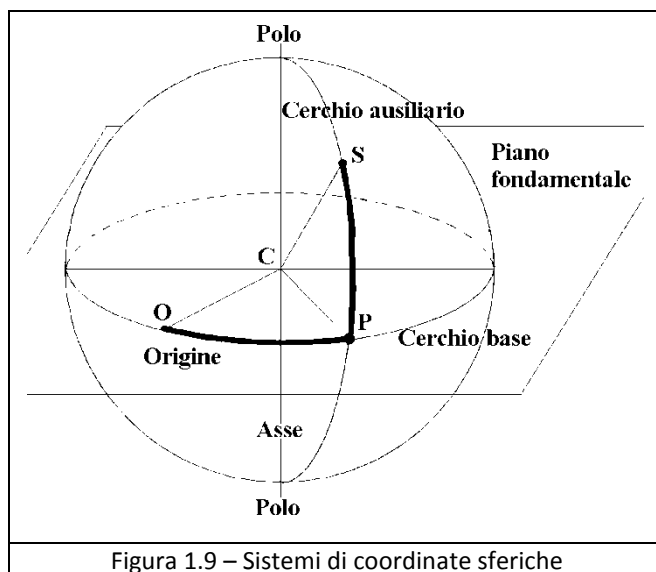


Figura 1.9 – Sistemi di coordinate sferiche

conseguenza tutti i punti di un emisfero avranno ordinate sferiche positive e tutti quelli dell'altro negative.

L'ascissa sferica potrà assumere un valore qualsiasi compreso tra 0° e 360° ; spesso si utilizza una misurazione in ore, minuti e secondi, tra 0h e 24h. È semplice la conversione da una scala all'altra, 1h corrisponde a 15° , 1min corrisponde a $15'$ e 1s corrisponde a $15''$ ^[1]. L'ordinata sferica, a meno del segno, potrà assumere qualsiasi valore tra 0° e 90° .

I vari sistemi di coordinate astronomiche differiscono tra loro per la scelta dell'asse.

Essenzialmente però esistono due tipi di sistemi di coordinate: locali e assoluti a seconda che dipendano dall'osservatore terrestre o meno. I sistemi locali sono: il sistema altazimutale e il sistema equatoriale locale. I sistemi assoluti sono: il sistema equatoriale assoluto, il sistema eclittico e il sistema galattico

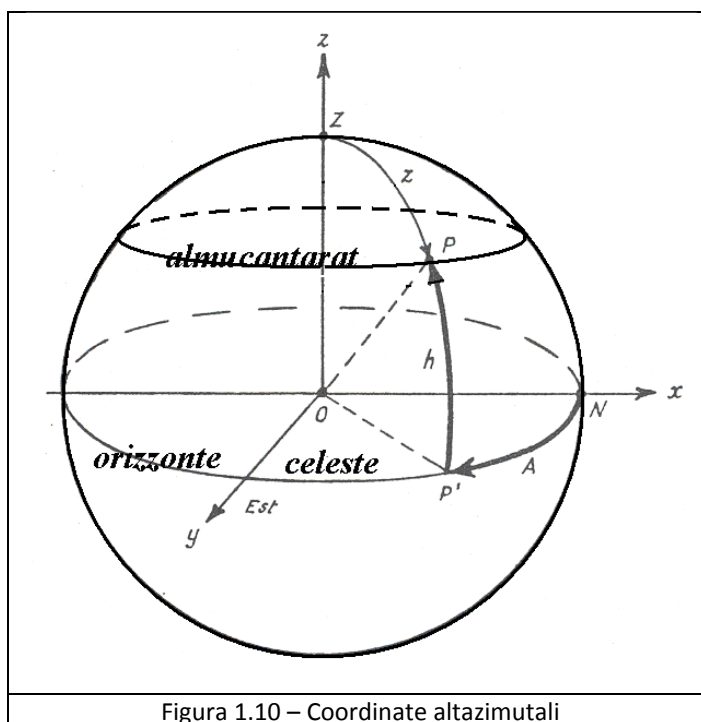


Figura 1.10 – Coordinate altazimutali

1.4.1 – Il sistema altazimutale.

In questo sistema l'asse è scelto coincidente con la direzione della verticale astronomica. I poli sono quindi lo zenit e il nadir (vedi Figura 1.10). Il cerchio base è la linea dell'orizzonte celeste, approssimato bene dall'orizzonte visibile solo in mare aperto e al livello del mare. L'origine è il punto cardinale nord sull'orizzonte e il verso di percorrenza quello orario (ovvero nel senso da nord, est, sud, ovest)². I cerchi ausiliari sono i cerchi di altezza. L'ascissa sferica, misurata lungo l'orizzonte, prende il nome di **azimut** e si indica generalmente con la lettera **A**. L'ordinata sferica si chiama **altezza** e si indica con **h**. Un valore negativo dell'altezza corrisponde ovviamente ad un astro sotto l'orizzonte e quindi non visibile. L'arco complementare di **h** sul cerchio d'altezza, cioè l'arco dallo zenit verso il punto P si chiama **distanza zenitale** e si indica con **z**. Si ha perciò:

$$[0.1] \quad z = 90^\circ - h$$

Tutti i punti di uno stesso cerchio d'altezza avranno il medesimo valore dell'azimut. Tutti i punti con la stessa altezza giaceranno invece su un circolo minore detto **cerchio di uguale altezza** o, con termine arabo, **almucantarot**.

Il sistema altazimutale, molto usato in geodesia, lo è invece poco in astronomia essenzialmente per due motivi:

- * L'apparente rotazione diurna della sfera celeste fa sì che entrambe le coordinate di un astro varino durante la giornata in modo non uniforme: si pensi che al momento del sorgere e del tramontare gli astri hanno altezza zero, mentre hanno altezza massima al momento del transito al meridiano locale, cioè all'istante della cosiddetta **culminazione superiore**. L'altezza pertanto cresce prima della culminazione e decresce dopo. Un astro che sorge ad Est ha azimut uguale a

[1] Per ovviare a fraintendimenti dovuti all'uso dello stesso termine per indicare il tempo e la misura di angoli (specie per i secondi), per la misura degli angoli si utilizza spesso il termine arcominuti (arcmin) per indicare i primi e arcosecondi (arcsec) per indicare i secondi. Noi in genere utilizzeremo h,m,s per il tempo e °,'," per gli angoli.

[2] In alcuni testi l'origine è il sud il verso sempre quello orario.

90°, al tramonto ha azimut uguale a 270°, passando per tutti i valori intermedi.

- * Poiché l'asse del sistema coincide con la direzione della verticale passante per l'osservatore, il sistema altazimutale è locale e variando la posizione dell'osservatore sulla Terra, varia la verticale e quindi il valore delle coordinate altazimutali.

1.4.2 – Il sistema orario o equatoriale locale.

Nel sistema di coordinate orario o equatoriali locali l'asse è l'asse del mondo e il piano di riferimento è il piano equatoriale: in un sistema di assi cartesiani con origine in O il piano xy coincide con il piano equatoriale, l'asse x è diretto verso il mezzogiorno, l'asse y è diretto verso il punto ovest e l'asse z secondo la linea dei poli verso il polo nord (la tema è quindi destrorsa; vedi Figura 1.11).

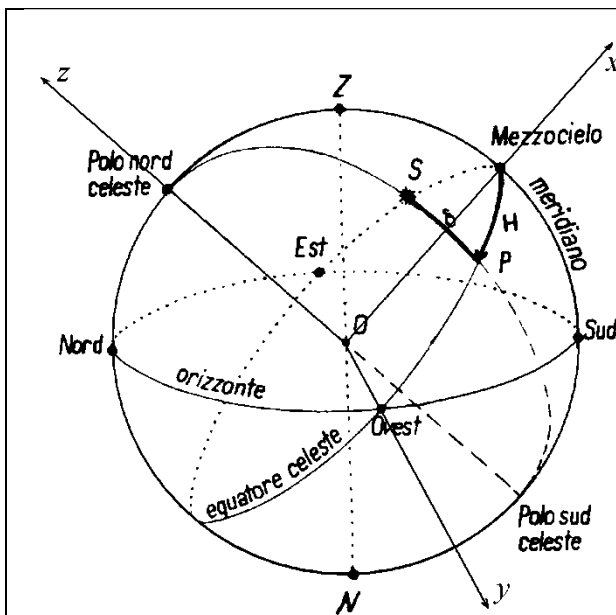


Figura 1.11 – Coordinate orarie o equatoriali locali

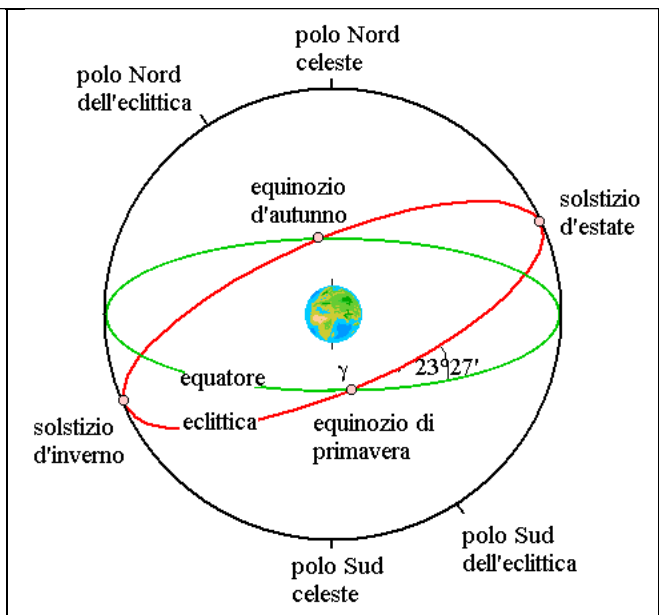


Figura 1.12 – Eclittica

Per ogni punto P (poli nord e sud esclusi) sia P' il punto più vicino a P tra i due individuati dall'intersezione del cerchio orario per P con l'equatore celeste. Gli angoli $\widehat{SOP'}$ e $\widehat{P'OP}$ sono rispettivamente l'**angolo orario H** e la **declinazione δ** di P.

L'angolo orario si misura in ore, da zero a 24 h, in verso orario a partire dal mezzogiorno.

La declinazione si misura dall'equatore celeste in gradi da zero a $\pm 90^\circ$ a seconda che P sia sopra o sotto l'equatore stesso. Contrariamente alle coordinate A , h ed H , la coordinata δ non dipende dalla posizione e dall'istante di osservazione e ha quindi un carattere assoluto.

1.4.3 – Coordinate equatoriali assolute

Nel corso di un anno il Sole descrive apparentemente sulla sfera celeste un cerchio massimo che prende il nome di **eclittica** (dell'epoca) (vedi Figura 1.12).

Il moto del Sole sulla volta celeste sembra avvenire lungo le costellazioni dello zodiaco e poiché il piano dell'eclittica è attualmente inclinato di $\epsilon \approx 23^\circ 27'$ (ϵ si chiama anche **obliquità dell'eclittica** ed è l'inclinazione dell'asse di rotazione della Terra rispetto alla perpendicolare al piano della sua orbita) rispetto al piano dell'equatore celeste, questi due cerchi massimi si intersecano in due punti. Il punto in cui l'eclittica interseca equatore celeste in corrispondenza del quale il Sole passa da sotto a sopra l'equatore è chiamato **primo punto d'Ariete** o **punto vernale** o ancora **punto gamma γ** dal

simbolo greco con cui comunemente lo si indica. È anche il punto in cui si trova il sole il giorno dell'equinozio di primavera. L'altro punto di intersezione, il punto in cui si trova il sole il giorno dell'equinozio d'autunno, si chiama **punto omega Ω** o anche **primo punto della Bilancia**.

Nel sistema delle coordinate equatoriali assolute gli elementi di riferimento sono quelli già introdotti nel sistema di coordinate equatoriali locali, tuttavia la terna di assi cartesiani con origine in O differisce dalla tema precedentemente definita perché ora l'asse x è diretto verso un punto fisso della sfera celeste (e partecipa quindi al moto di rotazione della sfera celeste indipendentemente dall'osservatore) e perché la terna è ora levogira (vedi Figura 1.13). Il punto fisso è il **punto gamma γ** .

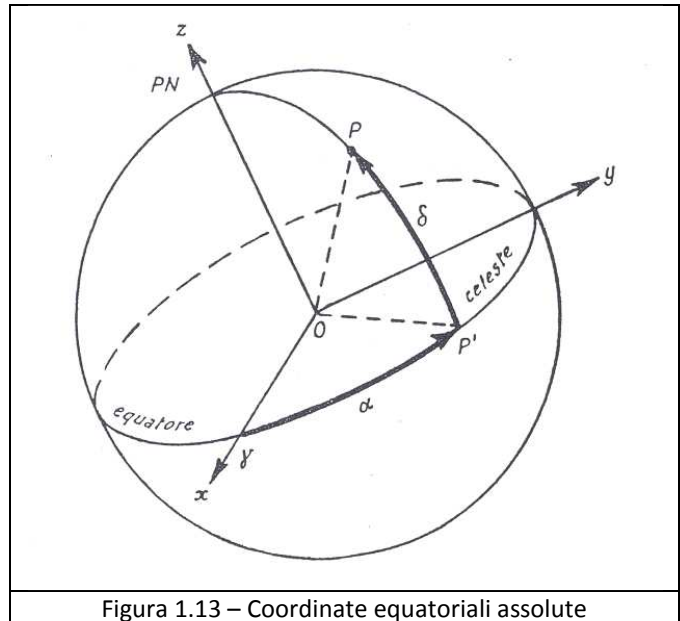


Figura 1.13 – Coordinate equatoriali assolute

In realtà il punto γ non è fisso a causa di una lenta variazione delle giaciture dei piani equatoriale ed eclittico dovuta alla precessione degli equinozi di cui si parlerà più avanti. Ciò implica una corrispondentemente lenta variazione delle coordinate equatoriali e quindi la necessità di far riferimento alla posizione di γ ad una data epoca se si vuole prescindere da questo effetto. Con riferimento alla Figura 1.13 ogni punto P (poli esclusi) rimane individuato dagli angoli $\gamma\hat{O}P'$ e $P'\hat{O}P$, rispettivamente detti **ascensione retta α** e **declinazione δ** .

L'ascensione retta si misura in verso antiorario (o diretto) in ore da zero a 24 h, la declinazione come già detto nel paragrafo 1.4.2.

Al momento del transito di un astro al meridiano, il suo angolo orario è uguale a zero. Un'ora dopo, la volta celeste avrà ruotato di un arco pari a $15^\circ (= 360^\circ/24 \text{ ore})$, cioè misurando gli archi in ore, minuti e secondi, ad 1h. Il suo angolo orario sarà allora esattamente pari a tale valore. Anche il punto γ avrà, istante per istante, un valore preciso del suo angolo orario. Questo particolare angolo orario prende il nome di **Tempo Siderale Locale (TSL o anche t_s)**. Il Tempo Siderale Locale è pari alla somma, in valore assoluto, degli archi $\gamma P'$, cioè dell'ascensione retta dell'astro e dell'arco $P'M$ ($M = \text{Mezzocielo}$), ossia del suo angolo orario H . Abbiamo così ricavato una importante relazione:

$$[0.2] \quad TSL = H + \alpha$$

Risulta evidente che lo zenit dell'osservatore ha declinazione uguale alla latitudine geografica e ascensione retta uguale al TSL . Da ciò si ricava che per conoscere il tempo siderale locale è sufficiente conoscere l'ascensione retta della stella che transita al meridiano locale in quel momento. Non è inoltre difficile osservare che l'altezza del polo sull'orizzonte è anch'esso uguale alla latitudine geografica.

1.4.4 – Coordinate eclittiche

Nel sistema di coordinate eclittiche gli elementi di riferimento sono l'eclittica (dell'epoca) e la perpendicolare all'eclittica stessa. La terna cartesiana con origine in O è levogira con l'asse x diretto verso il punto γ (vedi Figura 1.14). Ogni punto P sulla sfera celeste (esclusi i poli dell'eclittica) è individuato dagli angoli $\gamma\hat{O}P'$ e $P'\hat{O}P$, detti rispettivamente **longitudine eclittica λ** e **latitudine**

eclittica β e misurati entrambi in gradi, il primo da zero a 360° (in verso antiorario) e il secondo da zero a $\pm 90^\circ$ a seconda che P sia sopra o sotto l'eclittica.

Poiché il piano dell'eclittica è inclinato rispetto al piano dell'equatore celeste, risulta, tra l'altro, che il polo Nord ha coordinate eclittiche $\lambda = 90^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \varepsilon$. L'obliquità dell'eclittica varia lentamente nel tempo a causa della variazione di giacitura dei piani dell'eclittica e dell'equatore (vedi più avanti) e variano quindi le coordinate eclittiche. Come nell'analogo caso delle coordinate equatoriali si fa pertanto riferimento all'eclittica di una data epoca.

Questo sistema di coordinate risulta particolarmente utile in tutti i problemi di astronomia planetaria poiché i pianeti si muovono attorno al Sole su orbite quasi complanari con l'eclittica.

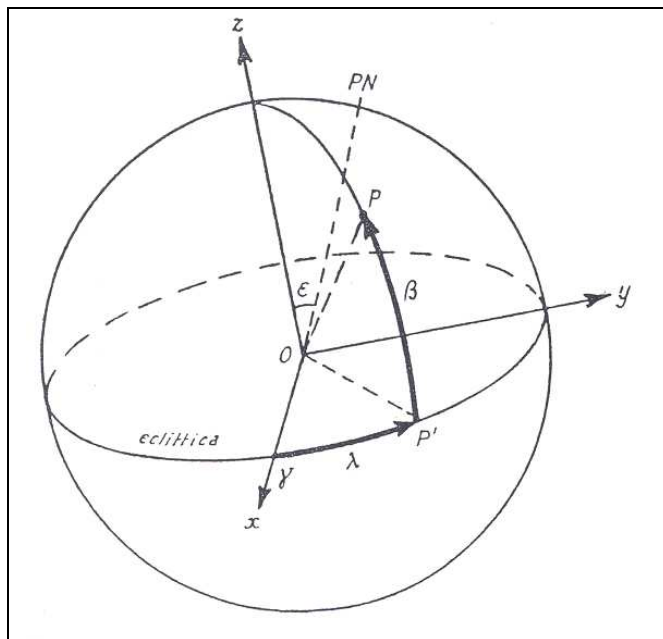


Figura 1.14 – Coordinate eclittiche

1.4.5 – Coordinate galattiche

Il terzo sistema di coordinate è quello delle coordinate galattiche i cui elementi di riferimento sono il piano equatoriale della Galassia e la sua perpendicolare. Questo piano fu definito in due tappe successive, dapprima mediante conteggi stellari, e successivamente come piano di massima emissività della riga 21 cm dell'Idrogeno neutro interstellare. In effetti i due piani (quello definito dalle stelle e quello dell'Idrogeno) sono lievemente inclinati uno rispetto all'altro, ma passano entrambi per il Sole, in modo da rispettare sempre il principio fondamentale di avere l'osservatore al centro della sfera. Una risoluzione dell'IAU del 1976 ha adottato questo secondo sistema come quello propriamente detto galattico.

Il polo nord galattico è definito alle coordinate equatoriali $\alpha = 12^h 49^m$ e $\delta = 27^\circ 24'$ al 1950 e si trova nella costellazione della Coma. La terna cartesiana di riferimento con origine nell'osservatore O è levogira con l'asse x orientato verso il centro galattico, che è localizzabile in prossimità della radiosorgente Sagittarius A e che ha coordinate $\alpha = 17^h 42^m,4$ e $\delta = -28^\circ 55'$ (sempre al 1950) (vedi Figura 1.15).

Il sistema, riferito al 2000 ha il polo nord galattico a $\alpha = 12^h 51^m 26,282^s$, $\delta = +27^\circ 07' 42,01''$. Il punto del cielo in cui sia latitudine che longitudine sono pari a 0 è $\alpha = 17^h 45^m 37,224^s$, $\delta = -28^\circ 56' 10,23''$ (sempre al 2000).

Gli angoli $\widehat{AOP'}$ e $\widehat{P'OP}$, che individuano il punto P sulla sfera celeste, sono nell'ordine la **longitudine galattica** l (elle) e la **latitudine galattica** b . Entrambe queste coordinate si misurano in gradi, la prima da zero a 360° in verso antiorario, la seconda da zero a $\pm 90^\circ$ a seconda che P sia sopra o sotto l'equatore galattico. La stessa definizione di questo sistema di coordinate rende evidente l'opportunità di usare coordinate galattiche in tutti i problemi che coinvolgono la localizzazione di oggetti nella Galassia.

Il piano galattico è inclinato di $62,3^\circ$ rispetto all'equatore celeste.

Come si è potuto vedere l'origine del Sistema di Coordinate coincide con il punto di osservazione che normalmente è un punto della superficie terrestre, in questo caso le coordinate sono dette **topocentriche** e dipendono dalla località cui si riferiscono: in particolare per gli oggetti vicini, quali la Luna e i satelliti artificiali possono variare notevolmente. A parte questi casi le differenze sono molto piccole e vengono trattate come correzioni alle coordinate **geocentriche**, la cui origine è

posta nel centro della Terra.

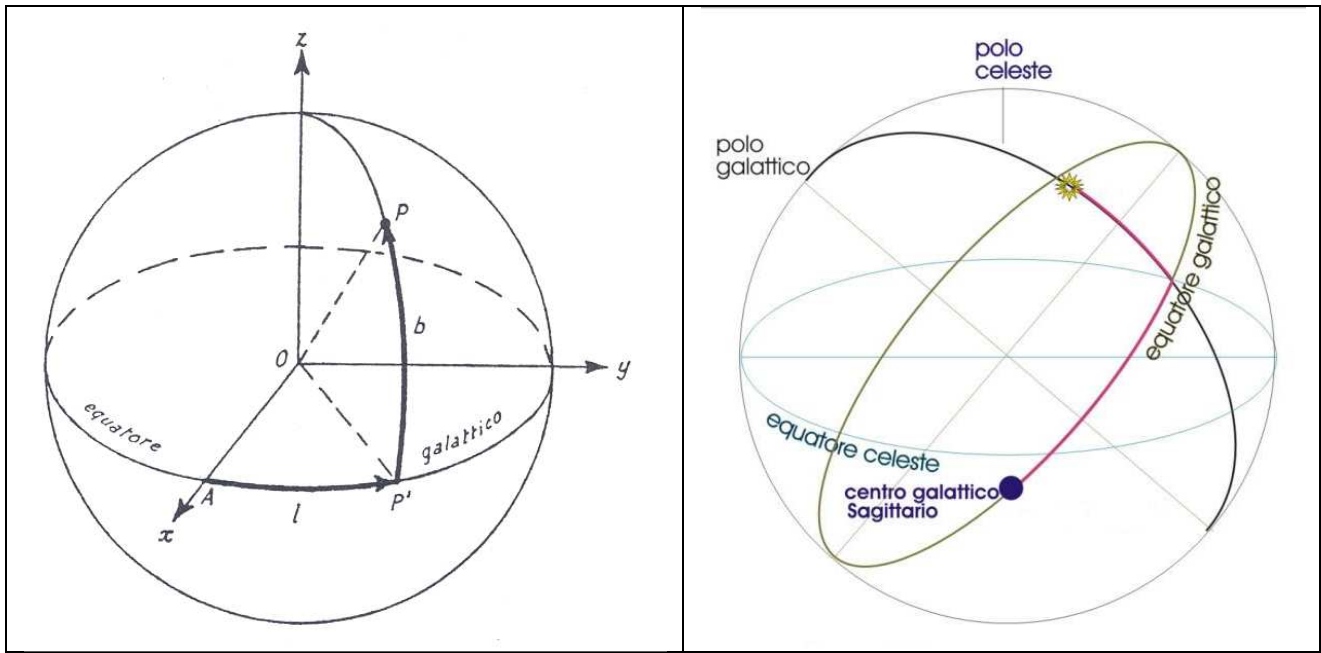


Figura 1.15 – Coordinate galattiche

Nello studio del sistema solare un sistema di coordinate geocentrico crea inutili complicazioni e si adotta quindi un sistema di coordinate la cui origine coincide con il centro del Sole, un sistema **eliocentrico**. Attualmente però nello studio del sistema solare, essendo necessario basarsi su un riferimento inerziale, si fissa l'origine nel baricentro del sistema solare. La differenza non è irrilevante: il baricentro del sistema solare è approssimativamente sulla superficie del Sole.

Con quello che è stato detto, non si esauriscono le possibili scelte per l'origine del sistema di coordinate, per esempio è possibile definire le coordinate **galattocentriche**, riferite cioè al centro della Galassia.

La tabella 1 riassume i principali sistemi di coordinate e le loro caratteristiche.

Tabella 1 – Le coordinate celesti						
COORDINATE	Circonferenza fondamentale	Origine	Verso	Polo	Nomi	Simboli
Orizzontali (Altazimutali)	orizzonte	Nord	N→E	zenit	azimut altezza	A h
Orarie (Equatoriali Locali)	equatore	Mezzocielo superiore	retrogrado	Polo Nord	angolo orario declinazione	H, t δ
Equatoriali (Assolute)	equatore	γ	diretto	Polo Nord	ascensione retta declinazione	α δ
Eclittiche	eclittica	γ	diretto	Polo Nord eclittica	longitudine ecl. latitudine ecl.	λ β
Galattiche	equatore galattico	definizione convenzionale	diretto	definizione convenzionale	longitudine gal. latitudine gal	l b

1.5 – Trasformazioni di coordinate mediante matrici di rotazione

1.5.1 – Introduzione

Abbiamo visto che esistono diversi sistemi di coordinate celesti e che questi differiscono per la diversa posizione dell'origine o per il diverso orientamento o per entrambe le cose. Ognuno di essi si rivela utile in un qualche problema, ma generalmente nella trattazione dei problemi di astronomia di posizione, uno solo di questi sistemi non basta. Per esempio se vogliamo sapere se un pianeta è visibile da una data località, per prima cosa dobbiamo conoscere la sua posizione in un sistema eclittico eliocentrico, quindi si dovrà passare prima ad uno eclittico geocentrico, quindi eclittico topocentrico ed infine ad un sistema altazimutale.

Il problema delle trasformazioni di coordinate è essenziale in astronomia e può essere affrontato in due modi:

- attraverso vettori, traslazioni e rotazioni;
- attraverso la trigonometria sferica, cioè la trigonometria che si applica ai triangoli costruiti sulla superficie sferica.

Fissato un certo punto di osservazione O (l'origine del sistema di coordinate) e una terna cartesiana, la posizione P di un oggetto celeste è individuata dal vettore $\vec{\rho} = \overline{OP}$ eventualmente descritto in termini di coordinate cartesiane x, y, z . Se ci limitiamo alla descrizione dell'oggetto sulla sfera celeste, la distanza non è essenziale e ci si può riferire alla sua posizione su una sfera unitaria, ovvero trattare esclusivamente i versori.

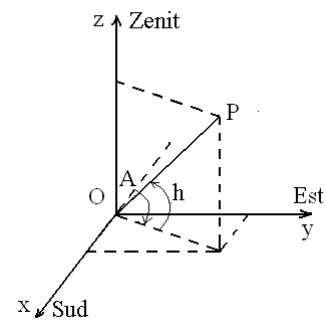
Per ogni sistema di coordinate fisseremo gli assi x e z (l'asse y è definito di conseguenza scegliendo terne destrorse).

Coordinate Altazimutali: A, h

Assi: x verso Sud, z verso lo Zenit quindi y verso Est (si noti che l'asse x punta in verso opposto all'origine degli azimut).

[1.3]

$$\begin{cases} x = -\cosh \cos A \\ y = \cosh \sen A \\ z = \sen h \end{cases}$$

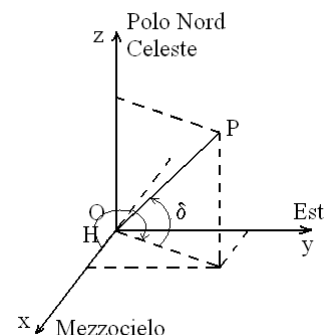


Coordinate Orarie: H, δ

Assi: x verso il Mezzocielo superiore, z verso il Polo Nord Celeste quindi y verso Est.

[1.4]

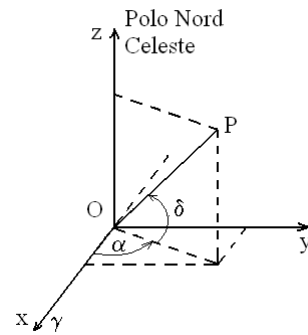
$$\begin{cases} x = \cos \delta \cos H \\ y = -\cos \delta \sen H \\ z = \sen \delta \end{cases}$$



Coordinate Equatoriali: α, δ

Assi: x verso γ , z verso il Polo Nord Celeste e y di conseguenza.

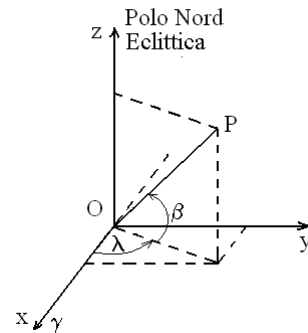
$$[1.5] \quad \begin{cases} x = \cos \delta \cos \alpha \\ y = \cos \delta \sin \alpha \\ z = \sin \delta \end{cases}$$



Coordinate Eclittiche: λ, β

Assi: x verso γ , z verso il Polo Nord Eclittico e y di conseguenza.

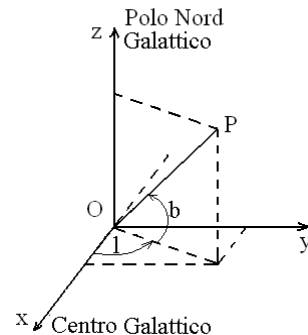
$$[1.6] \quad \begin{cases} x = \cos \beta \cos \lambda \\ y = \cos \beta \sin \lambda \\ z = \sin \beta \end{cases}$$



Coordinate Galattiche: l, b

Assi: x verso il centro della Galassia, z verso il Polo Nord Galattico e y di conseguenza.

$$[1.7] \quad \begin{cases} x = \cos b \cos l \\ y = \cos b \sin l \\ z = \sin b \end{cases}$$



Poiché la scelta dell'origine degli assi e la loro orientazione sono indipendenti, è facile rendersi conto che una qualunque trasformazione di coordinate può essere o una traslazione (cambiamento dell'origine) o da una rotazione (cambiamento del verso degli assi), o, ovviamente da una combinazione di queste.

1.5.2 – Traslazioni

Le traslazioni più frequenti sono la trasformazione di coordinate eliocentriche a geocentriche e quella di coordinate geocentriche a topocentriche e ovviamente quelle inverse.

Detti \vec{r}_e e \vec{r}_g i vettori che individuano la posizione di un oggetto nei due riferimenti eliocentrico e geocentrico rispettivamente, se \vec{p} descrive la posizione della Terra rispetto al Sole, la trasformazione sarà allora:

$$[0.3] \quad \vec{r}_e = \vec{\rho} + \vec{r}_g$$

In modo del tutto analogo si passa dal sistema geocentrico a quello topocentrico quando sia noto il vettore $\vec{\rho}'$ che descrive la posizione della localit  rispetto al centro della Terra:

$$[0.4] \quad \vec{r}_g = \vec{\rho}' + \vec{r}_t$$

\vec{r}_t dipende dal tempo a causa della rotazione terrestre, a meno che non si utilizzi un sistema locale, inoltre il calcolo di \vec{r}_t richiede la forma della Terra, delle coordinate geografiche del luogo e della sua altitudine.

1.5.3 – Rotazioni

Fissiamo adesso il centro di osservazione, scegliendo ad esempio sistemi geocentrici, e vediamo come si trasformano le coordinate da un sistema all'altro.

In tutti i casi si tratta di una rotazione e dunque pu  essere descritta mediante una matrice 3×3, ma non sempre   ovvio individuare l'asse e l'angolo di rotazione.   per  sempre possibile ridurre una trasformazione alla composizione di pi  trasformazioni successive: se per queste   possibile scrivere le corrispondenti matrici, la trasformazione richiesta sar  data dal prodotto di quelle matrici.

In generale, dati due sistemi di riferimento (xyz) e (XYZ) aventi la stessa origine, per passare da uno all'altro si usano le relazioni:

$$[0.5] \quad \begin{cases} X = x \cos xX + y \cos yX + z \cos zX \\ Y = x \cos xY + y \cos yY + z \cos zY \\ Z = x \cos xZ + y \cos yZ + z \cos zZ \end{cases}$$

o anche, in notazione matriciale:

$$[0.6] \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{R}   una matrice 3×3 data da:

$$[0.7] \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{pmatrix}$$

Ricordiamo inoltre che nel sistema (x,y,z), in coordinate polari (ρ, φ, θ), si ha:

$$[0.8] \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Per cui se consideriamo le coordinate polari (ρ, Φ, Θ) anche nel sistema (X,Y,Z) si ha:

$$[0.9] \quad \begin{cases} X = \rho \cos \Theta \cos \Phi \\ Y = \rho \cos \Theta \sin \Phi \\ Z = \rho \sin \Theta \end{cases}$$

Sostituendo nella [0.6]:

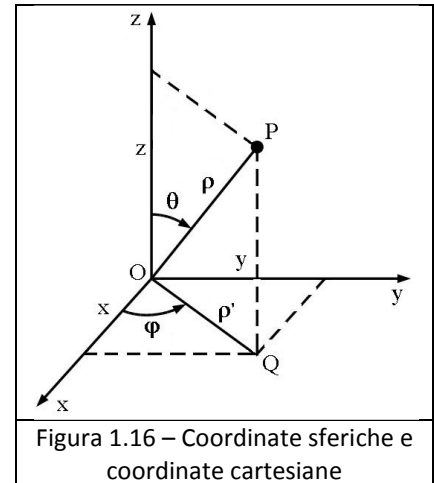


Figura 1.16 – Coordinate sferiche e coordinate cartesiane

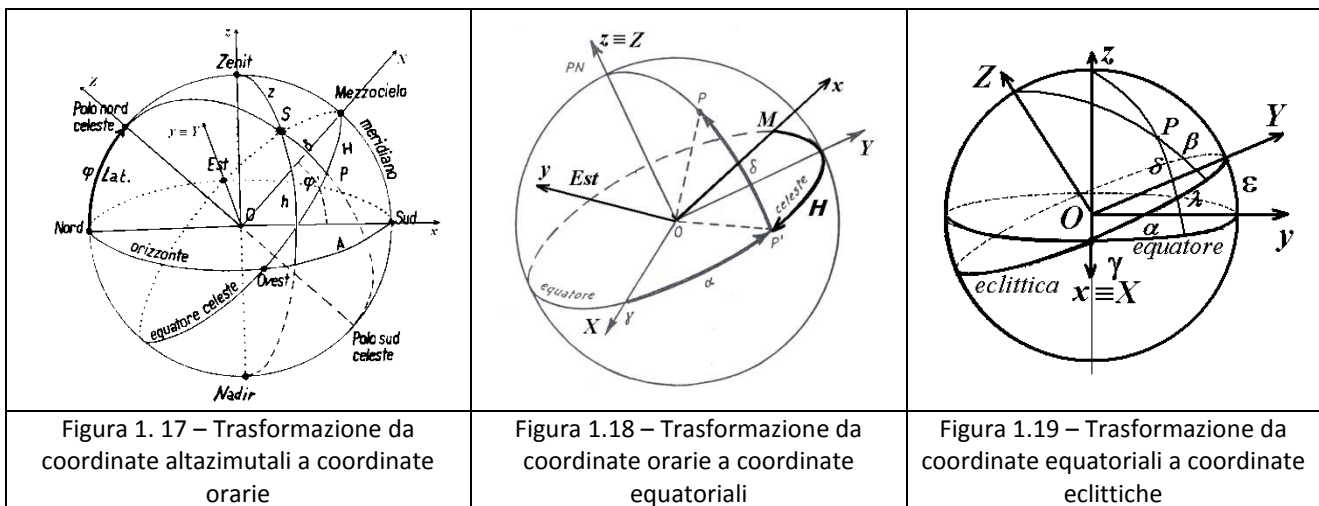
$$[0.10] \quad \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \Phi \\ \cos \Theta \sin \Phi \\ \rho \sin \Theta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

da cui, come si può notare è scomparsa la dipendenza da ρ .

Le coordinate polari nei vari sistemi sono state date sopra. Nel seguito ci limiteremo ai tre casi più frequenti di trasformazione di coordinate:

1) **Da altazimutali a orarie:** è una rotazione attorno all'asse $y \equiv Y$ di un angolo pari alla colatitudine del luogo $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Con l'aiuto della Figura 1.17 si può vedere che la matrice di rotazione è:

$$[0.11] \quad \mathbf{R}_{OA} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & \cos\frac{\pi}{2} & \cos(2\pi - \varphi) \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos 0 & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos(\pi - \varphi) & \cos\frac{\pi}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}$$



2) **Da orarie a equatoriali:** è una rotazione attorno all'asse $z \equiv Z$ di un angolo Θ pari $H(\gamma)$, ovvero l'angolo orario del punto γ ; dipende dall'istante a cui ci si riferisce. L'angolo in questione è il tempo siderale definito con la [0.1]. Con l'aiuto della Figura 1.18 si può ricavare la matrice di rotazione:

$$[0.12] \quad \mathbf{R}_{EO} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos \Theta & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) **Da equatoriali a eclittiche:** è una rotazione attorno all'asse $x \equiv X$ di un angolo ϵ pari all'obliquità dell'eclittica. Con l'aiuto della Figura 1.19 si può ricavare la matrice di rotazione.

$$[0.13] \quad \mathbf{R}_{CE} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \varepsilon & \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \right) \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) & \cos \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \operatorname{sen} \varepsilon \\ 0 & -\operatorname{sen} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

Per ottenere le trasformazioni inverse bisogna stare molto attenti al verso degli angoli, ma in sostanza basta osservare che, nella [0.6] basta porre

$$[0.14] \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{R}^{-1} è la matrice di rotazione inversa. È facile notare che la matrice di rotazione inversa è la trasposta di \mathbf{R} : $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. (ricordiamo che la matrice trasposta di una matrice data si ottiene scambiando le righe con le colonne: $\mathbf{R}_{ij}^T = \mathbf{R}_{ji}$)

1.6 – Applicazioni

Come prima applicazione vediamo come si trasformano le coordinate equatoriali assolute (α, δ) in coordinate eclittiche (λ, β) .

La trasformazione è quindi $\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \operatorname{sen} \varepsilon \\ 0 & -\operatorname{sen} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix}$ da cui si ricava il

sistema di equazioni:

$$[0.15] \quad \begin{cases} \cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \beta \operatorname{sen} \lambda = \operatorname{sen} \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varepsilon \\ \operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha \cos \delta \operatorname{sen} \varepsilon + \operatorname{sen} \delta \cos \varepsilon \end{cases}$$

mentre quella inversa, ossia il passaggio da coordinate eclittiche a coordinate equatoriali assolute si

ottiene da: $\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\operatorname{sen} \varepsilon \\ 0 & \operatorname{sen} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \beta \end{pmatrix}$ da cui si ricava il sistema di equazioni:

$$[0.16] \quad \begin{cases} \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha = \cos \varepsilon \cos \beta \operatorname{sen} \lambda - \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \varepsilon \cos \beta \operatorname{sen} \lambda + \cos \varepsilon \operatorname{sen} \beta \end{cases}$$

Come si può vedere si hanno a disposizione tre equazioni per determinare due quantità e i loro segni, cioè i quadranti in cui si situano gli angoli.

Come seconda applicazione vogliamo determinare l'istante in cui un astro di date coordinate equatoriali assolute sorge o tramonta in una data località.

Il problema non è completamente risolvibile con le conoscenze fin qui acquisite, ma possiamo comunque fare delle importanti considerazioni. Supponiamo innanzi tutto che l'osservatore O abbia

un orizzonte perfettamente libero e che si trovi al livello del mare e che la Terra sia perfettamente sferica. Siano (λ, φ) le coordinate geografiche di O e (α, δ) le coordinate equatoriali dell'astro S. Per prima cosa effettuiamo le trasformazioni da coordinate orarie (H, δ) in coordinate altazimutali (A, h) , poi passeremo a quelle equatoriali tramite il tempo siderale.

$$\begin{pmatrix} -\cosh \cos A \\ \cosh \sen A \\ \sen h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sen \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sen \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sen H \\ \sen \delta \end{pmatrix}$$

da cui si ricava il sistema di equazioni:

$$[0.17] \quad \begin{cases} \cosh \cos A = -\cos \delta \cos H \sen \varphi + \sen \delta \cos \varphi \\ \cosh \sen A = -\cos \delta \sen H \\ \sen h = \cos \delta \cos H \cos \varphi + \sen \delta \sen \varphi \end{cases}$$

Ricaviamo anche le inverse:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sen H \\ \sen \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sen \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sen \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cosh \cos A \\ \cosh \sen A \\ \sen h \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$[0.18] \quad \begin{cases} \cos \delta \cos H = -\cosh \cos A \sen \varphi + \sen h \cos \varphi \\ \cos \delta \sen H = -\cosh \sen A \\ \sen \delta = \cosh \cos A \cos \varphi + \sen h \sen \varphi \end{cases}$$

La terza equazione delle [0.17] è l'espressione che cercavamo in quanto lega l'altezza dell'astro alla declinazione, all'angolo orario (e quindi al tempo) e alla latitudine del luogo. Se facciamo eccezione per i poli ($\varphi = \pm 90^\circ$) dove l'equazione perde di significato, quando l'astro è esattamente sull'orizzonte, $h = 0$ e quindi:

$$[0.19] \quad \cos H = -\tan \delta \tan \varphi$$

Dalla prima delle [0.17] si ricava l'espressione per l'azimut del sorgere e del tramontare; infatti sostituendo $h = 0$ e la [1.24] si ha:

$$[0.20] \quad \cos A = \frac{\sen \delta}{\cos \varphi}$$

Verranno analizzate alcune situazioni particolari.

- * Gli astri che stanno sull'equatore celeste hanno declinazione nulla, $\delta = 0$, quindi, nella [1.24], $\cos H = 0$. Qualunque sia la latitudine è $H = 90^\circ$ e $H = 270^\circ$ (sono rispettivamente l'Ovest e l'Est). Indipendentemente dalla latitudine del luogo tali astri sorgono precisamente ad Est e tramontano precisamente ad Ovest.
- * Se ci troviamo all'equatore, $\varphi = 0$ e nella [1.24], qualunque sia la declinazione dell'astro, si ha $\cos H = 0$, quindi $H = \pm 90^\circ$. L'astro descrive sulla volta celeste un arco di angolo orario

complessivo di 180° , quindi resta sopra l'orizzonte esattamente per 12 ore.

- * Se ci troviamo ai poli $\varphi = \pm 90^\circ$, dalla terza delle [1.23], $\text{sen}h = \text{sen}\delta$, ovvero $h = \pm\delta$; tutte le stelle che hanno la stessa declinazione si trovano alla stessa altezza e non sorgono né tramontano.
- * Se $\delta = 90^\circ - \varphi$, allora nella [1.24] $\cos H = -\tan(90^\circ - \varphi)\tan\varphi = -\frac{1}{\tan\varphi}\tan\varphi = -1$ quindi $H = 180^\circ$. Ciò significa che l'astro "sorge" e "tramonta" nello stesso istante a Nord, quindi, sulla volta celeste, descrive una circonferenza che lambisce l'orizzonte Nord.
- * Se $\delta > 90^\circ - \varphi$ allora $\tan\delta\tan\varphi > 1$ e l'equazione [1.24] non ammette soluzioni, ciò significa che l'astro non sorge né tramonta mai, ma rimane sempre sopra l'orizzonte. In questo caso si dice che è **circumpolare**.

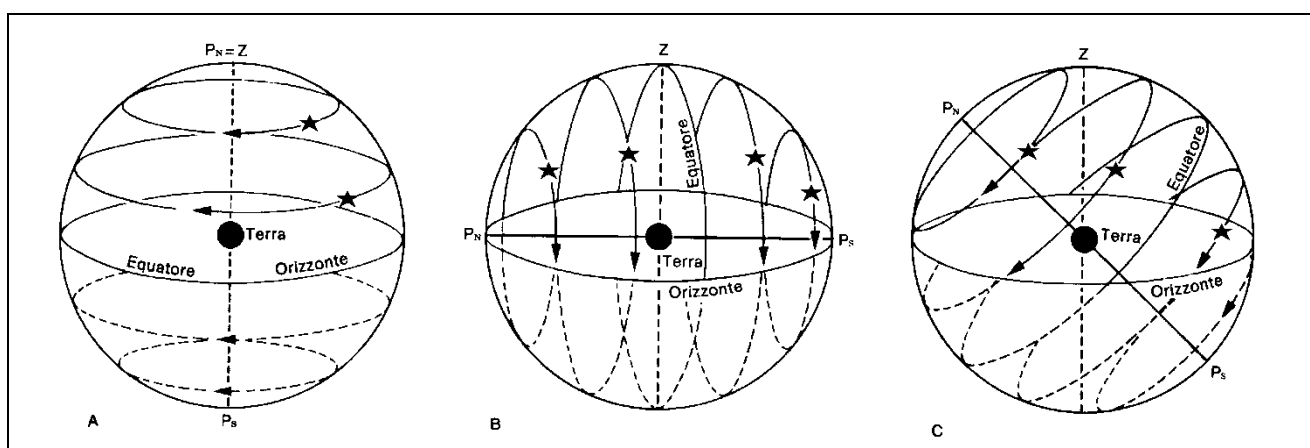


Figura 1.20 – La rotazione della sfera celeste. A) L'osservatore si trova al polo nord: tutte le stelle descrivono cerchi paralleli all'orizzonte; nessuna stella sorge e nessuna tramonta. B) L'osservatore si trova all'equatore: tutte le stelle descrivono cerchi attorno alla linea orizzontale nord-sud e tutte le stelle sorgono e tramontano. C) L'osservatore si trova ad una latitudine intermedia settentrionale: tutte le stelle descrivono archi obliqui rispetto all'orizzonte; le stelle che distano dal polo nord celeste (PN) di un arco minore della latitudine del luogo non tramontano mai, quelle che distano dal polo sud celeste di un arco minore di tale latitudine non si vedono mai, le altre sorgono e tramontano.

- * Se $\delta = \varphi - 90^\circ$, allora, sempre dalla [1.24], $\cos H = -\tan(\varphi - 90^\circ)\tan\varphi = \frac{1}{\tan\varphi}\tan\varphi = 1$ quindi $H = 0$. Ciò significa che l'astro "sorge" e "tramonta" nello stesso istante a Sud, quindi, sulla volta celeste, descrive una circonferenza che lambisce l'orizzonte Sud, ma non sale mai sopra l'orizzonte. Questo valore è il limite per gli astri che non sorgono mai.
- * Se $\delta < \varphi - 90^\circ$, allora $\tan\delta\tan\varphi < -1$, quindi l'astro non sorge mai.

Per determinare l'istante in cui sorge o tramonta l'astro bisogna calcolare il tempo siderale facendo uso della [1.2].

Vediamo un esempio numerico. Vogliamo determinare gli istanti in cui sorge e tramonta la stella Sirio dal piazzale del Dipartimento di Fisica di Camerino. Le coordinate equatoriali di Sirio, al 2000, sono: $\alpha = 6\text{h } 45,142\text{m}$; $\delta = -16^\circ 43,194'$.

Le coordinate geografiche del piazzale sono: $\lambda = 13^\circ 4,067'$; $\varphi = 43^\circ 8,400'$.

Dalla [1.24]: $\cos H = -\tan(-16,7199^\circ)\tan(43,1400^\circ) = 0,2815$ [3] da cui segue $H = \pm 73,65^\circ$.

Il valore negativo corrisponde al sorgere della stella, quello positivo al tramonto; tutto l'arco corrisponde a $147,3^\circ = 9\text{h } 49,2\text{m}$ che è il tempo in cui la stella Sirio rimane sopra l'orizzonte di Camerino (se fosse piatto!!!).

Per utilizzare la [1.2] dobbiamo prima o trasformare l'ascensione retta in gradi o l'angolo orario in ore. Trasformiamo l'angolo orario in ore; $H = \pm 4\text{h } 54,6\text{m}$. Si ha

$$TSL = \alpha + H = 6\text{h } 45,142\text{m} \pm 4\text{h } 54,6\text{m}$$

da cui l'istante di tempo siderale in cui Sirio sorge è $TSL_S = 1\text{h } 50,5\text{m}$ e l'istante di tempo siderale in cui tramonta è $TSL_T = 11\text{h } 39,7\text{m}$.

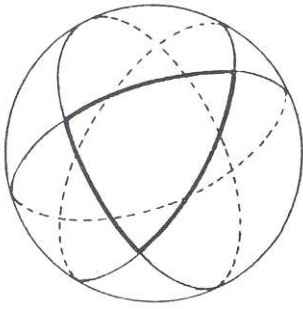
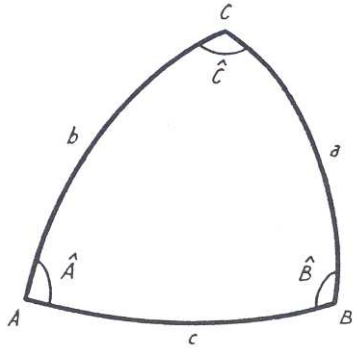
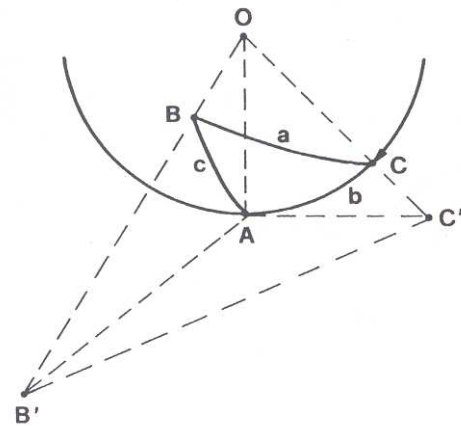
Rimane da stabilire come fare a trasformare il tempo siderale locale in tempo civile, ma le nostre conoscenze ancora non lo permettono.

Dalla [1.25] ricaviamo che l'azimut del sorgere e del tramontare di Sirio è $A=113,2^\circ$ e $A=-113,2^\circ$. Per come abbiamo definito l'azimut, si avrà: $A_S = 113,2^\circ$ e $A_T = -113,2^\circ = 246,8^\circ$.

1.7 – Trasformazioni di coordinate mediante la trigonometria sferica

La trigonometria sferica generalizza alla superficie sferica le nozioni e le proprietà della trigonometria piana. Ci limiteremo a dare alcune definizioni basilari e qualche esempio di applicazioni astronomiche.

Si definisce **triangolo sferico** la superficie di sfera delimitata da tre archi (lati) di cerchi massimi congiungenti, a coppie, tre punti (vertici) della sfera.

		
<p>Figura 1.21 – Tre piani passanti per il centro della sfera individuano tre cerchi massimi e 8 triangoli sferici. Nella Figura è marcato un triangolo sferico semplice.</p>	<p>Figura 1.22 – Lati e angoli di un triangolo sferico.</p>	<p>Figura 1.23 – Dimostrazione della I formula di Gauss.</p>

Un triangolo sferico si dice **semplice** se i lati sono minori di una semicirconferenza; un triangolo

[3] Gli angoli dati in gradi, primi e frazioni decimali di primo, sono stati trasformati in gradi e frazioni decimali

sferico semplice appartiene ad una semisfera (vedi Figura 1.21).

Se A, B e C sono i vertici del triangolo sferico semplice (vedi Figura 1.22), siano a, b, c i lati e \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} gli angoli opposti ai lati omonimi. In un triangolo sferico semplice la somma degli angoli, contrariamente a quanto avviene per i triangoli piani, risulta maggiore di 180° (e minore di 540°); la somma dei lati è invece compresa tra 0 e 2π radianti (il raggio della sfera è unitario). Si chiama **eccesso sferico** ϵ di un triangolo sferico la somma degli angoli del triangolo diminuita di 180° (è sempre $\epsilon > 0$). L'area di un triangolo sferico è uguale al semiprodotto dell'eccesso sferico (espresso in radianti) per il quadrato del raggio della sfera.

Le principali relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo sferico vanno sotto il nome di **relazioni di Gauss** e di solito sono riunite in vari gruppi.

Ricaviamo almeno una di tali relazioni. Consideriamo la Figura 1.23, dal centro O della sfera proiettiamo i due vertici B e C sul piano tangente in A. Otteniamo così i triangoli piani AB'C', OAB', OAC'. Consideriamo OAB', in cui è:

$$OA = 1, \quad O\hat{A}B' = 90^\circ, \quad B'\hat{O}A = c, \quad AB' = \tan c, \quad OB' \cos c = 1$$

inoltre, allo stesso modo nel triangolo OAC' si ha:

$$AC' = \tan b, \quad OC' \cos b = 1.$$

Nel triangolo piano B'AC', l'angolo B'AC' è per definizione l'angolo sferico A, da cui:

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A$$

Nel triangolo piano OB'C':

$$B'C'^2 = OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cdot \cos a$$

Ricordando che risulta $1 + \tan^2 \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A &= OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cdot \cos a \\ \tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan c \cdot \tan b \cdot \cos A &= \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2 \frac{1}{\cos c} \frac{1}{\cos b} \cos a \\ \cancel{\tan^2 c} + \cancel{\tan^2 b} - 2 \tan c \cdot \tan b \cdot \cos A &= 1 + \cancel{\tan^2 c} + 1 + \cancel{\tan^2 b} - 2 \frac{1}{\cos c} \frac{1}{\cos b} \cos a \\ \frac{\text{sen}c}{\cos c} \frac{\text{sen}b}{\cos b} \cos A &= -1 + \frac{1}{\cos c} \frac{1}{\cos b} \cos a \\ \text{sen}b \text{sen}c \cos A &= -\cos b \cos c + \cos a \end{aligned}$$

Questa equazione è la prima del primo gruppo di Gauss

$$[0.21] \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \text{sen}b \text{sen}c \cos A \\ \text{sen}a \cos B = \cos b \text{sen}c - \text{sen}b \cos c \cos A \\ \frac{\text{sen}A}{\text{sen}a} = \frac{\text{sen}B}{\text{sen}b} = \frac{\text{sen}C}{\text{sen}c} \end{array} \right.$$

Omettiamo la dimostrazione delle altre due che possono essere trovate in qualunque libro di trigonometria sferica (vedi per esempio Zagar: *Astronomia sferica e teorica*, Zanichelli 1948).

Se nella [1.26] poniamo $A = 90^\circ$, il triangolo ABC è rettangolo in A e la prima delle [1.26] diventa

$$[0.22] \quad \cos a = \cos b \cos c$$

che rappresenta una sorta di Teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli sferici: **il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti.**

Come ulteriore applicazione di geometria sferica calcoliamo la distanza tra due punti su una superficie sferica.

Siano A e B due punti su una superficie sferica di raggio R. Sia C il punto dell'equatore sullo stesso meridiano di A e assumiamo il meridiano di A come meridiano zero. Fissiamo quindi un sistema di riferimento cartesiano Oxyz come indicato nella Figura 1.24 (la direzione degli assi non è importante, basta che la terna sia levogira). Per semplificare i calcoli il piano xz sia il piano equatoriale e sia B' la proiezione di B sul piano xz; A appartiene quindi sul piano yz.

I vettori \vec{OA} e \vec{OB} , in coordinate cartesiane, sono espressi da:

$$\vec{OA} = R(\sin\alpha\vec{j} + \cos\alpha\vec{k})$$

$$\vec{OB} = R(\cos\gamma\sin\beta\vec{i} + \sin\gamma\vec{j} + \cos\gamma\cos\beta\vec{k}).$$

Con l'usuale significato di \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Il prodotto scalare dei due vettori è:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Il prodotto scalare è dato anche da

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2 \cos \hat{A\hat{O}B}$$

quindi

$$\cos \hat{A\hat{O}B} = \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

La distanza AB, sulla superficie sferica, si ottiene quindi da

$$[0.23] \quad d(AB) = R \arccos(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

Se assumiamo la Terra sferica e se A e B sono due luoghi della superficie terrestre con (λ_A, φ_A) e (λ_B, φ_B) le loro longitudini e latitudini geografiche, allora si ha:

$$[0.24] \quad d(AB) = R \arccos(\sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B))$$

Per esempio, la distanza tra Camerino e Hanga Roa (Isola di Pasqua) che si trova alle coordinate geografiche $\lambda = -109^\circ 25,633'$, $\varphi = -27^\circ 8,300'$, considerando il raggio medio della Terra pari a 6371 km è di 14 600 km.

L'assunzione della Terra perfettamente sferica comporta un errore che è circa lo 0,2 %.

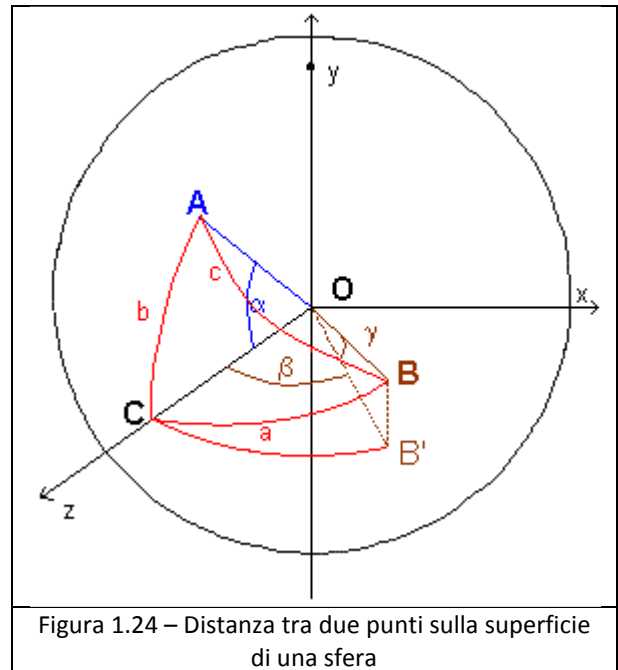


Figura 1.24 – Distanza tra due punti sulla superficie di una sfera

