

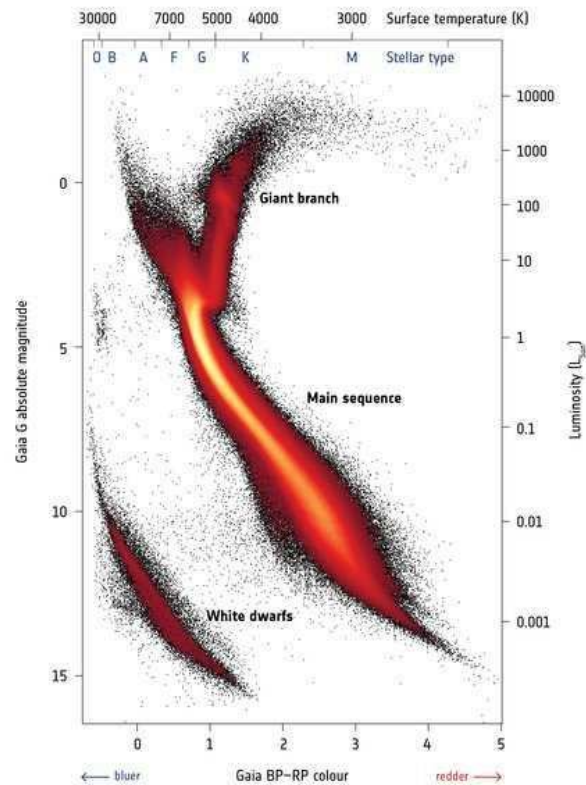


Laurea Triennale in fisica
a.a. 2018 – 2019

FONDAMENTI DI ASTROFISICA

Prof. Angelo Angeletti

→ GAIA'S HERTZSPRUNG-RUSSELL DIAGRAM



In copertina:

Il primo diagramma di Hertzsprung-Russell realizzato con i dati della sonda GAIA dell'ESA

Indice

1 – Sistemi di riferimento astronomici e trasformazioni di coordinate	
1.1 – La sfera celeste.....	1
1.2 – Le costellazioni.....	3
1.3 – Le coordinate geografiche.....	5
1.4 – Sistemi di coordinate astronomiche.....	6
1.4.1 – Il sistema altazimutale.....	7
1.4.2 – Il sistema orario o equatoriale locale.....	8
1.4.3 – Coordinate equatoriali assolute.....	8
1.4.4 – Coordinate eclittiche.....	9
1.4.5 – Coordinate galattiche.....	10
1.5 – Trasformazioni di coordinate mediante matrici di rotazione.....	12
1.5.1 – Introduzione.....	12
1.5.2 – Traslazioni.....	13
1.5.3 – Rotazioni.....	14
1.6 – Applicazioni.....	16
1.7 – Trasformazioni di coordinate mediante la trigonometria sferica.....	19
2 – La terra e i suoi movimenti	
2.1 – Parametri fisici della Terra.....	23
2.2 – Il moto di rotazione.....	24
2.2.1 – Generalità.....	24
2.2.2 – Prove della rotazione terrestre.....	25
2.2.3 – Il ciclo del dì e della notte.....	26
2.3 – Il moto di rivoluzione.....	27
2.3.1 – Generalità.....	27
2.3.2 – Prove e conseguenze della rivoluzione terrestre.....	27
2.3.3 – Il ritmo delle stagioni.....	29
2.4 – I moti secondari.....	31
2.4.1 – Il moto biconico.....	32
2.4.2 – Nutazione.....	32
2.4.3 – Variazione dell'inclinazione.....	32
2.4.4 – Polodia.....	33
2.4.5 – Rotazione della linea degli apsidi.....	33
2.4.6 – Precessione degli equinozi.....	33
2.4.7 – Variazione della distanza tra i fuochi.....	34
2.4.8 – Moto di traslazione.....	35
2.4.9 – Conseguenze dei moti millenari della Terra.....	36
3 – Il tempo e la sua misura	
3.1 – Introduzione.....	41
3.2 – Tempo siderale.....	43
3.3 – Tempo solare.....	43
3.3.1 – Tempo solare vero.....	43
3.3.2 – Tempo solare medio.....	45
3.3.3 – Equazione del tempo.....	46
3.4 – Tempo locale, differenza di longitudine.....	49
3.5 – Tempo legale, riduzione del tempo da un meridiano all'altro.....	50
3.6 – Anno siderale, tropico, besseliano, anomalistico, giuliano e gregoriano.....	51

3.7 – Relazione fra tempo medio e tempo siderale	54
3.8 – Il Tempo universale	56
3.9 – Incostanza dell'unità astronomica del tempo	57
4 – Rifrazione, aberrazione, precessione e nutazione	
4.1 – Introduzione	59
4.2 – Rifrazione atmosferica e seeing	61
4.2.1 – Traiettoria luminosa	61
4.2.2 – Rifrazione per piccole distanze zenitali	62
4.2.3 – Estinzione, scintillazione, seeing	64
4.3 – Aberrazione	67
4.4 – Precessione e nutazione (approfondimento)	70
4.4.1 – Precessione	71
4.4.2 – Nutazione	73
4.5 – Polodia (approfondimento)	75
4.6 – La deflessione gravitazionale della luce	76
5 – Distanze e moti stellari	
5.1 – Parallassi e distanze	77
5.1.1 – Parallasse trigonometrica	78
5.1.2 – Unità di distanza	80
5.2 – Moti delle stelle	83
5.2.1 – Moti propri	83
5.2.2 – Velocità radiali e trasverse	85
5.3 – Magnitudini	87
5.3.1 – Magnitudine apparente	87
5.3.2 – Magnitudine assoluta	88
6 – La legge della gravitazione universale di Newton e le leggi di Keplero	
6.1 – Le leggi di Keplero	91
6.2 – Newton e la legge della gravitazione universale	93
6.3 – Deduzione della legge di Newton dalle leggi di Keplero	96
6.4 – Il problema dei due corpi	98
6.5 – Il moto dei pianeti intorno al sole (Una lezione di Richard Feynman)	104
7 – Il problema di Keplero	
7.1 – Equazione di Keplero	105
7.2 – Aspetto dei pianeti	110
8 – Determinazione dei parametri orbitali da tre osservazioni	
8.1 – Introduzione	113
8.2 – Cenni del metodo di Laplace	114
9 – Il problema dei tre corpi e il volo interplanetario	
9.1 – Introduzione	119
9.2 – Il problema ristretto	120
9.3 – Superfici di Hill	121
9.4 – I punti di Lagrange	125
9.5 – Orbite di Hohmann	126
9.6 – Effetto fionda	128

10 – Elementi di Astrofisica	
10.1 – Generalità	133
10.2 – Caratteristiche fisiche delle stelle	137
10.2.1 – La massa	137
10.2.2 – La temperatura e la composizione chimica	138
10.2.3 – Radiazione stellare	142
10.2.4 – Flusso – Temperatura effettiva	143
10.2.5 – Le magnitudini (approfondimento)	144
10.2.6 – Indici di colore e classi spettrali	145
10.3 – Popolazioni stellari	147
10.3.1 – Popolazione II	147
10.3.2 – Popolazione I	147
10.3.3 – Popolazione III	148
10.4 – Statistica stellare	148
10.5 – Il diagramma di Hertzsprung e Russell	149
10.6 – Il Sole	151
10.6.1 – Generalità	151
10.6.2 – La struttura del Sole	155
11 – Evoluzione stellare	
11.1 – Introduzione	161
11.2 – Le nubi interstellari	163
11.3 – Le condizioni iniziali di collasso	165
11.3.1 – Il ruolo della rotazione	166
11.3.2 – Casi particolari di collasso isoterma	167
11.4 – Il criterio di Jeans	167
11.5 – Il collasso adiabatico	168
11.6 – La traccia di Hayashi	170
11.7 – La sequenza principale (MS)	172
11.8 – Oltre la sequenza principale	178
11.8.1 – L'esaurimento dell'idrogeno centrale	178
11.8.2 – Verso l'innescò dell'elio	179
11.8.3 – Dal flash dell'Elío al ramo orizzontale	184
11.8.4 – Effetto della metallicità: la popolazione zero	186
11.8.5 – L'esaurimento dell'Elío, secondo rimescolamento e ramo asintotico (AGB)	187
11.8.6 – Nane bianche	189
11.8.7 – Evoluzione per stelle di grande massa $M > 9M_{\odot}$	191
11.8.8 – Stelle di neutroni e pulsar	194
11.8.9 – Buchi neri	195
11.8.10 – Supernovae tipo Ia	195
12 – I pianeti extrasolari	
12.1 – Il Sistema Solare	201
12.2 – Formazione del Sistema Solare	204
12.2.1 – I modelli basati sulla turbolenza	204
12.2.2 – Le teorie mareali	204
12.2.3 – Le teorie di cattura	205
12.2.4 – L'ipotesi nebulare di Kant-Laplace	205
12.3 – Qualche definizione e un po' di storia sui pianeti extrasolari	209
12.4 – I metodi per la rivelazione dei pianeti extrasolari	215

12.4.1 – Metodi diretti	216
12.4.2 – Metodo astrometrico	217
12.4.3 – Metodo delle velocità radiali	217
12.4.4 – Pulsar Timing	219
12.4.5 – Metodo del microlensing	219
12.4.6 – Tracce di dischi a polveri	220
12.4.7 – Metodo del transito	221
12.4.7.1 – Caratteristiche del transito	223
12.4.7.2 – Determinazione dei parametri fisici del pianeta	226
12.5 – Migrazioni planetarie	228
12.6 – Programmi futuri	229
13 – Esercizi e problemi svolti	231

Capitolo 1

Sistemi di riferimento astronomici e trasformazioni di coordinate

1.1 – La sfera celeste

Una prima osservazione del cielo, diurno o notturno che sia, rivela che esso appare come una superficie continua, sulla quale sembrano fissate le stelle e vediamo muoversi il Sole, la Luna e i Pianeti. Questa superficie appare rotonda, giustificando quindi il nome che le si dà: **sfera celeste**. Questo nome compete dunque a quella superficie continua che sembra avvolgere tutto il nostro globo; il fatto di assimilarla ad una sfera ha una giustificazione geometrica: l'osservazione ad occhio nudo non è in grado di rivelare che le stelle sono a diverse distanze dalla Terra, esse appaiono tutte come fossero egualmente distanti da noi. In tutti i nostri studi di Astronomia di posizione parleremo quindi di sfera celeste. Quando sarà necessario parlare della distanza dei corpi celesti, lo diremo espressamente.

Un'osservazione più accurata rivela che tutta la volta celeste sembra ruotare durante la giornata in modo uniforme intorno a due punti fissi, opposti tra loro, che chiameremo **poli celesti**. Congiungendo i due poli tra loro con una retta otteniamo l'**asse del mondo**.

Oggi sappiamo che la rotazione del cielo intorno all'asse del mondo è dovuta alla rotazione della Terra intorno al proprio asse.

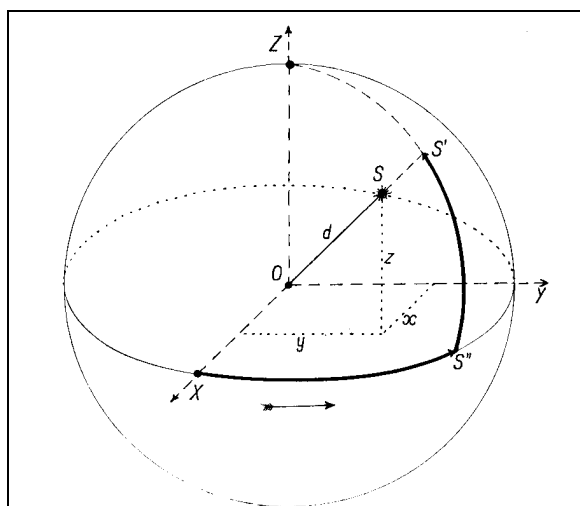


Figura 1.1 - Coordinate di un astro S visto da un punto O . x,y,z , sono le sue coordinate rettilinee rispetto al sistema di assi $OXYZ$; le ampiezze degli archi XS'' e $S''S'$, corrispondenti alla posizione sferica S' di S , sono le coordinate sferiche dell'astro.



Figura 1.2 – Rotazione della volta celeste; a sinistra rispetto al polo nord celeste, a destra rispetto al polo sud celeste.

L'asse del mondo e l'asse della Terra sono coincidenti e di conseguenza i poli celesti e i poli terrestri sono allineati (vedi Figura 1.3). Possiamo dire che i poli celesti sono la proiezione sulla volta celeste dei poli terrestri e prendono gli stessi nomi. Quindi la proiezione del polo Nord Terrestre si chiama Polo Nord Celeste (PN) ed analogamente per il Polo Sud (PS).

Definiti i poli, definiamo **centro della Terra** il punto medio del segmento che ha per estremi i poli terrestri. Occorre tenere presente che, al momento, considereremo la Terra come perfettamente sferica e omogenea, pertanto il baricentro della Terra ed il suo centro geometrico coincidono. Quando questa approssimazione non potrà essere utilizzata lo preciseremo.

Se indichiamo con O la posizione di un osservatore sulla superficie terrestre, la retta verticale (**verticale astronomica**) per O, fisicamente rappresentata dalla direzione del filo a piombo, individua sulla sfera celeste i due punti lo **zenit** Z e il **nadir** N posti rispettivamente verso la testa e verso i piedi dell'osservatore. Il piano per O perpendicolare

alla verticale prende il nome di **piano orizzontale**, la sua intersezione con la sfera celeste definisce un cerchio massimo che si chiama **orizzonte celeste**. La sfera celeste è intersecata dai piani paralleli al piano orizzontale nei **cerchi di altezza** e dai piani verticali passanti per la verticale nei **cerchi verticali**. Il piano definito dalla verticale e dalla linea dei poli prende il nome di **piano meridiano**, esso interseca la sfera celeste lungo il **meridiano celeste** (il nome trae origine dal fatto che esso è attraversato dal Sole ad ogni mezzogiorno) ed il piano orizzontale lungo la **linea meridiana** (vedi Figura 1.4). Il piano definito dalla verticale e dalla normale per O al piano meridiano è detto **primo verticale**. I quattro punti cardinali sono individuati dalle intersezioni con la sfera celeste della linea meridiana e della sua perpendicolare per O nel piano orizzontale (il punto Nord è dalla parte del polo Nord; i punti Nord, Est, Sud e Ovest si susseguono in verso orario).

Evidentemente, per ogni osservatore c'è una verticale e quindi uno zenit e un nadir, mentre i poli celesti sono gli stessi per tutti gli osservatori.

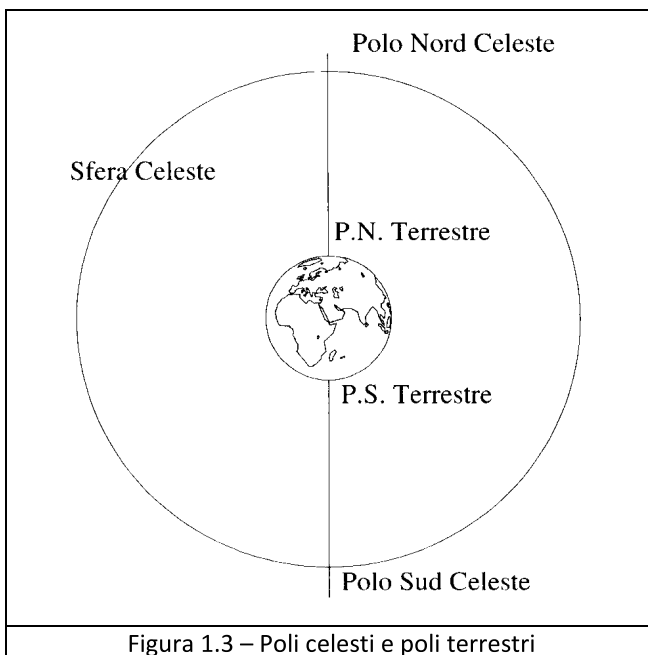


Figura 1.3 – Poli celesti e poli terrestri

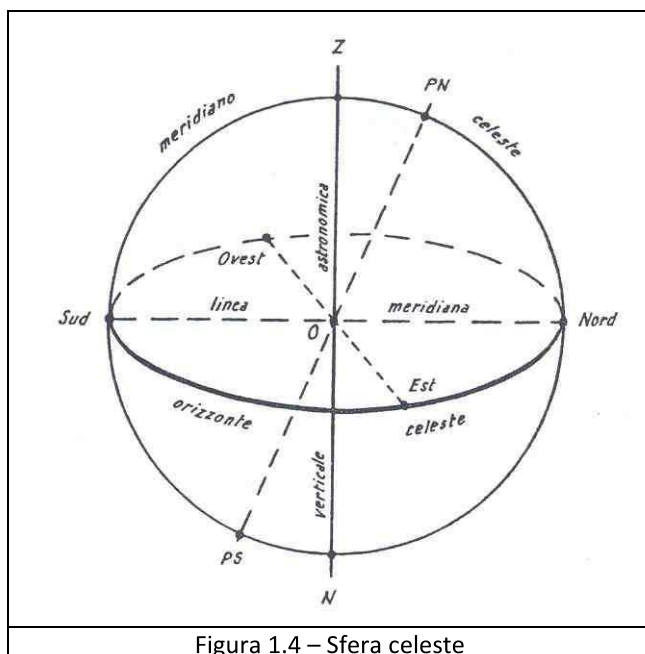


Figura 1.4 – Sfera celeste

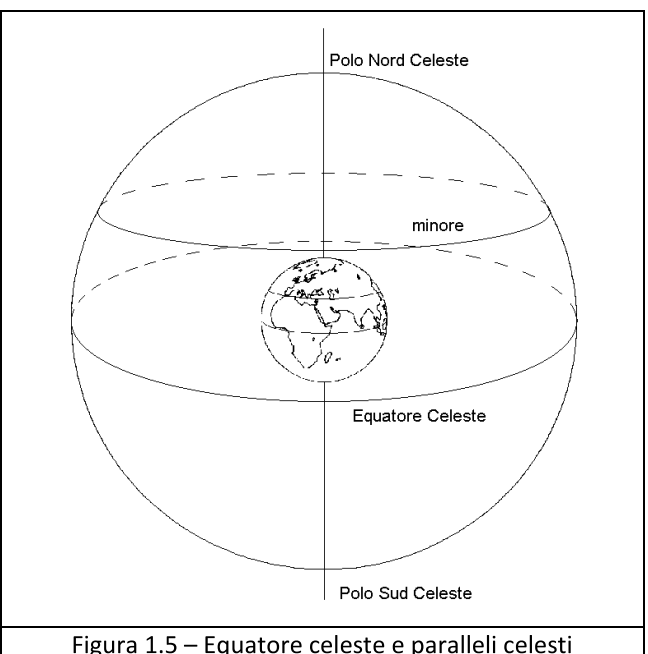


Figura 1.5 – Equatore celeste e paralleli celesti

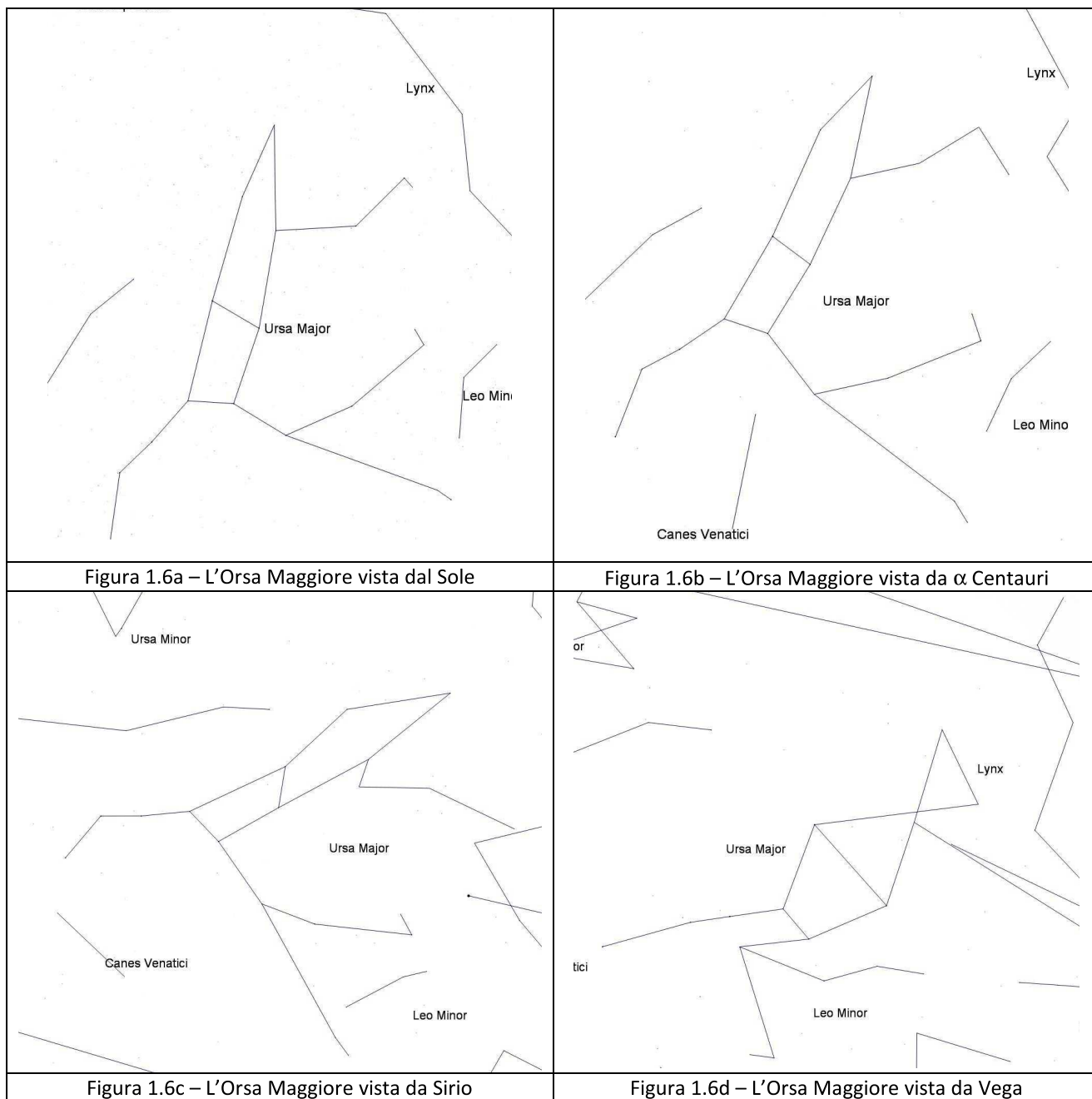
Una delle proprietà della sfera è che tutti i piani passanti per il centro determinano su di essa dei **cerchi massimi**. I cerchi determinati invece da piani non passanti per il centro prendono il nome di **cerchi minori**. Consideriamo allora il piano passante per il centro della Terra e perpendicolare

all'asse di rotazione: questo piano determina sulla superficie della Terra un cerchio massimo che prende il nome di **equatore terrestre** e sulla sfera celeste un cerchio massimo che viene chiamato **equatore celeste** (vedi Figura 1.5).

Il meridiano locale incontra l'equatore celeste in due punti, uno sopra l'orizzonte, l'altro sotto; quello sopra l'orizzonte e verso il sud geografico si chiama **mezzocielo** (vedi Figura 1.11).

1.2 – Le costellazioni

Fin dall'antichità le stelle sulla sfera celeste sono state arbitrariamente raggruppate a formare delle figure che chiamiamo **costellazioni**.



Oggi, una costellazione è ognuna delle 88 parti in cui la sfera celeste è convenzionalmente suddivisa allo scopo di mappare le stelle. I raggruppamenti così formati sono delle entità esclusivamente prospettiche, a cui non si riconosce alcun reale significato, infatti:

- * nello spazio tridimensionale le stelle che formano una stessa costellazione possono essere separate anche da distanze enormi, così come diverse possono essere le dimensioni e la luminosità,
- * viceversa, due o più stelle che sulla sfera celeste appaiono magari lontanissime tra di loro, nello spazio tridimensionale possono essere al contrario separate da distanze minori di quelle che le separano dalle altre stelle della propria costellazione,
- * la forma della costellazione dipende dall'osservatore (vedi figure 6a, 6b, 6c, 6d),
- * nel corso del tempo sono state definite costellazioni differenti, alcune sono state aggiunte, altre sono state unite tra di loro.
- * nel corso del tempo, a causa del moto proprio delle stelle le costellazioni cambiano (vedi Figura 1.7).

Una costellazione "ufficiosa", ossia un allineamento di stelle che formano semplici figure geometriche, si chiama **asterismo** (ad esempio il Grande Carro non è una costellazione ufficiale)

Il sistema delle costellazioni che viene usato ufficialmente oggi si è sviluppato a partire dalle 48 costellazioni indicate da Tolomeo nell'Almagesto intorno al 150 d.C. e i cui nomi sono associati a personaggi della mitologia greca. Egli prese i nomi di queste costellazioni dalla tradizione classica, prima di lui, infatti, scrittori quali Omero ed Esiodo (circa 700 a.C.) nelle loro opere avevano citato raggruppamenti stellari come l'Orsa Maggiore, Orione, le Pleiadi.

Oggi è dimostrato che gli sviluppi maggiori in questo campo si verificarono presso i popoli che abitarono la Mesopotamia. Gli storici ritengono che questo sistema abbia avuto origine addirittura dai Sumeri, vissuti nella zona intorno al 2000 a.C..

Si ritiene che Eudosso (circa 390 - 340 a.C.), per primo, abbia introdotto in Grecia un sistema completo di costellazioni che si pensa possa aver acquisito dai sacerdoti egiziani (alcuni studiosi ritengono che questo popolo avesse delle conoscenze di astronomia addirittura 10.000 anni prima di Cristo !!!). Molto antico è anche il sistema di costellazioni dei cinesi.

La prima opera scritta che ci è pervenuta e che fornisce una guida completa alle costellazioni dei Greci è dovuta ad Arato (circa 315 - 245 a.C.).

Nei secoli successivi furono compilati molti cataloghi stellari: in pratica ogni astronomo aveva il suo elenco di costellazioni e fissava i confini tra di esse. Nel 1922 in occasione della prima Assemblea Generale dell'IAU (International Astronomical Union) vennero fissate una volta per tutte le costellazioni (numero, nomi, e confini).

L'IAU provvede anche all'assegnazione dei nomi delle stelle e degli altri corpi celesti. Molti dei nomi oggi in uso sono stati in realtà ereditati dalle tradizioni vigenti prima che l'IAU esistesse. Altri nomi, specialmente per le stelle variabili (incluse le novae e le supernovae), vengono continuamente aggiunti. La maggior parte delle stelle poco brillanti, e quasi tutte quelle non visibili ad occhio nudo, non hanno nome, e per riferirsi ad esse si usano i numeri di catalogo.

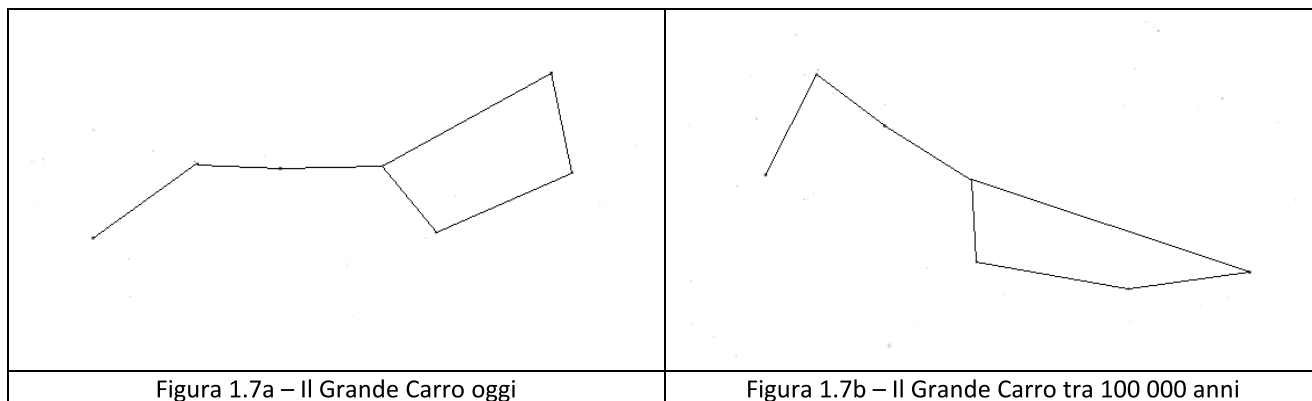
Molte delle stelle più brillanti, oppure interessanti per altri motivi, hanno nomi propri. La maggior parte deriva dall'arabo, ma ci sono alcuni nomi derivati dal latino, dal greco e da altre fonti, tra cui anche l'inglese.

Nel 1603 l'astronomo tedesco Johann Bayer (1572 – 7 marzo 1625), pubblicò il primo atlante stellare completo: Uranometria. In questa opera introdusse un sistema di nomenclatura per designare le stelle più brillanti di ogni costellazione con una lettera dell'alfabeto greco, seguita dal nome latino della costellazione (per esempio Betelgeuse è alfa Orionis), a partire dalla stella più luminosa (al posto del nome della costellazione, quando si scrive si mette un'abbreviazione di tre lettere, per esempio α Ori è alfa Orionis). Il sistema di Bayer è ancora oggi molto usato.

La nomenclatura dovuta all'astronomo inglese Flamsteed (Denby, 19 agosto 1646 – Greenwich, 12 gennaio 1719) è un sistema per assegnare nomi alle stelle simile alla nomenclatura di Bayer, ma che usa numeri invece delle lettere greche. Ad ogni stella è assegnato un numero, più il genitivo latino del nome della costellazione in cui si trova. Per ogni costellazione il conto ricomincia da 1. I numeri furono originariamente assegnati alle stelle in base alla loro posizione (in ordine crescente di

Ascensione Retta in ogni costellazione), ma a causa degli effetti della precessione e dei moti propri stellari, sono oggi nell'ordine sbagliato in alcuni punti. Esempi di stelle conosciute per le quali si usano i numeri di Flamsteed sono 51 Pegasi (la prima stella intorno alla quale è stato riconosciuto un pianeta) e 61 Cygni (la prima stella di cui si è misurata la parallasse).

Anche i numeri di John Flamsteed sono molto usati, anche se si preferisce usare le lettere di Bayer se è possibile. Le stelle di ogni costellazione sono numerate secondo la loro posizione, senza riguardi per la luminosità. Inoltre, in genere sono considerate anche stelle molto più deboli di quelle di Bayer.



1.3 – Le coordinate geografiche

Consideriamo la sfera terrestre. Siano N e S i poli Nord e Sud rispettivamente (vedi Figura 1.8). Definiamo **paralleli** tutti e soli i cerchi ottenuti dall'intersezione di piani paralleli all'Equatore con la sfera terrestre. Useremo anche il termine **paralleli nord** per i cerchi contenuti nella semisfera compresa tra l'equatore ed il polo nord, e **paralleli sud** per quelli compresi tra l'equatore e il polo Sud. Indichiamo i paralleli Nord anche premettendo il segno +, e i paralleli Sud premettendo il segno -.

I **meridiani** sono tutti i cerchi massimi passanti per entrambi i Poli, li indicheremo con un numero a partire da un meridiano scelto come meridiano zero, positivo in un determinato verso di percorrenza, negativo nell'altro.

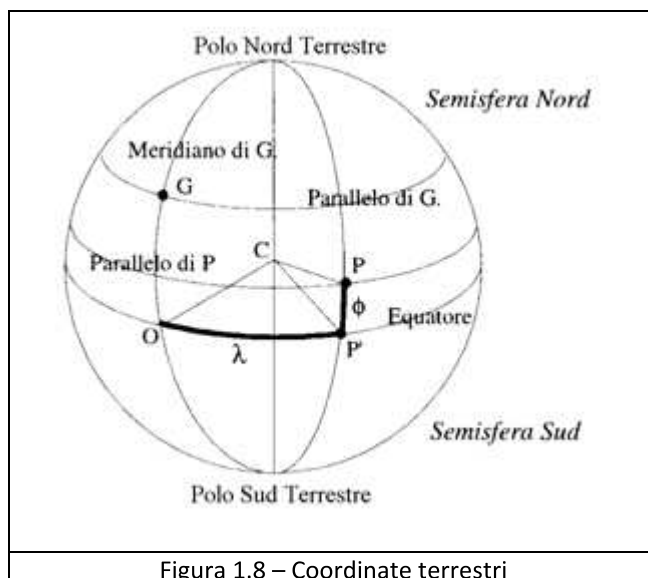


Figura 1.8 – Coordinate terrestri

Come conseguenza di tutto questo, per determinare la posizione di un punto sulla Terra basterà indicare quali sono il parallelo ed il meridiano passanti per quel punto. Ad esempio, se nella Figura 1.8 vogliamo determinare la posizione del punto P, per prima cosa dobbiamo fissare il meridiano zero, scegliamo quello passante per G, e come verso positivo quello verso est (in Figura 1.8 quello che va da O verso P'). Sia O la sua intersezione con l'equatore. Sia quindi P' il punto in cui il meridiano passante per P incontra l'equatore. Per determinare la posizione di P sulla sfera è sufficiente dare la misura degli archi $\widehat{P'P}$ e $\widehat{OP'}$, o, che è la stessa cosa, degli angoli $\widehat{P'CP}$ e $\widehat{OCP'}$. L'angolo $\widehat{OCP'}$, indicato con λ , tra il meridiano fondamentale e il meridiano per P viene misurato in gradi lungo l'equatore e prende il nome di **longitudine** del punto P. L'angolo ϕ tra l'equatore ed il

parallelo per P prende il nome di **latitudine** del punto ed è positivo nell'emisfero Nord e negativo nell'emisfero Sud.

Come meridiano fondamentale o **meridiano origine** si assume il meridiano passante per l'Osservatorio di Greenwich, esattamente quello che passa per il centro dell'antico strumento dei passaggi di Flamsteed. Questo meridiano prende il numero zero e viene comunemente detto **meridiano zero**. Per definire la posizione di un punto sulla Terra basta quindi dare una coppia di coordinate λ, ϕ di questo punto. Si deduce immediatamente dall'esame della Figura 1.5 che le latitudini vanno da $+90^\circ$ a -90° , mentre le longitudini vanno da 0° a 360° . Per le longitudini a volte si utilizzano angoli da 0 a 180° nel verso antiorario e da 0 a -180° nel verso orario.

1.4 – Sistemi di coordinate astronomiche.

Per individuare univocamente la posizione di un punto sulla sfera celeste è necessario definire un sistema di riferimento celeste. Per far questo è necessario premettere alcune nozioni sulla geometria della sfera.

Definiamo **asse** della sfera una qualunque retta passante per il suo centro; **poli** i due punti diametralmente opposti in cui l'asse interseca la superficie sferica, **piano fondamentale** il piano passante per il centro della sfera e perpendicolare all'asse, **cerchio base** il cerchio intersezione del piano fondamentale con la superficie della sfera, **cerchi ausiliari** i cerchi intersezione di piani perpendicolari al piano fondamentale e passanti per il centro. I cerchi ausiliari sono ortogonali, per costruzione, al cerchio base e passano tutti per i poli.

Cerchio base e cerchi ausiliari sono esempi di **cerchi massimi**, cioè di quella famiglia di cerchi che nascono dall'intersezione della superficie sferica con piani passanti per il centro della sfera e che sono chiamati così perché sono quelli di lunghezza massima che è possibile tracciare sulla superficie sferica; qualunque altro cerchio tracciato sulla superficie di una sfera viene generato dall'intersezione con un cerchio non passante per il centro: chiameremo questi **cerchi minori**. Ne sono esempi sulla superficie terrestre i paralleli di latitudine.

Per determinare un sistema di riferimento sulla sfera si procede quindi così (vedi Figura 1.9):

1. Si sceglie un asse; questa scelta determina i poli, il piano fondamentale, il cerchio base e i cerchi ausiliari.
2. Sul cerchio base si sceglie un punto O come **origine** e un **verso** di percorrenza lungo il cerchio.
3. Dato un punto S qualsiasi sulla superficie sferica si traccia il cerchio ausiliario passante per esso: viene determinato così il punto P intersezione del cerchio ausiliario col cerchio base.

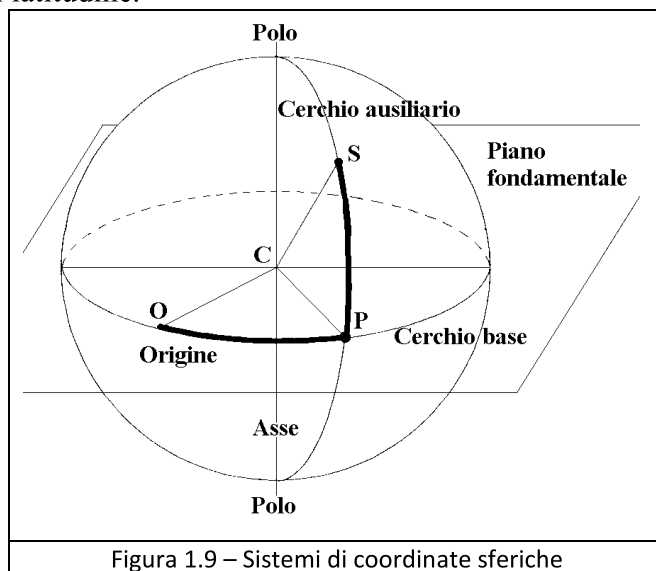


Figura 1.9 – Sistemi di coordinate sferiche

4. A partire dall'origine, sul cerchio base, ci si muove nel verso prescelto verso il punto P: l'ampiezza dell'arco così descritto rappresenta la prima coordinata sferica del punto S che si chiama **ascissa sferica**.
5. Dal punto P, lungo il cerchio ausiliario ci si muove verso S descrivendo un arco la cui ampiezza angolare è la seconda coordinata di S detta **ordinata sferica**. A seconda che il punto S si trovi in uno o nell'altro dei due emisferi in cui il cerchio base divide la superficie sferica, ci si muoverà lungo il cerchio ausiliario verso l'uno o l'altro dei poli: si sceglie una volta per tutte uno dei due versi come positivo e il valore dell'ordinata sferica sarà di conseguenza positivo o negativo a seconda che si percorra il cerchio ausiliario in verso concorde o meno con quello prescelto. Di

90°, al tramonto ha azimut uguale a 270°, passando per tutti i valori intermedi.

- * Poiché l'asse del sistema coincide con la direzione della verticale passante per l'osservatore, il sistema altazimutale è locale e variando la posizione dell'osservatore sulla Terra, varia la verticale e quindi il valore delle coordinate altazimutali.

1.4.2 – Il sistema orario o equatoriale locale.

Nel sistema di coordinate orario o equatoriali locali l'asse è l'asse del mondo e il piano di riferimento è il piano equatoriale: in un sistema di assi cartesiani con origine in O il piano x-y coincide con il piano equatoriale, l'asse x è diretto verso il mezzogiorno, l'asse y è diretto verso il punto ovest e l'asse z secondo la linea dei poli verso il polo nord (la tema è quindi destrorsa; vedi Figura 1.11).

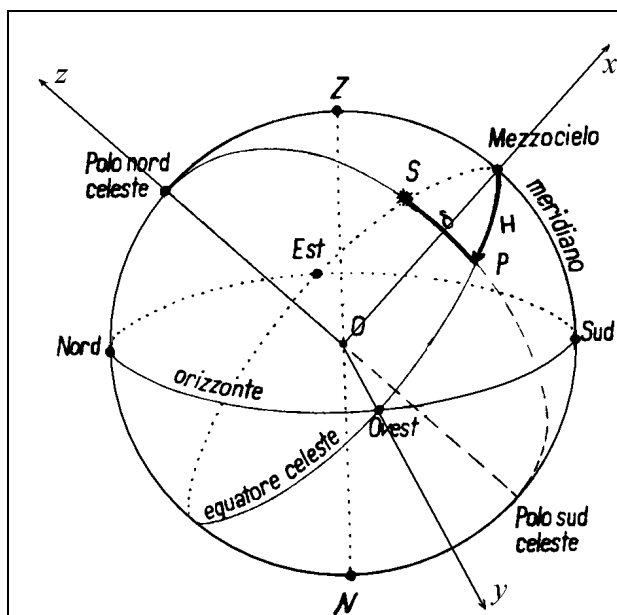


Figura 1.11 – Coordinate orarie o equatoriali locali

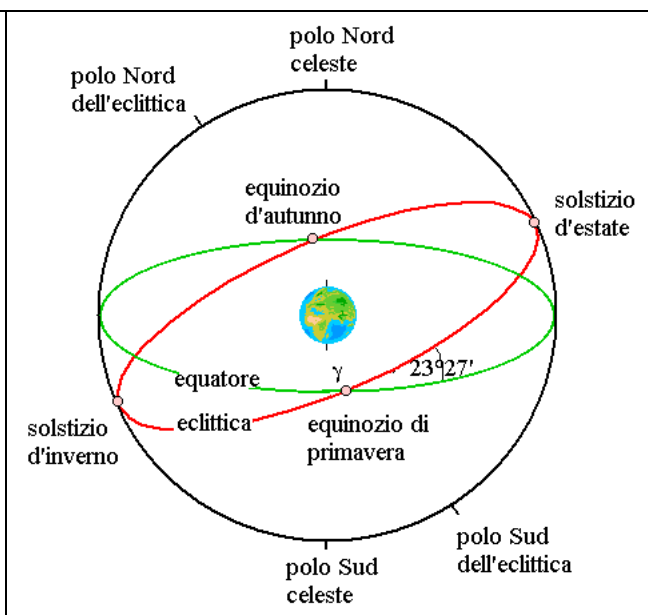


Figura 1.12 – Eclittica

Per ogni punto P (poli nord e sud esclusi) sia P' il punto più vicino a P tra i due individuati dall'intersezione del cerchio orario per P con l'equatore celeste. Gli angoli \hat{SOP}' e $\hat{P}'OP$ sono rispettivamente **l'angolo orario H** e la **declinazione δ** di P.

L'angolo orario si misura in ore, da zero a 24h, in verso orario a partire dal mezzogiorno.

La declinazione si misura dall'equatore celeste in gradi da zero a $\pm 90^\circ$ a seconda che P sia sopra o sotto l'equatore stesso. Contrariamente alle coordinate A , h ed H , la coordinata δ non dipende dalla posizione e dall'istante di osservazione e ha quindi un carattere assoluto.

1.4.3 – Coordinate equatoriali assolute

Nel corso di un anno il Sole descrive apparentemente sulla sfera celeste un cerchio massimo che prende il nome di **eclittica** (dell'epoca) (vedi Figura 1.12).

Il moto del Sole sulla volta celeste sembra avvenire lungo le costellazioni dello zodiaco e poiché il piano dell'eclittica è attualmente inclinato di $\epsilon \approx 23^\circ 27'$ (ϵ si chiama anche **obliquità dell'eclittica** ed è l'inclinazione dell'asse di rotazione della Terra rispetto alla perpendicolare al piano della sua orbita) rispetto al piano dell'equatore celeste, questi due cerchi massimi si intersecano in due punti. Il punto in cui l'eclittica interseca equatore celeste in corrispondenza del quale il Sole passa da sotto a sopra l'equatore è chiamato **primo punto d'Ariete** o **punto vernale** o ancora **punto gamma γ** dal

simbolo greco con cui comunemente lo si indica. È anche il punto in cui si trova il sole il giorno dell'equinozio di primavera. L'altro punto di intersezione, il punto in cui si trova il sole il giorno dell'equinozio d'autunno, si chiama **punto omega** Ω o anche **primo punto della Bilancia**.

Nel sistema delle coordinate equatoriali assolute gli elementi di riferimento sono quelli già introdotti nel sistema di coordinate equatoriali locali, tuttavia la terna di assi cartesiani con origine in O differisce dalla tema precedentemente definita perché ora l'asse x è diretto verso un punto fisso della sfera celeste (e partecipa quindi al moto di rotazione della sfera celeste indipendentemente dall'osservatore) e perché la terna è ora levogira (vedi Figura 1.13). Il punto fisso è il **punto gamma** γ .

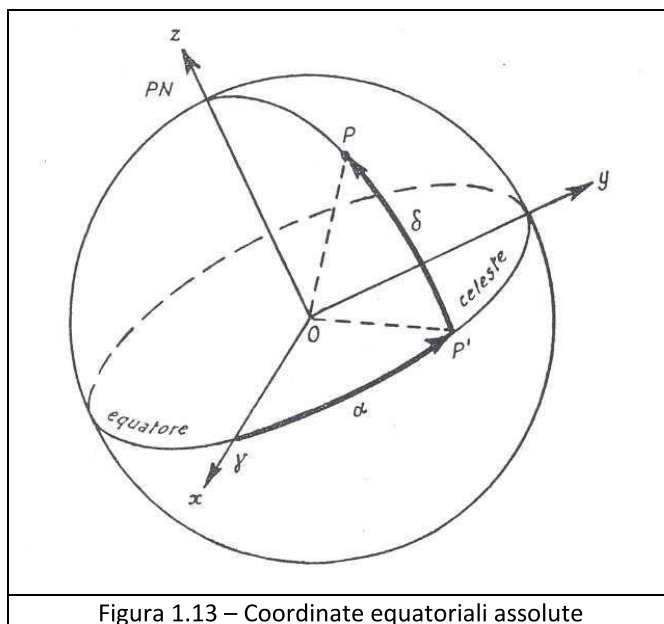


Figura 1.13 – Coordinate equatoriali assolute

In realtà il punto γ non è fisso a causa di una lenta variazione delle giaciture dei piani equatoriale ed eclittico dovuta alla precessione degli equinozi di cui si parlerà più avanti. Ciò implica una corrispondentemente lenta variazione delle coordinate equatoriali e quindi

la necessità di far riferimento alla posizione di γ ad una data epoca se si vuole prescindere da questo effetto. Con riferimento alla Figura 1.13 ogni punto P (poli esclusi) rimane individuato dagli angoli $\gamma\hat{O}P'$ e $P'\hat{O}P$, rispettivamente detti **ascensione retta** α e **declinazione** δ .

L'ascensione retta si misura in verso antiorario (o diretto) in ore da zero a 24 h, la declinazione come già detto nel paragrafo 1.4.2.

Al momento del transito di un astro al meridiano, il suo angolo orario è uguale a zero. Un'ora dopo, la volta celeste avrà ruotato di un arco pari a $15^\circ (= 360^\circ/24 \text{ ore})$, cioè misurando gli archi in ore, minuti e secondi, ad 1h. Il suo angolo orario sarà allora esattamente pari a tale valore. Anche il punto γ avrà, istante per istante, un valore preciso del suo angolo orario. Questo particolare angolo orario prende il nome di **Tempo Siderale Locale** (*TSL* o anche t_s). Il Tempo Siderale Locale è pari alla somma, in valore assoluto, degli archi $\gamma P'$, cioè dell'ascensione retta dell'astro e dell'arco $P'M$ ($M = \text{Mezzocielo}$), ossia del suo angolo orario H . Abbiamo così ricavato una importante relazione:

$$[1.2] \quad TSL = H + \alpha$$

Risulta evidente che lo zenit dell'osservatore ha declinazione uguale alla latitudine geografica e ascensione retta uguale al *TSL*. Da ciò si ricava che per conoscere il tempo siderale locale è sufficiente conoscere l'ascensione retta della stella che transita al meridiano locale in quel momento. Non è inoltre difficile osservare che l'altezza del polo sull'orizzonte è anch'esso uguale alla latitudine geografica.

1.4.4 – Coordinate eclittiche

Nel sistema di coordinate eclittiche gli elementi di riferimento sono l'eclittica (dell'epoca) e la perpendicolare all'eclittica stessa. La terna cartesiana con origine in O è levogira con l'asse x diretto verso il punto γ (vedi Figura 1.14). Ogni punto P sulla sfera celeste (esclusi i poli dell'eclittica) è individuato dagli angoli $\gamma\hat{O}P'$ e $P'\hat{O}P$, detti rispettivamente **longitudine eclittica** λ e **latitudine eclittica** β e misurati entrambi in gradi, il primo da zero a 360° (in verso antiorario) e il secondo da

zero a $\pm 90^\circ$ a seconda che P sia sopra o sotto l'eclittica.

Poiché il piano dell'eclittica è inclinato rispetto al piano dell'equatore celeste, risulta, tra l'altro, che il polo Nord ha coordinate eclittiche $\lambda = 90^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \epsilon$. L'obliquità dell'eclittica varia lentamente nel tempo a causa della variazione di giacitura dei piani dell'eclittica e dell'equatore (vedi più avanti) e variano quindi le coordinate eclittiche. Come nell'analogo caso delle coordinate equatoriali si fa pertanto riferimento all'eclittica di una data epoca.

Questo sistema di coordinate risulta particolarmente utile in tutti i problemi di astronomia planetaria poiché i pianeti si muovono attorno al Sole su orbite quasi complanari con l'eclittica.

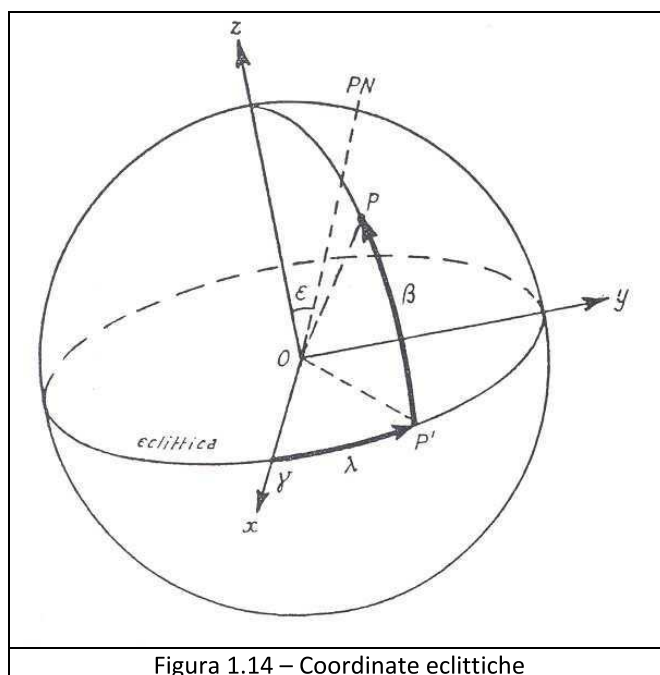


Figura 1.14 – Coordinate eclittiche

1.4.5 – Coordinate galattiche

Il terzo sistema di coordinate è quello delle coordinate galattiche i cui elementi di riferimento sono il piano equatoriale della Galassia e la sua perpendicolare. Questo piano fu definito in due tappe successive, dapprima mediante conteggi stellari, e successivamente come piano di massima emissività della riga 21 cm dell'Idrogeno neutro interstellare. In effetti i due piani (quello definito dalle stelle e quello dell'Idrogeno) sono lievemente inclinati uno rispetto all'altro, ma passano entrambi per il Sole, in modo da rispettare sempre il principio fondamentale di avere l'osservatore al centro della sfera. Una risoluzione dell'IAU del 1976 ha adottato questo secondo sistema come quello propriamente detto galattico.

Il polo nord galattico è definito alle coordinate equatoriali $\alpha = 12^h 49^m$ e $\delta = 27^\circ 24'$ al 1950 e si trova nella costellazione della Coma. La terna cartesiana di riferimento con origine nell'osservatore O è levogira con l'asse x orientato verso il centro galattico, che è localizzabile in prossimità della radiosorgente Sagittarius A e che ha coordinate $\alpha = 17^h 42^m,4$ e $\delta = -28^\circ 55'$ (sempre al 1950) (vedi Figura 1.15).

Il sistema, riferito al 2000 ha il polo nord galattico a $\alpha = 12^h 51^m 26,282s$, $\delta = +27^\circ 07' 42,01''$. Il punto del cielo in cui sia latitudine che longitudine sono pari a 0 è $\alpha = 17^h 45^m 37,224s$, $\delta = -28^\circ 56' 10,23''$ (sempre al 2000).

Gli angoli $A\hat{O}P'$ e $P'\hat{O}P$, che individuano il punto P sulla sfera celeste, sono nell'ordine la **longitudine galattica l** (elle) e la **latitudine galattica b**. Entrambe queste coordinate si misurano in gradi, la prima da zero a 360° in verso antiorario, la seconda da zero a $\pm 90^\circ$ a seconda che P sia sopra o sotto l'equatore galattico. La stessa definizione di questo sistema di coordinate rende evidente l'opportunità di usare coordinate galattiche in tutti i problemi che coinvolgono la localizzazione di oggetti nella Galassia.

Il piano galattico è inclinato di $62,3^\circ$ rispetto all'equatore celeste.

Come si è potuto vedere l'origine del Sistema di Coordinate coincide con il punto di osservazione che normalmente è un punto della superficie terrestre, in questo caso le coordinate sono dette **topocentriche** e dipendono dalla località cui si riferiscono: in particolare per gli oggetti vicini, quali la Luna e i satelliti artificiali possono variare notevolmente. A parte questi casi le differenze sono molto piccole e vengono trattate come correzioni alle coordinate **geocentriche**, la cui origine è posta nel centro della Terra.

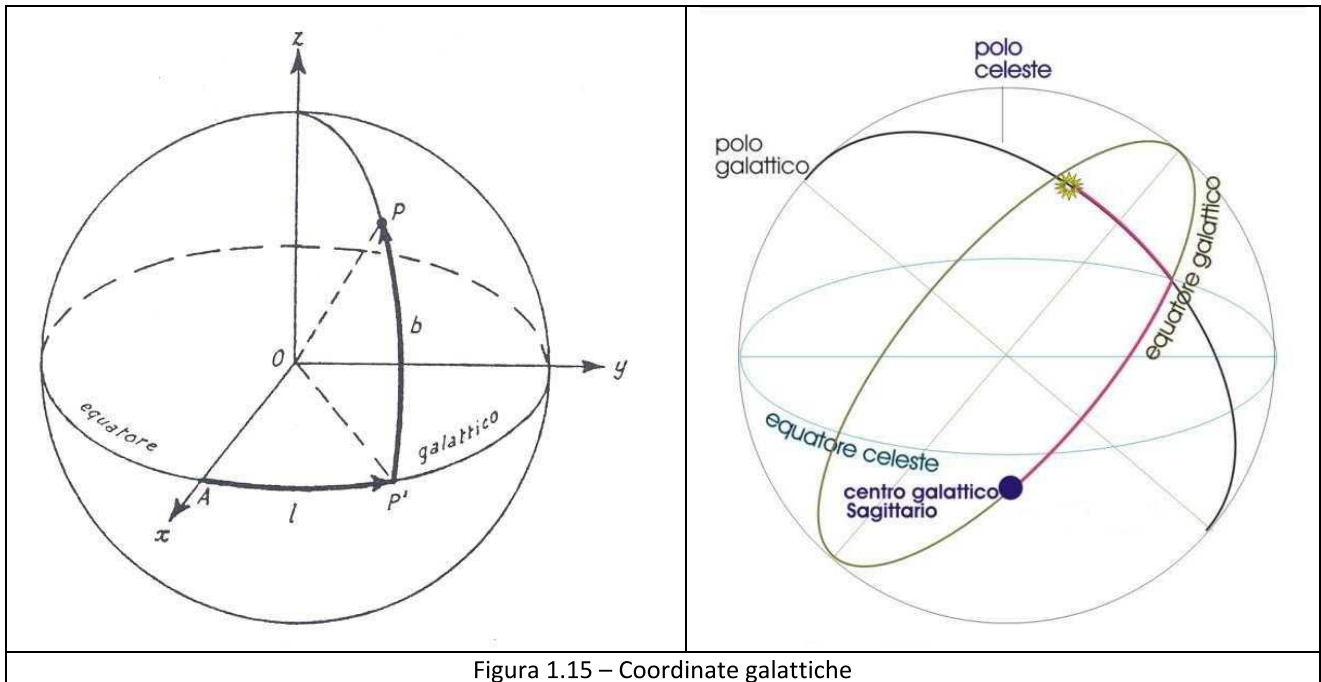


Figura 1.15 – Coordinate galattiche

Tabella 1 – Le coordinate celesti						
COORDINATE	Circonferenza fondamentale	Origine	Verso	Polo	Nomi	Simboli
Orizzontali (Altazimutali)	orizzonte	Nord	N→E	zenit	azimut altezza	A h
Orarie (Equatoriali Locali)	equatore	Mezzocielo superiore	retrogrado	Polo Nord	angolo orario declinazione	H, t δ
Equatoriali (Assolute)	equatore	γ	diretto	Polo Nord	ascensione retta declinazione	α δ
Eclittiche	eclittica	γ	diretto	Polo Nord eclittica	longitudine ecl. latitudine ecl.	λ β
Galattiche	equatore galattico	definizione convenzionale	diretto	definizione convenzionale	longitudine gal. latitudine gal	l b

Nello studio del sistema solare un sistema di coordinate geocentrico crea inutili complicazioni e si adotta quindi un sistema di coordinate la cui origine coincide con il centro del Sole, un sistema **eliocentrico**. Attualmente però nello studio del sistema solare, essendo necessario basarsi su un riferimento inerziale, si fissa l'origine nel baricentro del sistema solare. La differenza non è irrilevante: il baricentro del sistema solare è approssimativamente sulla superficie del Sole.

Con quello che è stato detto, non si esauriscono le possibili scelte per l'origine del sistema di coordinate, per esempio è possibile definire le coordinate **galattocentriche**, riferite cioè al centro della Galassia.

La tabella 1 riassume i principali sistemi di coordinate e le loro caratteristiche.

1.5 – Trasformazioni di coordinate mediante matrici di rotazione

1.5.1 – Introduzione

Abbiamo visto che esistono diversi sistemi di coordinate celesti e che questi differiscono per la diversa posizione dell'origine o per il diverso orientamento o per entrambe le cose. Ognuno di essi si rivela utile in un qualche problema, ma generalmente nella trattazione dei problemi di astronomia di posizione, uno solo di questi sistemi non basta. Per esempio se vogliamo sapere se un pianeta è visibile da una data località, per prima cosa dobbiamo conoscere la sua posizione in un sistema eclittico eliocentrico, quindi si dovrà passare prima ad uno eclittico geocentrico, quindi eclittico topocentrico ed infine ad un sistema altazimutale.

Il problema delle trasformazioni di coordinate è essenziale in astronomia e può essere affrontato in due modi:

- attraverso vettori, traslazioni e rotazioni;
- attraverso la trigonometria sferica, cioè la trigonometria che si applica ai triangoli costruiti sulla superficie sferica.

Fissato un certo punto di osservazione O (l'origine del sistema di coordinate) e una terna cartesiana, la posizione P di un oggetto celeste è individuata dal vettore $\vec{\rho} = \overline{OP}$ eventualmente descritto in termini di coordinate cartesiane x, y, z . Se ci limitiamo alla descrizione dell'oggetto sulla sfera celeste, la distanza non è essenziale e ci si può riferire alla sua posizione su una sfera unitaria, ovvero trattare esclusivamente i versori.

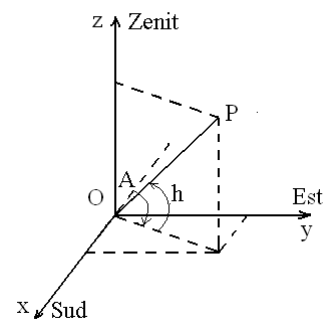
Per ogni sistema di coordinate fisseremo gli assi x e z (l'asse y è definito di conseguenza scegliendo terne destrorse).

Coordinate Altazimutali: A, h

Assi: x verso Sud, z verso lo Zenit quindi y verso Est (si noti che l'asse x punta in verso opposto all'origine degli azimut).

[1.3]

$$\begin{cases} x = -\cosh \cos A \\ y = \cosh \sen A \\ z = \sen h \end{cases}$$

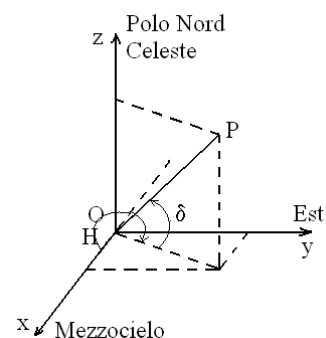


Coordinate Orarie: H, δ

Assi: x verso il Mezzocielo superiore, z verso il Polo Nord Celeste quindi y verso Est.

[1.4]

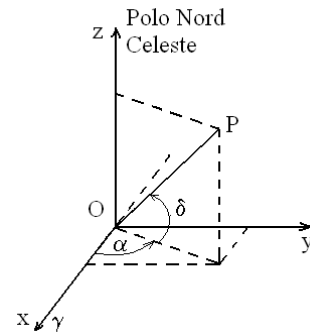
$$\begin{cases} x = \cos \delta \cos H \\ y = -\cos \delta \sen H \\ z = \sen \delta \end{cases}$$



Coordinate Equatoriali: α, δ

Assi: x verso γ , z verso il Polo Nord Celeste e y di conseguenza.

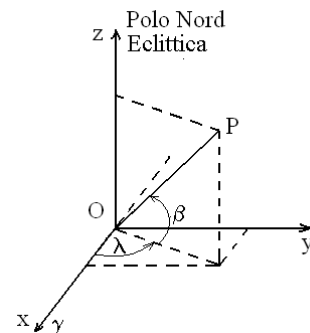
$$[1.5] \quad \begin{cases} x = \cos \delta \cos \alpha \\ y = \cos \delta \sin \alpha \\ z = \sin \delta \end{cases}$$



Coordinate Eclittiche: λ, β

Assi: x verso γ , z verso il Polo Nord Eclittico e y di conseguenza.

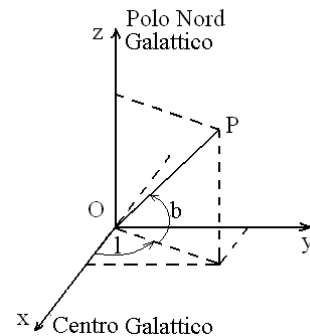
$$[1.6] \quad \begin{cases} x = \cos \beta \cos \lambda \\ y = \cos \beta \sin \lambda \\ z = \sin \beta \end{cases}$$



Coordinate Galattiche: l, b

Assi: x verso il centro della Galassia, z verso il Polo Nord Galattico e y di conseguenza.

$$[1.7] \quad \begin{cases} x = \cos b \cos l \\ y = \cos b \sin l \\ z = \sin b \end{cases}$$



Poiché la scelta dell'origine degli assi e la loro orientazione sono indipendenti, è facile rendersi conto che una qualunque trasformazione di coordinate può essere o una traslazione (cambiamento dell'origine) o da una rotazione (cambiamento del verso degli assi), o, ovviamente da una combinazione di queste.

1.5.2 – Traslazioni

Le traslazioni più frequenti sono la trasformazione di coordinate eliocentriche a geocentriche e quella di coordinate geocentriche a topocentriche e ovviamente quelle inverse.

Detti \vec{r}_c e \vec{r}_g i vettori che individuano la posizione di un oggetto nei due riferimenti eliocentrico e geocentrico rispettivamente, se $\vec{\rho}$ descrive la posizione della Terra rispetto al Sole, la

trasformazione sarà allora:

$$[1.3] \quad \vec{r}_c = \vec{\rho} + \vec{r}_g$$

In modo del tutto analogo si passa dal sistema geocentrico a quello topocentrico quando sia noto il vettore $\vec{\rho}'$ che descrive la posizione della localit  rispetto al centro della Terra:

$$[1.4] \quad \vec{r}_t = \vec{\rho}' + \vec{r}_t$$

\vec{r}_t dipende dal tempo a causa della rotazione terrestre, a meno che non si utilizzi un sistema locale, inoltre il calcolo di \vec{r}_t richiede la forma della Terra, delle coordinate geografiche del luogo e della sua altitudine.

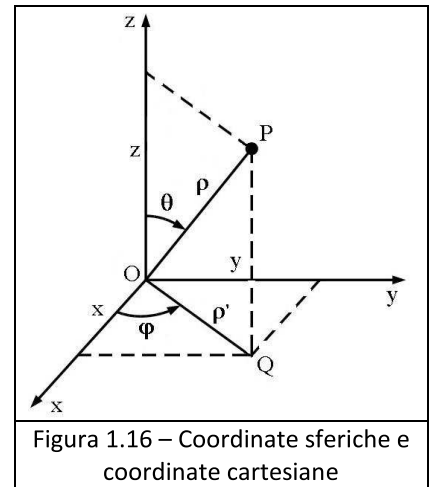
1.5.3 – Rotazioni

Fissiamo adesso il centro di osservazione, scegliendo ad esempio sistemi geocentrici, e vediamo come si trasformano le coordinate da un sistema all'altro.

In tutti i casi si tratta di una rotazione e dunque pu  essere descritta mediante una matrice 3x3, ma non sempre   ovvio individuare l'asse e l'angolo di rotazione.   per  sempre possibile ridurre una trasformazione alla composizione di pi  trasformazioni successive: se per queste   possibile scrivere le corrispondenti matrici, la trasformazione richiesta sar  data dal prodotto di quelle matrici.

In generale, dati due sistemi di riferimento (xyz) e (XYZ) aventi la stessa origine, per passare da uno all'altro si usano le relazioni:

$$[1.5] \quad \begin{cases} X = x \cos \widehat{xX} + y \cos \widehat{yX} + z \cos \widehat{zX} \\ Y = x \cos \widehat{xY} + y \cos \widehat{yY} + z \cos \widehat{zY} \\ Z = x \cos \widehat{xZ} + y \cos \widehat{yZ} + z \cos \widehat{zZ} \end{cases}$$



o anche, in notazione matriciale:

$$[1.6] \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{R}   una matrice 3x3 data da:

$$[1.7] \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \widehat{xX} & \cos \widehat{yX} & \cos \widehat{zX} \\ \cos \widehat{xY} & \cos \widehat{yY} & \cos \widehat{zY} \\ \cos \widehat{xZ} & \cos \widehat{yZ} & \cos \widehat{zZ} \end{pmatrix}$$

Ricordiamo inoltre che nel sistema (x,y,z), in coordinate polari (rho, phi, theta), si ha:

$$[1.8] \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Per cui se consideriamo le coordinate polari (rho, Phi, Theta) anche nel sistema (X,Y,Z) si ha:

$$[1.9] \quad \begin{cases} X = \rho \cos \Theta \cos \Phi \\ Y = \rho \cos \Theta \sin \Phi \\ Z = \rho \sin \Theta \end{cases}$$

Sostituendo nella [1.6]:

$$[1.10] \quad \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \Phi \\ \cos \Theta \sin \Phi \\ \rho \sin \Theta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

da cui, come si può notare è scomparsa la dipendenza da ρ .

Le coordinate polari nei vari sistemi sono state date sopra. Nel seguito ci limiteremo ai tre casi più frequenti di trasformazione di coordinate:

1) **Da altazimutali a orarie:** è una rotazione attorno all'asse $y \equiv Y$ di un angolo pari alla colatitudine del luogo $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Con l'aiuto della Figura 1.17 si può vedere che la matrice di rotazione è:

$$[1.11] \quad \mathbf{R}_{OA} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & \cos\frac{\pi}{2} & \cos(2\pi - \varphi) \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos 0 & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos(\pi - \varphi) & \cos\frac{\pi}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

<p>Figura 1.17 – Trasformazione da coordinate altazimutali a coordinate orarie</p>	<p>Figura 1.18 – Trasformazione da coordinate orarie a coordinate equatoriali</p>	<p>Figura 1.19 – Trasformazione da coordinate equatoriali a coordinate eclittiche</p>

2) **Da orarie a equatoriali:** è una rotazione attorno all'asse $z \equiv Z$ di un angolo Θ pari $H(\gamma)$, ovvero l'angolo orario del punto γ ; dipende dall'istante a cui ci si riferisce. L'angolo in questione è il tempo siderale definito con la [1.1]. Con l'aiuto della Figura 1.18 si può ricavare la matrice di rotazione:

$$[1.12] \quad \mathbf{R}_{EO} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos \Theta & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) **Da equatoriali a eclittiche:** è una rotazione attorno all'asse $x \equiv X$ di un angolo ε pari all'obliquità dell'eclittica. Con l'aiuto della Figura 1.19 si può ricavare la matrice di rotazione.

$$[1.13] \quad \mathbf{R}_{CE} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \varepsilon & \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \right) \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) & \cos \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \text{sene} \varepsilon \\ 0 & -\text{sene} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

Per ottenere le trasformazioni inverse bisogna stare molto attenti al verso degli angoli, ma in sostanza basta osservare che, nella [1.6] basta porre

$$[1.14] \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{R}^{-1} è la matrice di rotazione inversa. È facile notare che la matrice di rotazione inversa è la trasposta di \mathbf{R} : $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. (ricordiamo che la matrice trasposta di una matrice data si ottiene scambiando le righe con le colonne: $R_{ij}^T = R_{ji}$)

1.6 – Applicazioni

Come prima applicazione vediamo come si trasformano le coordinate equatoriali assolute (α, δ) in coordinate eclittiche (λ, β) .

La trasformazione è quindi $\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \text{sene} \lambda \\ \text{sene} \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \text{sene} \varepsilon \\ 0 & -\text{sene} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \text{sene} \alpha \\ \text{sene} \delta \end{pmatrix}$ da cui si ricava il

sistema di equazioni:

$$[1.15] \quad \begin{cases} \cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \beta \text{sene} \lambda = \text{sene} \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \text{sene} \delta \text{sene} \varepsilon \\ \text{sene} \beta = -\text{sene} \alpha \cos \delta \text{sene} \varepsilon + \text{sene} \delta \cos \varepsilon \end{cases}$$

mentre quella inversa, ossia il passaggio da coordinate eclittiche a coordinate equatoriali assolute si

ottiene da: $\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \text{sene} \alpha \\ \text{sene} \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\text{sene} \varepsilon \\ 0 & \text{sene} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \text{sene} \lambda \\ \text{sene} \beta \end{pmatrix}$ da cui si ricava il sistema di equazioni:

$$[1.16] \quad \begin{cases} \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \text{sene} \alpha = \cos \varepsilon \cos \beta \text{sene} \lambda - \text{sene} \varepsilon \text{sene} \beta \\ \text{sene} \delta = \text{sene} \varepsilon \cos \beta \text{sene} \lambda + \cos \varepsilon \text{sene} \beta \end{cases}$$

Come si può vedere si hanno a disposizione tre equazioni per determinare due quantità e i loro segni, cioè i quadranti in cui si situano gli angoli.

Come seconda applicazione vogliamo determinare l'istante in cui un astro di date coordinate

equatoriali assolute sorge o tramonta in una data località.

Il problema non è completamente risolvibile con le conoscenze fin qui acquisite, ma possiamo comunque fare delle importanti considerazioni. Supponiamo innanzi tutto che l'osservatore O abbia un orizzonte perfettamente libero e che si trovi al livello del mare e che la Terra sia perfettamente sferica. Siano (λ, φ) le coordinate geografiche di O e (α, δ) le coordinate equatoriali dell'astro S.

Per prima cosa effettuiamo le trasformazioni da coordinate orarie (H, δ) in coordinate altazimutali (A, h) , poi passeremo a quelle equatoriali tramite il tempo siderale.

$$\begin{pmatrix} -\cosh \cos A \\ \cosh \sen A \\ \sen h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sen \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sen \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sen H \\ \sen \delta \end{pmatrix}$$

da cui si ricava il sistema di equazioni:

$$[1.17] \quad \begin{cases} \cosh \cos A = -\cos \delta \cos H \sen \varphi + \sen \delta \cos \varphi \\ \cosh \sen A = -\cos \delta \sen H \\ \sen h = \cos \delta \cos H \cos \varphi + \sen \delta \sen \varphi \end{cases}$$

Ricaviamo anche le inverse:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sen H \\ \sen \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sen \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sen \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cosh \cos A \\ \cosh \sen A \\ \sen h \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$[1.18] \quad \begin{cases} \cos \delta \cos H = -\cosh \cos A \sen \varphi + \sen h \cos \varphi \\ \cos \delta \sen H = -\cosh \sen A \\ \sen \delta = \cosh \cos A \cos \varphi + \sen h \sen \varphi \end{cases}$$

La terza equazione delle [1.17] è l'espressione che cercavamo in quanto lega l'altezza dell'astro alla declinazione, all'angolo orario (e quindi al tempo) e alla latitudine del luogo. Se facciamo eccezione per i poli ($\varphi = \pm 90^\circ$) dove l'equazione perde di significato, quando l'astro è esattamente sull'orizzonte, $h = 0$ e quindi:

$$[1.19] \quad \cos H = -\tan \delta \tan \varphi$$

Dalla prima delle [1.17] si ricava l'espressione per l'azimut del sorgere e del tramontare; infatti sostituendo $h = 0$ e la [1.24] si ha:

$$[1.20] \quad \cos A = \frac{\sen \delta}{\cos \varphi}$$

Verranno analizzate alcune situazioni particolari.

* Gli astri che stanno sull'equatore celeste hanno declinazione nulla, $\delta = 0$, quindi, nella [1.24], $\cos H = 0$. Qualunque sia la latitudine è $H = 90^\circ$ e $H = 270^\circ$ (sono rispettivamente l'Ovest e l'Est). Indipendentemente dalla latitudine del luogo tali astri sorgono precisamente ad Est e tramontano precisamente ad Ovest.

- * Se ci troviamo all'equatore, $\varphi = 0$ e nella [1.24], qualunque sia la declinazione dell'astro, si ha $\cos H = 0$, quindi $H = \pm 90^\circ$. L'astro descrive sulla volta celeste un arco di angolo orario complessivo di 180° , quindi resta sopra l'orizzonte esattamente per 12 ore.

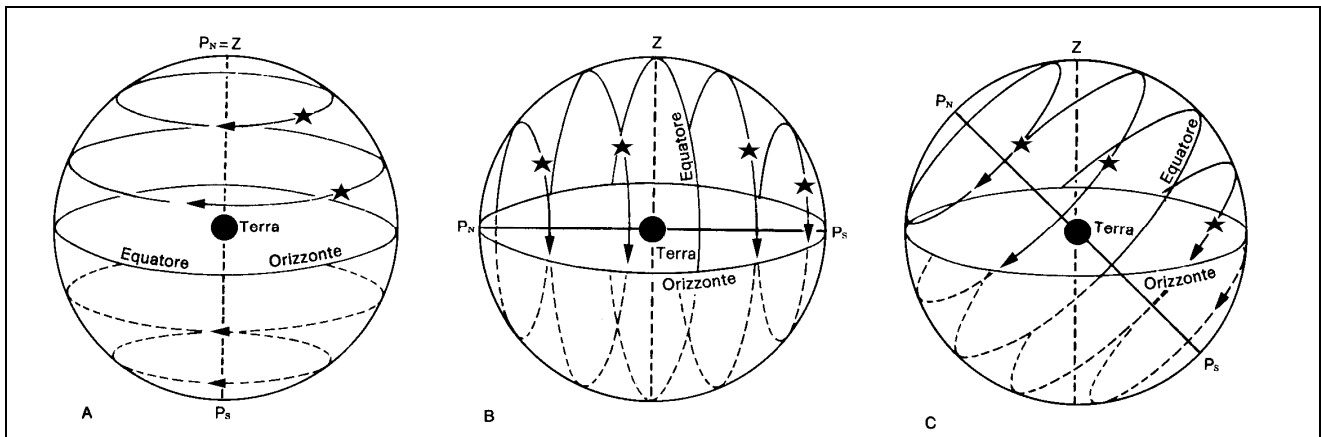


Figura 1.20 - La rotazione della sfera celeste. A) L'osservatore si trova al polo nord: tutte le stelle descrivono cerchi paralleli all'orizzonte; nessuna stella sorge e nessuna tramonta. B) L'osservatore si trova all'equatore: tutte le stelle descrivono cerchi attorno alla linea orizzontale nord-sud e tutte le stelle sorgono e tramontano. C) L'osservatore si trova ad una latitudine intermedia settentrionale: tutte le stelle descrivono archi obliqui rispetto all'orizzonte; le stelle che distano dal polo nord celeste (PN) di un arco minore della latitudine del luogo non tramontano mai, quelle che distano dal polo sud celeste di un arco minore di tale latitudine non si vedono mai, le altre sorgono e tramontano.

- * Se ci troviamo ai poli $\varphi = \pm 90^\circ$, dalla terza delle [1.23], $\sinh = \text{sen} \delta$, ovvero $h = \pm \delta$; tutte le stelle che hanno la stessa declinazione si trovano alla stessa altezza e non sorgono né tramontano.

- * Se $\delta = 90^\circ - \varphi$, allora nella [1.24] $\cos H = -\tan(90^\circ - \varphi) \tan \varphi = -\frac{1}{\tan \varphi} \tan \varphi = -1$ quindi $H =$

180° . Ciò significa che l'astro “sorge” e “tramonta” nello stesso istante a Nord, quindi, sulla volta celeste, descrive una circonferenza che lambisce l'orizzonte Nord.

- * Se $\delta > 90^\circ - \varphi$ allora $\tan \delta \tan \varphi > 1$ e l'equazione [1.24] non ammette soluzioni, ciò significa che l'astro non sorge né tramonta mai, ma rimane sempre sopra l'orizzonte. In questo caso si dice che è **circumpolare**.

- * Se $\delta = \varphi - 90^\circ$, allora, sempre dalla [1.24], $\cos H = -\tan(\varphi - 90^\circ) \tan \varphi = \frac{1}{\tan \varphi} \tan \varphi = 1$ quindi

$H = 0$. Ciò significa che l'astro “sorge” e “tramonta” nello stesso istante a Sud, quindi, sulla volta celeste, descrive una circonferenza che lambisce l'orizzonte Sud, ma non sale mai sopra l'orizzonte. Questo valore è il limite per gli astri che non sorgono mai.

- * Se $\delta < \varphi - 90^\circ$, allora $\tan \delta \tan \varphi < -1$, quindi l'astro non sorge mai.

Per determinare l'istante in cui sorge o tramonta l'astro bisogna calcolare il tempo siderale facendo uso della [1.2].

Vediamo un esempio numerico. Vogliamo determinare gli istanti in cui sorge e tramonta la stella Sirio dal piazzale del Dipartimento di Fisica di Camerino. Le coordinate equatoriali di Sirio, al 2000, sono: $\alpha = 6\text{h } 45,142\text{m}$; $\delta = -16^\circ 43,194'$.

Le coordinate geografiche del piazzale sono: $\lambda = 13^\circ 4,067'$; $\varphi = 43^\circ 8,400'$.

Dalla [1.24]: $\cos H = -\tan(-16,7199^\circ)\tan(43,1400^\circ) = 0,2815$ [3] da cui segue $H = \pm 73,65^\circ$.

Il valore negativo corrisponde al sorgere della stella, quello positivo al tramonto; tutto l'arco corrisponde a $147,3^\circ = 9\text{h } 49,2\text{m}$ che è il tempo in cui la stella Sirio rimane sopra l'orizzonte di Camerino (se fosse piatto!!!).

Per utilizzare la [1.2] dobbiamo prima o trasformare l'ascensione retta in gradi o l'angolo orario in ore. Trasformiamo l'angolo orario in ore; $H = \pm 4\text{h } 54,6\text{m}$. Si ha

$$TSL = 6\text{h } 45,142\text{m} \pm 4\text{h } 54,6\text{m}$$

da cui l'istante di tempo siderale in cui Sirio sorge è $TSL_S = 2\text{h } 9,5\text{m}$ e l'istante di tempo siderale in cui tramonta è $TSL_T = 11\text{h } 39,7\text{m}$.

Rimane da stabilire come fare a trasformare il tempo siderale locale in tempo civile, ma le nostre conoscenze ancora non lo permettono.

Dalla [1.25] ricaviamo che l'azimut del sorgere e del tramontare di Sirio è $A=113,2^\circ$ e $A=-113,2^\circ$. Per come abbiamo definito l'azimut, si avrà: $A_S = 113,2^\circ$ e $A_T = -113,2^\circ = 246,8^\circ$.

1.7 – Trasformazioni di coordinate mediante la trigonometria sferica

La trigonometria sferica generalizza alla superficie sferica le nozioni e le proprietà della trigonometria piana. Ci limiteremo a dare alcune definizioni basilari e qualche esempio di applicazioni astronomiche.

Si definisce **triangolo sferico** la superficie di sfera delimitata da tre archi (lati) di cerchi massimi congiungenti, a coppie, tre punti (vertici) della sfera.

Un triangolo sferico si dice **semplice** se i lati sono minori di una semicirconferenza; un triangolo sferico semplice appartiene ad una emisfera (vedi Figura 1.21).

Se A, B e C sono i vertici del triangolo sferico semplice (vedi Figura 1.22), siano a, b, c i lati e $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ gli angoli opposti ai lati omonimi. In un triangolo sferico semplice la somma degli angoli, contrariamente a quanto avviene per i triangoli piani, risulta maggiore di 180° (e minore di 540°); la somma dei lati è invece compresa tra 0 e 2π radianti (il raggio della sfera è unitario). Si chiama **eccesso sferico** ϵ . di un triangolo sferico la somma degli angoli del triangolo diminuita di 180° (è sempre $\epsilon > 0$). L'area di un triangolo sferico è uguale al semiprodotto dell'eccesso sferico (espresso in radianti) per il quadrato del raggio della sfera.

Le principali relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo sferico vanno sotto il nome di **relazioni di Gauss** e di solito sono riunite in vari gruppi.

Ricaviamo almeno una di tali relazioni. Consideriamo la Figura 1.23, dal centro O della sfera proiettiamo i due vertici B e C sul piano tangente in A. Otteniamo così i triangoli piani AB'C', OAB', OAC'. Consideriamo OAB', in cui è:

$$OA = 1, \quad O\hat{A}B' = 90^\circ, \quad B'\hat{O}A = c, \quad AB' = \tan c, \quad OB' \cos c = 1$$

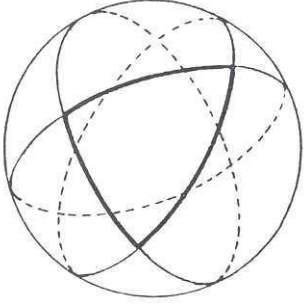
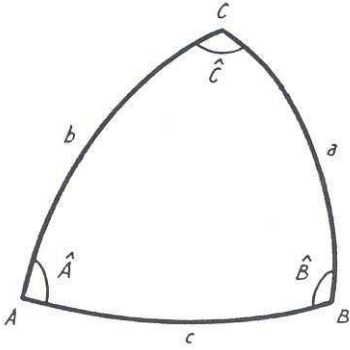
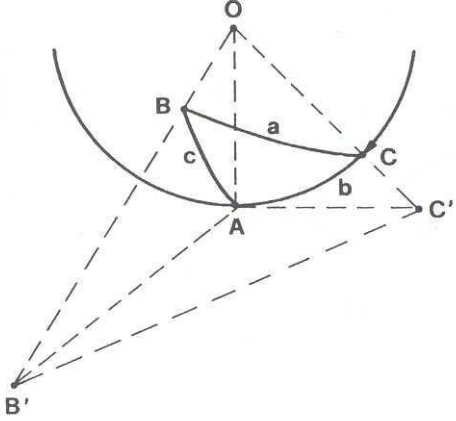
inoltre, allo stesso modo nel triangolo OAC' si ha:

$$AC' = \tan b, \quad OC' \cos b = 1.$$

[3] Gli angoli dati in gradi, primi e frazioni decimali di primo, sono stati trasformati in gradi e frazioni decimali

Nel triangolo piano B'AC', l'angolo B'ÂC' è per definizione l'angolo sferico A, da cui:

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A$$

		
<p>Figura 1.21 – Tre piani passanti per il centro della sfera individuano tre cerchi massimi e 8 triangoli sferici. Nella Figura è marcato un triangolo sferico semplice.</p>	<p>Figura 1.22 – Lati e angoli di un triangolo sferico.</p>	<p>Figura 1.23 – Dimostrazione della I formula di Gauss.</p>

Nel triangolo piano OB'C':

$$B'C'^2 = OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cdot \cos a$$

Ricordando che risulta $1 + \tan^2 \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A &= OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cdot \cos a \\
 \tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan c \cdot \tan b \cdot \cos A &= \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2 \frac{1}{\cos c} \frac{1}{\cos b} \cos a \\
 \cancel{\tan^2 c} + \cancel{\tan^2 b} - 2 \tan c \cdot \tan b \cdot \cos A &= 1 + \cancel{\tan^2 c} + 1 + \cancel{\tan^2 b} - 2 \frac{1}{\cos c} \frac{1}{\cos b} \cos a \\
 \frac{\text{senc}}{\cos c} \frac{\text{senb}}{\cos b} \cos A &= -1 + \frac{1}{\cos c} \frac{1}{\cos b} \cos a \\
 \text{senbsenc} \cos A &= -\cos b \cos c + \cos a
 \end{aligned}$$

Questa equazione è la prima del primo gruppo di Gauss

$$[1.21] \quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \text{senbsenc} \cos A \\ \text{sena} \cos B = \cos b \text{sen} c - \text{senb} \cos c \cos A \\ \frac{\text{sen} A}{\text{sena}} = \frac{\text{sen} B}{\text{senb}} = \frac{\text{sen} C}{\text{senc}} \end{cases}$$

Omettiamo la dimostrazione delle altre due che possono essere trovate in qualunque libro di trigonometria sferica (vedi Zagar: Astronomia sferica e teorica, Zanichelli 1948).

Se nella [1.26] poniamo $A = 90^\circ$, il triangolo ABC è rettangolo in A e la prima delle [1.26] diventa

$$[1.22] \quad \cos a = \cos b \cos c$$

che rappresenta una sorta di Teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli sferici: **il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti.**

Come ulteriore applicazione di geometria sferica calcoliamo la distanza tra due punti su una superficie sferica.

Siano A e B due punti su una superficie sferica di raggio R. Sia C il punto dell'equatore sullo stesso meridiano di A e assumiamo il meridiano di A come meridiano zero. Fissiamo quindi un sistema di riferimento cartesiano Oxyz come indicato nella Figura 1.24 (la direzione degli assi non è importante, basta che la terna sia levogira); B' è la proiezione di B sul piano xz. I vettori \vec{OA} e \vec{OB} , in coordinate cartesiane, sono quindi espressi da:

$$\vec{OA} = R(\sin\alpha\vec{j} + \cos\alpha\vec{k})$$

$$\vec{OB} = R(\cos\gamma\sin\beta\vec{i} + \sin\gamma\vec{j} + \cos\gamma\cos\beta\vec{k})$$

Con l'usuale significato di \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Il prodotto scalare dei due vettori è:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

Il prodotto scalare è dato anche da

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2 \cos \hat{A\hat{O}B}$$

quindi

$$\cos \hat{A\hat{O}B} = \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

La distanza AB, sulla superficie sferica, si ottiene quindi da

$$[1.23] \quad \overline{AB} = R \arccos(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

Se assumiamo la Terra sferica e se A e B sono due luoghi della superficie terrestre con (λ_A, φ_A) e (λ_B, φ_B) le loro coordinate geografiche, allora si dimostra che:

$$[1.24] \quad \overline{AB} = R \arccos(\sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B))$$

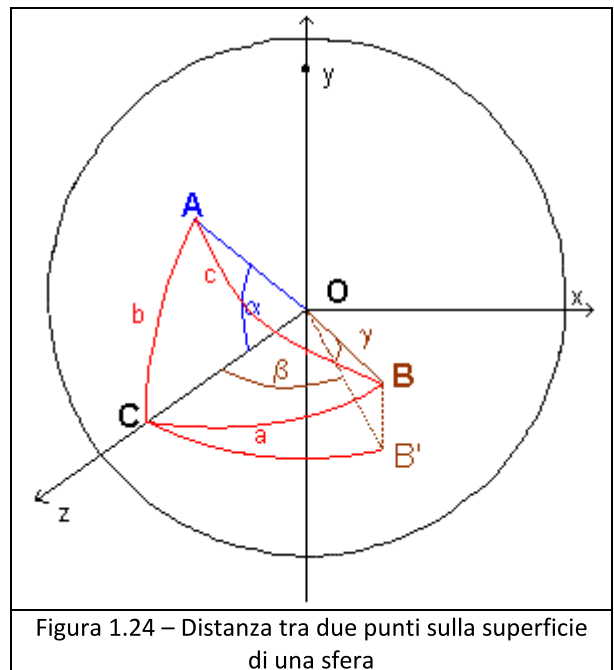


Figura 1.24 – Distanza tra due punti sulla superficie di una sfera

Per esempio, la distanza tra Camerino e Hanga Roa (Isola di Pasqua) che si trova alle coordinate geografiche $\lambda = -109^{\circ} 25,633'$, $\varphi = -27^{\circ} 8,300'$, considerando il raggio medio della Terra pari a 6371 km è di 14 600 km.

L'assunzione della Terra perfettamente sferica comporta un errore che è circa lo 0,2 %.

Capitolo 2

La Terra e i suoi movimenti^[4]

2.1 – Parametri fisici della Terra

La Terra è il terzo pianeta a partire dal Sole. È il più grande dei pianeti rocciosi.

Il semiasse maggiore della sua orbita è di $149\,597\,870\,691$ m. Ha la forma di una sfera leggermente schiacciata ai poli: il raggio è massimo all'equatore ed è

$$R_E = 6\,378\,137 \text{ m}$$

e minimo ai poli dove è

$$R_P = 6\,356\,752 \text{ m}$$

La differenza è di $21\,385$ m. Lo schiacciamento è:

$$\frac{R_E - R_P}{R_E} \approx \frac{1}{298} \approx 0,003353.$$

In molti calcoli la Terra viene considerata come una sfera di raggio $R = 6\,372\,797$ m (questo valore è in effetti il raggio medio). Tali valori del raggio portano al fatto che la lunghezza dell'equatore è di $40\,075\,017$ m, mentre la lunghezza del Circolo Meridiano (una circonferenza passante per i poli) è di $39\,940\,650$ m.

La superficie totale della Terra è di $509\,495\,000 \text{ km}^2$ dei quali $361\,640\,000 \text{ km}^2$ (circa il 70,98%) sono ricoperti dal mare, mentre il restante 29,02%, pari a $147\,855\,000 \text{ km}^2$, è la superficie delle terre emerse.

La profondità media degli oceani è di $3\,794$ m, con un massimo di $10\,924$ m nella Fossa delle Marianne. L'altezza media dei continenti, sul livello del mare, è di 874 m, il massimo è il Monte Everest altro $8\,850$ m.

Il volume totale della Terra è di $1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$, di cui gli oceani occupano solo $1,37 \cdot 10^9 \text{ km}^3$ pari allo 0,126%.

La massa complessiva della Terra è di $5,9726 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, il che significa che la densità media è di $5\,515 \text{ kg/m}^3$ (si ricordi che l'acqua ha una densità di $1\,000 \text{ kg/m}^3$).

L'accelerazione di gravità varia in funzione della latitudine, è minima all'equatore e massima ai poli, ma varia anche con l'altezza. Un'espressione che ne consente il calcolo (in metri su secondo al quadrato) è data da:

$$g = 9,7803184 \cdot (1 + A \sin^2 \varphi - B \sin^2 2\varphi) - 3,086 \cdot 10^{-6} h$$

dove $A = 0,0053024$, $B = 0,0000059$, φ è la latitudine del luogo e h l'altezza in metri sul livello del mare.

Il valore medio è $g_0 = 9,8091 \text{ m/s}^2$ ^[5], il valore minimo all'equatore è $g_E = 9,7803 \text{ m/s}^2$ e un valore massimo ai poli: $g_P = 9,8322 \text{ m/s}^2$.

La velocità di fuga all'equatore è $v_F = 11,18 \text{ km/s} = 40\,248 \text{ km/h}$.



Figura 2.1 - La Terra dallo spazio ripresa dall'Apollo 17 nel 1972

^[4] Le figure 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 di questo capitolo sono tratte dal libro Accordi, Lupia Calmieri, Parlotto: Il Globo Terrestre, Zanichelli

^[5] Considerando la Terra una sfera di raggio pari al raggio medio.

La temperatura superficiale media è di 15°C con valori estremi che possono raggiungere +60°C e -90°C.

La Terra ha un unico satellite naturale: la Luna. L'esplorazione spaziale ha creato una gran quantità di detriti spaziali di varie dimensioni che orbitano intorno alla Terra. Il Comando Strategico degli Stati Uniti è in possesso di un catalogo contenente circa 13000 oggetti. Alla metà del 2009 la NASA quantificava in 19000 il numero di detriti di dimensioni superiori ai 10 cm, a 500000 quelli compresi tra 1 e 10 cm e stimava in svariate decine di milioni quelli più piccoli. Secondo l'ESA, in orbita, ci sono più di 600000 oggetti di dimensioni superiori al centimetro. Nel 2000 si stimava che circa 1500 oggetti avessero una massa superiore a 100 kg e che contribuissero al 98% del totale della massa dei detriti in orbita bassa^[6]. Questi detriti su orbita bassa sono distribuiti su un guscio sferico tutt'attorno alla Terra. Alla distanza di 36000 km si trovano i satelliti geostazionari che sono concentrati sul piano equatoriale a formare un vero e proprio anello.

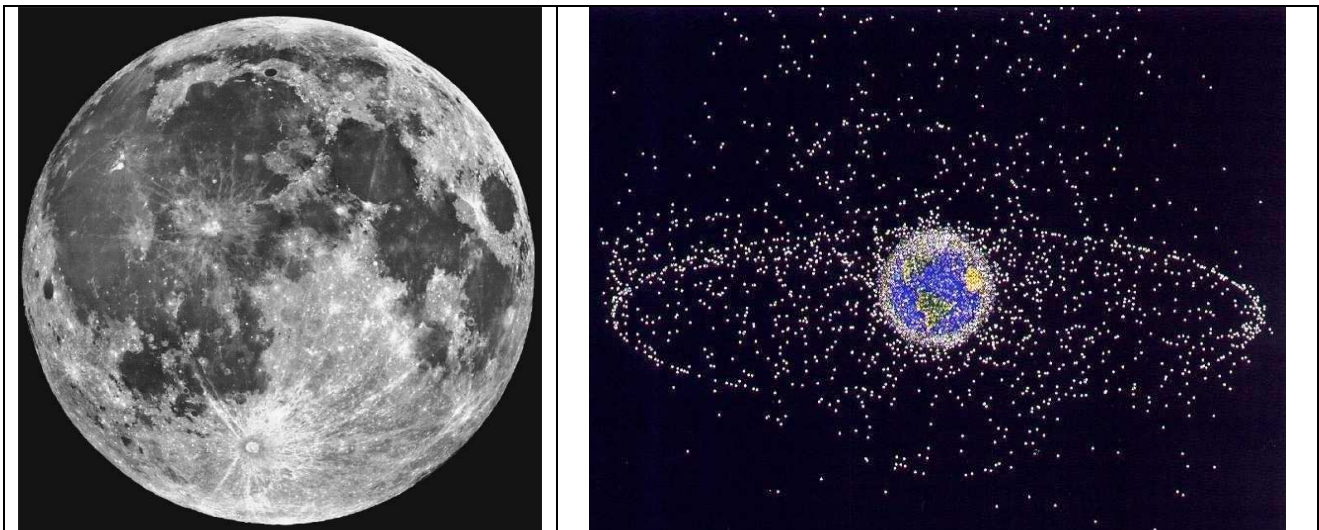


Figura 2.2 - I satelliti della Terra: a sinistra la Luna, l'unico satellite naturale; a destra una ricostruzione grafica dei satelliti artificiali della Terra

2.2 – Il moto di rotazione

2.2.1 – Generalità

Uno dei principali moti della Terra è il moto di rotazione che essa compie intorno al proprio asse, da ovest verso est, cioè in senso inverso all'apparente moto diurno della Sfera Celeste e del Sole. La durata di questo movimento, che si può ritenere praticamente uniforme, è di 23,9344726 ore = 23h 56min 4,1s.

Ogni punto della Terra compie in un giorno un intero giro di 360°, quindi, qualunque sia la lunghezza del parallelo da esso descritto, la velocità angolare di rotazione è identica a tutte le latitudini ed è pari a 15° ogni ora. La velocità periferica (ossia la distanza percorsa da un punto della superficie nell'unità di tempo) è invece variabile con la latitudine λ :

$$[2.1] \quad v(\lambda) = \frac{2\pi R_e}{T} \cos \lambda$$

essa è massima all'Equatore, dove raggiunge il valore di circa 465 m/s (= 1 674 km/h), e va diminuendo verso i poli, dove diventa nulla; alla latitudine di Camerino (Lat: 43°08'23" Long: 13°04'04") la velocità è di 339 m/s (= 1 221 km/h).

Con il diminuire della velocità periferica diminuisce la forza centrifuga a cui sono sottoposti i vari

[6] Per orbita bassa si intende un'orbita compresa tra l'atmosfera e le fasce di van Allen, ossia tra i 160 e i 2000 km.

punti della superficie terrestre per effetto della rotazione, mentre parallelamente va aumentando la forza di gravità.

Il movimento di rotazione della Terra non avviene in maniera perfettamente uniforme, infatti, le misure della sua durata, eseguite con «orologi atomici» di altissima precisione hanno dimostrato l'esistenza di diverse piccolissime variazioni. Le osservazioni astronomiche moderne e antiche ed alcune prove paleontologiche, hanno evidenziato un graduale rallentamento della velocità di rotazione per cui la durata del movimento si allungherebbe di circa 2 millesimi di secondo per secolo. Questo rallentamento si spiega con l'attrito delle maree; la Luna infatti esercita un'azione frenante sulla Terra, perché questa ruota su se stessa più velocemente di quanto non faccia la Luna nel suo moto di rivoluzione intorno alla Terra. Nella sua rotazione la Terra tende a trascinarsi dietro i rigonfiamenti delle maree, mentre la Luna esercita un'attrazione maggiore proprio su di essi e quindi si oppone al trascinamento e rallenta la rotazione terrestre; come conseguenza si ha anche, per reazione, un'accelerazione della Luna sulla sua orbita ed un aumento della forza centrifuga che tende ad allontanare la Luna dalla Terra. Ciò dovrebbe verificarsi fino a che la durata della rivoluzione della Luna attorno alla Terra non diverrà uguale alla durata della rotazione terrestre: allora la Terra presenterà alla Luna sempre la stessa faccia e terminerà l'effetto di frenamento della Luna. Ammettendo che l'attrito delle maree sia stato sempre lo stesso e che la Luna e la Terra abbiano avuto un'origine comune, si calcola che per raggiungere la posizione attuale la Luna dovrebbe aver impiegato circa 4 miliardi di anni.

Anche se in pratica possono essere considerate trascurabili queste variazioni non consentono di fissare l'unità di misura del tempo basandosi sulla effettiva durata della rotazione terrestre^[7].

2.2.2 – Prove della rotazione terrestre

Al movimento di rotazione della Terra si era pensato già nell'antichità, ma è dovuto passare molto tempo prima che l'idea potesse essere accettata da tutti. In effetti, se non si tiene conto della gravità terrestre, con un ragionamento semplicistico si può essere indotti a pensare che la rotazione terrestre debba portarci alternativamente con la testa «verso il basso» e «verso l'alto»; è evidente però che i concetti di «alto» e «basso» riferiti al Cosmo non hanno alcun senso perché qualunque sia il movimento che la Terra compie nello spazio, la nostra posizione rispetto ad essa, che ci attrae, rimane sempre invariata. Ma gli antichi non erano a conoscenza della gravità terrestre e quindi per loro era più facile credere alla sfericità di una Terra immobile e disabitata nelle regioni poste «al di sotto» del mondo allora conosciuto, piuttosto che ammettere la rotazione del nostro pianeta.

I nostri sensi non possono avere alcuna percezione diretta della rotazione terrestre, alla quale partecipiamo anche noi; tuttavia abbiamo ormai numerosissime prove di questo movimento.

Una prima prova si può desumere dall'esame dell'apparente spostamento dei corpi celesti da est verso ovest. A prima vista questo spostamento potremmo spiegarlo indifferentemente sia con un movimento di rotazione degli astri intorno alla Terra, sia con una rotazione in senso contrario (cioè da ovest verso est)

della Terra su se stessa. Però, dato che i vari corpi celesti non sono fissati su una sfera, ma si trovano a distanze molto diverse da noi, per ammettere che siano essi a girare intorno alla Terra

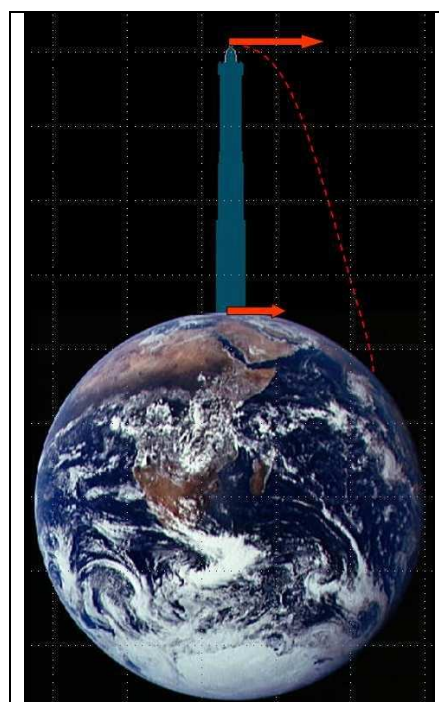


Figura 2.3 – L'esperimento di Guglielmini.

[7] Nel passato l'unità di misura del tempo, il secondo (simbolo s) veniva definito come la 86400 parte del giorno solare medio (che era appunto di 24 ore). Oggi, il Sistema Internazionale di Unità di misura adotta per il secondo la seguente definizione: il secondo è la durata di 9 192 631 770 oscillazioni della radiazione emessa dall'atomo di cesio 133 (¹³³Cs) nello stato fondamentale ²S_{1/2} nella transizione dal livello F=4, M=0 al livello iperfine F=3, M=0 (XIII CGPM, 1967). Da questo segue che il secondo siderale è dato da 0,9972696 s.

bisognerebbe ammettere che gli astri abbiano velocità esattamente proporzionali alle loro distanze dall'asse terrestre, perché altrimenti non li vedremmo muoversi tutti insieme solidalmente; quindi i corpi celesti più lontani, che distano da noi milioni di anni-luce, dovrebbero avere velocità assai maggiori di quella della luce.

Un'altra prova indiretta della rotazione terrestre può essere ricavata dall'analogia con gli altri pianeti: tutti quanti mostrano un evidente moto rotatorio assiale e non abbiamo motivo per ritenere che solo il nostro pianeta debba esserne privo.

Altre prove possiamo dedurle da alcuni esperimenti di Fisica eseguiti sulla Terra stessa. Uno di questi si basa sull'osservazione della caduta libera dei corpi: un grave che viene lasciato cadere da un punto elevato sulla superficie terrestre (per esempio, dalla sommità di un'alta torre) devia dalla verticale del punto di partenza e giunge sul suolo spostato verso est. Questo fenomeno era già stato previsto da Galileo ed enunciato da Newton, ma fu verificato per la prima volta da G.B. Guglielmini che tra il 1791 e il 1792 eseguì numerose prove dalla Torre degli Asinelli in Bologna, osservando uno spostamento di 17 mm per una altezza di caduta di circa 100 m. Il fenomeno è spiegabile se si ammette il moto rotatorio della Terra da ovest verso est, poiché in questo caso anche il corpo che si trova sulla torre dovrà partecipare alla rotazione terrestre, assumendo la stessa velocità del punto di partenza e mantenendola per inerzia anche durante la caduta; d'altra parte, essendo il punto di partenza più lontano dall'asse terrestre rispetto al punto di arrivo (la base della torre o il suolo), il corpo avrà una maggiore velocità lineare di rotazione rispetto a quest'ultimo, quindi ruoterà di più e andrà a cadere più avanti, ossia spostato ad est. Naturalmente, la deviazione della verticale è tanto più grande quanto maggiore è l'altezza dalla quale si lascia cadere il corpo perché maggiore è la distanza di un punto dall'asse di rotazione e maggiore è la velocità.

Un'altra prova del moto di rotazione della Terra è data dall'esperienza di Foucault, che consiste nell'osservare lo spostamento del piano di oscillazione di un pendolo rispetto agli oggetti terrestri; essa fu eseguita prima nell'Osservatorio di Parigi e poi pubblicamente, nel 1851, nel Panthéon di Parigi.

2.2.3 - I ciclo del dì e della notte

La conseguenza più immediata del moto di rotazione è l'alternarsi del dì e della notte. I raggi solari, che giungono sulla Terra quasi paralleli tra loro, illuminano in ogni istante solo la parte di superficie terrestre che è rivolta verso il Sole; poiché la rotazione si compie in un tempo molto più breve della intera rivoluzione intorno al Sole sulla superficie terrestre si alternano un periodo di illuminazione, che chiamiamo dì, e uno di oscurità, che chiamiamo notte. Con il termine giorno indichiamo il tempo dell'intera rotazione, cioè l'insieme del dì e della notte.

L'emisfero illuminato è diviso da quello in ombra da un circolo massimo che va spostandosi di continuo ed al quale diamo il nome di circolo d'illuminazione. Esso in realtà non separa nettamente la parte illuminata da quella buia, ma tra le due zone c'è una fascia di una certa ampiezza dove il passaggio dal dì alla notte è graduale. Ciò dipende della presenza dell'atmosfera, i cui alti strati sono penetrati dai raggi un po' prima del sorgere del Sole sull'orizzonte ed un po' dopo il tramonto: fenomeni di diffusione, riflessione e rifrazione della luce negli strati dell'atmosfera ci danno un po' di chiarore solare durante le aurore ed i crepuscoli, la cui durata aumenta nella stagione invernale e nelle regioni polari.

Costellazione	data di entrata	
	giorno	ora
Capricorno	20 gennaio	9
Acquario	16 febbraio	20
Pesci	11 marzo	21
Ariete	19 aprile	9
Toro	14 maggio	20
Gemelli	22 giugno	4
Cancro	21 luglio	9
Leone	11 agosto	8
Vergine	17 settembre	10
Bilancia	31 ottobre	22
Scorpione	24 novembre	1
Ophiuco	30 novembre	13
Sagittario	18 dicembre	21

Tabella 2 - Data e ora dell'entrata del Sole nelle costellazioni dello Zodiaco nel 2019.

2.3 – Il moto di rivoluzione

2.3.1 - Generalità

Di notevole interesse è la rivoluzione che la Terra compie, come gli altri pianeti del Sistema Solare, descrivendo un'orbita ellittica intorno al Sole in senso antiorario, immaginando di osservare il movimento dal Polo nord celeste. Come sappiamo dalla I legge di Keplero, la distanza tra la Terra ed il Sole varia a seconda che la Terra si trovi all'afelio ($d_A = 152100000$ km circa) o al perielio ($d_P = 147100000$ km circa); quella media è di 149600000 km^[8]. La Terra viene a trovarsi al perielio tra il 5 e il 6 gennaio, all'afelio tra il 6 e il 7 luglio.

L'orbita descritta dalla Terra è un'ellisse molto poco schiacciata, tanto da potersi assimilare quasi ad una circonferenza; la sua eccentricità, ossia il rapporto tra la distanza del Sole dal centro dell'ellisse

e la lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse stessa, è $e = \frac{d_A - d_P}{d_A + d_P} = 0,01671$ (per una

circonferenza il valore dell'eccentricità è uguale a zero).

L'intero percorso orbitale ha una lunghezza di circa 940 milioni di chilometri; esso viene percorso ad una velocità variabile (II legge di Keplero) compresa tra 29,3 km/s all'afelio ed i 30,3 km/s al perielio: la velocità media è di circa 29,8 km/s. Il tempo che la Terra impiega a compiere un'orbita completa, cioè l'effettiva durata della rivoluzione terrestre, è di $365,25636$ d = 365d 6h 9min 9,5s e viene chiamato anno sidereo^[9].

2.3.2 - Prove e conseguenze della rivoluzione terrestre

Tra le prove indirette del moto di rivoluzione terrestre possiamo considerare l'analogia con gli altri pianeti del Sistema solare, per i quali si è potuta osservare l'esistenza di un complesso movimento intorno al Sole, regolato dalle leggi di Keplero. Inoltre la periodicità annua di alcuni gruppi di stelle cadenti dovrebbe indicare che la Terra si muove nello spazio descrivendo un'orbita di forma tale (circolare o ellittica) che le consenta di passare periodicamente attraverso regioni in cui sono presenti sciami di materia cosmica.

La prova diretta e più sicura del moto orbitale della Terra è fornita da un

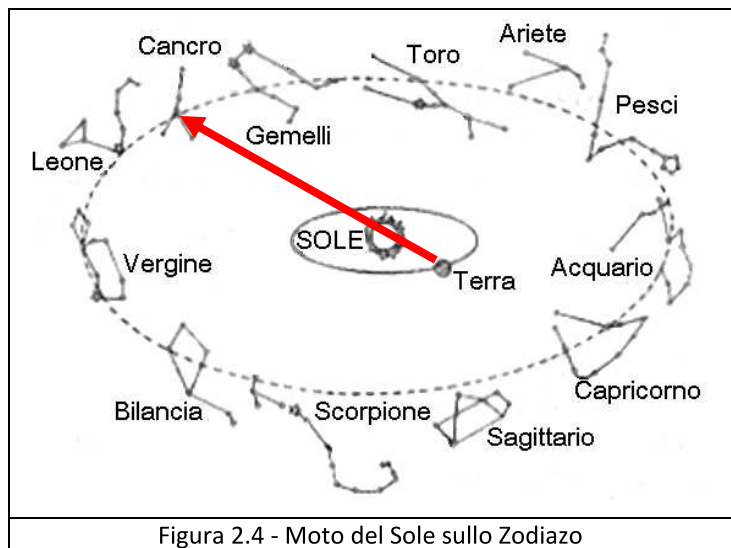


Figura 2.4 - Moto del Sole sullo Zodiaco

fenomeno di natura fisica scoperto nel 1727 da J. Bradley, dell'Osservatorio astronomico di Greenwich: l'aberrazione della luce proveniente dagli astri (vedremo meglio più avanti). Ulteriori prove del moto orbitale della Terra intorno al Sole si basano su due fatti di estrema importanza, e cioè: che l'asse terrestre è inclinato di $66^{\circ}33'$ rispetto al piano dell'orbita ($23^{\circ}27'$ rispetto alla perpendicolare a tale piano) e che, se si considerano tempi non troppo lunghi, esso si mantiene costantemente parallelo a se stesso. Se l'asse terrestre fosse perpendicolare al piano dell'orbita, il

[⁸] Sulla base di questo valore l'Unione Astronomica Internazionale ha definito una unità di misura per le distanze astronomiche, l'Unità Astronomica (simbolo UA) pari a $1,4959787061 \cdot 10^{11}$ m.

[⁹] Il sistema Terra-Sole in realtà si muove attorno al centro di massa comune, cioè attorno al punto che divide la congiunte i due corpi in due parti inversamente proporzionali alle loro masse (con la parte più corta vicina al corpo di massa più grande e quella più lunga vicina al corpo di massa più piccola). Dato che la massa del Sole è molto maggiore (circa 334 000 volte) di quella della Terra, il centro di massa si trova però tanto prossimo al Sole da potersi ritenere praticamente coincidente con il suo centro (è mediamente a 450 km da esso); di conseguenza si può approssimativamente considerare che la Terra sia in movimento intorno al Sole.

circolo d'illuminazione passerebbe per i poli e coinciderebbe in qualsiasi momento con un circolo meridiano, tagliando in due parti uguali tutti i paralleli; di conseguenza, in ogni punto della superficie terrestre e per tutto l'anno il dì e la notte avrebbero la stessa durata (12 ore ciascuno) e in nessun luogo si verificherebbe l'alternarsi delle stagioni. In tali condizioni la quantità di luce e di calore ricevuti dalle varie parti della superficie terrestre dipenderebbe solo dall'inclinazione dei raggi solari e quindi, a causa della sfericità della Terra, sarebbe tanto più piccola quanto maggiore è la latitudine; comunque, per una determinata, località essa si manterrebbe uniforme durante tutto l'anno. Una certa variabilità nel corso dell'anno si avrebbe solo per il fatto che il Sole non si trova sempre alla stessa distanza dalla Terra; ma poiché la differenza tra la distanza massima e la distanza minima è relativamente piccola, le variazioni legate a questo fattore sono piuttosto modeste.

La nostra esperienza quotidiana ci dimostra però che queste condizioni si verificano solo in due momenti dell'anno, il 21 marzo ed il 23 settembre. In tutti gli altri momenti solo i punti che si trovano sull'Equatore hanno dì e notte sempre uguali, mentre nei luoghi situati a Nord e a Sud di esso osserviamo una diversa durata del dì e della notte. E questa differenza è piccola in prossimità dell'Equatore, ma diventa molto sensibile andando verso i poli, in corrispondenza dei quali si raggiunge addirittura una durata di sei mesi per il dì e sei mesi per la notte. Come si può spiegare tutto ciò? Cerchiamo di rendercene conto partendo dai fenomeni che possiamo osservare sulla Sfera Celeste.

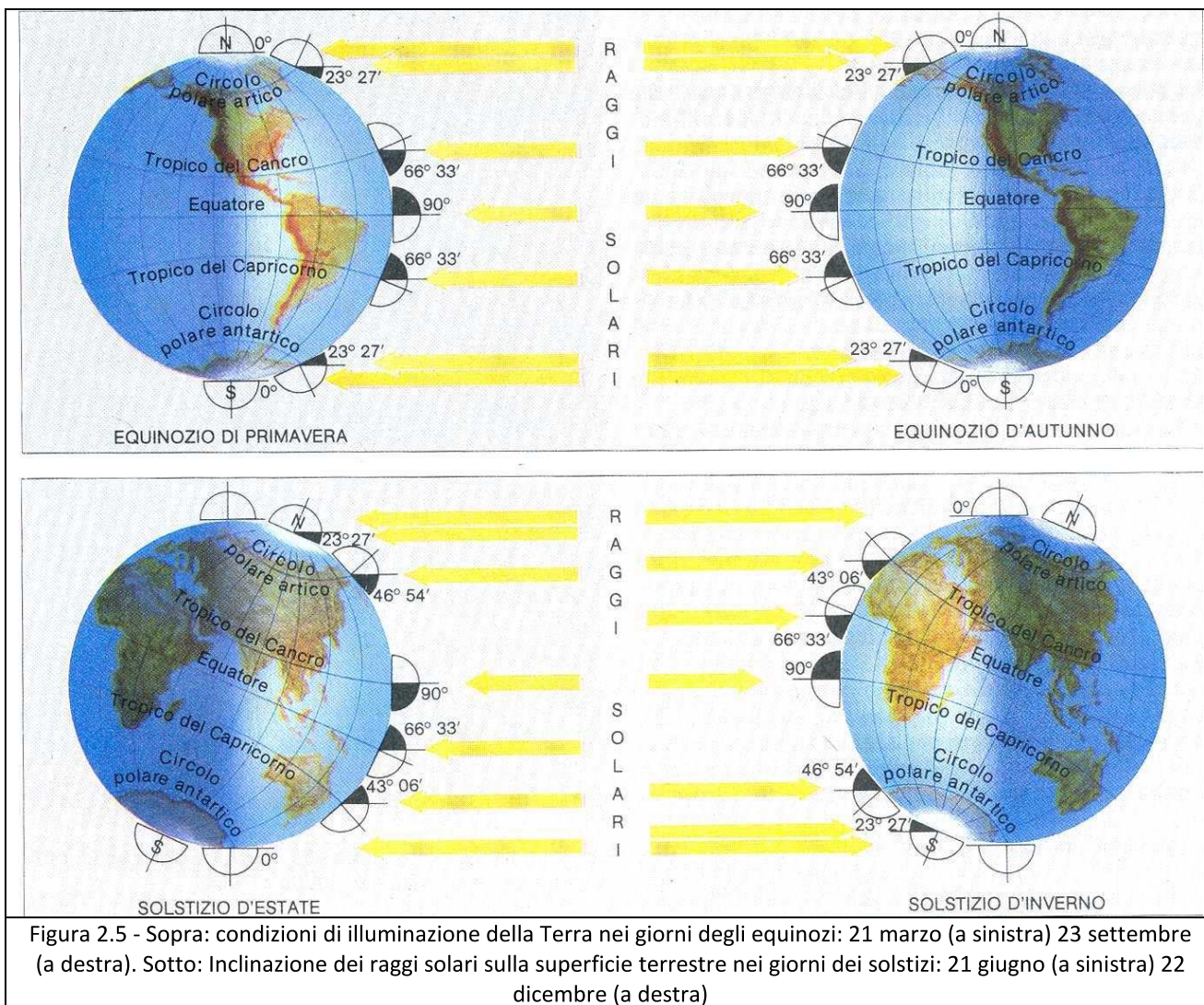


Figura 2.5 - Sopra: condizioni di illuminazione della Terra nei giorni degli equinozi: 21 marzo (a sinistra) 23 settembre (a destra). Sotto: Inclinazione dei raggi solari sulla superficie terrestre nei giorni dei solstizi: 21 giugno (a sinistra) 22 dicembre (a destra)

Come abbiamo già notato, apparentemente sembra che il Sole giri intorno alla Terra percorrendo una traiettoria che giace sullo stesso piano dell'orbita terrestre ed è quindi inclinata di $23^{\circ}27'$ rispetto al piano equatoriale celeste (o terrestre). In questo movimento il Sole si sposta perciò da un emisfero celeste all'altro, mantenendosi per sei mesi a nord dell'equatore e per altri sei mesi a sud di

esso. I due punti in cui la traiettoria solare attraversa l'equatore celeste sono gli equinozi, le cui date cadono appunto il 21 marzo (equinozio di primavera o punto γ) ed il 23 settembre (equinozio d'autunno o punto Ω); quando il Sole si trova in uno di questi punti, giace sul piano equatoriale, quindi culmina allo zenit dell'equatore terrestre, e allora il dì e la notte presentano la stessa durata in ogni luogo della Terra (Figura 2.5 sopra).



Figura 2.6 - Il Sole di Mezzanotte

Le massime elevazioni a nord e a sud rispetto al piano equatoriale terrestre il Sole le raggiunge in due posizioni che vengono dette solstizi; la prima si ha il 21 giugno (solstizio d'estate), l'altra il 22 dicembre (solstizio d'inverno): in questi due momenti dell'anno i raggi solari risultano perpendicolari alternativamente a due paralleli che si trovano, rispettivamente, ad una latitudine di $23^{\circ}27'$ nord (Tropico del Cancro) e $23^{\circ}27'$ sud (Tropico del Capricorno). In tutti e due i casi il circolo d'illuminazione è tangente a due paralleli che distano dall'Equatore $66^{\circ}33'$ (quello dell'emisfero boreale è il circolo polare artico, quello dell'emisfero australe è il circolo polare antartico) e taglia obliquamente tutti gli altri paralleli compresi tra questi e l'equatore; ma le condizioni di illuminazione sono completamente diverse per i due emisferi (Figura 2.5 sotto). Nel solstizio d'estate tutti i punti a nord dell'equatore restano per un tratto più lungo nella parte illuminata e quelli a sud dell'equatore rimangono per un tratto più lungo nella parte oscura, mentre solo all'equatore si hanno 12 ore di luce e 12 di buio; i luoghi compresi fra il circolo polare artico ed il polo nord, cioè nella calotta artica, restano illuminati durante tutta la rotazione terrestre (Figura 2.5 sotto), mentre quelli della calotta antartica (tra il circolo polare antartico ed il polo sud) restano nel frattempo al buio. Nel solstizio d'inverno, quando i raggi solari sono perpendicolari al Tropico del Capricorno, si hanno condizioni opposte e il dì viene ad essere più lungo della notte nell'emisfero meridionale, più corto in quello settentrionale; completamente illuminata è la calotta antartica, completamente nell'oscurità quella artica.

2.3.3 - Il ritmo delle stagioni

I quattro momenti fondamentali sopra descritti possono essere indicati sull'orbita terrestre con le relative posizioni in cui viene a trovarsi la Terra: la linea che, passando per il centro del Sole, unisce i due punti dell'orbita in cui i raggi solari sono allo Zenit sull'Equatore è la **linea degli equinozi**; perpendicolare ad essa è la **linea dei solstizi**, che unisce i due punti in cui il Sole è alla massima elevazione rispetto al piano equatoriale. Bisogna notare che la linea dei solstizi non coincide con la linea degli apsidi, la quale congiunge l'afelio col perielio: attualmente esse formano al centro del Sole un angolo di circa 12° (Figura 2.7). Nei periodi di tempo che intercorrono fra queste quattro posizioni le condizioni di illuminazione sono

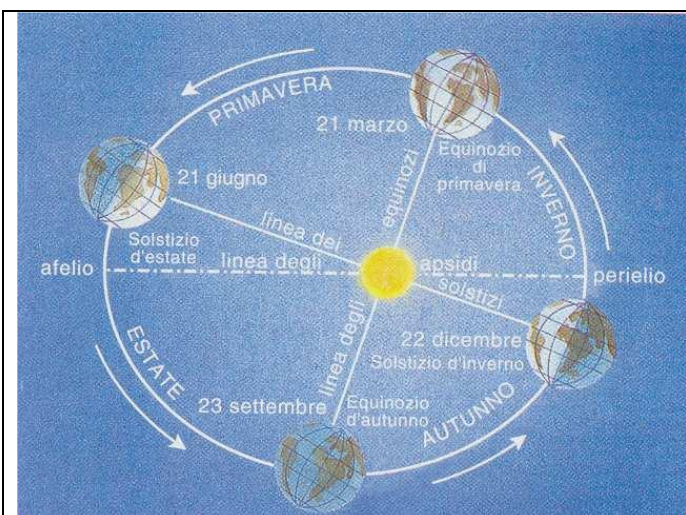
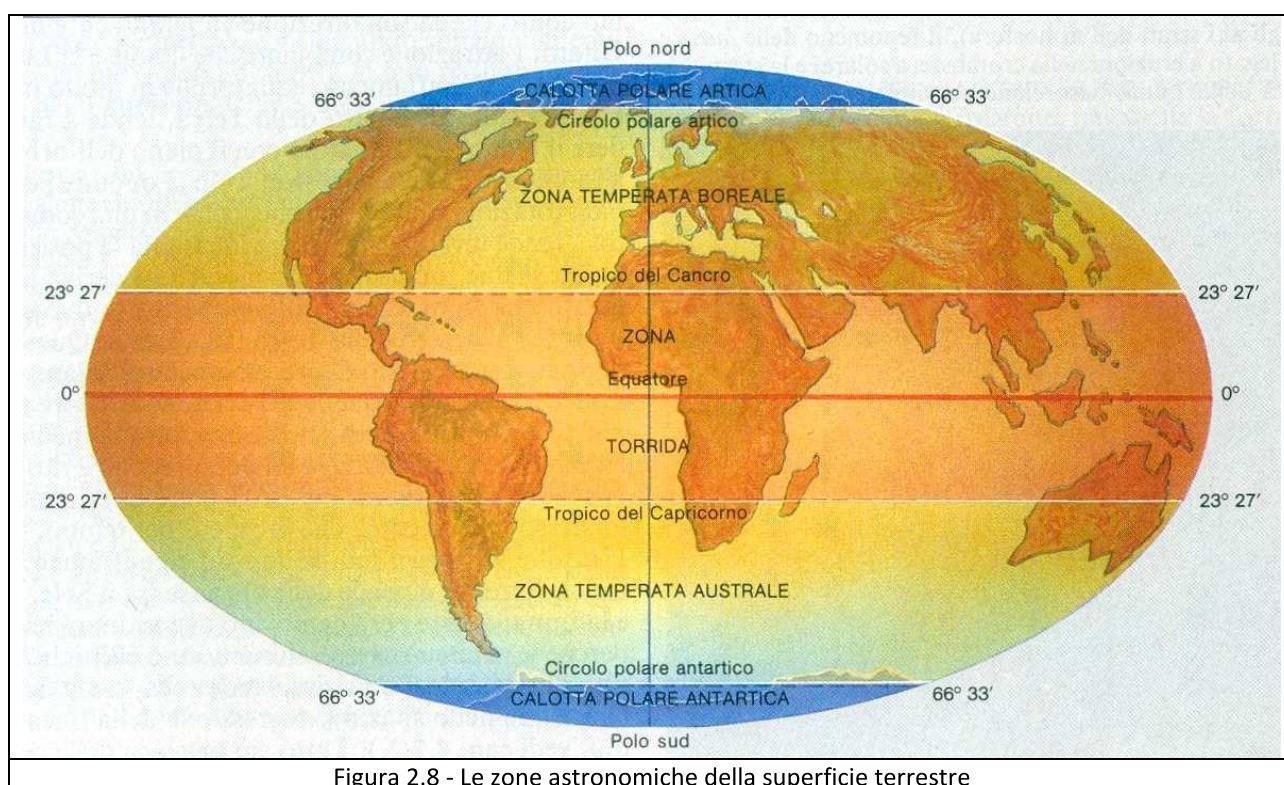


Figura 2.7 - La rivoluzione della Terra intorno al Sole e le attuali posizioni degli equinozi e dei solstizi. Le stagioni sono riferite all'emisfero Boreale, nell'emisfero Australe sono invertite.

intermedie a quelle descritte e variano progressivamente dall'una all'altra. Poiché la quantità di calore ricevuta da ciascun punto della superficie terrestre dipende appunto da tali condizioni (durata del dì e inclinazione dei raggi solari), ne deriva che nel volgere di un anno, nei vari luoghi della Terra si susseguono periodi più caldi e più freddi: si ha cioè l'alternarsi delle stagioni. Le stagioni astronomiche, ossia i periodi di tempo compresi tra un equinozio ed il solstizio che lo segue, o tra un solstizio e l'equinozio successivo, sono così delimitate:

<i>Emisfero Boreale</i>	<i>Emisfero Australe</i>	<i>dal - al</i>	<i>Durata</i>
Primavera	Autunno	21 marzo - 21 giugno	92d 21h
Estate	Inverno	21 giugno - 23 settembre	93d 9h
Autunno	Primavera	23 settembre - 22 dicembre	90d circa
Inverno	Estate	22 dicembre - 21 marzo	89d circa

Tabella 3 - Durata delle stagioni 2019 - 2020



A causa della diversa velocità della Terra sull'orbita, le stagioni astronomiche non hanno tutte la stessa durata: noi abbiamo complessivamente un semestre caldo (primavera-estate) più lungo di circa 7 giorni e 6 ore del semestre freddo (autunno-inverno) ed il contrario si ha nell'emisfero australe; come si vedrà in seguito, questo vale però ai giorni nostri, perché le cose cambiano nel corso dei millenni. Occorre notare che le stagioni astronomiche, pur costituendone la causa primaria, non coincidono del tutto con le stagioni meteorologiche, cioè con il reale andamento del tempo meteorologico e del clima. Per capirne i motivi si può innanzitutto notare che le situazioni di insolazione che si registrano agli equinozi e ai solstizi dovrebbero rappresentare, anche da un punto di vista esclusivamente astronomico, il culmine delle condizioni caratteristiche delle rispettive stagioni e non il loro momento di inizio; d'altra parte si deve anche considerare che l'atmosfera, le acque e le terre emerse immagazzinano e cedono il calore sempre con un certo ritardo, impedendo così di percepire subito gli effetti delle varie inclinazioni dei raggi solari. Pertanto, sulla base delle reali condizioni di riscaldamento nei vari periodi dell'anno, si è stabilito convenzionalmente che le stagioni meteorologiche incominciano col primo giorno del mese in cui cade l'equinozio o il solstizio di quelle astronomiche corrispondenti. Quindi la primavera meteorologica comprende interamente i mesi di marzo, aprile e maggio, l'estate i mesi di giugno, luglio e agosto; l'autunno va dal 1° settembre a tutto novembre, l'inverno dal 1° dicembre a tutto febbraio.

Come abbiamo visto, i due tropici e i due circoli polari rivestono un'importanza particolare per le condizioni di illuminazione e di inclinazione dei raggi solari nel corso dell'anno. Essi dividono la superficie terrestre in cinque parti caratterizzate da condizioni diverse di riscaldamento, chiamate zone astronomiche (Figura 2.8). Queste sono: la zona torrida (o zona intertropicale), limitata dai due tropici e divisa in due dall'Equatore; la zona temperata boreale, compresa fra il Tropico del Cancro ed il Circolo polare artico, e la zona temperata australe tra il Tropico del Capricorno ed il Circolo polare antartico; la calotta polare artica che si estende dal Circolo polare artico al Polo nord e la calotta polare antartica dal Circolo polare antartico al Polo sud^[10].

Un'altra conseguenza del moto di rivoluzione della Terra è la diversa durata del giorno solare e del giorno siderico.

Comunemente per giorno si intende il tempo che la terra impiega a fare un giro su se stessa; però questo periodo è diverso se viene conteggiato rispetto al Sole o rispetto alle stelle. Bisogna quindi distinguere tra giorno solare, cioè il tempo che intercorre tra due passaggi successivi del Sole alla massima altezza sul piano dell'orizzonte di un certo luogo, la cui durata è di 24 ore e giorno siderico, cioè il tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi di una stella su un determinato meridiano della superficie terrestre, la cui durata è di 0,9972697 giorni solari ovvero 23,9344726h.

Il motivo di questa differenza di circa 4 minuti sta nel fatto che mentre la Terra compie una rotazione si muove anche di circa 7030 km lungo la sua orbita perciò, per rivedere il Sole nella stessa direzione, dopo che la Terra ha fatto un giro completo intorno al proprio asse, occorre che essa compia un supplemento di rotazione (vedi Figura 2.9).

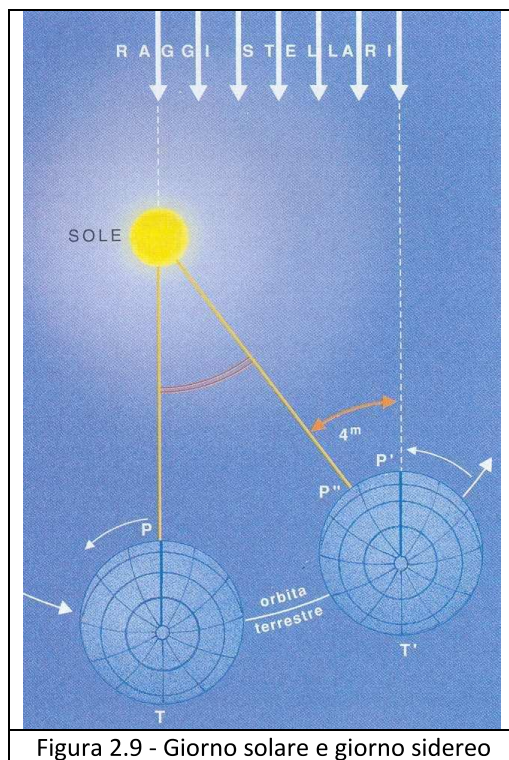


Figura 2.9 - Giorno solare e giorno siderico

2.4 – I moti secondari

La Terra è interessata anche da altri movimenti che sono simultanei con quelli di rotazione e di rivoluzione, ma sono ad essi subordinati. Alcuni sono moti millenari (precessione luni-solare, spostamento della linea degli apsidi, variazione dell'eccentricità dell'orbita, mutamento dell'inclinazione dell'asse terrestre) e possono essere considerati come perturbazioni più o meno

[¹⁰] Nella zona torrida il Sole passa allo Zenit di tutti i punti due volte all'anno; ai tropici il Sole è allo Zenit una sola volta all'anno: nel giorno del solstizio di giugno al Tropico del Cancro, in quello del solstizio di dicembre al Tropico del Capricorno. Mentre all'Equatore il dì e la notte hanno sempre la stessa durata, negli altri punti della zona torrida si ha una differenza che però non è mai molto forte: ai tropici il dì più lungo è di 13 ore e tre quarti e quindi la notte più breve di 10 ore e un quarto. Ne deriva che in questa zona il riscaldamento è sempre molto forte e non si può parlare di vere e proprie stagioni. Nelle zone temperate il Sole non passa mai allo Zenit e i suoi raggi arrivano più o meno obliqui, secondo il periodo dell'anno e la latitudine. Le durate del dì e della notte presentano differenze che vanno aumentando con la latitudine e con l'avvicinarsi dei giorni solstiziali tanto che sui circoli polari il dì e la notte più lunghi raggiungono, alternativamente, la durata di 48 ore perché al periodo di illuminazione (o di oscurità) del giorno dei solstizi si collega quello di illuminazione (o di oscurità) del giorno seguente. Nelle zone temperate, quindi, il riscaldamento varia durante l'anno e si ha una distinzione netta tra le varie stagioni.

Nelle zone polari i raggi del Sole arrivano sempre molto obliqui o addirittura non colpiscono affatto la superficie per un periodo tanto più lungo quanto più ci si avvicina ai poli. Dopo l'equinozio di primavera nella calotta artica inizia un periodo di illuminazione che è detto gran dì, mentre nella calotta antartica inizia la grande notte; il contrario si ha invece dopo l'equinozio d'autunno. Il gran dì e la grande notte, che vicino ai circoli polari durano pochi giorni, ai poli dovrebbero durare 6 mesi ciascuno, ma la presenza di lunghi crepuscoli (dovuti ai fenomeni di diffusione e rifrazione della luce negli alti strati dell'atmosfera), il fenomeno delle aurore polari (legato a eruzioni nella cromosfera solare) e la stessa luminosità della Luna, accorciano sensibilmente il periodo di oscurità completa, cosicché la durata della grande notte si aggira intorno ai 100 giorni.

sensibili dei due movimenti principali. A causa della lentezza di questi movimenti, non è possibile osservarne direttamente le conseguenze; tuttavia la loro esistenza è comprovata da accuratissimi studi astronomici, come quelli impostati intorno al 1930 da Milankovitch e poi sviluppati anche da altri ricercatori, ed è testimoniata anche dalle tracce glaciali che si rinvennero in luoghi della Terra dove oggi i ghiacciai non esistono più.

Altri movimenti coinvolgono la Terra in quanto facente parte del Sistema Solare, della Galassia e dell'Universo.

2.4.1 - Il moto biconico

Si è detto che l'asse terrestre si mantiene parallelo a se stesso nel corso della rivoluzione: in realtà ciò è approssimativamente vero solo se si considerano tempi non troppo lunghi; se potessimo eseguire osservazioni prolungate per alcune migliaia di anni, ci renderemmo conto che la sua direzione va lentamente mutando. Difatti, l'attrazione combinata che il Sole e la Luna esercitano sul rigonfiamento equatoriale, tende a far coincidere il piano dell'Equatore con il piano dell'orbita, cioè a raddrizzare l'asse terrestre; a ciò si oppone però la rapida rotazione della Terra che, come in una trottola, tende invece a mantenere immutata la posizione dell'asse: le due forze si compongono e ne deriva un movimento che fa descrivere all'asse terrestre due coni con il vertice al centro della Terra (Figura 12). Questo moto biconico, detto anche di precessione luni-solare, avviene in senso contrario a quello di rotazione terrestre e si compie in 25 700 anni circa; lo spostamento è di circa 50" l'anno.

2.4.2 - Nutazione

L'azione attrattiva luni-solare sul rigonfiamento equatoriale terrestre dipende dalle distanze Sole-Terra e Luna-Terra; queste però cambiano nel tempo perché le orbite terrestri e lunari sono ellittiche ed inoltre mutano la loro posizione reciproca, ossia la loro intersezione nello spazio dando luogo alla *regressione della linea dei nodi* ^[1]. Tutto ciò provoca delle perturbazioni periodiche nel moto di biconico che si manifestano come oscillazioni con ampiezza massima di 18,4" in un periodo di circa 18,6 anni. Tali oscillazioni vengono dette nutazioni e per effetto di questi movimenti l'asse terrestre, invece di descrivere due coni circolari, si muove secondo coni leggermente ondulati (Figura 2.10).

2.4.3 - Variazione dell'inclinazione

L'asse terrestre, nell'arco di circa 40.000 anni, varia la sua inclinazione rispetto alla perpendicolare dell'orbita della Terra, da un minimo di circa 21°55' ad un massimo di circa 24°20' e ritorno al minimo di 21°55'. Questa oscillazione non ha andamenti regolari; l'inversione del senso di inclinazione, può avvenire prima di avere raggiunto un limite estremo. La variazione dell'inclinazione della Terra ha come primo effetto una variazione della declinazione massima o minima dell'Eclittica e, conseguentemente, una variazione dell'ampiezza delle fasce tropicali e di quelle entro i Circoli polari e quindi essa comporta anche lo spostamento delle latitudini dei Circoli Polari e dei Tropici. Attualmente l'inclinazione è di circa 23°27' ed è in fase di diminuzione ovvero la Terra si sta "raddrizzando" e si stanno restringendo sia le fasce tropicali, sia quelle polari.

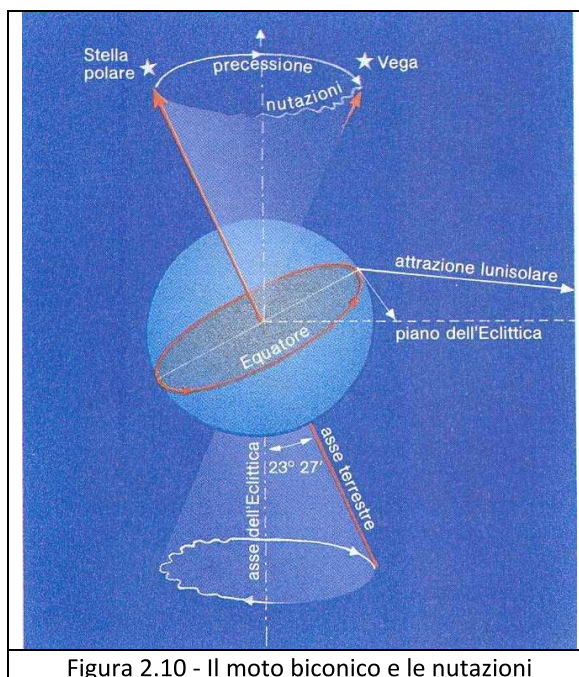


Figura 2.10 - Il moto biconico e le nutazioni

[1] La linea di intersezione fra il piano dell'orbita lunare e il piano dell'orbita terrestre non rimane fissa nello spazio, ma si sposta continuamente, ossia ruota con un periodo di circa 18,6 anni.

2.4.4 - Polodia

L'asse di rotazione terrestre, per svariate cause, soprattutto per lo spostamento interno delle masse terrestri, non mantiene una direzione costante, ma si sposta lungo una linea irregolare (polodia), approssimativamente entro un quadrato con lato di 20 metri. Attenzione questo non significa che la direzione dell'asse può cambiare per questi fenomeni, cambiano solo i punti in cui l'asse "esce" dalla Terra, ovvero i punti sulla superficie del globo terrestre dove si trovano il Polo Nord e il Polo Sud geografici. È quanto è avvenuto con il terremoto del dicembre 2004 nell'Oceano Indiano.

2.4.5 - Rotazione della linea degli apsidi

Sempre a causa dell'attrazione sulla Terra degli altri pianeti del Sistema Solare, la linea che congiunge l'afelio ed il perielio, detta linea degli Apsidi (o Absidi), osservata da sopra il Polo Nord presenta un movimento in senso antiorario con una velocità angolare di 11" ogni anno, in modo da compiere un giro completo in 117 000 anni. Questo fa sì che l'istante del passaggio del Sole al perielio non sia sempre lo stesso, ma vari nel tempo (rispetto all'anno sidereo). L'intervallo di tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole al perielio viene detto anno anomalistico; la sua durata è di 365,25964 d = 365d 6h 13min 52,9s.

2.4.6 - Precessione degli equinozi

Lo spostamento della linea degli Apsidi va "incontro" allo spostamento della linea degli equinozi e ne abbrevia il periodo da circa 25 700 a 21 000 anni, conseguentemente gli equinozi ed i solstizi cadono ogni anno circa 01'01" in anticipo. Da ciò segue che l'intervallo di tempo che intercorre tra due passaggi successivi del Sole allo Zenit dello stesso tropico, cioè tra due solstizi dello stesso nome (o anche tra due equinozi dello stesso nome), che viene detto anno tropico è diverso dal tempo che la Terra impiega a ruotare intorno al Sole (anno sidereo); la durata dell'anno tropico è di 365,2421897 d = 365d 5h 48min 45,2s, cioè circa 20min 24,3s in meno dell'anno sidereo.

La Precessione degli Equinozi è il risultato di due movimenti: il mutamento di direzione nello spazio dell'asse di rotazione terrestre (moto biconico) e lo spostamento della linea degli Apsidi.

Conseguenza notevole del moto di precessione è che il prolungamento ideale dell'asse terrestre non va a cadere sempre in corrispondenza della Stella polare. Quest'ultima, che è attualmente assai vicina al Polo nord celeste (ne dista poco più di mezzo grado), ne sarà distante circa 47° quando l'asse terrestre avrà percorso metà del suo giro conico, cioè fra circa 13.000 anni; allora la posizione del Nord sarà indicata dalla stella Vega della costellazione della Lira (vedi Figura 2.11).

Un'altra conseguenza della precessione degli equinozi è che col tempo cambia la posizione che il Sole assume nei vari momenti dell'anno rispetto alle costellazioni dello Zodiaco. Ad esempio, mentre nel IV secolo a.C. all'inizio della primavera boreale il Sole si vedeva proiettato nella costellazione dell'Ariete, attualmente nello stesso periodo dell'anno lo si vede nella costellazione dei Pesci; come se da allora ad oggi lo Zodiaco si fosse spostato di una costellazione, ruotando di circa 30° verso oriente. Tuttavia il quadro zodiacale riportato ancora oggi nei calendari è quello

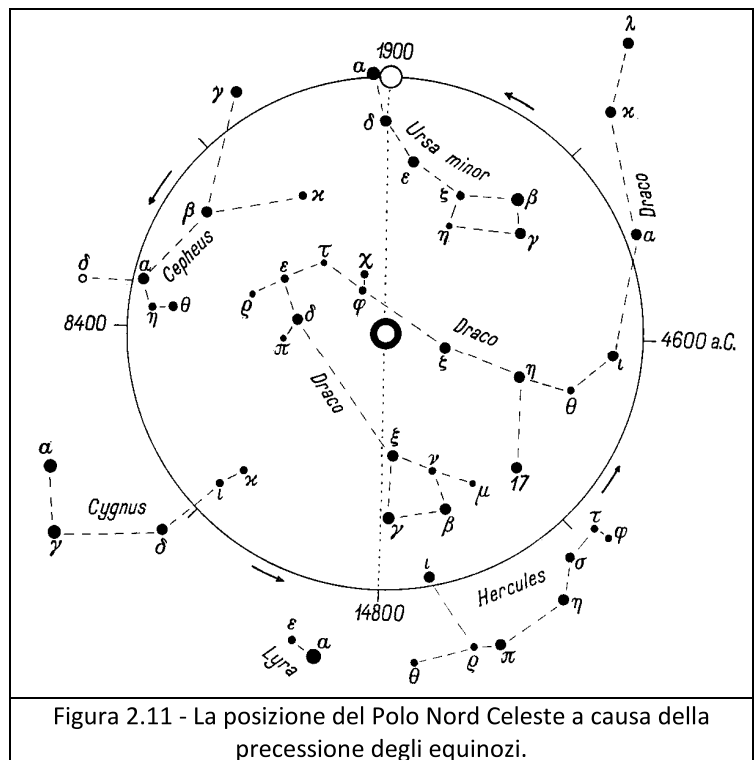


Figura 2.11 - La posizione del Polo Nord Celeste a causa della precessione degli equinozi.

dell'antichità, e così quando si dice che il Sole è, ad esempio, nel *segno* dell'Ariete si deve intendere che esso si trova nella posizione in cui un tempo c'era questa costellazione, e che attualmente è quella dei Pesci (vedi Figura 2.12). L'anticipo dei punti sull'orbita terrestre in cui si verificano gli equinozi e i solstizi non deve far credere che cambino anche le date degli equinozi e dei solstizi: essi cadono sempre alle stesse date del nostro calendario.

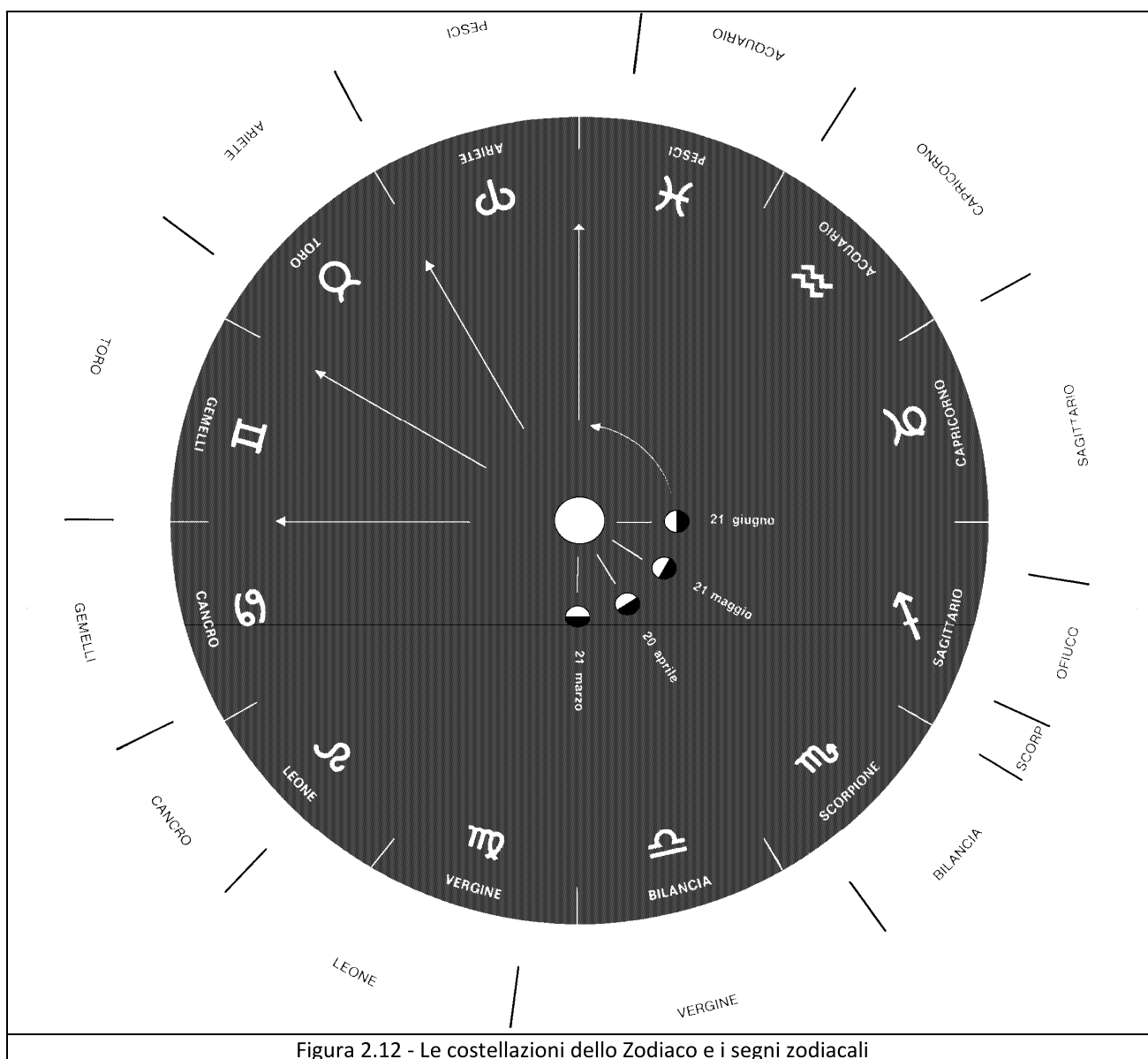


Figura 2.12 - Le costellazioni dello Zodiaco e i segni zodiacali

2.4.7 - Variazione della distanza tra i fuochi

Oltre a quelle descritte l'azione gravitazionale esercitata dai vari corpi del Sistema Solare produce perturbazioni che col tempo fanno variare non solo la posizione, ma anche la forma dell'orbita terrestre.

Uno di questi movimenti consiste appunto nella variazione dell'eccentricità dell'orbita, ossia nella variazione del rapporto tra la distanza del Sole dal centro dell'orbita e la lunghezza del semiasse maggiore di quest'ultima, o, che è la stessa cosa nella variazione della distanza dei fuochi dell'ellisse descritta dalla Terra nella sua orbita intorno al Sole^[12].

Come si è già detto, attualmente il valore dell'eccentricità dell'ellisse descritta dalla Terra nel suo

[12] Si ricordi che per la I Legge di Keplero il Sole occupa uno dei fuochi dell'ellisse descritta da un pianeta nella sua orbita intorno ad esso.

moto di rivoluzione è di circa 0,0167, ma tale valore non si mantiene costante nel corso degli anni; infatti, pur non variando la lunghezza della linea degli apsidi, la distanza dei fuochi dell'ellisse dell'orbita terrestre, che attualmente è di circa 5 000 000 km, in un periodo di 92 000 anni passa da un massimo di circa 14 000 000 km (che corrisponde ad un valore dell'eccentricità di circa 0,0655) ad un minimo di poco più di 1 000 000 km (pari ad un valore dell'eccentricità di circa 0,0018) e ritorna di nuovo al valore massimo.

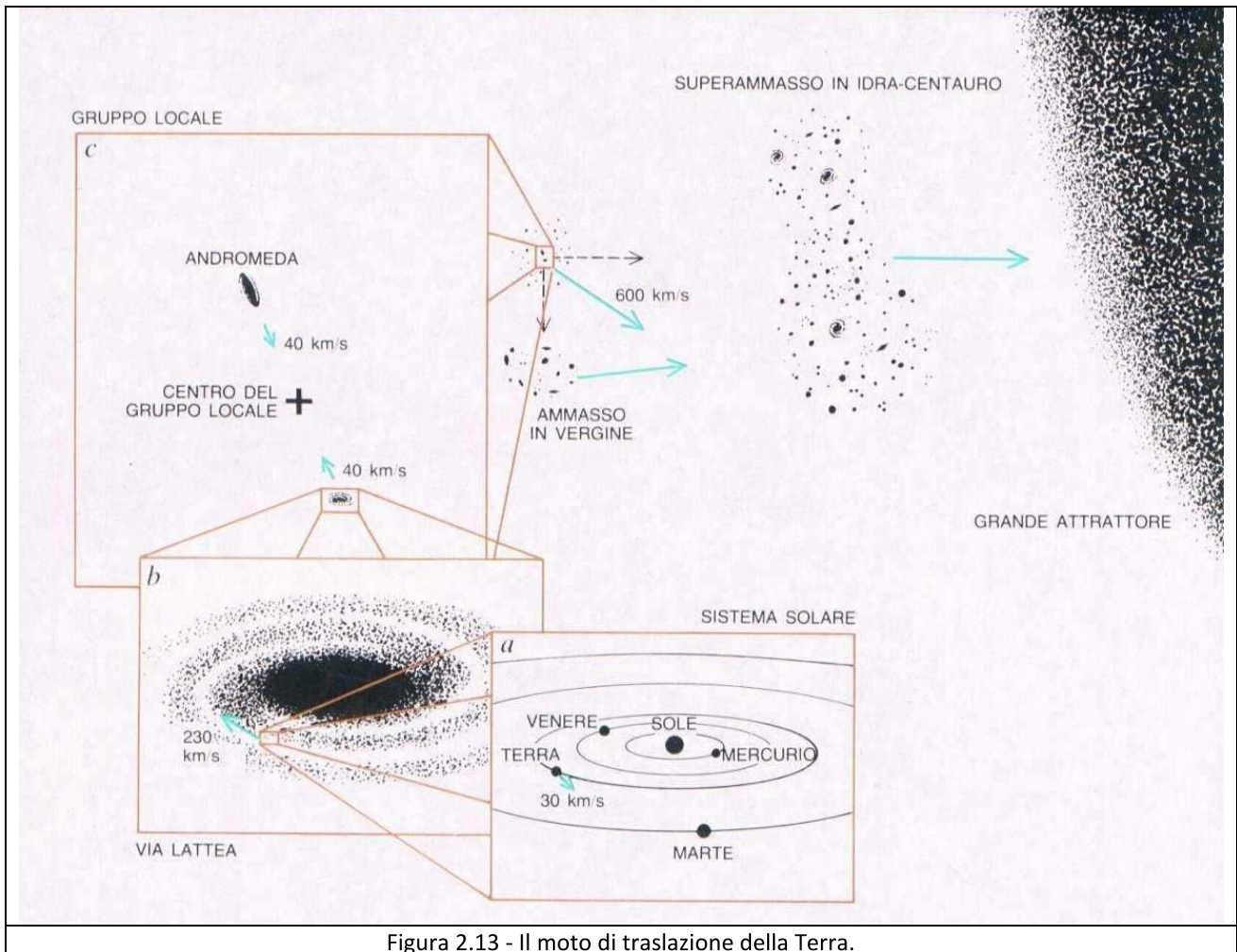


Figura 2.13 - Il moto di traslazione della Terra.

2.4.8 - Moto di traslazione

Il moto di traslazione comprende l'insieme dei moti che la Terra compie a seguito del Sole e della Galassia (vedi Figura 2.13). Possiamo individuare i seguenti moti.

- Il moto del Sole rispetto al centro della Galassia che, secondo le attuali conoscenze, si compie in 225 000 000 di anni, alla velocità di 230 km/s;
- Il moto di avvicinamento della Via Lattea alla galassia di Andromeda alla velocità di circa 40 km/s
- Il moto dell'intero Gruppo Locale che si sta spostando alla velocità di 600 km/s e che è dovuto sia all'attrazione delle galassie dell'ammasso della Vergine (che può spiegare una delle componenti del moto), sia all'attrazione dovuta al superammasso di galassie in Idra-Centauro, che a sua volta è in movimento. Alcuni risultati inducono a credere che il Gruppo Locale, l'ammasso della Vergine e il superammasso in Idra-Centauro (e molte altre galassie) siano sottoposti all'attrazione gravitazionale di una vasta concentrazione di galassie, il Grande Attrattore, posta a distanza ancora maggiore.
- Infine il moto di espansione dell'Universo.

2.4.9 - Conseguenze dei moti millenari della Terra

Per quanto possano sembrare trascurabili i moti millenari della Terra hanno importantissimi riflessi sul clima del nostro pianeta, poiché alterano nel tempo la distribuzione dell'insolazione secondo la latitudine e la stagione. Data la lentezza con cui si svolgono questi movimenti, le variazioni climatiche che essi inducono sono estremamente graduali e pertanto sfuggono all'osservazione diretta; protratte nei millenni, comunque, esse si rendono manifeste attraverso le glaciazioni.

È ormai accettata l'ipotesi proposta da M. Milankovitch nella prima metà del novecento, secondo la quale l'alternarsi di epoche glaciali e interglaciali, che ha caratterizzato la storia della Terra, è da mettere in relazione con i principali moti millenari del nostro pianeta. Come si è detto, questi movimenti sono: la *precessione luni-solare* e lo *spostamento della linea degli apsidi*, che insieme determinano la *precessione degli equinozi*; la *variazione dell'eccentricità dell'orbita*; il *mutamento dell'inclinazione dell'asse terrestre*.

Alla luce di quanto già detto, prendiamo nuovamente in esame questi movimenti, soffermandoci ad analizzare gli effetti che essi producono sulle condizioni climatiche del globo terrestre.

Abbiamo visto che la durata di ogni stagione astronomica dipende dalla velocità con cui la Terra percorre il tratto di orbita corrispondente; poiché la precessione degli equinozi fa variare la posizione delle stagioni sull'orbita (Figura 2.14), ne deriva nel corso dei millenni anche una variabilità della loro durata.

Attualmente il semestre autunno-inverno cade per il nostro emisfero boreale nel settore dell'orbita terrestre più vicino al perielio, dove la Terra ha una velocità di rivoluzione maggiore, e perciò esso dura circa 7 giorni e 6 ore in meno del semestre primavera-estate, che corrisponde al tratto di orbita più vicino all'afelio (dove la velocità della Terra è minore); ma fra 10 500 anni circa, quando la linea equinoziale avrà percorso mezzo giro, invertendo la sua posizione, la situazione sarà opposta e l'emisfero boreale avrà il semestre freddo più lungo di quello caldo, mentre il contrario si avrà per l'emisfero australe. A questo bisogna aggiungere che la distanza Terra-Sole, variabile nel corso dell'anno, influisce anche sul riscaldamento, sebbene in misura non molto considerevole: se un emisfero ha il suo inverno mentre la Terra è alle minori distanze dal Sole, come avviene attualmente per l'emisfero boreale, questo sarà meno freddo che nel caso contrario e, in corrispondenza, la stagione estiva sarà meno calda perché più lontana dal Sole. In sostanza, quando l'inverno cade in prossimità del perielio esso è più mite per la minore distanza dal Sole ed ha durata minore, mentre l'estate è più fresca ed ha maggior durata: la differenza di riscaldamento fra le due stagioni estreme, ossia l'*escursione calorica annua*, è piccola; e quando ciò si verifica in un emisfero, nell'altro si ha la situazione opposta: gli inverni sono più rigidi e più lunghi e le estati più calde e più brevi, quindi l'*escursione calorica* è più sensibile. A causa della precessione degli equinozi si ha, dunque, un continuo cambiamento di questo stato di cose; per cui i due emisferi passano alternativamente dall'una all'altra situazione, impiegando circa 21 000 anni per ritornare nella condizione climatica di partenza.

L'oscillazione dell'escursione calorica prodotta dalla precessione degli equinozi varia di intensità con il tempo, in conseguenza di un altro moto millenario della Terra e cioè della variazione dell'eccentricità dell'orbita. Difatti, quando l'eccentricità dell'orbita è massima, diventa massima anche la differenza tra le distanze Sole-afelio e Sole-perielio; in altre parole, il perielio e l'afelio

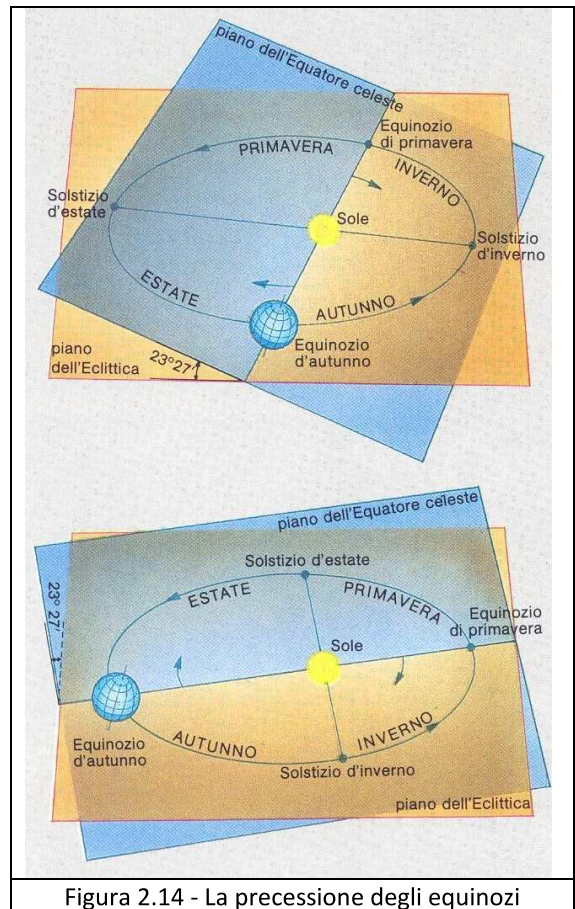


Figura 2.14 - La precessione degli equinozi

risultano rispettivamente alla minima e alla massima distanza possibile dal Sole. In questa situazione di massima eccentricità, l'oscillazione della escursione calorica dovuta alla precessione degli equinozi viene amplificata (vedi Figura 2.15).

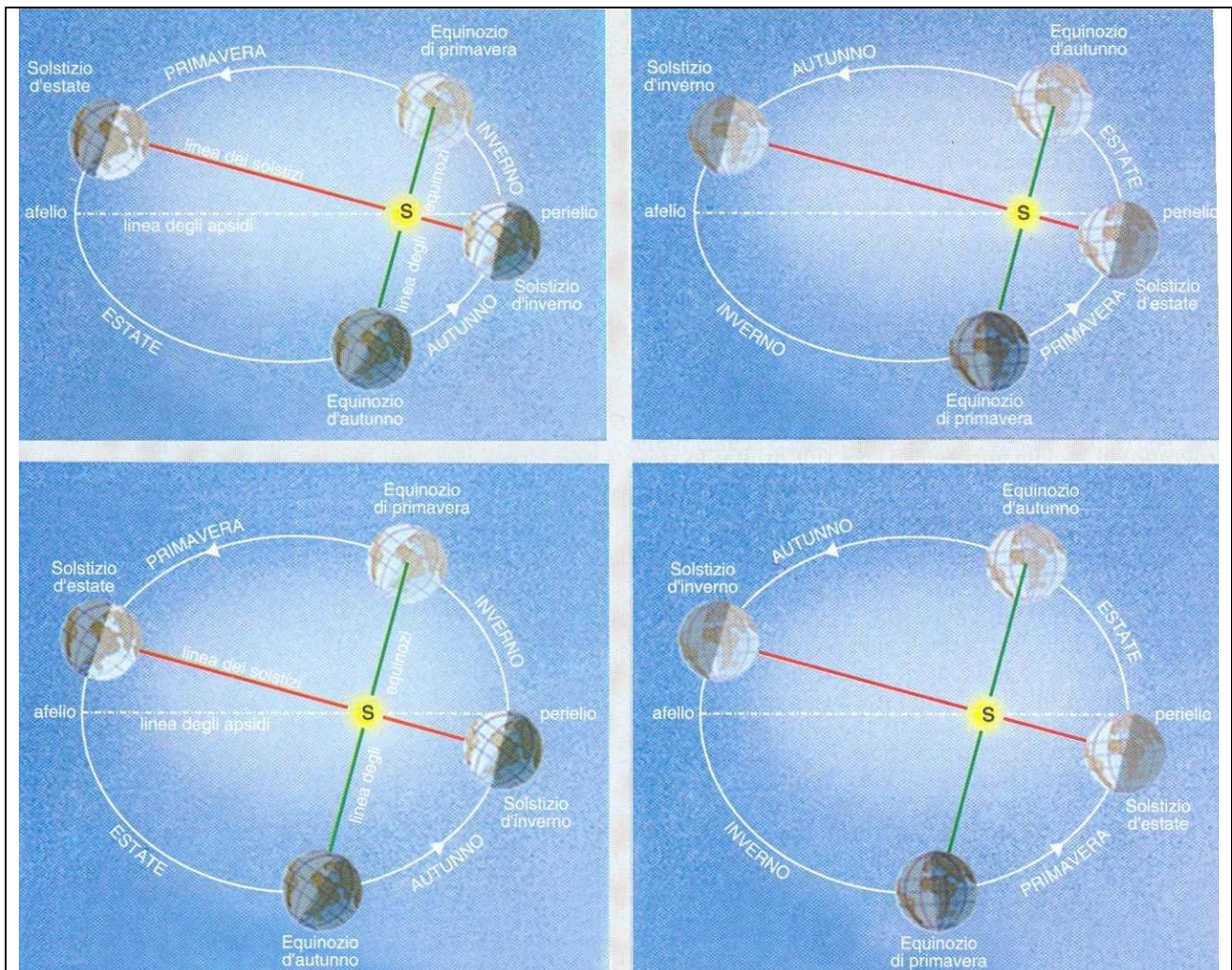


Figura 2.15 - La *variazione dell'eccentricità dell'orbita* modifica l'intensità delle oscillazioni climatiche dovute alla precessione degli equinozi: maggiore è l'eccentricità, maggiore è la differenza tra la massima e la minima distanza della Terra dal Sole e quindi maggiore è l'effetto della precessione degli equinozi. Le due figure in alto rappresentano il caso di massima eccentricità. A sinistra è raffigurata la posizione attuale delle linee equinoziale e solstiziale; a destra la posizione che si avrà tra circa 10.500 anni. Le due figure in basso rappresentano le stesse posizioni delle linee equinoziali e solstiziali delle figure precedenti associate al caso di minima eccentricità dell'orbita terrestre. Delle quattro situazioni illustrate, quella in alto a sinistra è la più favorevole allo sviluppo delle coltri glaciali nell'emisfero boreale.

Quando per effetto della precessione l'inverno si verifica al perielio e l'estate in afelio, l'escursione calorica risulta minore, essendo l'inverno un po' meno freddo e l'estate un po' meno calda; se contemporaneamente si ha la massima eccentricità dell'orbita terrestre, il perielio viene ad essere ancora più vicino al Sole e quindi l'inverno diventa ancora più mite, mentre l'afelio si allontana ulteriormente dal Sole e quindi l'estate diventa ancora più fresca: l'escursione calorica annua risulta, così, ancora minore. Nel caso opposto, cioè quando per effetto della precessione l'inverno si verifica all'afelio e l'estate al perielio, l'escursione calorica risulta maggiore che nel caso precedente; se a questa situazione si somma quella di massima eccentricità dell'orbita terrestre si ha un inverno ancora più rigido ed una estate ancora più calda: l'escursione calorica annua viene ulteriormente accentuata. Quando, invece, l'eccentricità dell'orbita è minima si riduce la differenza tra le distanze Sole-afelio e Sole-perielio, ossia l'afelio risulta meno distante ed il perielio meno vicino al Sole. Con un ragionamento analogo a quello precedente si dimostra che in questo caso l'oscillazione

dell'escursione calorica dovuta alla precessione viene smorzata (vedi Figura 2.15). Anche il mutamento dell'inclinazione dell'asse terrestre produce importanti effetti sulle condizioni climatiche del nostro pianeta. Quando l'inclinazione assume i valori maggiori il contrasto stagionale diventa più marcato, mentre nel caso opposto tale contrasto si riduce sensibilmente. Per rendersi conto di questo fatto, basta pensare che se l'inclinazione diventasse addirittura nulla, cioè se l'asse fosse perpendicolare al piano dell'orbita, le stagioni praticamente non esisterebbero affatto (a parte la piccola differenza dovuta alla variabilità della distanza Terra-Sole) e l'insolazione sarebbe regolarmente decrescente dall'Equatore verso i poli (vedi Figura 2.16.A).

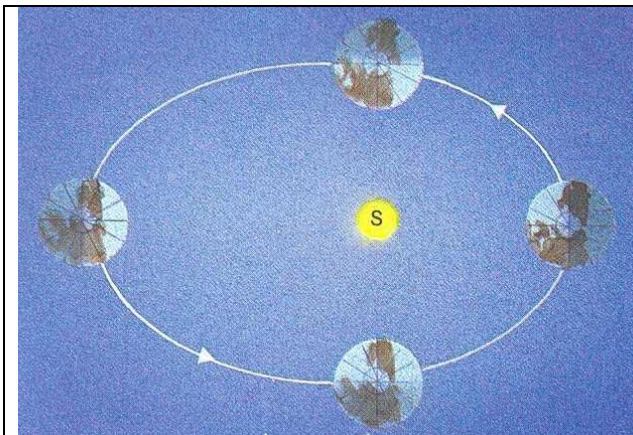


Figura 2.16.A - Il mutamento dell'inclinazione dell'asse terrestre fa variare sulla Terra l'intensità dei contrasti stagionali. Il caso limite ipotetico di una inclinazione nulla (visto dal Polo nord celeste); in questa situazione l'asse terrestre sarebbe perfettamente perpendicolare al piano dell'orbita. Le condizioni di illuminazione sarebbero sempre quelle che attualmente si verificano agli equinozi e le stagioni praticamente non esisterebbero.

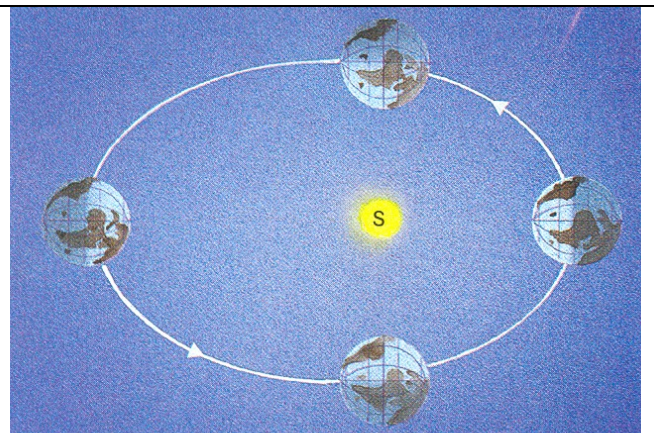


Figura 2.16.B - Il caso-limite di massima inclinazione, quello cioè in cui l'asse terrestre si troverebbe sullo stesso piano dell'orbita; in questa situazione in corrispondenza dei solstizi si avrebbe una insolazione nulla all'Equatore, mentre ai poli il Sole risulterebbe allo Zenit per 24 ore consecutive: da ciò deriverebbero contrasti stagionali estremamente marcati.

Nel caso limite opposto, cioè quello in cui l'asse terrestre giacesse sul piano dell'orbita, i contrasti stagionali sarebbero invece i più marcati teoricamente registrabili (vedi Figura 2.16.B). A differenza delle oscillazioni climatiche prodotte dalla precessione degli equinozi e dalla variazione dell'eccentricità dell'orbita, le conseguenze di quest'ultimo movimento si risentono contemporaneamente su entrambi gli emisferi.

Nel complesso si può dire che i movimenti descritti agiscono come cause di cambiamenti climatici, in tempi relativamente lunghi se confrontati con quelli della nostra esistenza, ma piuttosto brevi in rapporto all'età del nostro pianeta.

La variazione dell'eccentricità dell'orbita ha un duplice effetto sull'insolazione della Terra; questo movimento infatti agisce sull'ampiezza dell'oscillazione calorica dovuta alla precessione degli equinozi ed inoltre fa variare l'insolazione totale annua. Quest'ultimo effetto è molto modesto: l'insolazione totale della Terra è variata al massimo dello 0,3% durante l'ultimo milione di anni per effetto dell'eccentricità dell'orbita.

La precessione degli equinozi ed il mutamento dell'inclinazione dell'asse terrestre, invece, non alterano l'insolazione totale, ma fanno variare l'escursione calorica annua, di modo che sulla superficie terrestre si alternano condizioni climatiche con contrasti stagionali ora più, ora meno marcati.

Il fatto che questi movimenti non alterino sostanzialmente l'insolazione totale della Terra, ma soltanto la sua distribuzione secondo la latitudine, potrebbe far pensare che i loro effetti sul clima siano di modesta entità. Sappiamo invece che, secondo la teoria di Milankovitch, i moti millenari sono da considerare come una delle cause principali delle glaciazioni, che si sono verificate verosimilmente cinque volte nel corso dell'ultima Era (il Quaternario o Neozoico, iniziato circa 2 milioni di anni fa) della storia del nostro pianeta (vedi Figura 2.17). L'effettivo ruolo che questi movimenti rivestono nel favorire l'espansione dei ghiacciai si comprende facilmente ove si consideri che una delle cause determinanti dell'alternarsi di epoche glaciali e interglaciali non è tanto la variazione dell'insolazione globale della Terra, ma piuttosto l'insolazione estiva, che alle alte latitudini varia anche del 20%, cioè molto più della insolazione totale, in conseguenza dei moti millenari della Terra. Nelle zone poste alle alte latitudini (ed anche sui rilievi montuosi delle quote più elevate) la neve si accumula facilmente anche durante un inverno relativamente mite, come è quello che si verifica in prossimità del perielio. Ma è importante considerare quanta della neve caduta in inverno riesce a conservarsi durante l'estate: ciò dipende essenzialmente dall'entità dell'insolazione estiva. Se la radiazione solare che raggiunge le alte latitudini durante la stagione estiva è inferiore alla norma, come accade quando l'estate si verifica in afelio, le nevi cadute durante la stagione fredda non riescono a sciogliersi completamente, ma si vanno accumulando di anno in anno e lentamente si trasformano in ghiaccio. In questo modo cominciano ad espandersi le calotte di ghiaccio e il nostro pianeta entra in un'epoca glaciale. Se invece durante l'estate l'insolazione aumenta, come accade quando questa stagione si verifica al perielio, si scioglie una quantità di ghiaccio maggiore di quella che può essere sostituita dalle nevi invernali; quindi i ghiacciai tendono a ritirarsi e sulla Terra si instaura un clima più caldo.

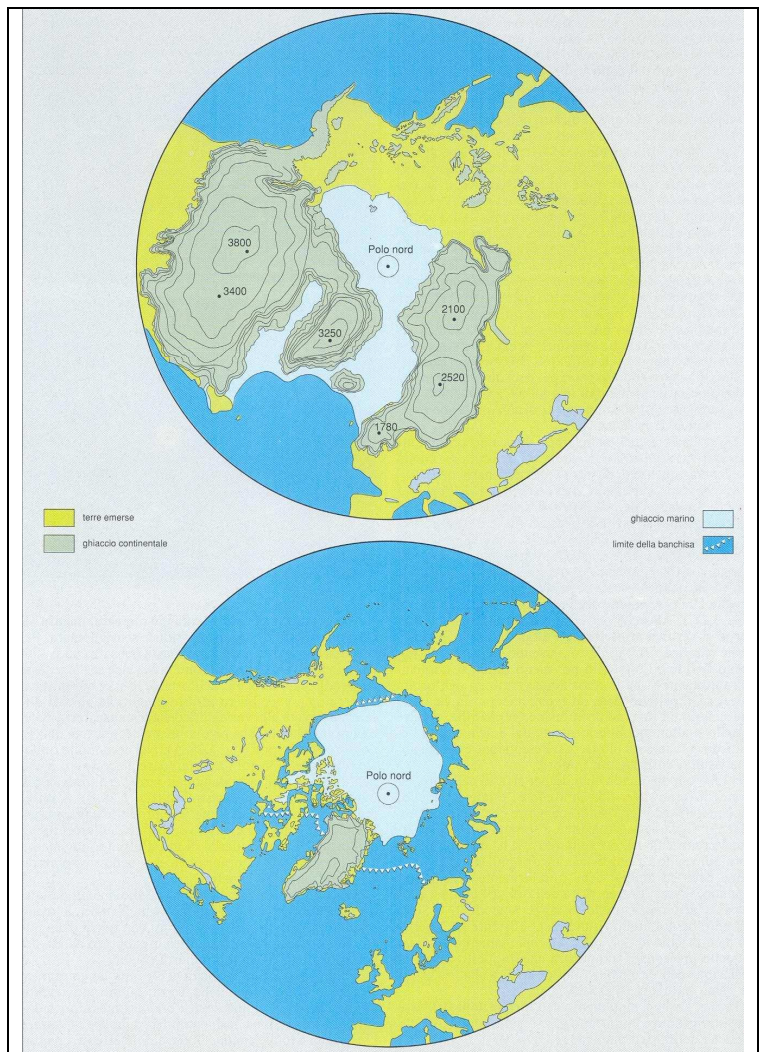


Figura 2.17 - In alto: circa 20.000 anni fa, al culmine della *glaciazione würmiana*, la più recente delle epoche glaciali quaternarie, l'emisfero boreale della Terra era ricoperto da calotte glaciali con spessori di diversi chilometri; l'acqua sottratta agli oceani era tanta che la Siberia e l'America Settentrionale erano unite da un istmo. La distribuzione del ghiaccio è stata ricostruita sulla base delle forme di erosione e dei depositi lasciati dai ghiacciai e mediante dati paleontologici (resti fossili di organismi vissuti in condizioni di clima molto freddo). In basso: *oggi*, come nelle quattro epoche interglaciali quaternarie, nell'emisfero boreale soltanto la Groenlandia è quasi interamente coperta da una calotta glaciale ed esistono ghiacciai di montagna con dimensioni e spessori ridotti. Nell'emisfero australe è interamente coperta da ghiaccio solo l'Antartide.

Capitolo 3

Il tempo e la sua misura

3.1 – Introduzione

Nel passato uno dei compiti più importanti dell'Astronomia è stato quello della definizione, della divisione e della determinazione del tempo astronomico, sia perché necessario a diverse scienze (in primo luogo l'Astronomia stessa), sia perché rappresenta la più importante applicazione dell'Astronomia alla vita civile. Quest'ultimo aspetto è stato quello che nel corso della storia ha influito maggiormente nello sviluppo dell'Astronomia. La misura del tempo può effettuarsi soltanto con la considerazione di determinati movimenti; se per esempio si ha a disposizione un movimento esattamente uniforme, basta la misura dello spazio percorso per la determinazione del tempo, dato che allora vi è esatta proporzionalità tra percorso e tempo.

Nel 1972 il tempo atomico è divenuto la scala ufficiale di tempo, in fisica e in astronomia. La base del tempo atomico è una rete di orologi, situati in diversi paesi, e che nel loro insieme definiscono il Tempo Atomico Internazionale (TAI). La corrispondente unità di tempo è il secondo del Sistema Internazionale:

il secondo del SI è pari a 9 192 631 770 periodi della radiazione emessa nella transizione fra i livelli iperfini $F = 4, M = 0$ e $F = 3, M = 0$ dello stato fondamentale dell'atomo di ^{133}Cs .

L'adozione del Tempo Atomico come tempo campione è stata una rottura d'importanza storica con la tradizione millenaria secondo cui il tempo era misurato da osservazioni astronomiche. In particolare, si è ribaltata la concezione secondo cui il tempo ricavato dal moto dei pianeti era uniforme per definizione. Tuttavia il problema dell'uniformità di una scala di tempo si ripropone sempre, e oggi assume la forma seguente. Il TAI è ricavato da fenomeni a scala atomica: in astronomia lo impieghiamo per confrontare la teoria con le osservazioni sul moto dei pianeti, o magari per studiare la rotazione delle pulsar. Chi ci garantisce che anche a questa scala il TAI sia una buona scala di tempo? In altre parole: potrebbero esserci deviazioni sistematiche tra il tempo che descrive i fenomeni atomici e quello che entra in gioco quando dominano interazioni gravitazionali?

Anticipiamo alcune nozioni sulla rotazione diurna e sulla rivoluzione annua della Terra, per consentire una prima comprensione delle definizioni di tempo a partire dalle osservazioni astronomiche. Approfondiremo questi concetti nei prossimi capitoli.

La rotazione diurna avviene attorno ad un asse polare la cui direzione rispetto alle stelle (cioè in un riferimento inerziale) consideriamo qui fissa. Considereremo costante in modulo la velocità angolare, e pertanto per gli scopi presenti il vettore velocità di rotazione diurna Ω è considerato del tutto costante, e rigidamente collegato all'ellissoide matematico che approssima la figura terrestre^[13] e parallelo al semiasse minore c . Per quanto riguarda il moto annuo apparente del Sole rispetto alle stelle, di circa $1^\circ/\text{giorno}$ verso Est, esso è il riflesso del moto di rivoluzione della Terra, descritto in prima approssimazione dalle prime due leggi di Keplero:

I – l'orbita di un pianeta intorno al Sole è ellittica con il Sole in uno dei due fuochi, cioè una conica di equazione polare:

$$[3.1] \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

dove p è una costante ed e l'eccentricità dell'orbita ($e = 0,01673$). Il semiasse maggiore dell'orbita,

[13] Torneremo in seguito anche sulla forma della Terra, per ora la possiamo considerare una sfera perfetta, o al più, come in questo caso, un ellissoide.

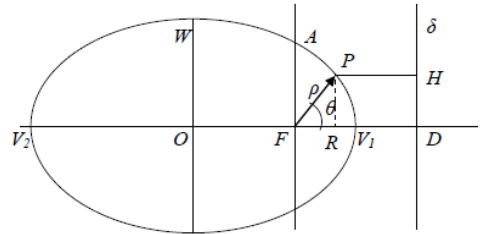
a , e quello minore, b , sono dati dalle relazioni:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}},$$

mentre la direzione iniziale si fa di solito coincidere con quella del semiasse maggiore dell'orbita. Quando la Terra passa al perielio (o il Sole al perigeo, all'epoca presente ciò accade attorno tra il 3 e il 6 gennaio) l'angolo iniziale è nullo; θ viene detto **anomalia vera**.

Tutte le coniche possono essere rappresentate in forma polare. Per l'ellisse si consideri il fuoco destro posizionato nell'origine di un sistema di riferimento polare, ρ sia il raggio vettore mentre θ l'anomalia vera. Una conica si definisce come quella curva piana i cui punti verificano la

relazione, con e costante: $\frac{\overline{FP}}{\overline{PH}} = e$.



Per $e = 0$ si ottiene una circonferenza, per $0 < e < 1$ un'ellisse, per $e = 1$ una parabola e per $e > 1$ un'iperbole.

II – La velocità areale si mantiene costante:

$$[3.2] \quad dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = C \cdot dt$$

in cui dA è l'area elementare spazzata nel tempo dt dal raggio vettore r (la congiungente Terra-Sole) e C una opportuna costante.

La rotazione della Terra intorno al proprio asse e intorno la sole sono serviti per millenni a definire due scale astronomiche di tempo, una collegata con il valore dell'angolo di rotazione (**giorno**) e una con l'angolo lungo l'orbita (**anno**). I valori istantanei dei due suddetti angoli possono quindi definire le scale di tempo astronomico.

Per effetto della rotazione della sfera, gli angoli orari dei punti fissi sulla sfera variano di quantità proporzionali al tempo; è naturale perciò assumere come misura di intervallo di tempo l'angolo che in quell'intervallo è descritto dal cerchio orario di un determinato punto del cielo (per comodità lo supponiamo sull'equatore celeste) che sarà l'indice mobile insieme alla sfera. Abbiamo fissato l'origine degli angoli orari sul meridiano astronomico e sull'equatore nel punto (il mezzocielo); l'angolo orario del suddetto indice segnerà gli intervalli di tempo trascorsi dal suo passaggio al mezzocielo. Possiamo quindi in generale definire il tempo come l'angolo orario di un punto della sfera celeste e assumere l'intervallo di tempo corrispondente ad una intera rotazione della Terra come unità fondamentale per la misura del tempo.

Nonostante la semplicità della definizione di questa unità, non è così facile fissarla praticamente; diverse sono le cause.

La principale è che l'asse di rotazione della Terra non è immobile rispetto alle stelle e i circoli orari di queste subiscono lente variazioni indipendenti dalla rotazione della Terra. Per misurare la quantità di rotazione della Terra indipendentemente da ogni altro movimento, dovremo scegliere come indice per la misura dell'angolo corrispondente un punto fisso dell'equatore celeste (variabile rispetto ai punti fissi sulla sfera), ed allora fra due successive culminazioni di questo punto, ovvero fra due successive coincidenze del rispettivo circolo orario col meridiano astronomico, avverrà una rotazione completa della Terra. L'intervallo corrispondente di tempo sarà allora l'unità fondamentale di misura del tempo.

In secondo luogo un punto fisso sull'equatore non può essere stabilito con facilità; nella pratica astronomica si assume come indice il punto γ , dato che esso è un punto facilmente determinabile in ogni istante, ma questo punto è soggetto a piccoli movimenti, dovuti ai fenomeni della precessione e della nutazione che studieremo più avanti, il primo dei quali causa un movimento progressivo, quasi proporzionale al tempo, mentre l'altro consiste in un moto oscillatorio periodico, che si sovrappone al primo. La posizione del punto γ con riguardo al solo primo movimento è detta **equinozio medio**, mentre la posizione effettiva, dovuta ad ambedue i movimenti è detta **equinozio**

vero.

3.2 – Tempo siderale

Si assume come unità astronomica per la misura del tempo l'intervallo tra due successive culminazioni del punto γ e si indica questa unità col nome di **giorno siderale**. Dati i piccoli movimenti dell'equinozio accennati, questa unità non è costante, né uguale all'unità fondamentale che sarebbe il periodo di rotazione della Terra, ma le differenze sono così lievi che il giorno siderale può considerarsi praticamente come unità fondamentale. Il movimento retrogrado dell'equinozio dovuto alla precessione, per effetto del quale le ascensioni rette delle stelle vanno generalmente crescendo con l'andare del tempo, è estremamente piccolo; in un anno lo spostamento del punto γ sull'equatore è di circa 50,26”.

Dato che il movimento ora considerato dell'equinozio è pressoché uniforme, se non vi fosse il movimento periodico dovuto alla nutazione, il giorno siderale potrebbe ritenersi costante. Il movimento dell'equinozio dovuto a questo fenomeno è così lieve che in pratica le variazioni di durata del giorno siderale sono trascurabili. La parte più importante della nutazione ha un periodo di circa 19 anni ed il suo effetto complessivo è una variazione compresa fra circa +1 s e - 1 s nell'intero periodo.

Il giorno siderale ha inizio all'istante della culminazione del punto γ , ed è diviso in 24 ore siderali, l'ora siderale in 60 minuti di tempo siderale, il minuto in 60 secondi di tempo siderale.

Il tempo misurato con l'unità così definita, contato dall'istante fissato, si identifica con l'angolo orario del punto γ e si chiama perciò **tempo siderale**. Per gli accennati movimenti lievi dell'equinozio si può distinguere il **tempo siderale uniforme** o **medio**, legato all'equinozio medio, dal **tempo siderale vero**, determinato dall'equinozio vero.

3.3 – Tempo solare

3.3.1 – Tempo solare vero.

Il **giorno solare vero** è l'intervallo di tempo che trascorre tra due successive culminazioni (superiori o inferiori) del Sole (centro del disco solare) in meridiano, o, più in generale, è l'intervallo di tempo durante il quale l'angolo orario del Sole varia di 360° . La culminazione superiore si dice anche **mezzogiorno vero**, la culminazione inferiore **mezzanotte vera**. Il giorno solare viene diviso in 24 ore di tempo solare, ogni ora in 60 minuti, ogni minuto in 60 secondi.

Si dice poi **tempo solare vero di un luogo** l'angolo orario del Sole (centro), nel luogo stesso aumentato di 12h, cioè l'angolo orario contato dalla culminazione inferiore del Sole. Fino al 1925 il tempo solare era semplicemente l'angolo orario del Sole vero e quindi si iniziava a contare al mezzogiorno.

La posizione osservata del Sole non è quella effettivamente occupata, che viene chiamata **posizione vera**, ma una posizione leggermente deviata da un fenomeno che vedremo più avanti (aberrazione). Conseguentemente, se ci si riferisce al Sole osservato, bisognerebbe parlare di **giorno solare apparente** e **tempo solare apparente**; per il primo però la cosa non ha importanza, in quanto si tratta di un intervallo di tempo e la deviazione è pressoché costante per periodi piuttosto lunghi. Nelle definizioni date sopra e in quanto segue considereremo il sole vero.

Il giorno siderale e il giorno solare vero sono di differente durata e ciò perché il Sole si sposta sulla sfera celeste in ogni giorno di circa un grado, rispetto alle stelle fisse, nella direzione opposta al moto diurno della sfera. Il Sole arriva perciò ogni giorno con un certo ritardo rispetto alle stelle in meridiano, ritardo che corrisponde al tempo impiegato dal tratto descritto dal Sole a passare il meridiano, cioè a circa 4 minuti (di tempo siderale), equivalenti al grado sopradetto, e perciò il

giorno solare vero è di circa 4 minuti più lungo di quello siderale. Viceversa, una stella che in un dato giorno passa in meridiano insieme al Sole, nel giorno successivo anticiperà il suo passaggio di circa 4 minuti, per cui questo intervallo di tempo è stato chiamato l'accelerazione delle (stelle) fisse. L'uso astronomico di porre l'inizio del giorno a mezzodì è relativamente raro nella storia, più spesso si trova che il giorno incomincia dopo il tramonto del Sole a notte inoltrata (presso i Babilonesi e gli antichi Egizi) o col tramonto del Sole (sistema usato in Italia fino a una epoca non molto remota). Meno frequente invece è l'inizio del giorno alla mezzanotte (Romani) oppure al sorgere del Sole (antichi Greci).

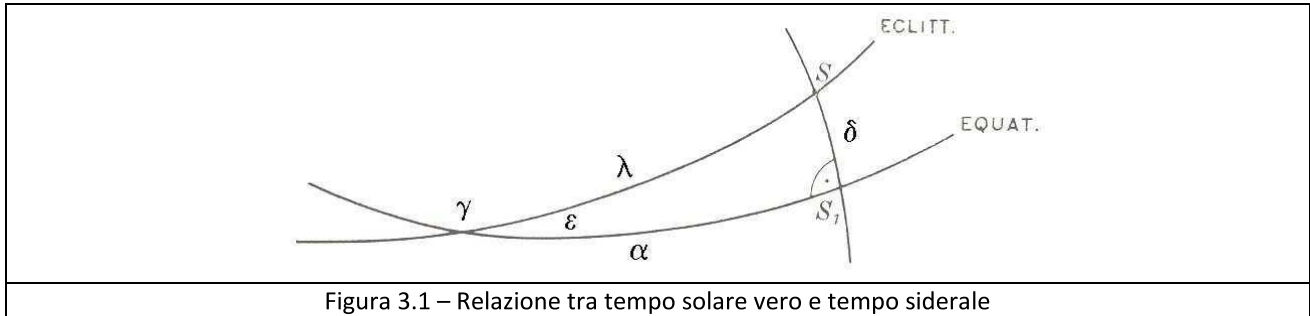


Figura 3.1 – Relazione tra tempo solare vero e tempo siderale

L'indice che segna il tempo solare vero è l'intersezione del circolo orario del Sole con l'equatore celeste. Per il moto anzidetto del Sole fra le stelle, questo punto si sposta sull'equatore nel senso delle ascensioni rette crescenti, ma il suo moto non è uniforme, per cui il giorno solare vero non è una unità costante. Ciò avviene per due motivi: il primo è che la velocità angolare del Sole nel suo moto intorno alla Terra, e quindi il suo moto apparente sopra l'eclittica, è variabile; il secondo è che l'orbita apparente del Sole, cioè l'eclittica, non coincide con l'equatore, ma è inclinata su questo. Sia infatti λ la longitudine eclittica del Sole, α la sua ascensione retta ed ϵ l'obliquità dell'eclittica, dal triangolo sferico $\gamma SS'$, retto in S' si ha:

$$[3.3] \quad \cos \lambda = \cos \delta \cdot \cos \alpha$$

dalla prima delle [1.26] si ricava

$$[3.4] \quad \cos \delta = \cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \cos \epsilon$$

e, eliminando $\cos \delta$, si ottiene

$$[3.5] \quad \tan \alpha = \tan \lambda \cdot \cos \epsilon,$$

da cui, derivando rispetto al tempo siderale segue

$$[3.6] \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\cos \epsilon}{\cos^2 \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

Ricordando che $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ e utilizzando la [3.5] si dimostra che

$$[3.7] \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\cos \epsilon}{1 - \sin^2 \lambda \sin^2 \epsilon} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

Dato che l'ascensione retta del Sole rappresenta la differenza fra tempo siderale e tempo solare vero, dalla relazione [3.7] si riconosce che questa differenza non cresce proporzionalmente al tempo e quindi che la durata del giorno solare vero è continuamente variabile, per il fatto che i due fattori di cui si compone la variazione di α sono variabili. Il $\frac{d\lambda}{dt}$ è la velocità variabile del Sole sopra

l'eclittica e determinando la declinazione del Sole δ in diverse epoche dell'anno, quindi utilizzando la relazione

$$[3.8] \quad \sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon},$$

che si ricava dalla terza delle (1.26) applicata al triangolo $\gamma SS'$, per determinare la longitudine λ , si dimostra che questa non cresce proporzionalmente al tempo.

Con osservazioni continuate si riconosce che la velocità angolare del Sole sull'eclittica è massima

intorno alla longitudine di 282° , e minima nella direzione opposta, cioè alla longitudine di 102° . Nella prima di queste posizioni il Sole percorre al giorno un arco di eclittica di $61',1$, che corrisponde a $4m\ 4s$, nella seconda posizione il Sole percorre $57',2$, corrispondenti a $3m\ 49s$. Cosicché, per il solo fatto del moto non uniforme sull'eclittica, il giorno solare nel primo caso (che si verifica ai primi di gennaio) è circa $15''$ più lungo che nel secondo caso (che ha luogo al principio di luglio).

In secondo luogo, anche se fosse costante $\frac{d\lambda}{dt}$ non lo sarebbe $\frac{d\alpha}{dt}$ in quanto il coefficiente del $\frac{d\lambda}{dt}$ nella [3.7] passa dal valore $\cos \varepsilon$, quando $\lambda = 0^\circ$ oppure $\lambda = 180^\circ$, al valore $\frac{1}{\cos \varepsilon}$, quando $\lambda = 90^\circ$

oppure $\lambda = 270^\circ$ e questa variazione è appunto causata dal non essere zero l'inclinazione ε .

In altre parole, essendo $\cos \varepsilon = 0,917$, la variazione dell'ascensione retta del Sole è agli equinozi di $\frac{1}{12}$ minore della variazione della longitudine ed ai solstizi è altrettanto maggiore. Vedremo più

avanti che la variazione diurna media dell'ascensione retta del Sole è di $3m\ 57s$ ed altrettanto può dirsi per la variazione media della longitudine (cioè facendo astrazione dalla non uniformità del moto del Sole sopra l'eclittica); perciò la variazione effettiva dell'ascensione retta del Sole vero, per il solo fatto della obliquità, sarà intorno agli equinozi circa $4m\ 16s$ ed ai solstizi circa $3m\ 37s$ al giorno. Per questo secondo fattore dunque il giorno solare più lungo (agli equinozi) è di circa $39''$ più lungo del giorno più corto dell'anno (ai solstizi).

I due fenomeni ora descritti si compongono in uno, ma dato che essi sono spostati nel tempo (i massimi e i minimi non coincidono alle stesse epoche), la differenza tra il giorno solare vero più lungo e quello più corto arriva a circa $52s$. Il primo ha luogo a metà dicembre, il secondo alcuni giorni prima dell'equinozio d'autunno. Il progressivo sommarsi di queste differenze in una serie di giorni consecutivi conduce al fenomeno della **equazione del tempo** del quale parleremo più avanti. Per queste ragioni il tempo solare vero non può essere seguito dai comuni orologi costruiti meccanicamente: esso è invece indicato dagli orologi solari, nei quali uno stilo, fissato in direzione parallela all'asse della Terra su una superficie esposta al Sole, proietta la propria ombra su questa superficie. Facendo passare per esso il piano meridiano ed i piani orari di $1h, 2h, \dots$ prima e dopo del meridiano e segnando le loro tracce sulla superficie, quando l'ombra si troverà su una di queste, saranno appunto le ore $12, 11$ o $13, 10$ o 14 ecc. di tempo solare vero locale.

3.3.2 – Tempo solare medio

Benché il giorno siderale sia adoperato molto in Astronomia per diversi motivi, la misura del tempo per gli usi civili deve essere necessariamente regolata sul giorno solare, dato che il succedersi di giorno e notte non dipende dalle stelle, ma dal Sole. La necessità di avere però una unità costante in luogo del giorno vero variabile conduce allora alla introduzione di un giorno solare medio, la cui durata sia la media esatta di tutte le lunghezze dei giorni veri in un anno, cioè nel periodo che abbraccia tutte le lunghezze e dopo il quale queste si ripetono con la stessa misura. Per il calcolo di questa durata media basterebbe conoscere il numero esatto di giorni solari in un anno, ma per definire completamente il giorno medio (vale a dire anche l'istante del suo inizio e la misura del tempo che ne deriva) è necessario stabilire un legame tra esso e il tempo vero. Si immaginano allo scopo due Soli ipotetici; il primo di questi, chiamato **Sole fittizio**, si suppone percorrere il circolo massimo dell'eclittica di moto uniforme, mentre il secondo, chiamato **Sole medio**, si suppone muoversi pure uniformemente sopra l'equatore, in modo da compiere ambedue il moto annuo nello stesso tempo del Sole vero. Il secondo sarà evidentemente liberato dai due inconvenienti del Sole vero e sarà l'indice per un tempo basato sul giorno medio.

Per collegare i due Soli ipotetici a quello vero, che naturalmente è il solo osservabile e quindi la base alla quale occorre riferirsi, si ricorre alla legge con la quale avviene il moto annuo del Sole

sopra l'eclittica. Come vedremo meglio più avanti a proposito delle leggi di Kepler la velocità angolare del Sole vero è massima al perigeo e minima all'apogeo: dal primo al secondo il Sole va (per sei mesi) continuamente diminuendo la sua velocità, mentre dall'apogeo al perigeo va (per altri sei mesi) gradatamente accelerando fino a riprendere al perigeo l'identica velocità che aveva al passaggio precedente. Qualunque sia perciò la posizione del Sole fittizio rispetto al vero in un certo istante, nel loro cammino i due Soli verranno a coincidere in due soli punti dell'eclittica, diametralmente opposti. Si definisce allora più precisamente il Sole fittizio come quel punto che (percorrendo il circolo massimo dell'eclittica di moto uniforme) passa al perigeo ed all'apogeo insieme al Sole vero: il Sole fittizio seguirà quindi il Sole vero nel cammino dal perigeo all'apogeo, ed invece lo precederà, nell'altra metà dell'eclittica.

In tale convenzione, se indichiamo con L la longitudine del Sole fittizio, detta anche longitudine media del Sole (che non è la longitudine del Sole medio), la differenza $\lambda - L$ tra questa e la longitudine vera λ , ovvero l'angolo fra le direzioni del Sole vero e del Sole fittizio, detta **equazione del centro**, sarà positiva quando il Sole vero precede quello fittizio e negativa nel caso opposto, mentre la variazione $\frac{dL}{dt}$ sarà costante. In conseguenza, detta A l'ascensione retta del Sole fittizio, per la equazione

$$[3.9] \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\cos \epsilon}{1 - \operatorname{sen}^2 L \operatorname{sen}^2 \epsilon} \cdot \frac{dL}{dt},$$

nella quale ora $\frac{dL}{dt}$ è costante, rimane soltanto l'effetto della obliquità dell'eclittica sulla durata del giorno solare; si ha il minimo valore di $\frac{dA}{dt}$ cioè $\cos \epsilon \cdot \frac{dL}{dt}$ per L uguale a 0° oppure a 180° , il massimo valore, cioè $\frac{1}{\cos \epsilon} \cdot \frac{dL}{dt}$ per L uguale a 90° oppure a 270° ; si ha infine $\frac{dA}{dt} = \frac{dL}{dt}$ quando L prende uno dei 4 valori seguenti: $46^\circ 14'$; $133^\circ 46'$; $226^\circ 14'$; $313^\circ 46'$, valori che si ottengono risolvendo rispetto a L l'equazione $\frac{\cos \epsilon}{1 - \operatorname{sen}^2 L \operatorname{sen}^2 \epsilon} = 1$.

Il secondo Sole ipotetico si fa poi passare agli equinozi contemporaneamente col Sole fittizio, con ciò si ottiene che l'ascensione retta del Sole medio, contata dall'equinozio mobile medio, viene ad essere ad ogni istante uguale alla longitudine del Sole fittizio, che a sua volta è uguale alla longitudine media del Sole.

Il giorno solare medio può perciò definirsi anche come l'intervallo di tempo compreso fra due successive culminazioni del Sole medio; la culminazione superiore del Sole medio è detta anche mezzogiorno medio, la culminazione inferiore mezzanotte media. Il giorno medio incomincia alla mezzanotte media e l'angolo orario del Sole medio aumentato di 12h misura il tempo medio locale trascorso dal principio del giorno medio. Il giorno medio è diviso in 24 ore medie, l'ora media in 60 minuti ed il minuto in 60 secondi di tempo medio. Per gli usi astronomici anche il tempo medio prima del 1925 era semplicemente l'angolo orario del Sole medio, e quindi incominciava al mezzogiorno medio, cioè alla culminazione superiore del Sole medio; per gli usi civili occorre allora il tempo civile locale, che incominciava alla mezzanotte precedente ed anticipava quindi quello astronomico di 12h. Dal 1925 il **tempo medio astronomico** (TMA) non si usa più e il **tempo medio civile** (TMC) è chiamato semplicemente il **tempo medio**.

3.3.3 – Equazione del tempo

La differenza tra l'ascensione, retta del Sole medio e quella del Sole vero α è detta **equazione del tempo**; essendo l'ascensione retta del Sole medio uguale alla longitudine media L del Sole (longitudine del Sole fittizio), l'equazione del tempo è

$$[3.10] \quad E = L - \alpha.$$

Siccome la differenza delle ascensioni rette è uguale, ma di segno contrario, alla differenza dei due

angoli orari rispettivi, l'equazione del tempo può dirsi anche la differenza tra il tempo solare vero ed il tempo medio

$$[3.11] \quad E = \text{tempo vero} - \text{tempo medio},$$

ossia l'equazione del tempo è la quantità che occorre aggiungere col rispettivo segno al tempo medio per ottenere quello vero.

La differenza in questione, detta λ la longitudine vera del Sole, può anche scriversi

$$[3.12] \quad L - \alpha = (\lambda - \alpha) - (\lambda - L)$$

dove il secondo termine a destra è l'equazione del centro, mentre il primo si chiama la **riduzione all'eclittica**. L'equazione del tempo è dunque la differenza tra la riduzione all'eclittica e l'equazione del centro.

Per ricavare un'espressione dell'equazione del tempo consideriamo dapprima la funzione

$$[3.13] \quad \tan y = \frac{a \cdot \text{sen} x}{1 - a \cdot \text{cos} x},$$

espressione molto utile in astronomia. Se la scriviamo nella forma $y = \arctan\left(\frac{a \cdot \text{sen} x}{1 - a \cdot \text{cos} x}\right)$ e sviluppiamo in serie di potenze di a si dimostra che:

$$[3.14] \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n \text{sen}(nx),$$

Utilizzando poi la [3.14] si può ricavare uno sviluppo della funzione:

$$[3.15] \quad \tan y = m \tan x.$$

Anch'essa molto utile in astronomia e della stessa forma della [3.5].

Per ottenere ciò basta scrivere questa equazione nella forma:

$$\begin{aligned} \tan(y-x) &= \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y \cdot \tan x} = \frac{(m-1)\tan x}{1 + m \tan^2 x} = \frac{(m-1)\text{sen} x \cos x}{\cos^2 x + m \text{sen}^2 x} = \frac{(m-1)\text{sen} 2x}{(1 + \cos 2x) + m(1 - \cos 2x)} = \\ &= \frac{(m-1)\text{sen} 2x}{1 + \cos 2x + m - m \cos 2x} = \frac{(m-1)\text{sen} 2x}{1 + m - (m-1)\cos 2x} = \frac{\frac{m-1}{m+1}\text{sen} 2x}{1 - \frac{m-1}{m+1}\cos 2x} \end{aligned}$$

Posto per semplicità $a = \frac{m-1}{m+1}$ otteniamo $\tan(y-x) = \frac{a \text{sen} 2x}{1 - a \cos 2x}$ simile alla [3.13] e alla quale possiamo applicare lo sviluppo in serie [3.14] ottenendo

$$[3.16] \quad y - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n \text{sen}(2nx).$$

Dalla [3.5] si ha quindi la riduzione dell'eclittica

$$[3.17] \quad \alpha - \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \varepsilon - 1}{\cos \varepsilon + 1} \right)^n \text{sen}(2n\lambda)$$

che possiamo scrivere anche nella forma

$$[3.18] \quad \lambda - \alpha = p_1 \text{sen} 2\lambda + p_2 \text{sen} 4\lambda + p_3 \text{sen} 6\lambda + \dots$$

con p_n coefficienti numerici noti^[14].

L'equazione del centro risulta determinata una volta che si conoscano l'eccentricità e dell'orbita terrestre e l'angolo ω tra la direzione dell'equinozio e quella del perigeo, contato nel verso diretto^[15]. Si ha infatti:

^[14] Si ricordi che ε cambia nel tempo, quindi a rigore i coefficienti p_n non sono costanti.

^[15] Al momento non la dimostriamo

$$\begin{aligned}
 [3.19] \quad \lambda - L &= \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \cos \omega \text{sen} L - \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \text{sen} \omega \cos L + \frac{5}{4} e^2 \cos 2\omega \cdot \text{sen} 2L + \\
 &= -\frac{5}{4} e^2 \text{sen} 2\omega \cdot \cos 2L + \frac{13}{12} e^3 \cos 3\omega \cdot \text{sen} 3L - \frac{13}{12} e^3 \text{sen} 3\omega \cdot \cos 3L + \dots
 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$[3.20] \quad \lambda - L = q_1 \text{sen} L + q_2 \cos L + q_3 \text{sen} 2L + q_4 \cos 2L + q_5 \text{sen} 3L + q_6 \cos 3L + \dots,$$

con q_n coefficienti numerici noti^[16].

Per ottenere l'equazione del tempo occorre esprimere anche $\lambda - \alpha$ in funzione di L e ciò si ottiene con l'aiuto della espressione per λ fornita dalla [3.20], si ha:

$$\begin{aligned}
 \text{sen} 2\lambda &= \text{sen} \left[2L + (2q_1 \text{sen} L + 2q_2 \cos L + 2q_3 \text{sen} 2L + 2q_4 \cos 2L + \dots) \right] \\
 \text{sen} 4\lambda &= \text{sen} \left[4L + (4q_1 \text{sen} L + 4q_2 \cos L + 4q_3 \text{sen} 2L + 4q_4 \cos 2L + \dots) \right] \\
 \text{sen} 6\lambda &= \text{sen} \left[6L + (6q_1 \text{sen} L + 6q_2 \cos L + 6q_3 \text{sen} 2L + 6q_4 \cos 2L + \dots) \right]
 \end{aligned}$$

I termini scritti a destra sono sufficienti per la precisione che in genere è necessaria, inoltre le quantità tra parentesi sono molto piccole e possiamo applicare lo sviluppo di Taylor ottenendo:

$$\begin{aligned}
 \text{sen} 2\lambda &= \text{sen} 2L + (2q_1 \text{sen} L + 2q_2 \cos L + 2q_3 \text{sen} 2L + 2q_4 \cos 2L + \dots) \cos 2L + \\
 &= -\frac{1}{2} (2q_1 \text{sen} L + 2q_2 \cos L + 2q_3 \text{sen} 2L + 2q_4 \cos 2L + \dots) \text{sen} 2L + \dots
 \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che $\text{sen} 4\lambda$ può essere scritto in termini di $\text{sen} 4L$ e $\cos 4L$, $\text{sen} 6\lambda$ può essere scritto in termini di $\text{sen} 6L$ e $\cos 6L$, ecc.. Per le formule di Werner, si ha che tutto può esprimersi mediante seni o coseni dei multipli di L . Effettuando tutti gli sviluppi e sostituendo nella [3.18] e facendo la differenza tra questa e la [3.20] si ottiene finalmente l'equazione del tempo nella forma

$$[3.21] \quad E = A \text{sen} L + B \cos L + C \text{sen} 2L + D \cos 2L + \dots$$

dove i coefficienti A, B, C, D, \dots sono ben determinati per ogni epoca (i primi sono quelli che incidono di più e sono sensibilmente variabili col tempo), ed L si calcola per qualunque istante t con la formula

$$[3.22] \quad L = n(t - t_0)$$

essendo n la velocità angolare media del Sole sull'eclittica e t_0 l'istante del suo passaggio al punto γ .

Una forma approssimata della [3.21] può essere scritta come:

$$[3.23] \quad E = -9,87 \text{sen} [2g(N - 81)] + 7,67 \text{sen} [g(N - 1)]$$

dove E è espressa in minuti, $g = 360^\circ / 365$ se gli angoli sono espressi in gradi, oppure $g = 2\pi / 365$ se gli angoli sono espressi in radianti. N è il numero del giorno, per esempio: $N = 1$ per il 1° gennaio, $N = 2$ per il 2 gennaio e così via. In figura 3.3 il grafico dell'equazione di tempo ricavata dalla [3.23]

L'equazione del tempo può essere ricavata giorno per giorno, cosicché, conoscendo il tempo medio di un certo istante, si può subito avere il corrispondente tempo vero, e viceversa determinato il tempo solare vero con la misura dell'angolo orario del Sole, si può avere subito il tempo medio corrispondente e quindi trovare la correzione di un orologio a tempo medio.

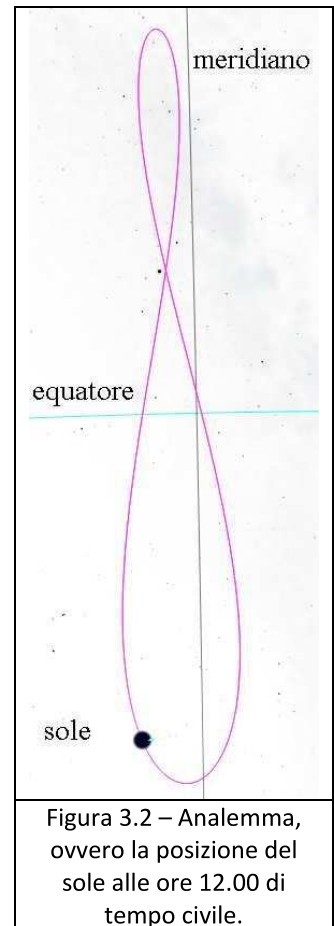
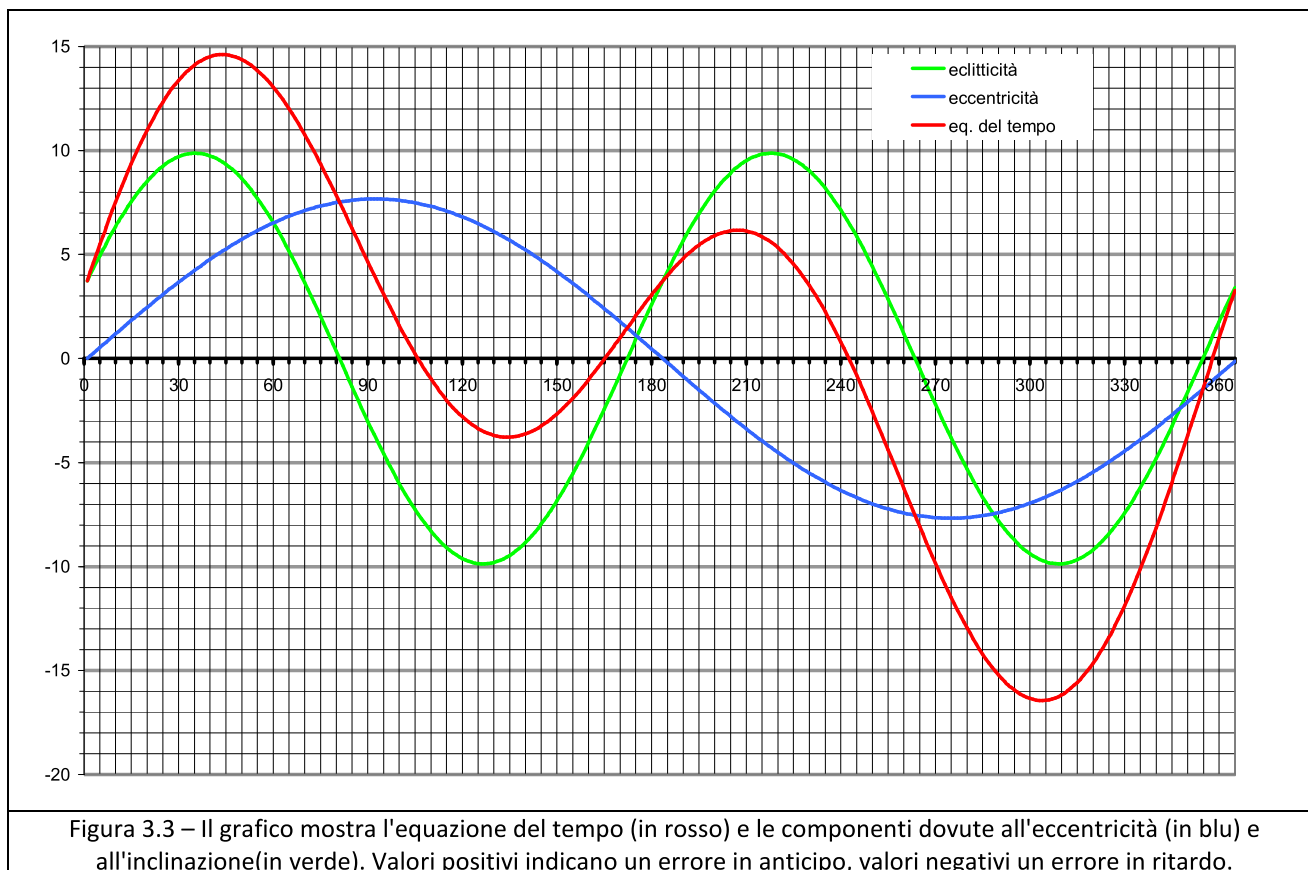


Figura 3.2 – Analemma, ovvero la posizione del sole alle ore 12.00 di tempo civile.

[16] Anche e e ω cambiano nel tempo.

L'equazione del tempo arriva ad un valore massimo in anticipo di circa 14 minuti verso metà febbraio, ad un valore massimo in ritardo di circa 16 minuti nei primi giorni di novembre; in queste due epoche dunque il Sole sarà in meridiano (superiore) rispettivamente alle 12h 14m e alle 11h 44m di tempo medio. La stessa equazione si annulla 4 volte all'anno, e precisamente a metà aprile, metà giugno, al principio di settembre ed a Natale, nelle quali epoche dunque il Sole passerà in meridiano alle 12h precise di tempo medio.



3.4 – Tempo locale, differenza di longitudine.

Il tempo siderale, il tempo solare vero ed il tempo solare medio, dipendendo dal meridiano del luogo di osservazione, sono tutti tempi locali. Se si confrontano infatti due orologi, ambedue a tempo siderale o medio¹⁷, di due località diverse si trova che le loro indicazioni differiscono. La differenza, per la definizione di tempo, è uguale alla differenza degli angoli orari di uno stesso punto (rispettivamente equinozio o Sole medio), osservato nello stesso istante dai due luoghi e perciò è anche uguale alla differenza delle longitudini geografiche dei due luoghi sulla Terra. Il tempo del luogo più ad oriente anticipa rispetto al tempo del luogo situato più ad occidente, e soltanto se i due luoghi stanno sullo stesso meridiano, gli orologi segnano in uno stesso istante lo stesso tempo siderale, vero e medio.

Reciprocamente si può dunque determinare la differenza di longitudine di due luoghi confrontando le indicazioni relative allo stesso istante di due orologi che si trovano nei due luoghi. I due orologi devono segnare lo stesso tempo, ma è indifferente che essi segnino tempo siderale o tempo medio; la differenza di longitudine, misurata in tempo, sarà sempre espressa dallo stesso numero, sia che esso indichi tempo siderale o tempo medio. Come intervallo di tempo c'è infatti differenza, ma la longitudine è un angolo, e come angolo è in ambedue i casi lo stesso, in quanto l'indice del tempo

¹⁷ Lo stesso si potrebbe dire per due orologi a tempo solare vero se questi potessero dare con sufficiente precisione il tempo.

siderale si muove corrispondentemente più presto dell'indice che segna il tempo medio.

3.5 – Tempo legale, riduzione del tempo da un meridiano all'altro.

Con l'aumentare delle comunicazioni tra i diversi paesi i diversi tempi locali divenne insostenibile e si dovette pensare ad un tempo comune per intere regioni, in base a convenzioni e leggi apposite. Si ha così per ogni regione o paese o stato il **tempo legale**, che stabilisce l'ora che devono segnare concordemente tutti gli orologi del paese rispetto a quella di Greenwich, o rispetto ad altra ora presa come riferimento.

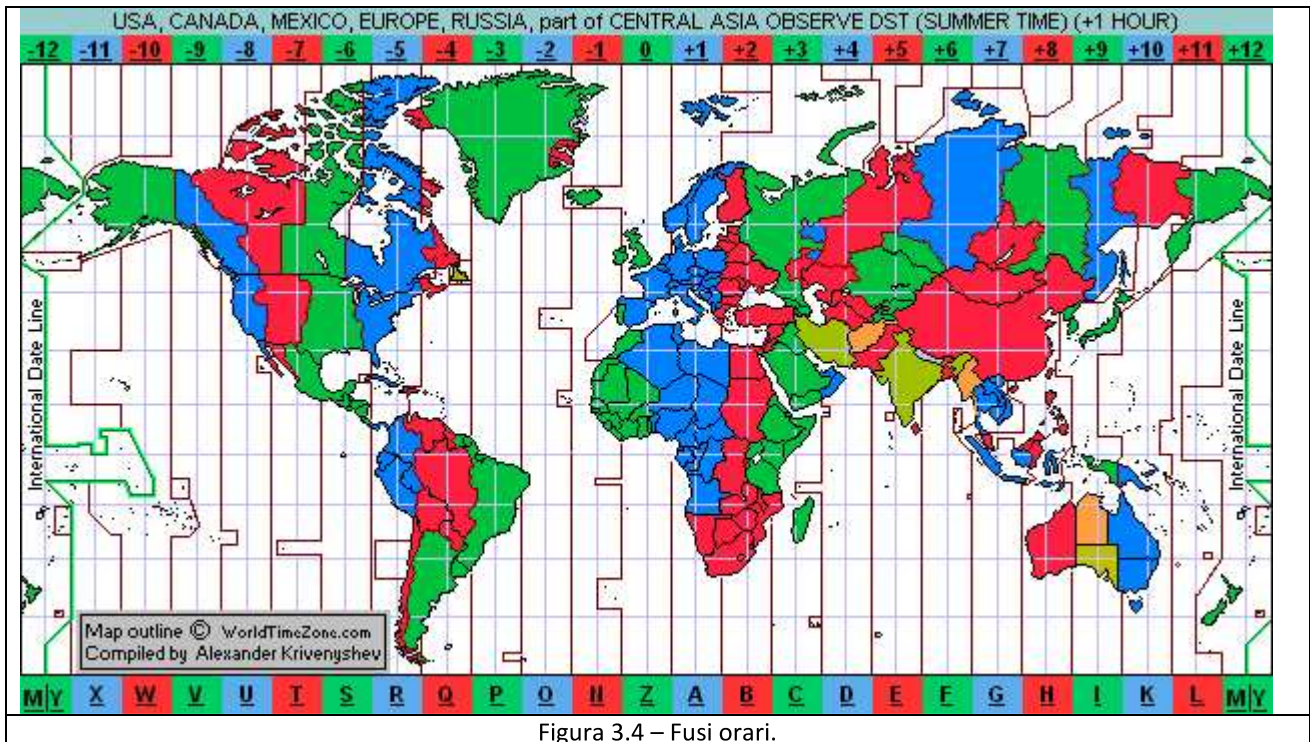


Figura 3.4 – Fusi orari.

La convenzione ora adottata da quasi tutti gli stati è quella dei cosiddetti fusi orari; si divide la superficie terrestre in 24 fusi limitati da meridiani distanti 15° o 1h di longitudine e si assume come tempo comune a tutti i luoghi del fuso quello del meridiano centrale. In questo modo il tempo locale di un luogo può differire dal tempo del fuso al massimo di mezzora. In tal modo tutti gli orologi dei luoghi del mondo che adottano questo sistema differiscono di un numero esatto di ore, e segnano in uno stesso istante lo stesso minuto e lo stesso secondo. Praticamente, siccome i diversi paesi e stati non hanno l'estensione esatta dei fusi, ogni stato adotta l'ora del fuso nel quale si trova la maggior parte del suo territorio.

Il punto di partenza in questa convenzione è il meridiano di Greenwich in Inghilterra; il tempo medio di questo meridiano viene chiamato **tempo universale** (TU). In ogni istante esso non è altro che l'angolo orario del Sole medio a Greenwich più 12h; e secondo questa definizione il giorno universale incomincia alla mezzanotte media di Greenwich. Il meridiano predetto determina il primo fuso mondiale che si estende per 7,5° in longitudine ad occidente e per 7,5° ad oriente.

Lo stesso tempo si adopera nei paesi europei occidentali (oggi solo Inghilterra e Portogallo) è detto anche tempo medio dell'Europa occidentale (TMEW).

Il tempo del primo fuso ad oriente, che è quello del meridiano a 15° oriente da Greenwich, anticipa esattamente di un'ora rispetto al tempo universale ed è adottato dai paesi dell'Europa centrale (Germania, Francia, Spagna, Belgio, Austria, Italia, Croazia, Slovenia, Ungheria, Svizzera, Paesi Scandinavi, ecc.), per cui si dice anche tempo medio dell'Europa centrale (TMEC). Il secondo abbraccia un grande numero di paesi ed è detto tempo medio dell'Europa orientale.

Negli stati molto estesi, attraversati da più di un fuso (Russia, Canada, Stati Uniti), le provincie sono riunite a gruppi, ciascuno dei quali adotta l'ora di un determinato fuso. Il tempo così definito si dice in generale tempo di zona, in particolare porta il nome del corrispondente fuso, per esempio tempo medio dell'Europa centrale (TMEC), tempo medio dell'Atlantico (Atlantic standard time), tempo dell'America centrale (Central standard time), ecc.

Dal 1916 alcuni stati hanno introdotto per ragioni economiche e di pubblico interesse l'**ora estiva**, stabilendo un anticipo di 60 minuti esatti sull'ora legale del paese per un certo periodo dell'anno dalla primavera all'autunno. Trattandosi ancora oggi di provvedimento transitorio, la legge relativa deve essere rinnovata ogni anno.

Abbiamo già detto che la differenza di longitudine fra due luoghi terrestri viene a coincidere con la differenza dei tempi siderali, o dei tempi solari veri, o infine dei tempi solari medi dei due luoghi, corrispondenti ad un medesimo istante. Contando dunque le longitudini dal meridiano di Greenwich, positivamente verso occidente e negativamente verso oriente, si ha il tempo locale togliendo dal tempo del meridiano di Greenwich la longitudine del luogo e viceversa si ha il tempo del meridiano di Greenwich aggiungendo al tempo del luogo la longitudine di questo. Il tempo locale differisce poi dal tempo legale, cioè dal tempo legale segnato dagli orologi che si adoperano nella vita legale, di una quantità uguale alla longitudine del luogo rispetto al meridiano centrale del fuso corrispondente, la quale evidentemente differisce di un numero intero di ore dalla longitudine da Greenwich. Questo tempo è detto la **costante locale** e deve dunque essere aggiunta (col segno) al tempo locale per ottenere il **tempo legale**.

Il dipartimento di Fisica dell'Università di Camerino è situato a $-52\text{m } 16\text{s}$ da Greenwich, quindi il suo tempo locale (siderale, solare vero o solare medio) anticipa rispetto a quello di Greenwich di $52\text{m } 16\text{s}$ (siderale, vero o medio); e siccome il tempo legale di Camerino è quello del primo fuso, cioè dell'Europa centrale, che anticipa di un'ora su quello di Greenwich, la costante locale per Camerino $+7\text{m } 44\text{s}$.

Essendo all'istante della culminazione del Sole vero, cioè al mezzogiorno vero, sempre le 12 di tempo solare vero, il detto istante sarà in tempo locale medio:

$$12\text{h} + \text{l'equazione del tempo,}$$

e perciò in tempo legale

$$12\text{h} + \text{l'equazione del tempo} + \text{la costante locale.}$$

Per esempio a Camerino il Sole il 15 marzo culmina alle $(12\text{h}) + (9\text{m } 39\text{s}) + (7\text{m } 44\text{s}) = 12\text{h } 17\text{m } 23\text{s}$ di tempo medio dell'Europa centrale.

La differenza dei tempi locali e dei tempi di zona ha per conseguenza il fenomeno del cambiamento di data. Se per esempio da noi gli orologi segnano le 17 ore, immaginando di andare verso oriente incontreremo luoghi i cui tempi anticipano sempre più e ad un certo punto arriveremo in una regione che avrà le ore 5 del mattino successivo; andando invece verso occidente incontreremo paesi che sono indietro rispetto al nostro orologio e quando arriveremo alla regione di prima troveremo nuovamente le 5 del mattino, ma questa volta del mattino dello stesso giorno nostro. La detta regione, a 12h di longitudine da noi, dovrebbe dunque avere contemporaneamente due date, e siccome ciò non è possibile, si conviene di porre un limite di data, intorno al quale gli orologi segnano la stessa ora, ma le date da una e dall'altra parte del meridiano limite differiscono di un giorno. Come meridiano più adatto per lo scopo si è dimostrato quello opposto a quello di Greenwich, cioè il meridiano di longitudine 180° o 12h (occidentale od orientale). Nei viaggi occorre perciò cambiare la data nell'attraversare questo meridiano, e precisamente saltare un giorno se si procede da oriente verso occidente e ripetere la data ancora un giorno se si va da occidente verso oriente.

3.6 – Anno siderale, tropico, besseliano, anomalistico, giuliano e gregoriano.

Il tempo impiegato dal Sole fittizio a percorrere l'intera eclittica rispetto ad un punto fisso di questa

si chiama **anno siderale**. La durata di questo anno, che per più secoli non varia è di

365,2563631 giorni solari medi

Si chiama **anno tropico** l'intervallo di tempo che trascorre fra due successivi passaggi del Sole fittizio (e quindi anche del Sole medio) all'equinozio di primavera o, più in generale, l'intervallo di tempo durante il quale la longitudine (ed anche l'ascensione retta) del Sole cresce di 360° . Poiché questo equinozio si sposta sull'eclittica di $50''{,}26$ in un anno tropico nel verso contrario al moto annuo del Sole, l'anno tropico è più breve dell'anno siderale e precisamente del tempo che il Sole impiega a percorrere sull'eclittica un arco di $50''{,}26$; e poiché in un anno esso percorre

$$360^\circ = 1\,296\,000'',$$

la durata dell'anno tropico sarà di

$$365,2563631 \cdot \frac{1296000 - 50,26}{1296000} = 365,2421981 \text{ giorni solari medi.}$$

Questo valore, a causa di una lentissima variazione della precessione, diminuirà col tempo, ma occorrono parecchi secoli prima che esso vari di 1 secondo (= 0,0000116 giorni solari medi).

L'istante di inizio dell'anno tropico è arbitrario, ma una volta fissato, determina un punto della eclittica dove avverrà l'inizio di ogni anno tropico indipendentemente da qualunque tempo locale. Perché esso si scosti il meno possibile dall'inizio dell'anno civile, che per ragioni pratiche deve incominciare alla mezzanotte e quindi dipende dal tempo locale (o civile), dietro proposta di Bessel gli astronomi hanno convenuto di far coincidere l'inizio astronomico con l'istante in cui la longitudine del Sole fittizio, cioè la longitudine media del Sole, affetta dalla aberrazione e contata dall'equinozio medio, è esattamente 280° o 18h 40m; la differenza tra questo istante e l'inizio dell'anno civile può raggiungere al più un giorno. L'anno tropico così definito prende il nome di **annus fictus** o **anno besseliano**; il suo inizio si indica con l'aggiungere uno zero come cifra decimale al numero dell'anno, per esempio 2011,0, e si rappresenta pure in frazione decimale di anno un qualunque tempo nel corso di un anno besseliano, per esempio 2011,23.

Quando si studia il moto del Sole sul piano dell'eclittica rispetto alla Terra, si assume un sistema polare avente il polo nel centro della Terra e l'asse polare coincidente con la direzione del perigeo. Perciò la coordinata anomalia sarà l'angolo che la direzione del Sole forma con la direzione del perigeo e per tale motivo si chiama **anno anomalistico** l'intervallo di tempo nel quale l'anomalia del Sole varia di 360° , cioè l'intervallo di tempo compreso tra due successivi passaggi del Sole al perigeo. Questo punto dell'orbita solare non è però fisso fra le stelle, né rispetto all'equinozio di primavera. Il suo movimento è diretto e perciò l'anno anomalistico è più lungo dell'anno siderale e dell'anno tropico. Lo spostamento è di $61',89$ e perciò l'anomalia del Sole cresce di $360^\circ - 61',89$ in 365,2421981 giorni medi; si calcola facilmente da ciò che per completare i 360° occorrono 0,0174428 giorni in più dell'anno tropico per cui l'anno anomalistico risulta di 365,2596409 giorni solari medi.

Tanto il principio quanto la durata dell'anno tropico presentano nella pratica qualche inconveniente a causa delle frazioni di giorno delle quali si dovrebbe tenere conto. Perciò accanto all'anno tropico fu adottato un altro anno, convenzionale, detto **anno civile**, che incomincia sempre col principio esatto di un giorno medio e quindi deve essere composto di un numero intero di giorni, e lascia sempre l'equinozio approssimativamente alla stessa data. Poiché l'anno tropico ha 365,242198094 giorni medi, si vede che si può ottenere una prima approssimazione prendendo gli anni di 365,25 giorni e facendo gli anni comuni di 365 giorni ed intercalando ogni quattro anni in giorno in più. L'anno col giorno in più è detto **bisestile**. Tale regola venne fissata da Giulio Cesare e perciò questo anno viene chiamato **anno giuliano**.

Quattrocento anni giuliani comprendono

$$365,25 \cdot 400 = 365 \cdot 400 + 100 \text{ giorni medi}$$

in luogo di

$$365,2421981 \cdot 400 = 146096,87924 = 365 \cdot 400 + 96,87924 \text{ giorni medi.}$$

Ogni 400 anni è dunque necessario sopprimere tre giorni, e la disposizione a questo proposito è stata emanata dal Papa Gregorio XIII, il quale nel 1582, oltre che far seguire al 4 ottobre il 15 ottobre per portare nuovamente la data dell'equinozio di primavera al 21 marzo, stabilì che tutti gli anni divisibili per 100, che secondo il calendario giuliano dovrebbero essere anni bisestili, fossero anni comuni e soltanto quelli divisibili per 400 rimanessero bisestili. Il calendario così riformato fu detto **gregoriano**.

La differenza di 0,0078019 giorni = 11m 14,08416 s tra l'anno tropico e quello giuliano ha per conseguenza che l'equinozio di primavera, anche dopo il ciclo di 4 anni, non cade allo stesso istante del 21 marzo, ma – essendo l'anno giuliano più lungo – anticipa gradatamente dell'intervallo di $0,0078019 \cdot 4 = 0,0312076$ giorni medi (in 4 anni consecutivi). In conseguenza i tempi siderali e tutte le longitudini del Sole, come pure le ascensioni rette di questo aumentano gradatamente dopo ogni ciclo di 4 anni di circa $112'' = 7,5$ s in media, corrispondenti al cammino del Sole nell'intervallo suddetto di 0,0312076 giorni, ciò comporta circa 3m in un secolo. Questo avanzo continua finché non interviene secondo il calendario gregoriano un secolo non bisestile che interrompe la serie dei cicli quadriennali regolari e fa ritornare l'equinozio all'istante di 4 secoli addietro (mentre il secolo bisestile; come il 2000, non interrompe la serie).

Tutto quanto riguarda in generale il computo del tempo, la definizione, la numerazione e il conteggio di periodi più o meno lunghi, i rapporti tra questi, le diverse ere e il confronto tra i computi presso i diversi popoli, appartiene alla cronologia; quanto riguarda più in particolare la regolazione delle feste nel computo attuale è oggetto della calendariologia. Sopra abbiamo parlato della cronologia basata sul periodo del Sole, non di quella basata sulla Luna, che ha soltanto importanza storica. Accanto a questi periodi viene però molto usato per gli scopi astronomici e storici anche un computo a giorni, continuato senza interruzioni a partire dal mezzogiorno medio a Greenwich del 1° gennaio dell'anno 4713 a.C. (data anteriore a qualsiasi evento storico). Si definisce **giorno giuliano**, o meglio **data giuliana**, di un istante (secondo G. Scaligero, che introdusse questo computo nel secolo XVI) il numero di giorni interi e frazione di giorno trascorsi dalla predetta origine fino all'istante in questione. Così ad esempio la data giuliana della mezzanotte (medio Greenwich) del 31 dicembre 2010 è 2 455 562,500000, quella del mezzogiorno del 15 marzo 2012 è 2 456 002,000000.

Nel sito dell'Astronomical Applications Department (AA) del U.S. Naval Observatory (USNO), all'indirizzo <http://aa.usno.navy.mil/data/docs/JulianDate.php> è disponibile un programma per convertire dalla data normale alla data giuliana e viceversa.

Ci sono alcune alternative alla data giuliana.

- Il giorno giuliano eliocentrico (Heliocentric Julian Day, HJD) è identico al giorno giuliano, ma riferito al sistema di riferimento del Sole, e perciò può differire dal giorno giuliano normale fino a 16 minuti, cioè il tempo necessario alla luce per attraversare l'orbita della Terra. Il giorno giuliano è a volte chiamato giorno giuliano geocentrico per distinguerlo da quello eliocentrico.
- Un'altra versione del giorno giuliano, introdotta da Peter Meyer, è il giorno giuliano cronologico, in cui il punto iniziale è posto alla mezzanotte del 1° gennaio 4713 a.C., ma nel fuso orario locale invece che UTC. La differenza tra mezzogiorno e mezzanotte significa che occorre aggiungere 0,5 al giorno giuliano per ottenere quello cronologico. Inoltre, utilizzare il fuso orario locale costringe a tener conto della differenza di ore tra il Tempo Universale e il fuso considerato, nonché dell'ora legale estiva, se applicabile. Gli utilizzatori del giorno giuliano cronologico chiamano l'altro giorno giuliano astronomico, per distinguerlo.

Poiché il punto di partenza è così lontano nel tempo, i numeri dei giorni giuliani sono molto grandi e difficili da maneggiare. A volte viene usato un punto di partenza più recente, per esempio

semplicemente ignorando le cifre più significative, per poter entrare più agevolmente nella memoria dei computer con una precisione sufficiente.

Il giorno giuliano modificato (MJD), introdotto dallo Smithsonian Astronomical Observatory nel 1958 per registrare l'orbita dello Sputnik, è definito in termini di giorni giuliani come segue:

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2400000,5$$

Lo spostamento di 0,5 significa che il MJD inizia e finisce alla mezzanotte del Tempo Universale, anziché a mezzogiorno. Il giorno MJD 1 coincide con il 17 novembre 1858.

Il giorno giuliano ridotto (RJD) è utilizzato anche dagli astronomi e conta i giorni dallo stesso inizio del MJD, ma a partire dal mezzogiorno UTC, ed è quindi definito come:

$$\text{RJD} = \text{JD} - 2400000$$

Il giorno RJD inizia quindi a mezzogiorno del 16 novembre 1858 e finisce a mezzogiorno del 17.

Il giorno giuliano troncato (TJD) fu introdotto dalla NASA per il programma spaziale. Inizia il 24 maggio 1968. Poiché questo conteggio ha superato i numeri a quattro cifre il 10 ottobre 1995, alcuni adesso contano il TJD iniziando da quella data, per poter mantenere un numero a quattro cifre. Può essere definito come:

$$\text{TJD} = \text{JD} - 2440000,5$$

oppure come:

$$\text{TJD} = (\text{JD} - 0,5) \bmod 1000$$

Il giorno giuliano di Dublino è usato dai programmatori di computer, e conta i giorni a partire dal 1° gennaio 1900 (MJD 15021).

3.7 – Relazione fra tempo medio e tempo siderale.

Quanto è stato detto sulla differenza di durata tra giorno siderale e giorno solare vero, vale anche per la differenza tra giorno siderale e giorno solare medio, e siccome questi due sono ora costanti la differenza, che abbiamo chiamata accelerazione delle fisse ed indicheremo con Δt , è pure costante, e il suo valore esatto può essere calcolato col ragionamento seguente, che ci darà inoltre la relazione tra tempo siderale e tempo medio.

a) Ad ogni culminazione del Sole medio in meridiano esso si è spostato (in causa del suo moto rispetto alle stelle) sull'equatore verso oriente di un certo arco A rispetto alla posizione che occupava al momento del suo passaggio precedente, e questo. arco A è costante per tutti i giorni per la definizione del moto del Sole medio. Esso corrisponde evidentemente all'aumento dell'ascensione retta del Sole medio in ogni giorno medio, e siccome, per la definizione dell'anno tropico, in 365,242198094 giorni medi il Sole compie una rivoluzione completa rispetto all'equinozio di primavera, ossia gli spostamenti quotidiani A si assommano in tale periodo a 360° , sarà

$$A = \frac{360^\circ}{365,242198094} = \frac{24h}{365,242198094} = 0,065709822 = 3m\ 56,555359s$$

Il tempo Δt che questo arco impiega a percorrere il meridiano non è altro che il ritardo diurno (cioè in 24 ore di tempo medio) del passaggio del Sole medio in meridiano rispetto all'equinozio di primavera, e quindi non è altro che la differenza tra il giorno medio e quello siderale, e siccome in generale la differenza di ascensione retta di due punti è uguale alla differenza dei tempi siderali del loro passaggio in meridiano, Δt in tempo siderale è uguale all'importo ora scritto e si ha

$$1 \text{ giorno solare medio} = 24h \text{ di tempo medio} = 24h\ 3m\ 56,555359s \text{ di tempo siderale.}$$

Con riferimento al meridiano, si può dire che in conseguenza degli spostamenti diurni di importo A del Sole medio in senso opposto al moto diurno dei punti dell'equatore, in un anno tropico il Sole, rimanendo indietro di 360° rispetto all'equinozio, compie un giro esatto in meno dell'equinozio rispetto al meridiano.

Viceversa si può concludere allo stesso modo che in ogni giorno siderale l'equinozio di primavera anticipa, rispetto al Sole medio e quindi per un orologio a tempo medio, il suo passaggio al meridiano di un certo tempo $\Delta t'$ impiegato da un certo arco A' a descrivere il meridiano, il quale

arco A' è ora l'aumento dell'ascensione retta del Sole in un giorno siderale. Per quanto abbiamo osservato ora, in un anno tropico l'equinozio di primavera compie rispetto al meridiano esattamente una rivoluzione in più del Sole, in quanto nello stesso tempo il Sole, camminando nel senso contrario a quello del moto diurno, ha perduto una esatta rivoluzione. I giorni siderali contenuti nell'anno tropico sono perciò 366,242198094 e si ha

$$\Delta t' = \frac{360^\circ}{366,242198094} = \frac{24h}{366,242198094} = 0,065530406 = 3m\ 55,9094616s,$$

da cui, essendo $\Delta t'$ l'intervallo in tempo medio (perché letto su un orologio a tempo medio) di cui il giorno siderale è più breve del medio,

$$(2.19) \quad 1 \text{ giorno siderale} = 24h \text{ di tempo siderale} = 23h\ 56m\ 4,0905384s \text{ di tempo medio.}$$

La relazione tra tempo siderale e medio è con ciò perfettamente stabilita dalle due relazioni equivalenti (2.18) e (2.19). La stessa cosa risulta del resto da quanto precede osservando che il

rapporto tra la durata del giorno medio e quella del siderale $\frac{366,242198094}{365,242198094}$, per cui un qualunque

intervallo di tempo medio può essere trasformato in tempo siderale moltiplicando per $\frac{366,242198094}{365,242198094} = 1 + \frac{1}{365,242198094}$. Reciprocamente un intervallo di tempo siderale può essere

trasformato in tempo medio moltiplicando per $\frac{365,242198094}{366,242198094} = 1 - \frac{1}{366,242198094}$.

b) Per la soluzione dell'importante problema di trasformare il tempo medio di un certo istante in tempo siderale e viceversa, è però necessario conoscere il tempo siderale di un certo istante del giorno in questione, dato che l'origine, dalla quale si contano i due tempi, è diversa; il giorno medio s'incomincia infatti a mezzanotte media, mentre il giorno siderale può incominciare – secondo l'epoca dell'anno – a qualunque ora del giorno medio. Di solito si conosce l'ora siderale per 0h di tempo medio, cioè per la mezzanotte media, quantità data dalle effemeridi astronomiche per tutti i giorni dell'anno e per il meridiano di Greenwich. Quando si voglia lo stesso dato per un punto situato su un altro meridiano, bisogna tenere presente che la quantità predetta cresce in ogni giorno di 3m 56,555359s. Per un luogo situato alla differenza di longitudine λ da Greenwich espressa in ore, minuti e secondi di tempo e quindi in frazione di giorno $\frac{\lambda}{24}$ bisognerà perciò al tempo siderale di mezzanotte Greenwich aggiungere o sottrarre l'importo

$$\vartheta = 3m\ 56,555359s \cdot \frac{\lambda h}{24} = 236,555359s \cdot \lambda d$$

secondo che il luogo è situato ad occidente o ad oriente; e siccome λ ha già il segno positivo o negativo secondo che il luogo si trova ad occidente oppure ad oriente del meridiano fondamentale, si deve aggiungere ϑ col suo segno. Anche questa correzione piccola è data dalle effemeridi astronomiche per i principali luoghi della Terra; così ad esempio per Camerino è $\vartheta = -8,587s$. La quantità corretta $s_0 = s^* + \vartheta$, dove s^* è il tempo siderale alla mezzanotte di Greenwich, è allora il tempo siderale alla mezzanotte locale.

Conosciuto il tempo siderale s_0 a mezzanotte di un luogo (dunque a mezzanotte locale), in un dato giorno, e volendo trovare il tempo siderale s che corrisponde al tempo medio t in un determinato istante dello stesso giorno, occorrerà fare

$$s = s_0 + t + \frac{1}{365,242198094} t = s_0 + 1,002737909t$$

viceversa, conosciuto il tempo siderale di un certo istante del giorno e volendo esprimerlo in tempo medio, si avrà

$$t = \frac{s - s_0}{1,002737909} = 0,997269566(s - s_0).$$

Quando, in luogo del tempo medio locale qui inteso, si vuole trasformare o ottenere il tempo civile, occorre introdurre nel calcolo la costante locale ed aggiungerla in ogni caso al tempo t .

Si può anche operare col tempo siderale della mezzanotte Greenwich, direttamente rilevabile dalle tavole, ma allora bisogna passare attraverso il tempo di Greenwich; nel caso che si tratti di tempo civile ciò non porta maggior lavoro. Si trasforma allora il tempo dato (siderale o civile) subito nel corrispondente tempo di Greenwich, applicando semplicemente la differenza di longitudine λ (se è siderale) o la differenza di zona (se è tempo civile) ed il tempo siderale o civile di Greenwich viene poi trasformato rispettivamente in civile o siderale, sempre per Greenwich; da questo si ritorna infine al tempo civile o siderale del luogo desiderato, rispettivamente aggiungendo un numero intero di ore oppure togliendo la differenza di longitudine.

3.8 – Il Tempo universale

Il tempo universale (UT dall'inglese Universal Time) è una scala dei tempi basata sulla rotazione della Terra. Deriva dal Greenwich Mean Time (GMT), cioè dal giorno solare medio sopra il meridiano di Greenwich, che è considerato convenzionalmente come il meridiano zero.

Prima dell'introduzione del tempo standard ogni città regolava i propri orologi secondo la posizione locale del sole; questo fatto aveva come effetto che città relativamente vicine usavano orari distanziati di alcuni minuti. Non ci furono problemi importanti finché le comunicazioni fra i vari insediamenti usavano più tempo della differenza di orari fra le due città, ma, quando nel XIX furono inventati treno e telegrafo e i viaggi e le comunicazioni iniziarono a diventare più veloci, si iniziò a sentire questo problema. Ad esempio, un treno su una lunga tratta doveva aggiustare più volte il suo orologio per avere l'ora locale corretta.

L'ora locale dell'osservatorio di Greenwich fu scelta come standard nella Conferenza internazionale dei meridiani del 1884 in quanto la maggior parte delle carte del tempo usavano il meridiano di Greenwich come riferimento, ma solo nel 1929 tutti i paesi maggiori adottavano il sistema dei fusi orari.

Il primo paese fu la Nuova Zelanda; negli Stati Uniti ed in Canada le zone temporali furono introdotte il 18 novembre 1883 non con una legge, ma fu solo una convenzione del sistema di comunicazione ferroviario. Data l'importanza delle comunicazioni lentamente il nuovo sistema venne adottato anche in altri ambiti e diventò legge nel 1918.

In Italia l'adozione del sistema dei fusi orari fu introdotto con un regio decreto del 10 agosto 1893 e entrò in vigore il 31 ottobre dello stesso anno. Il meridiano di riferimento per il fuso orario al quale appartiene l'Italia passa per Termoli – Etna.

Inizialmente il tempo si misurava basandosi sulla rotazione della Terra ed osservando quando i corpi celesti attraversano un meridiano, ogni giorno. Oggi, il Tempo universale è determinato, rispetto al tempo atomico internazionale, tramite le osservazioni di quasar molto distanti usando l'interferometria astronomica, arrivando ad una precisione di alcuni microsecondi. La maggior parte degli standard che riguardano l'astronomia ed i corpi celesti usano l'UT1, ma a volte è usato anche l'UTC.

La rotazione della Terra e la sua influenza sul Tempo universale è monitorata dall'International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS). L'Unione Astronomica Internazionale è consultata per la definizione degli standard, ma la decisione finale è compito dell'International Telecommunication Union (ITU). L'irregolarità della rotazione della Terra e la lunghezza del giorno che aumenta gradualmente a causa dell'accelerazione di marea porta all'irregolarità del Tempo universale. Il tempo degli orologi atomici non ha irregolarità ed è molto più preciso. Per mantenere la corrispondenza fra queste due scale, quando necessario viene introdotto un secondo intercalare.

Il termine "Tempo universale" è stato adottato internazionalmente nel 1928, perché più preciso rispetto a "giorno medio di Greenwich" che può riferirsi al giorno astronomico (inizia a mezzogiorno) o al giorno civile (inizia a mezzanotte). Tuttavia l'uso di "giorno medio di

Greenwich" rimane nel linguaggio comune nell'accezione civile del significato.

L'UTC è lo standard internazionale su cui si basa il tempo civile. È misurato usando orologi atomici, ed è tenuto entro 0,9 secondi dal UT1^[18] tramite l'introduzione, quando occorre, di un secondo intercalare. Se non è richiesta una precisione maggiore di un secondo, l'UTC può essere usato al posto del UT1; la differenza fra questi due orari è chiamata DUT1.

3.9 – Incostanza dell'unità astronomica del tempo.

La variabile indipendente t che entra nelle equazioni differenziali del moto dei pianeti, che conosceremo più avanti, è un tempo che scorre uniformemente, al quale sono proporzionali i movimenti medi siderali dei corpi celesti, e perciò viene chiamato *tempo uniforme* o *tempo newtoniano*. È chiaro che se si utilizza una unità di misura basata sul fenomeno della rotazione della Terra, questa unità non è rigorosamente costante. In realtà vi sono ragioni teoriche e risultati empirici che accennano indubbiamente ad una variazione della durata del giorno, sia pure lentissima nei secoli, per cui il tempo newtoniano sopra definito non può essere confuso col tempo astronomico, misurato dalla rotazione della Terra.

Tra i maggiori fenomeni capaci di modificare la rotazione uniforme della Terra sono da considerare l'aumento di massa per caduta di meteoriti, l'attrito e l'azione di frenamento causati dal movimento dei mari nelle maree e il raffreddamento del corpo terrestre e quindi la sua contrazione. I primi due fenomeni, di effetto notevolmente superiore a quello del terzo fenomeno, rallentano la rotazione diurna, mentre il terzo la accelera; il risultato ne è un rallentamento, del tutto impercettibile – da un giorno all'altro, ma che si accumula ad importi notevoli nei secoli e millenni, e viene messo in luce dalle osservazioni dei corpi celesti. Infatti si è scoperto che gli astri, in particolare modo la Luna, apparentemente accelerano nei loro movimenti rispetto alle posizioni calcolate in base alle tavole fornite dalle teorie della meccanica celeste, fondate appunto sul concetto di un tempo uniforme.

La Terra e la Luna si sono reciprocamente influenzate tramite le maree sin da quando entrambi i corpi erano liquidi e come oggi la Luna rivolge costantemente lo stesso emisfero alla Terra, e la durata della sua rivoluzione intorno alla Terra e quella della sua rotazione sono esattamente uguali, così la Terra arriverà nel futuro a mostrare sempre la stessa faccia alla Luna.

Per intervalli storici occorre tenere presente che una piccolissima variazione del giorno, continuata per anni e secoli, porta a importi sensibili nella variazione della durata e nello spostamento del tempo misurato (astronomico) rispetto a quello newtoniano. Così per es. si calcola facilmente che se ogni giorno è di solo 0".000 0001 più lungo del precedente, una quantità dunque estremamente piccola e che certamente si sottrae a qualunque mezzo di indagine terrestre immediata, dopo un secolo si ha, uno spostamento di 67 secondi, e in un millennio di quasi 2 ore. Dall'accelerazione della Luna in longitudine, che importa circa 6" al secolo, risulterebbe uno spostamento dei tempi di circa 25 secondi al secolo, quindi la variazione diurna, per quanto precede, è assolutamente inapprezzabile.

Come detto all'inizio del capitolo, oggi si utilizza una unità di misura basata su fenomeni più costanti.

^[18] Su proposta di William Markowitz nel 1955, sono state definite diverse versioni del Tempo universale.

- UT0 è il tempo universale calcolato dall'osservazione del movimento giornaliero delle stelle o sorgenti radio extragalattiche, o dalle osservazioni della Luna e dei satelliti artificiali. Questo calcolo si rivela errato data la diversa posizione del polo terrestre geografico dal polo di rotazione.
- UT1 deriva dal UT0 correggendo l'errore dovuto ai due poli e definisce il vero angolo di rotazione della Terra rispetto ad una griglia di riferimento fissa. Tuttavia, data la velocità non uniforme della rotazione terrestre UT1 ha un'incertezza di ± 3 millisecondi al giorno.
- UT1R è la correzione del UT1 nel breve periodo.

Capitolo 4

Rifrazione, aberrazione, precessione e nutazione

4.1 – Introduzione

Le osservazioni astronomiche sono fatte prevalentemente dalla superficie della Terra. Ciò comporta un insieme di effetti dei quali è necessario tener conto per correggere le posizioni osservate degli astri e risalire così alle posizioni reali. Questi effetti sono essenzialmente di due tipi: quelli collegati con il fatto che le osservazioni sono eseguite dalla superficie terrestre e sono quindi alterate dalla presenza dell'atmosfera terrestre, che assorbe la radiazione proveniente dagli oggetti celesti e ne devia la traiettoria, e quelli collegati con il moto e le perturbazioni che la Terra subisce in conseguenza della presenza del Sole, della Luna e dei pianeti. Un ulteriore effetto (di parallasse) è connesso con il fatto che la direzione di osservazione, e quindi la posizione osservata di un oggetto sulla sfera celeste, dipende dalla posizione dell'osservatore sulla superficie terrestre e dalla posizione della Terra sulla sua orbita attorno al Sole.

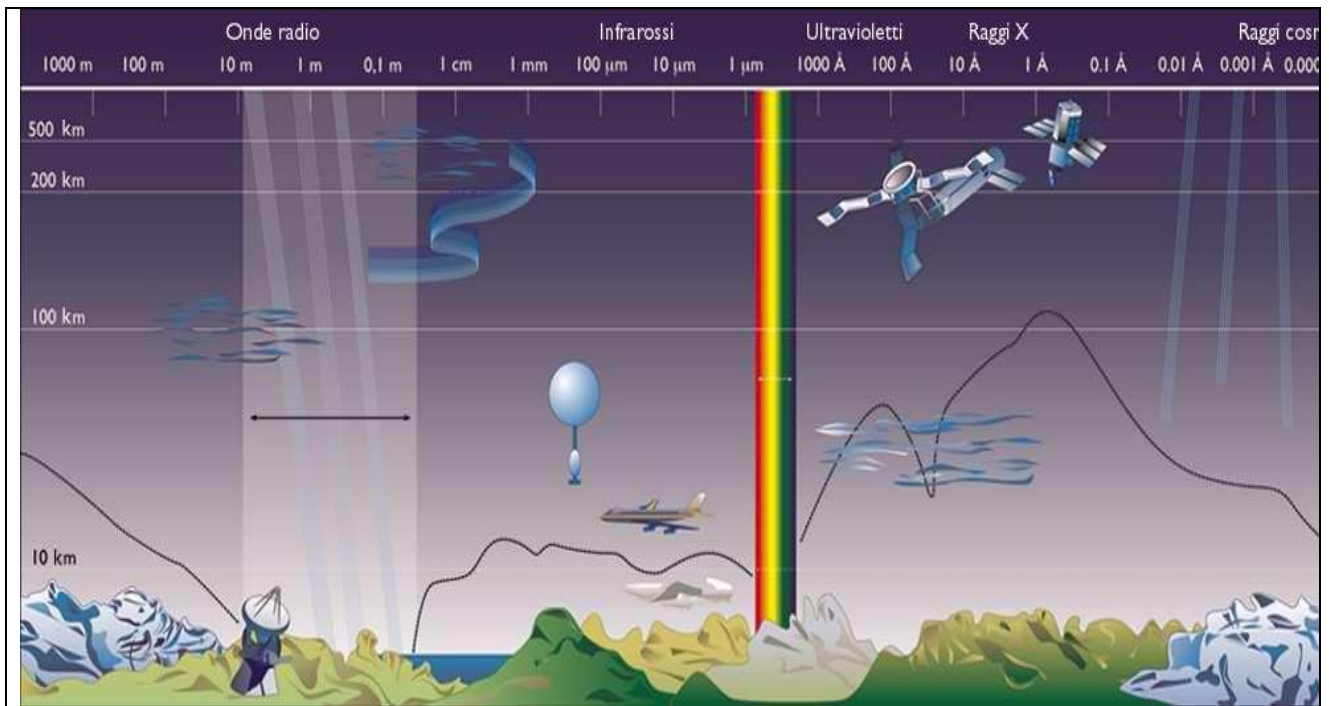


Figura 4.1 – Trasparenza dell'atmosfera terrestre alle varie lunghezze d'onda

Le condizioni di visibilità degli astri sono influenzate dalla presenza dell'atmosfera terrestre che filtra in modo selettivo, a seconda cioè della lunghezza d'onda, le radiazioni provenienti dalle stelle. Questo effetto è particolarmente severo al di fuori delle bande di lunghezze d'onda corrispondenti al visibile e alle onde radio. Infatti solo le radiazioni elettromagnetiche nelle «finestre» del visibile e del radio possono attraversare l'atmosfera e raggiungere l'osservatore sulla superficie terrestre; alle altre lunghezze d'onda l'assorbimento atmosferico è pressoché totale. Proprio la rilevanza di questo effetto ha indotto a raccogliere osservazioni con razzi e satelliti dal di fuori dell'atmosfera e ha reso questi dati particolarmente preziosi. Tutti i recenti sviluppi dell'astronomia nelle bande γ , X, ultravioletta e infrarossa sono infatti dovuti alle osservazioni fuori atmosfera e ad alta quota per l'infrarosso.

Il primo problema che si pone è quello della deviazione dei raggi luminosi dalla traiettoria rettilinea per effetto della rifrazione astronomica. Questo fenomeno, che ha rilevanza per l'esatta

localizzazione degli oggetti sulla sfera celeste, ha una diversa incidenza alle diverse altezze dell'astro sull'orizzonte: è nullo allo zenit e massimo all'orizzonte. La posizione osservata di un astro va quindi corretta per risalire alla posizione reale: l'effetto è quello di alzare apparentemente gli astri sull'orizzonte dell'osservatore.

Nel caso di grandi distanze zenitali la teoria è alquanto elaborata e richiede la conoscenza della struttura atmosferica; se però ci si limita a piccole distanze zenitali $<10^\circ$ è possibile determinare la rifrazione misurando solo i valori di alcune quantità al suolo. Ciò concorre a spiegare perché si preferisce effettuare le osservazioni per piccole distanze zenitali. L'assorbimento e la turbolenza atmosferica comportano anche variazioni di splendore e di colore degli astri (seeing) delle quali occorre tener conto per correggere le osservazioni.

Nel secondo tipo di fenomeni hanno interesse il moto di rivoluzione della Terra sulla sua orbita e il moto di rotazione della Terra attorno a se stessa. A causa della composizione delle velocità della luce che ci proviene da un astro e dell'osservatore in moto con la Terra (approccio classico) la direzione di osservazione dell'astro appare deviata rispetto a quella che verrebbe determinata da un osservatore fisso. L'effetto collegato con il moto orbitale della Terra attorno al Sole è prevalente e causa il fenomeno dell'aberrazione annua della luce stellare. Ogni stella appare descrivere sulla sfera celeste nel corso di un anno un'ellisse la cui eccentricità è diversa a seconda della posizione della stella medesima; tutte le ellissi hanno però la stessa dimensione angolare del semiasse maggiore.

L'effetto combinato della rotazione della Terra attorno al suo asse e delle perturbazioni indotte dalle attrazioni gravitazionali del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale terrestre produce un complesso fenomeno nel quale possono essere distinti due aspetti. Una componente del fenomeno ha carattere secolare e dà luogo alla precessione luni-solare, l'altra componente ha carattere periodico e determina la nutazione. L'asse istantaneo di rotazione della Terra ruota attorno all'asse dell'eclittica descrivendo un cono con vertice nel centro della Terra e semiampiezza uguale alla obliquità dell'eclittica in un intervallo di tempo di $2,6 \cdot 10^4$ anni circa. Ciò comporta una rotazione del polo Nord attorno al polo dell'eclittica e quindi del piano equatoriale rispetto al piano dell'eclittica; ruotano pertanto anche la linea dei nodi ed i nodi stessi con uno spostamento del punto γ sulla sfera celeste (precessione). Il punto γ «precede» in verso retrogrado determinando un aumento secolare delle coordinate misurate a partire da esso (ascensione retta e longitudine eclittica); la diversa giacitura del piano equatoriale implica una variazione anche della declinazione. L'entità totale della precessione luni-solare è dovuta per i due terzi circa alla Luna e per il restante terzo al Sole.

A più breve periodo (18,6 anni circa) l'asse polare presenta una piccola oscillazione rispetto al cono definito dalla sola precessione luni-solare. Questo effetto (nutazione) è essenzialmente dovuto alla variazione temporale della perturbazione collegata con la presenza della Luna il cui piano orbitale non rimane fisso rispetto al piano eclittica. La nutazione causa variazioni di longitudine eclittica e di obliquità dell'eclittica (di 9" circa al massimo) e delle coordinate equatoriali.

Un ultimo fenomeno di variazione apparente delle posizioni degli oggetti celesti è collegato con le perturbazioni indotte sul moto orbitale della Terra (e quindi sulla giacitura dell'eclittica) dalla presenza degli altri pianeti. Ciò determina una precessione planetaria, di segno contrario e di entità minore della precessione luni-solare, dovuta ad un'oscillazione periodica dell'obliquità dell'eclittica (che attualmente decresce di 0,47" all'anno). La precessione lunisolare e quella planetaria producono insieme una precessione generale in forza della quale il punto γ si sposta in verso retrogrado con un incremento della longitudine eclittica di 50,29" all'anno e variano anche la latitudine eclittica, l'ascensione retta e la declinazione.

A causa dei fenomeni accennati (e della parallasse) le posizioni osservate non coincidono con le posizioni reali che possono essere però calcolate tenendo conto dei vari effetti. In particolare la variazione del punto origine di alcune coordinate e della giacitura dei piani di riferimento impone la riduzione delle coordinate di ogni oggetto celeste a ben determinate posizioni medie dell'astro. Si definiscono medie le posizioni corrette per gli effetti di rifrazione, aberrazione, nutazione e parallasse e riferite ad un prescelto equinozio medio (ad esempio all'inizio del 2000); esse risultano

così svincolate da ogni variazione collegata con le modalità, il luogo e l'istante di osservazione.

4.2 – Rifrazione atmosferica e seeing

La traiettoria di un raggio di luce (e più in generale di una radiazione elettromagnetica) monocromatica viene deviata dalla traiettoria rettilinea, seguita in ogni mezzo materiale otticamente omogeneo, nel passaggio attraverso la superficie di separazione di mezzi diversi. In generale siano 1 e 2 due mezzi separati da una superficie ed n_1 ed n_2 due corrispondenti indici di rifrazione assoluti. L'indice di rifrazione di un mezzo esprime il rapporto tra le velocità della luce nel vuoto e nel mezzo; esso dipende dalla natura fisica del mezzo stesso e dalla lunghezza d'onda della radiazione. Il suo valore è sempre maggiore di 1 e diminuisce all'aumentare della lunghezza d'onda.

L'angolo formato dal raggio incidente con la normale alla superficie di separazione sia l'angolo di incidenza i , quello formato dal raggio rifratto con la stessa normale sia l'angolo di rifrazione r (vedi figura 4.2). Le leggi della rifrazione impongono che i raggi incidente e rifratto giacciono nello stesso piano e che tra gli angoli di incidenza e di rifrazione sussista la relazione

$$[4.1] \quad \frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{1,2}$$

dove con n_2 viene indicato l'indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1. Dalla [4.1] segue subito che nel passaggio tra strati contigui rimane costante il prodotto dell'indice di rifrazione assoluto di un mezzo per il seno dell'angolo formato dal raggio luminoso nello stesso mezzo con la normale alla superficie di separazione, sicché i raggi vengono deviati, e tanto più quanto minore è la loro lunghezza d'onda, se $n_1 \neq n_2$.

Il fenomeno della rifrazione ha ovviamente influenza sull'osservazione da terra degli oggetti celesti a causa della presenza dell'atmosfera terrestre che, oltre ad assorbire la radiazione, ne devia la traiettoria.

4.2.1 – Traiettoria luminosa

La traiettoria di un raggio luminoso in un mezzo otticamente non omogeneo non è rettilinea e può essere ottenuta in generale impostando il problema come è schematizzato in figura 4.3.

L'osservatore in O vede l'astro S nella direzione della tangente in O alla traiettoria luminosa e misura una distanza zenitale z_O . In realtà la direzione nella quale S verrebbe visto in assenza di atmosfera è quella «vera» della traiettoria luminosa nel vuoto, e quindi secondo la distanza zenitale z_V . Si definisce **rifrazione astronomica** la differenza

$$[4.2] \quad R = z_V - z_O$$

Dalla misura di z_O una volta che sia stata determinata R , si ottiene z_V e quindi la reale posizione dell'astro. R dipende dalle condizioni dell'atmosfera terrestre (estensione, costituzione, ecc.) e dall'inclinazione dei raggi luminosi ed è nulla per gli astri allo zenit, poiché allora i raggi luminosi attraversano perpendicolarmente gli strati atmosferici.

La teoria generale, valida per qualunque distanza zenitale, è alquanto complicata e, d'altra parte, non è neanche particolarmente utile perché di norma le osservazioni vengono fatte per distanze

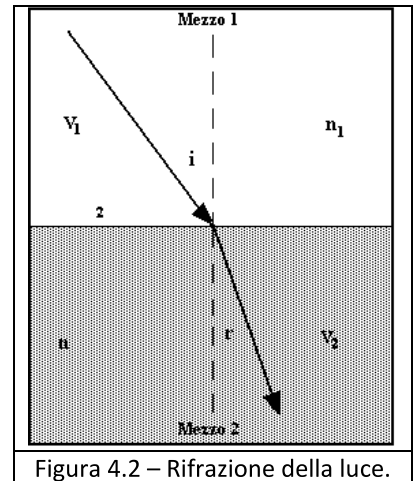


Figura 4.2 – Rifrazione della luce.

zenitali piccole, per le quali gli effetti di disturbo dell'atmosfera si riducono in modo cospicuo rendendo possibili significative semplificazioni.
 In generale, dalla definizione [4.2] di R si ha

$$[4.3] \quad R = \int_l dz$$

con l'integrazione effettuata lungo tutta la traiettoria luminosa l dalla base al bordo superiore dell'atmosfera. In considerazione della forma quasi sferica della Terra e della limitata estensione dell'atmosfera terrestre possono essere introdotte le seguenti ipotesi semplificatrici: la costituzione dell'atmosfera abbia simmetria sferica, la densità sia una funzione continua del raggio.

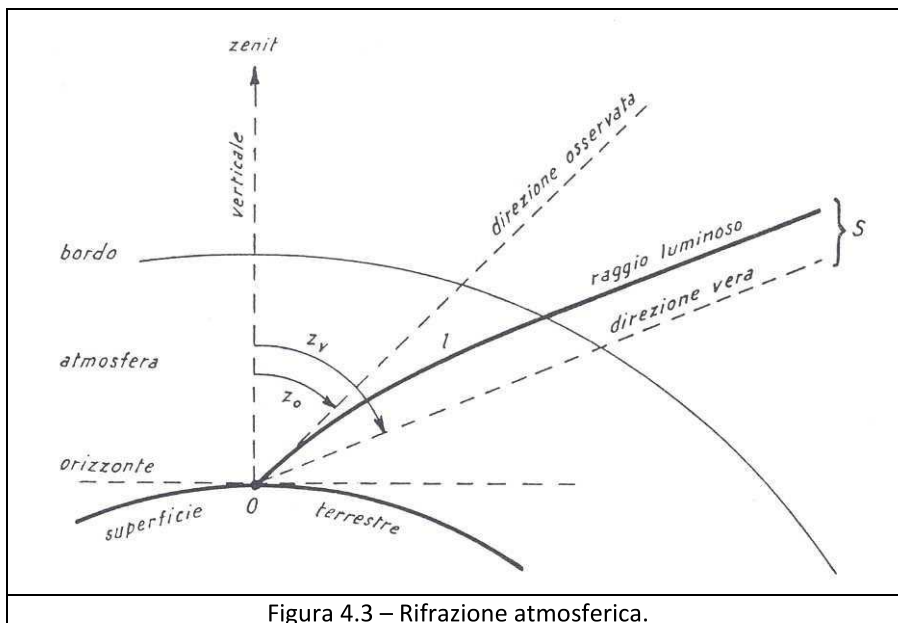


Figura 4.3 – Rifrazione atmosferica.

Ciò comporta che per effetto della rifrazione un astro risulta spostato solo in altezza e non in azimut. D'altra parte, poiché l'indice di rifrazione è una funzione decrescente della distanza degli strati atmosferici dal suolo, la traiettoria luminosa è una curva con la concavità rivolta verso il basso. La rifrazione ha quindi l'effetto di alzare apparentemente gli astri sull'orizzonte, tanto più quanto maggiore è la loro distanza zenitale (vedi figura 4.3) e di deformare i dischi apparenti del Sole e della Luna. I bordi superiore e inferiore del disco solare, e di quello lunare, sono infatti ad altezze diverse sull'orizzonte, in prossimità del quale, poi, la rifrazione è massima raggiungendo 36' circa. Oltre allo schiacciamento apparente, il Sole e la Luna appaiono sorgere prima e tramontare dopo, circa 3 minuti, rispetto al verificarsi degli stessi due eventi in ideali condizioni di assenza di atmosfera.

Alcune ipotesi sullo stato fisico dell'atmosfera terrestre (equilibrio idrostatico, gas perfetto, ecc.) consentono di affrontare il problema della rifrazione per distanze zenitali minori di 75° e di arrivare a formulare per R uno sviluppo in serie dipendente dalla tangente della distanza zenitale osservata al suolo con coefficienti dello sviluppo dipendenti dalle condizioni fisiche (pressione, temperatura, ecc.) nel luogo di osservazione. Per distanze zenitali superiori a 75° la teoria si complica e nella formulazione di R intervengono anche le variazioni di densità e di temperatura nell'atmosfera; l'interesse applicativo di questi risultati è tuttavia molto limitato. In generale l'astronomo dispone di tavole di rifrazione calcolate per condizioni ottimali di temperatura e di pressione ($T = 0^\circ\text{C}$, $p = 1013$ millibar) e dalle quali si possono calcolare i valori della rifrazione all'istante e nel luogo di osservazione. La rifrazione aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare della pressione perché allora la densità aumenta e aumenta l'indice di rifrazione.

4.2.2 – Rifrazione per piccole distanze zenitali

Per distanze zenitali minori di 10° si può assumere che gli strati atmosferici siano piani e paralleli. Tra due strati infinitesimi contigui sussiste allora la relazione di invarianza (invariante ottico per strati piani e paralleli)

$$[4.4] \quad (n + dn) \text{sen}(i + di) = n \text{sen}i$$

come si ottiene subito dalla [4.1] essendo l'angolo di rifrazione per lo strato di indice di rifrazione $n + dn$ uguale all'angolo di incidenza $i + di$ relativo al passaggio allo strato immediatamente successivo (vedi figura 4.4). La [4.4] equivale alla $n \text{sen}i = \text{costante}$, ovvero all'uguaglianza dei valori dell'invariante ottico calcolati al suolo e al bordo superiore dell'atmosfera. Se quindi n_0 è l'indice di rifrazione assoluto nel posto di osservazione (ed è uguale ad 1 quello relativo al bordo superiore dell'atmosfera, che confina con il vuoto), posto $i = z_0$ al suolo ed $i = z_V$ al bordo atmosferico si ha subito

$$n_0 \text{sen}z_0 = \text{sen}z_V = \text{sen}(R - z_0) = \text{sen}R \cos z_0 + \cos R \text{sen}z_0.$$

Trascurando i termini del secondo ordine in R negli sviluppi delle funzioni trigonometriche di R (ed essendo quindi $\text{sen}R \approx R$, $\cos R \approx 1$) si arriva all'espressione finale

$$[4.5] \quad R = (n_0 - 1) \tan z_0$$

La rifrazione si può quindi calcolare utilizzando solo i valori al suolo dell'indice di rifrazione e della distanza zenitale. Poiché, indicativamente, per $\lambda \approx 550 \text{ nm}$ ed in condizioni normali si può prendere $n_0 \approx 1,0003$, si ottiene

$$[4.6] \quad R'' \approx 60'' \tan z_0$$

che esprime un incremento di R di 1' circa per ogni incremento unitario di $\tan z_0$.

In generale, poiché la rifrazione altera l'altezza degli oggetti celesti sull'orizzonte, le coordinate celesti dedotte dalle osservazioni devono essere corrette e, viceversa, la posizione osservata di un astro sulla sfera celeste non può coincidere con quella corrispondente alle coordinate celesti «vere» dell'astro.

Nelle eclissi totali di Luna la luce solare radente la superficie terrestre viene deviata per effetto della rifrazione atmosferica cosicché il cono di oscuramento completo prodotto dalla presenza della Terra viene accorciato e si estende fino a circa $40 R_T$ ($R_T =$ raggio terrestre medio = 6371 km) soltanto. La Luna, che dista dalla Terra in media circa $60 R_T$ risulta quindi debolmente illuminata dalla luce solare di maggiori lunghezze d'onda, che è quella meno deviata e meno assorbita dall'atmosfera terrestre.

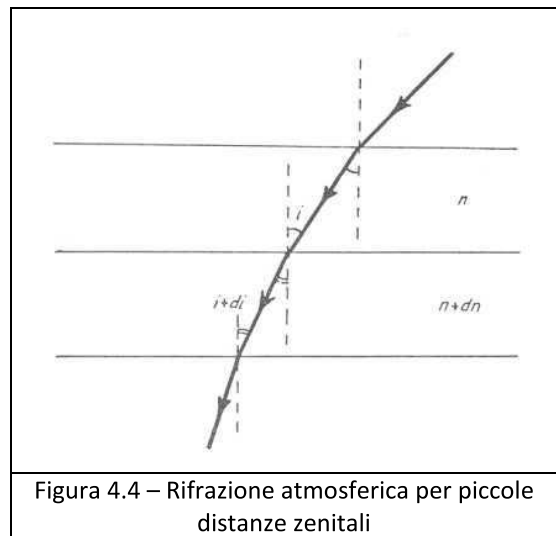


Figura 4.4 – Rifrazione atmosferica per piccole distanze zenitali

Più esattamente, una volta fissata λ , il valore di n dipende dalla densità ρ dell'atmosfera secondo la legge di Gladstone-Dale:

$$[4.7] \quad n - 1 = k\rho$$

e assimilando l'atmosfera ad un gas perfetto di pressione P , temperatura T e peso molecolare μ per cui valga l'equazione di stato:

$$[4.8] \quad \rho = \frac{\mu P}{RT}$$

abbiamo

$$[4.9] \quad n-1 = k' \frac{P}{T} \quad (\text{con } k' = k \frac{\mu}{R})$$

n dipende quindi da due costanti facilmente misurabili, tramite una “costante” che dipende da λ . In effetti n dipende anche dall’umidità, ad eccezione che nel visibile.

In condizioni standard ($P_0 = 760$ mmHg, $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273$ K) si ha

$$[4.10] \quad \frac{n-1}{n_0-1} = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}$$

E nel visibile

$$[4.11] \quad n-1 \approx 78,7 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T}$$

si dimostra che si ha

$$[4.12] \quad R'' \approx 60,4'' \frac{(P/760)}{(T/273)} \tan z_0$$

(P in mmHg. T in kelvin)

Un formula più completa dovuta Owens (1967)

$$[4.13] \quad n(t, P) - 1 = \left[n(15, 760) - 1 \right] \frac{P(1,049 - 0,0157t) \cdot 10^{-6}}{720,883(1 + 0,03661t)}$$

dove t è espressa in gradi centigradi.

Consideriamo il differenziale totale di n dato dalla [4.9] e suo gradiente con la quota q , nell’ipotesi che la stratificazione sia a piani paralleli, come è nelle notti calme, senza vento, con il suolo che si raffredda radiativamente. Si ha

$$[4.14] \quad \frac{dn}{dq} = k' \left(\frac{1}{T} \frac{dP}{dq} - \frac{P}{T^2} \frac{dT}{dq} \right) = k' \frac{P}{T^2} \left(\frac{T}{P} \frac{dP}{dq} - \frac{dT}{dq} \right)$$

Tenendo conto che la variazione della pressione con la quota è il peso dell’aria nel volume di area unitaria e altezza dq : $dP = -g\rho dq$ (dove g è l’accelerazione di gravità)

$$[4.15] \quad \frac{dn}{dq} = k' \frac{P}{T^2} \left(-\frac{T}{P} g\rho - \frac{dT}{dq} \right)$$

Dall’equazione di stato dei gas **Errore. L’origine riferimento non è stata trovata.** data sopra si ha:

$$[4.16] \quad \frac{dn}{dq} = k' \frac{P}{T^2} \left(-\mu \frac{g}{R} - \frac{dT}{dq} \right)$$

La costante g/R vale circa 3,4 K/1000 m. Si ha dunque che la variazione della rifrazione atmosferica con la quota dipende essenzialmente dai gradienti verticali di temperatura, mentre sono meno importanti quelli di pressione. Il vento porta continuamente attraverso il cammino ottico bolle d’aria in cui sono presenti variazioni di temperatura di pochi centesimi di grado, e che sono sufficienti a causare piccole rifrazioni accidentali al raggio luminoso. Ugualmente nocive sono le differenze di temperatura sulle varie strutture che circondano il telescopio. Pertanto è molto importante tenere tali strutture il più possibile isoterme, e alla stessa temperatura dell’aria esterna.

4.2.3 – Estinzione, scintillazione, seeing

L’atmosfera terrestre diffonde e assorbe le radiazioni elettromagnetiche in modo più o meno completo a seconda della lunghezza d’onda della radiazione incidente. La trasparenza dell’atmosfera

è buona nelle due bande del visibile e dell'infrarosso più vicino (tra 300 nm e 1000 nm circa) e delle onde radio (da 5 mm a 50 m circa). Al di fuori di queste due finestre l'estinzione della radiazione è pressoché totale (vedi figura 4.1). Della diffusione e dell'assorbimento atmosferico si deve tener conto per correggere adeguatamente le osservazioni. Ciò viene conseguito valutando, alle varie distanze zenitali osservate, l'estinzione media in funzione della corrispondente massa di aria attraversata dalla luce ed espressa in unità della massa di aria attraversata allo zenit (**riduzione allo zenit**).

Per effetto di fluttuazioni spaziali e temporali nelle proprietà strutturali dell'atmosfera terrestre, in genere causate da moti turbolenti e di insieme dell'aria, l'indice di rifrazione risulta variabile ed i raggi luminosi provenienti da una stella vengono assorbiti e deviati in diversa misura in istanti diversi. Ciò determina il fenomeno della scintillazione nel quale possono distinguersi i tre aspetti di:

- **scintillazione dinamica;**
- **scintillazione cromatica;**
- **scintillazione parallattica.**

La scintillazione dinamica provoca variazioni dell'intensità luminosa, mentre la scintillazione cromatica dà luogo ad un cambiamento di colore della sorgente luminosa. La scintillazione parallattica, infine, causa una variazione (dell'ordine di 1") della posizione apparente dell'oggetto osservato, che in conseguenza dei tre effetti appare tremolare e mutare di splendore e di colore.

Oggi la qualità delle immagini viene indicata con il nome di **seeing** (dall'inglese «vedere») convenendo di designare così tutto quell'insieme di fenomeni che hanno rilevanza nell'osservazione degli oggetti celesti. Il seeing è determinato dagli strati più bassi (e più densi) dell'atmosfera.

Le condizioni di seeing per una determinata notte e località descrivono sia quanto l'atmosfera terrestre ha perturbato (a seconda della turbolenza e temperatura) l'immagine dei corpi celesti osservati che gli effetti strumentali (sfuocamento, inseguimento impreciso).

Per comprendere l'effetto del seeing è utile prendere in considerazione, come esempio, un caso ideale. Assumiamo che la sorgente osservata sia puntiforme e che le ottiche del rivelatore non incidano sulla qualità dell'immagine. In assenza di atmosfera il rivelatore osserverebbe la sorgente così com'è, puntiforme; mentre in presenza di una massa d'aria, l'immagine della sorgente risulterebbe avere un'estensione superficiale con una densità di fotoni che decrescerebbe dal centro dell'immagine della sorgente verso l'esterno. Per comprendere questo effetto di sparpagliamento dei fotoni dobbiamo pensare che un rivelatore, come un telescopio, ottiene l'immagine di un oggetto attraverso esposizioni (o pose) più o meno lunghe, che gli permettono di accumulare la luce proveniente dalla sorgente. Durante la posa le condizioni degli strati del cono di atmosfera che si trova tra la sorgente puntiforme e la superficie del rivelatore cambiano di frequente. Tali variazioni corrispondono ad un cambiamento dell'indice di rifrazione, che influisce sulla traiettoria dei raggi di luce e quindi sui punti della superficie del rivelatore dove i raggi incideranno. Ai fini pratici, la turbolenza atmosferica ha l'effetto di spostare rapidamente (dell'ordine dei millisecondi) l'immagine della sorgente sul rivelatore. Quanto l'immagine venga spostata dipende dalla turbolenza: più gli strati di atmosfera saranno turbolenti maggiore sarà lo spostamento.

L'immagine finale della sorgente sarà data dalla somma di tutti i punti arrivati al rivelatore durante l'esposizione. La funzione che descrive come i vari raggi di luce si sono distribuiti sulla superficie del rivelatore (ovvero l'immagine finale) è detta funzione di sparpagliamento dei punti (PSF, dall'inglese Point Spread Function). Tale distribuzione viene spesso rappresentata, per semplicità, con una funzione gaussiana. Esistono altre funzioni analitiche che possono riprodurre meglio la PSF reale delle sorgenti: un esempio è dato dalla funzione di Moffat (detta anche Moffattiana). Un esempio è dato da

$$[4.17] \quad PSF(r) = \frac{\beta-1}{\pi\alpha^2} \left[1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-\beta}$$

La misura più comune del seeing è data dalla larghezza a metà altezza (FWHM, dall'inglese Full Width at Half Maximum) della PSF e viene espressa in secondi d'arco. Da cui si ricava

[4.18]

$$FWHM = 2\alpha\sqrt{2^{1/\beta} - 1}$$

La FWHM è un'utile punto di riferimento anche per comprendere la risoluzione angolare massima ottenibile con i telescopi: le migliori condizioni di seeing da terra permettono di avere una FWHM di circa 0,4 secondi d'arco e si ottengono solo in luoghi particolari e per poche notti all'anno.

In realtà, gli effetti del seeing sono molto più complessi; per prima cosa perché molti corpi celesti non sono puntiformi ma hanno una estensione intrinseca osservabile con i telescopi (ad esempio i pianeti, le galassie, le stelle molto vicine) mentre solo le stelle lontane ed i quasar possono essere approssimati a sorgenti puntiformi. Nel caso di sorgenti estese l'immagine osservata è data dalla convoluzione del profilo di luminosità dell'oggetto con la PSF.

Un'altra complicazione è data dal fatto che si devono prendere in considerazione anche gli effetti di disturbo strumentali che degradano l'immagine; ad esempio, l'errore del telescopio nell'inseguire un oggetto celeste, lo sfuocamento e il seeing dovuto alla cupola.





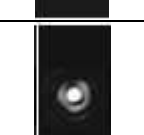
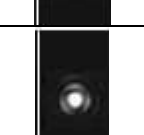
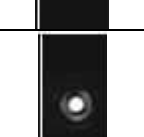
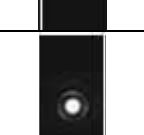
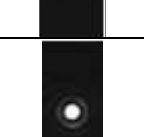
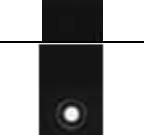
Le due scale per i "valori di seeing" più adottate sono la Scala di Antoniadi, valida soprattutto per l'osservazione planetaria e la Scala di Pickering, valida in modo particolare per l'osservazione delle stelle doppie e di tutte le sorgenti cosiddette "puntiformi".

Il primo ad aver impostato una scala di valutazione per stabilire l'entità della turbolenza dell'aria è stato l'astronomo greco Eugenios Antoniadis (1870 – 1944) che nella sua professione ha condotto un intenso lavoro sulla realizzazione di mappe del pianeta Marte. In questo lavoro si rese conto della necessità di avere un riferimento che indicasse la distorsione della qualità di tali mappe. Creò pertanto una scala ancora in uso a livello amatoriale.

Valore	Descrizione di Antoniadi
Seeing I	Eccezionale. Immagine perfetta e immobile. Tollerate lievi e rare ondulazioni che non pregiudicano la definizione anche dei particolari più minuti.
Seeing II	Buono. Lunghi intervalli con immagine ferma, alternati con brevi momenti di leggero tremolio.
Seeing III	Medio. Immagine disturbata da tremolii, con alcuni momenti di calma
Seeing IV	Cattivo. Immagine costantemente perturbata da persistenti tremolii.
Seeing V	Pessimo. Immagine molto perturbata che a stento permette di eseguire uno schizzo approssimativo.

Successivamente alla stima di Antoniadi, l'americano William Pickering (1858 – 1938) compilò una scala di valutazione, più estesa e più dettagliata che valuta il tremolio di una stella. Una sorgente luminosa puntiforme può essere ancor meglio osservata e analizzata ad alti ingrandimenti. Prendiamo una stella di seconda magnitudine, e la ingrandiamo almeno quanto il diametro (in mm) dello strumento che stiamo utilizzando (ovvero, per un telescopio da 100 mm di diametro, almeno 100x, per un 200 mm, 200 ingrandimenti e così via). Ipotizzando una calma atmosferica eccezionale, a causa della diffrazione dovuta all'apertura dello strumento, vedremo un disco centrale illuminato con attorno degli anelli impercettibili di luce, quella figura nota come figura di Airy.

Con l'avvento dei PC e di software matematici, Damian Peach ha realizzato tramite il programma Aberrator 2, delle immagini animate molto efficaci per farsi un'idea su questa scala.

	1/10: pessimo	Le dimensioni del diametro della stella sono il doppio del terzo anello di diffrazione. Dimensioni della stella: 13 secondi d'arco.
	2/10: molto cattivo	Il diametro della stella raggiunge solo a volte il terzo anello di diffrazione.
	3/10: cattivo	Il diametro della stella non supera mai il terzo anello di diffrazione e arriva a 6.7 secondi d'arco. Comincia a vedersi la stella luminosa al centro.
	4/10: appena sufficiente	Disco di Airy a volte visibile. Si intravedono archi spezzati degli anelli di diffrazione.
	5/10: discreto	Disco di Airy sempre visibile. Gli archi spezzati degli anelli di diffrazione si cominciano a ricomporre...
	6/10: buono	Disco di Airy sempre visibile. Gli archi cominciano a diventare anelli
	7/10: molto buono	Il disco di Airy comincia ad essere ben visibile e contrastato e gli anelli di diffrazione diventano dei cerchi a volte spezzati.
	8/10: ottimo	Il disco di Airy è netto. Gli anelli di diffrazione sono sempre composti e in piccolissimo movimento.
	9/10: quasi perfetto	L'anello di diffrazione più interno è stabile e immobile. Gli esterni si muovono leggermente.
	10/10: perfetto	Tutta l'immagine di diffrazione della stella è immobile. C'è da fare i salti di gioia, avvisare tutti gli amici astrofili che avete in zona e rimanere incollati all'oculare.

4.3 – Aberrazione

Il fenomeno dell'aberrazione è interpretabile con il fatto che la luce si propaga con una velocità finita. In una interpretazione classica la velocità (relativa) della luce di una stella osservata dalla Terra può essere calcolata mediante la composizione della velocità (assoluta) della luce e della velocità di trascinamento della Terra. In effetti un approccio rigoroso al fenomeno implicherebbe l'utilizzo di concetti relativistici e porterebbe ad una correzione dei risultati classici al massimo di 0,0005" quantità molto piccola, ma non trascurabile nelle misurazioni di alta precisione dell'astronomia moderna.

L'aberrazione, scoperta da J. Bradley nel 1728 nel corso dei suoi tentativi di misurare la distanza delle stelle, determina uno spostamento apparente della sorgente luminosa rispetto alla posizione

effettiva della stessa sorgente sulla sfera celeste.

Oggi sappiamo che la Terra ruota su se stessa e orbita attorno al Sole che, a sua volta, si muove nello spazio rispetto alle stelle vicine le quali nel loro insieme sono in moto attorno al centro della Galassia.

Se indichiamo con \vec{c} la velocità assoluta della luce emessa da una stella e con \vec{v} la velocità di trascinamento dell'osservatore, la velocità \vec{w} della luce relativamente all'osservatore è data da $\vec{w} = \vec{c} - \vec{v}$ in forza della legge di composizione delle velocità. In realtà si dovrebbe tener conto dell'invarianza della velocità della luce e formulare il problema nell'ambito della teoria della relatività ristretta nella quale il fenomeno trova la sua corretta spiegazione. I vettori \vec{c} e \vec{w} danno nell'ordine le direzioni corrispondenti alle posizioni effettiva e osservata dall'astro. Quindi, con riferimento alla figura 4.5, se indichiamo con O la posizione dell'osservatore ad un certo istante e con OS la direzione nella quale la stella S verrebbe vista in una situazione di quiete dell'osservatore, la direzione secondo la quale la stella viene in realtà osservata è data da OS' (avendo indicato con S' il punto corrispondente ad S sulla retta per S parallela al vettore \vec{v}). Risulta evidente dalla figura che la direzione di osservazione della sorgente luminosa appare tanto più ravvicinata alla direzione secondo la quale ha luogo lo spostamento dell'osservatore è cioè tanto più grande) quanto maggiore è v .

Detta d la distanza della stella dall'osservatore, dalla similitudine dei triangoli OAA' e OSS' per la lunghezza l del segmento $|SS'|$ si ottiene

$$[4.19] \quad l = \frac{vd}{c}$$

Ad l corrisponde una distanza angolare

$$[4.20] \quad \theta - \theta' = \alpha$$

detta **angolo di aberrazione**. Dal teorema dei seni applicato al triangolo SOS' , si ha:

$$[4.21] \quad \alpha = \frac{l}{d} \operatorname{sen}\theta' = \frac{v}{c} \operatorname{sen}\theta'$$

essendo $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$ (in radianti) poiché è $v \ll c$ e quindi α piccolo (θ' è l'angolo formato dalle direzioni di moto dell'osservatore e di osservazione della stella mentre θ è l'angolo corrispondente alla posizione effettiva della stella). Per ogni assegnata velocità v il rapporto v/c è una costante che può essere inserita nella [4.21] e che consente di scriverla nella forma

$$[4.22] \quad \alpha'' = k \operatorname{sen}\theta$$

nella quale si è posto θ al posto di θ' essendo α piccolo e nella quale si convenga di esprimere α in secondi d'arco (la costante k vale allora $k = 206265 v/c$ con il fattore numerico che tiene conto della conversione da radianti in secondi). La costante k è detta *costante di aberrazione*; va ovviamente espressa in secondi d'arco e rappresenta il valore massimo di α'' (quando $\theta = 90^\circ$).

Il moto di rotazione della Terra attorno al suo asse, quello di rivoluzione della Terra attorno al Sole e il moto del Sole nello spazio concorrono al fenomeno globale fornendo ciascuno una componente specifica; si hanno così nell'ordine le **aberrazioni diurna, annua e secolare**.

Nel caso dell'aberrazione diurna \vec{v} descrive in un giorno il piano equatoriale celeste. Il valore minimo di θ è quindi uguale alla declinazione dell'astro osservato; inoltre, indicando con R_0 il raggio equatoriale terrestre e con v_0 la

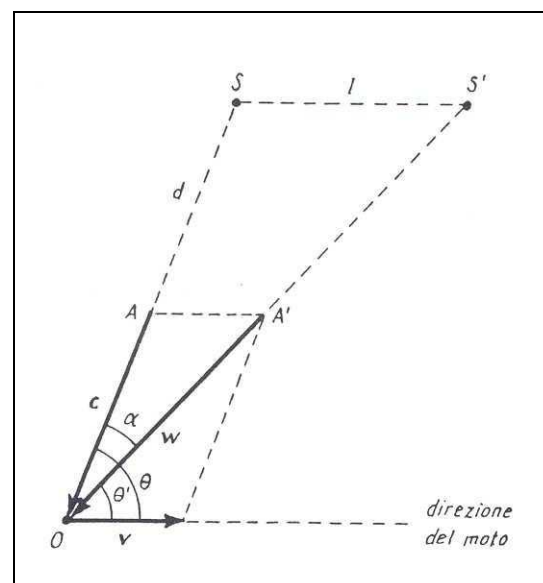


Figura 4.5 – Composizione della velocità della luce con la velocità di trascinamento della Terra.

velocità all'equatore, si ha $v = v_0 \cos \varphi$ per la velocità di trascinamento di un osservatore che si trovi alla latitudine geografica φ (e quindi a distanza $R_0 \cos \varphi$ dall'asse di rotazione terrestre). Poiché $v_0 \approx 0,5 \text{ km/s}$ la costante di aberrazione diurna vale $k = 0,32'' \cos \varphi$ ed è pertanto massima per gli osservatori all'equatore e minima (e più specificatamente nulla) per gli osservatori ai poli.

In base alla considerazione già fatta che l'aberrazione avvicina la direzione di osservazione dell'astro alla direzione di moto dell'osservatore e tenuto conto che la rotazione terrestre avviene in verso diretto, si comprende subito che le stelle appaiono spostate verso est e che quindi, in particolare, attraversano il meridiano dell'osservatore apparentemente in ritardo in confronto con un'ideale situazione di quiete dell'osservatore (rispetto al riferimento assoluto). Poiché, inoltre, quando una stella passa al meridiano è $\theta' = 90^\circ$ (la velocità di rotazione dell'osservatore è infatti perpendicolare al piano meridiano) nella (4.7') viene a cadere la dipendenza dalla posizione dell'astro sulla sfera celeste e tutte le stelle in meridiano risultano apparentemente spostate verso est dello stesso ammontare.

L'aberrazione diurna ha praticamente importanza solo nelle osservazioni astrometriche di precisione.

Nel caso dell'aberrazione annua \vec{v} descrive in un anno il piano dell'eclittica e il valore minimo di θ rappresenta allora la latitudine eclittica β dell'astro osservato. Se si assume per semplicità che l'orbita terrestre sia circolare, la corrispondente velocità orbitale è costante e vale 30 km/s circa sicché $v/c \approx 10^{-4}$ e quindi $k = 20,63''$; se invece consideriamo dell'esatta forma dell'orbita della Terra attorno al Sole per la costante di aberrazione si avrebbe $k = 20,50''$. Nel corso di un anno, al moto orbitale della Terra attorno al Sole corrisponde una rotazione di \vec{v} e quindi di S' attorno ad S (OS è infatti la direzione nella quale l'astro sarebbe visto dal Sole). La circonferenza descritta da S' ha raggio uguale ad l , a cui corrisponde una dimensione angolare uguale a k .

In realtà, però, l'osservatore vede questa circonferenza (che è in un piano parallelo all'eclittica) proiettata sul piano tangente in S alla sfera celeste (vedi figura 4.6). Per una posizione generica di S la curva proiezione è un'ellisse di semiasse maggiore uguale a k e di semiasse minore uguale a $k \sin \beta$; il semiasse maggiore è parallelo al piano dell'eclittica, il centro dell'ellisse rappresenta la posizione effettiva della stella. Mentre quindi il semiasse maggiore è uguale per tutte le stelle, quello minore dipende dal parallelo eclittica dell'astro rimanendo però sempre indipendente dalla distanza della stella. L'ellisse tende ad una circonferenza per le stelle prossime al polo dell'eclittica e degenera in un segmento per le stelle sul piano eclittica.

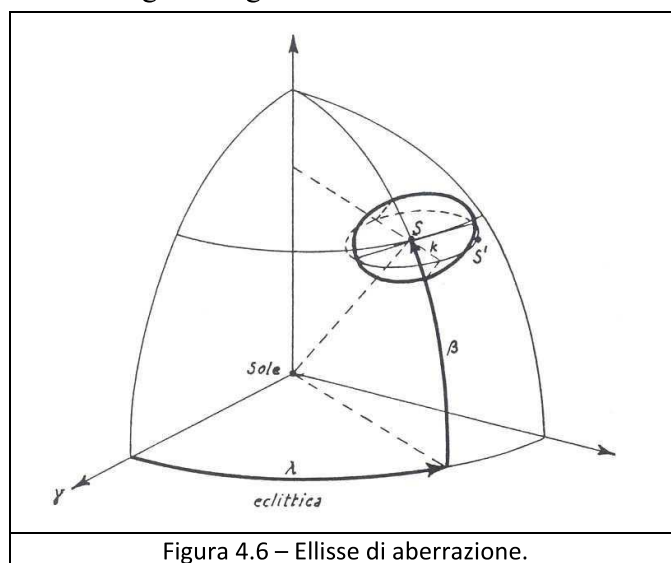


Figura 4.6 – Ellisse di aberrazione.

L'aberrazione annua è la più importante delle aberrazioni qui in discussione e costituisce un'altra prova del moto orbitale della Terra attorno al Sole.

In generale si definiscono **posizioni apparenti** delle stelle le posizioni osservate che siano state corrette per gli effetti dovuti alla rifrazione astronomica e all'aberrazione diurna; le posizioni apparenti sono quindi riferite al centro della Terra. Si dicono invece **posizioni vere** le posizioni apparenti corrette per l'aberrazione annua e per la parallasse annua^[19]; esse sono quindi riferite al centro del Sole. Sia le posizioni apparenti che quelle vere sono riferite all'equatore e all'equinozio veri.

[19] Che vedremo più avanti

L'aberrazione secolare è collegata con il moto del Sole nello spazio; poiché questo moto è praticamente rettilineo e uniforme per intervalli di tempo anche molto estesi, la composizione delle velocità della luce e dell'osservatore dà luogo a spostamenti uguali e paralleli per tutte le stelle senza introdurre alcuna variazione temporale nelle direzioni di osservazione e quindi nelle posizioni vere delle stelle. L'aberrazione secolare non ha rilevanza pratica; l'aberrazione diurna e specialmente quella annua, a causa della sua maggiore entità rivestono invece un notevole interesse poiché le posizioni osservate e le relative coordinate (di tutti i tipi) risentono del fenomeno.

Nella determinazione delle posizioni planetarie infine si deve considerare anche l'**aberrazione planetaria** che è collegata con il fatto che se Δt (*tempo-luce*) è l'intervallo di tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza tra la posizione effettiva del pianeta e la Terra, la posizione osservata al tempo t corrisponde in realtà alla posizione effettivamente occupata dal pianeta al tempo $t - \Delta t$. Il tempo-luce per il Sole è di circa 8 minuti, per Plutone (alle quadrature) va da un minimo di circa 4 ore ad un massimo di circa 7 ore; per le stelle il tempo-luce è molto maggiore ma questo tipo di aberrazione non può essere determinato perché i moti assoluti delle stelle non sono in genere noti, contrariamente a quanto avviene per i pianeti ai quali possono applicarsi gli sviluppi della meccanica celeste.

4.4 – Precessione e nutazione (approfondimento)

I sistemi di coordinate introdotti nel capitolo 1 e alcune nozioni fin qui fornite presuppongono che i piani fondamentali di riferimento corrispondenti all'equatore e all'eclittica (ed i corrispondenti assi) siano fissi nello spazio. In realtà, come si è già accennato ciò non avviene; infatti, a causa delle perturbazioni indotte dalle attrazioni gravitazionali del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale terrestre e di quelle dovute alla presenza dei pianeti, i moti di rotazione e di rivoluzione della Terra presentano complicazioni che determinano una variazione temporale di alcuni elementi di riferimento, in particolare sia la giacitura dell'equatore che la giacitura dell'eclittica variano nel tempo rispetto ad una giacitura fissa.

In generale l'effetto combinato della rotazione di un corpo attorno a se stesso e della presenza di una perturbazione agente sul medesimo corpo dà luogo alla comparsa di un moto rotatorio dell'asse di rotazione del corpo. È questo ad esempio il caso del moto di una trottola in rotazione: non appena l'asse di rotazione della trottola si discosta dalla verticale, mentre la trottola continua a ruotare attorno a se stessa, l'asse di rotazione inizia a sua volta a ruotare attorno alla verticale per effetto dell'azione della gravità terrestre. Il fenomeno prende il nome di precessione e nel caso della Terra comprende i due aspetti di precessione **luni-solare** e di precessione **planetaria**.

Il primo effetto è particolarmente rilevante e fu scoperto nel II secolo a.C. da Ipparco^[20] il quale, confrontando osservazioni a lui contemporanee con quelle effettuate circa due secoli prima, si accorse che, mentre le latitudini eclittiche delle stelle erano rimaste inalterate, le longitudini eclittiche erano invece tutte aumentate di una stessa quantità. Lo stesso Ipparco dedusse, correttamente, che ciò doveva addebitarsi ad uno spostamento del punto γ in verso retrogrado in conseguenza di una rotazione del piano equatoriale rispetto al piano eclittica. Questo a sua volta non rimane fisso nello spazio a causa dell'effetto delle perturbazioni planetarie sul moto orbitale della Terra attorno al Sole.

Sovrapposto al fenomeno della precessione luni-solare c'è il fenomeno detto di nutazione che consiste in una oscillazione periodica (di durata più breve di quella della precessione) della giacitura del piano equatoriale. In generale, quindi, la rotazione terrestre risente di due perturbazioni: una di tipo secolare, esprimibile cioè attraverso potenze intere e positive del tempo, e l'altra di tipo periodico, esprimibile attraverso funzioni periodiche del tempo. Noi daremo solo un cenno sui principi della teoria che è specifico oggetto di studio della meccanica celeste,

[²⁰] Data la loro storia millenaria e l'attenzione con cui seguivano i fenomeni celesti, non si può escludere che anche gli egizi fossero a conoscenza della precessione degli equinozi, anche se non ne conoscevano il motivo.

4.4.1 – Precessione

La precessione luni-solare dipende dall'attrazione gravitazionale della Luna e del Sole sul rigonfiamento equatoriale terrestre; la Terra può infatti essere schematizzata come un ellissoide rotondo schiacciato ai poli con semiasse equatoriale maggiore di circa 21 km del semiasse polare. A causa dell'obliquità dell'eclittica rispetto al piano dell'equatore celeste, Sole e Luna muovendosi rispettivamente sulla e in prossimità dell'eclittica agiscono sul rigonfiamento equatoriale terrestre con un'attrazione gravitazionale risultante, tenuto conto delle forze centrifughe, in una coppia di forze dirette perpendicolarmente al piano eclittica (Figura 4.7). Le componenti della coppia si annullano solo quando, eccezionalmente, Sole e Luna sono contemporaneamente sul piano equatoriale ($\delta_{\odot} = \delta_L = 0$); di norma, pertanto, la coppia di forze agente sulla Terra tenderebbe a spostare il piano equatoriale verso il piano dell'eclittica (che è assunto fisso). Il momento \overline{M}_O (perpendicolare alla coppia) delle forze rispetto al centro O della Terra è quindi di norma non nullo e quindi, in virtù del teorema del momento della quantità di moto: $\overline{M}_O = \frac{d}{dt} \overline{K}_O$, dove \overline{K}_O è momento della quantità di moto della rotazione terrestre rispetto allo stesso punto O . Risulta quindi possibile stabilire il modo di variare di \overline{K}_O e, corrispondentemente, dell'asse di rotazione della Terra (diretto come \overline{K}_O).

La parte secolare (a lungo periodo) del fenomeno può essere ottenuta considerando il valore annuo medio del momento delle forze di attrazione del Sole e della Luna. È possibile dimostrare che questo momento ha un'intensità costante ed è diretto verso il punto γ ; il momento angolare di rotazione della Terra (e l'asse di rotazione terrestre) è quindi sollecitato a muoversi in verso retrogrado perpendicolarmente al piano individuato dall'asse dell'eclittica e dall'asse stesso di rotazione. La rotazione terrestre e la perturbazione luni-solare danno dunque luogo ad un moto a trottola della Terra (precessione): mentre la Terra continua a ruotare attorno a se stessa l'asse di rotazione ruota a sua volta in verso retrogrado attorno ad una direzione fissa rappresentata dall'asse dell'eclittica.

Più precisamente si ha che l'asse di rotazione della Terra descrive in verso retrogrado attorno all'asse dell'eclittica un doppio cono (dalle due parti dell'eclittica) con vertice nel centro della Terra e semi ampiezza uguale ad ϵ . Corrispondentemente il polo Nord celeste ruota sulla sfera celeste attorno al polo Nord dell'eclittica, il piano dell'equatore celeste ruota rispetto al piano dell'eclittica e ruotano la linea dei nodi e quindi i nodi stessi, in particolare il punto γ . Lo spostamento (in verso retrogrado, e quindi opposto al moto del Sole) del punto γ determina la differenza tra anno siderale e anno tropico e in particolare la minore durata del secondo rispetto al primo.

Lo spostamento del punto γ per effetto della precessione luni-solare avviene con una velocità angolare di 50,39" all'anno e un periodo di rivoluzione che risulta quindi uguale a 25.800 anni circa (**anno platonico**).

Così il punto γ , che ai tempi di Ipparco si trovava nella costellazione dell'Ariete (da cui il simbolo γ dato al punto vernale) si trova ora nella costellazione dei Pesci; il polo Nord, che attualmente cade in prossimità della stella Polare, tra

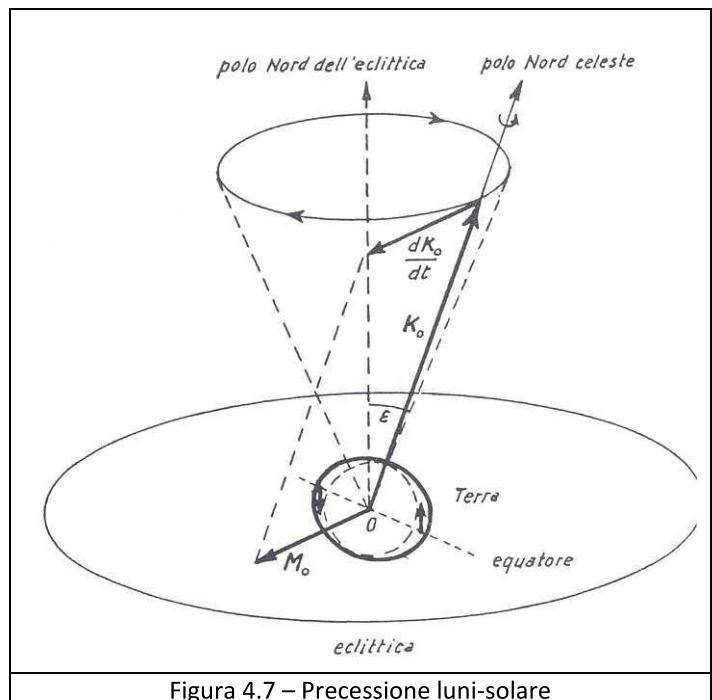


Figura 4.7 – Precessione luni-solare

14.000 anni circa si troverà in vicinanza della stella Vega che sarà la stella polare dell'epoca (Figura 4.8). La precessione luni-solare è dovuta per i 2/3 circa della sua entità alla Luna e per il restante 1/3 al Sole.

D'altra parte la presenza dei pianeti, che si muovono su orbite inclinate, anche se di poco, rispetto all'eclittica, produce delle perturbazioni gravitazionali sul moto orbitale della Terra provocando uno spostamento, nel tempo, della giacitura dell'orbita terrestre (e quindi dell'eclittica e dei relativi poli) rispetto ad una prefissata giacitura. Il fenomeno prende il nome di **precessione planetaria** e si manifesta con una lenta variazione periodica, con periodo uguale a 40.000 anni circa, dell'obliquità dell'eclittica (riferita ad una fissata posizione dell'equatore celeste) e con un conseguente spostamento del punto γ . L'obliquità dell'eclittica varia tra circa 22° e $24,3^\circ$; all'inizio del 2000 valeva $23^\circ 26' 21,45''$ e attualmente sta decrescendo di circa $0,47''$ all'anno, di conseguenza il punto γ si sposta sull'equatore celeste in verso diretto di circa $0,11''$ all'anno. La variazione di giacitura del piano orbitale della Luna nel suo moto attorno alla Terra e la corrispondente retrogradazione dei nodi dell'orbita lunare hanno un'origine simile a quella della precessione pur essendone il Sole la causa principale.

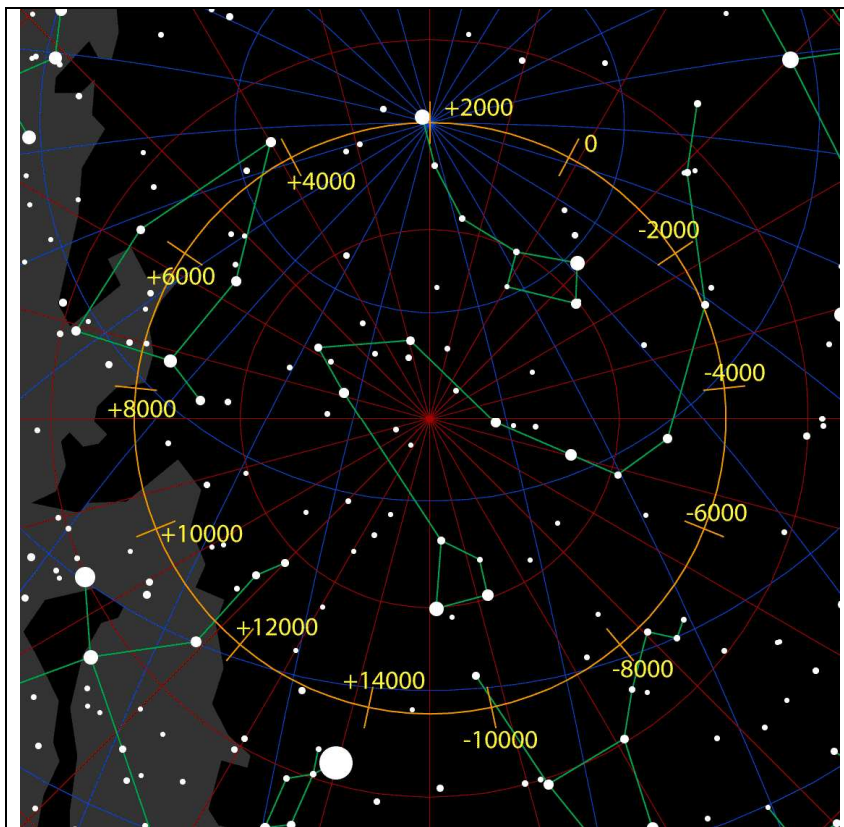


Figura 4.8 – Spostamento del polo Nord celeste dovuto alla precessione degli equinozi.

Mentre il fenomeno della precessione planetaria è stato abbastanza ben studiato sulla base dei risultati della meccanica celeste, quello della precessione luni-solare presenta tuttora aspetti non completamente definiti a causa della incognita distribuzione della massa all'interno della Terra. A questo riguardo il moto dei satelliti artificiali terrestri può concorrere a fornire gli elementi ancora mancanti.

Nella descrizione dei movimenti delle stelle rimane poi sempre il problema di separare i moti intrinseci dagli effetti dovuti agli spostamenti del sistema di riferimento adottato. È evidente quindi la necessità di arrivare a definire un sistema di riferimento inerziale connesso con oggetti extragalattici lontani e quindi praticamente fissi.

Gli effetti della precessione luni-solare e di quella planetaria sono di diversa entità, e di segno opposto; la loro composizione dà luogo ad una precessione generale nella quale sia l'equatore celeste che l'eclittica si spostano nel tempo rispetto ad una data configurazione iniziale. Con riferimento alla figura 4.9 siano η_0 e χ_0 le posizioni iniziali dell'equatore e dell'eclittica e γ_0 la posizione iniziale del punto vernale. Dopo un anno le nuove posizioni siano corrispondentemente η , χ e γ mentre H indichi il piede della perpendicolare abbassata da γ_0 sull'equatore η . Evidentemente lo spostamento dell'equatore da η_0 a η (e del punto vernale da γ_0 a γ') è dovuto alla sola precessione luni-solare, mentre lo spostamento dell'eclittica da χ_0 a χ (e del punto vernale da γ' a γ) è dovuto solo alla precessione planetaria.

Per effetto della precessione generale, approssimando i triangoli sferici di figura 4.9 con triangoli

piani (le quantità in gioco sono infatti molto piccole), si ottengono per la precessione generale in ascensione retta m e per la precessione generale in declinazione n

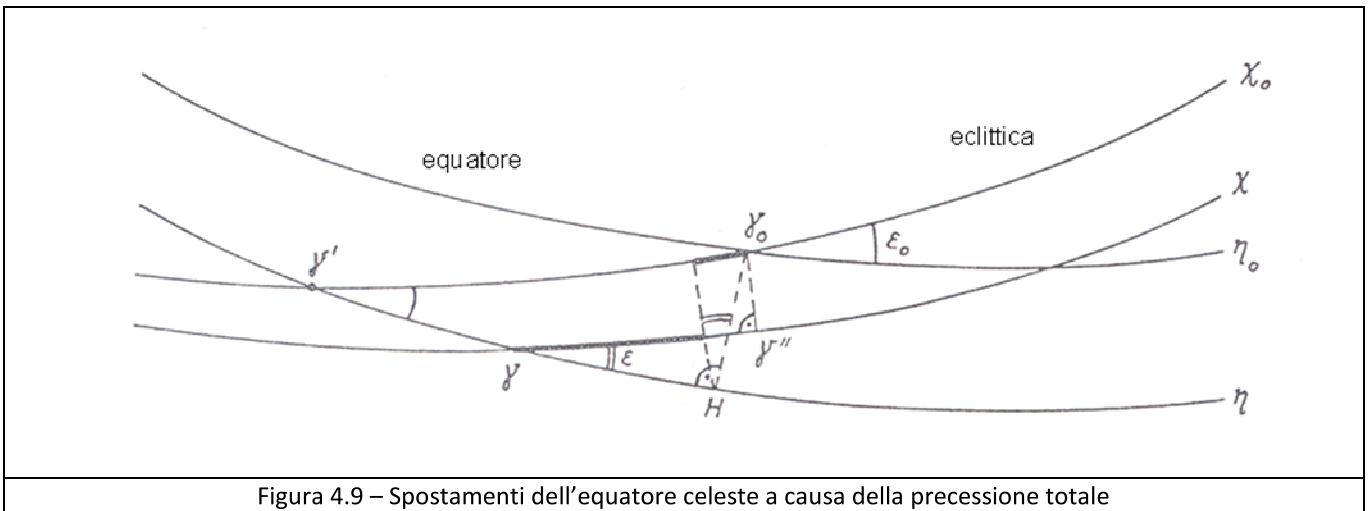


Figura 4.9 – Spostamenti dell'equatore celeste a causa della precessione totale

$$[4.23] \quad \begin{cases} m = |\gamma H| = |\gamma' H| - |\gamma' \gamma| = |\gamma' \gamma_0| \cos \varepsilon_0 - |\gamma' \gamma| = 46,12 ("/\text{anno}) \\ n = |\gamma_0 H| = |\gamma' \gamma_0| \sin \varepsilon_0 = 20,04 ("/\text{anno}) \end{cases}$$

La precessione generale in longitudine eclittica p e la precessione generale in latitudine eclittica q (praticamente trascurabile) risultano date da

$$[4.24] \quad \begin{cases} p = |\gamma'' \gamma| = m \cos \varepsilon_0 + n \sin \varepsilon_0 = 50,29 ("/\text{anno}) \\ q = |\gamma'' \gamma_0| = n \cos \varepsilon_0 - m \sin \varepsilon_0 = 0,04 ("/\text{anno}) \end{cases}$$

In realtà, in conseguenza di piccole variazioni collegate con la precessione luni-solare e con la precessione planetaria, m ed n variano lentamente nel tempo e quindi anche p e q non rimangono costanti; al presente si ha

$$[4.25] \quad p = (50,2910 + 0,0002t) ("/\text{anno})$$

Essendo t il numero di anni tropici contati a partire dall'inizio del 1900. La posizione del polo Nord celeste corrispondente al moto del polo per effetto della precessione generale (una volta che siano state operate le correzioni per la rifrazione, l'aberrazione e la parallasse) si designa come **polo medio**; corrispondentemente si parla di **equatore medio**, di **eclittica media**, di **obliquità media** e di **equinozio medio** per i vari elementi considerati.

4.4.2 - Nutazione

Il piano dell'orbita lunare attorno alla Terra non coincide con il piano dell'eclittica; inoltre l'angolo formato dai due piani varia nel tempo pur rimanendo prossimo a 5° circa mentre cambia in modo rilevante la giacitura del piano orbitale lunare. Per effetto di queste variazioni il momento della quantità di moto di rotazione della Terra non ruota uniformemente attorno all'asse dell'eclittica ma si muove in modo più complicato; corrispondentemente il moto del polo Nord celeste sulla sfera celeste non è uniforme ed esattamente circolare ma avviene con un'oscillazione periodica che lo porta ad avvicinarsi e ad allontanarsi periodicamente dal polo Nord dell'eclittica. Il fenomeno, che prende il nome di **nutazione** (dal latino «oscillare»), fu scoperto da J. Bradley nel 1748 e causa ovviamente una corrispondente oscillazione dell'equatore celeste rispetto all'eclittica.

Il termine principale nell'interpretazione del fenomeno è dovuto alla retrogradazione dei nodi dell'orbita lunare^[21]. La perturbazione lunare determina infatti una periodicità della nutazione di 18,6 anni circa, che è proprio il periodo della retrogradazione dei nodi. Per effetto di questa oscillazione la posizione del **polo Nord vero** differisce dalla posizione del **polo Nord medio** (corrispondentemente al polo vero si parla di **equatore vero** per la posizione dell'equatore celeste); i termini di ordine superiore al primo danno effetti estremamente più piccoli e nella nostra esposizione saranno trascurati.

Mentre il polo medio descrive sulla sfera celeste una circonferenza attorno al polo dell'eclittica, il polo vero descrive una traiettoria ondulata (vedi figura 4.10) con oscillazioni periodiche in longitudine eclittica (**nutazione in longitudine**) e in obliquità dell'eclittica (**nutazione in obliquità**) date (all'inizio del 2000) da

$$[4.26] \quad \begin{cases} \Delta\lambda = -17,20'' \sin\Omega \\ \Delta\epsilon = 9,20'' \cos\Omega \end{cases}$$

nelle quali Ω rappresenta la longitudine del nodo ascendente dell'orbita lunare sull'eclittica. La nutazione causa dunque una variazione della posizione del punto vernale e dell'obliquità dell'eclittica. Nella figura la traiettoria del polo vero è solo indicativa, infatti le oscillazioni dovrebbero essere molto meno ampie e molto più frequenti. Il polo Nord vero descrive un'ellisse (di nutazione) rispetto al polo Nord medio; infatti, fissata una posizione N_0 per il polo medio e detta N la posizione del polo vero, sul piano tangente in N_0 alla sfera celeste l'arco $\widehat{N_0N}$ ha componenti (vedi figura 4.11)

$$[4.27] \quad x = \Delta\epsilon \quad y = \Delta\lambda \sin\epsilon$$

con gli assi x ed y orientati come indicato in figura. Sostituendo nelle [4.27] alle nutazioni in obliquità e in longitudine le espressioni [4.26] ed eliminando Ω si ha subito per l'ellisse di nutazione l'equazione

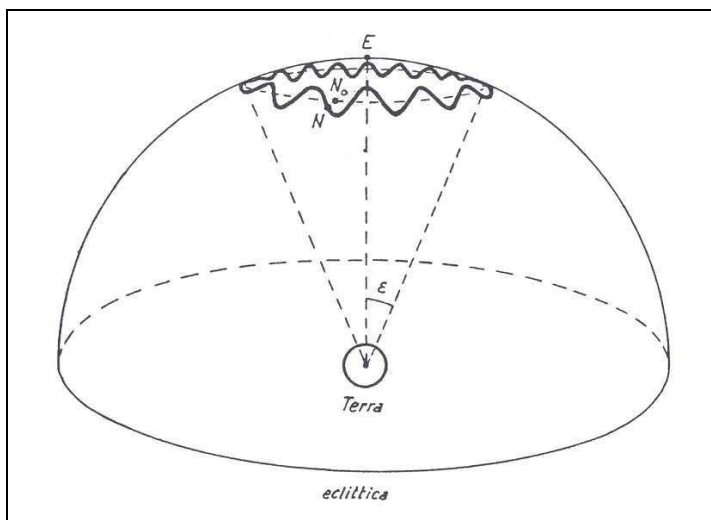


Figura 4.10 – Oscillazione del polo Nord a causa della nutazione.

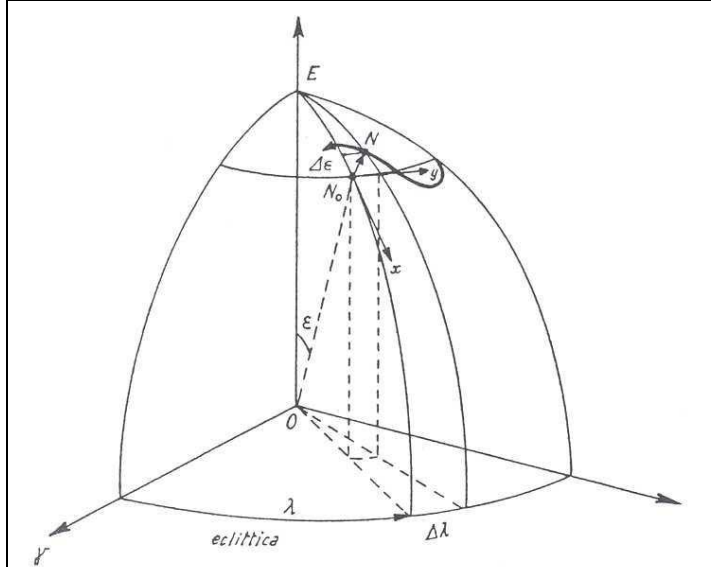


Figura 4.11 – Posizioni del polo Nord medio e del polo Nord vero

^[21] La retrogradazione dei nodi è il moto apparente che la linea dei nodi (la linea di intersezione del piano dell'orbita lunare con il piano dell'eclittica) compie nel corso del tempo. La retrogradazione dei nodi è causata dalle perturbazioni indotte dal Sole ed al campo gravitazionale della Terra a cui vanno aggiunte le forze d'attrazione sia di Giove e quelle, anche se in maniera minoritaria dovuta agli altri pianeti. Si osserva che i nodi non sono fissi e l'angolo di longitudine varia in senso negativo spostandosi di $19,33^\circ$ con un periodo di 18,61 anni. Bisogna anche considerare che la Luna percorre un'orbita ellittica, quindi la velocità non è uniforme e questa ellisse ruota in senso diretto in circa 9 anni. A causa delle perturbazioni dovute alla retrogradazione dei nodi ed all'avanzamento del perigeo le eclissi si verificano ognuna in data diversa, al contrario se queste non esistessero ad ogni passaggio del Sole in uno dei nodi si verificherebbe un'eclisse.

$$[4.28] \quad \left(\frac{x}{9,20''}\right)^2 + \left(\frac{y}{6,84''}\right)^2 = 1.$$

Si ottiene così che l'ellisse di nutazione ha il semiasse maggiore di 9,20" (**costante di nutazione**) e il semiasse minore di 6,84" e che l'asse maggiore è diretto secondo il cerchio massimo passante per il polo dell'eclittica. La composizione del moto circolare del polo medio attorno al polo dell'eclittica (con periodo di 25.800 anni circa) e del moto ellittico del polo vero attorno al polo medio (con periodo di 18,6 anni circa) determina il moto oscillante del polo vero rispetto al polo dell'eclittica.

4.5 – Polodia (approfondimento)

La **polodia** (dal greco antico πόλος «perno, asse» e ὁδός «percorso, traiettoria») è il movimento dei poli rispetto alla superficie terrestre. Con lo stesso termini si indica anche la curva descritta da ciascuno dei due poli sulla superficie terrestre. La causa è dovuto al fatto che la Terra non è assimilabile a un corpo rigido, la distribuzione delle masse al suo interno infatti può variare:

- per moti convettivi in seno alla porzione liquida del nucleo terrestre;
- per moti delle placche tettoniche che si manifestano con i terremoti;
- per i moti delle maree, dei ghiacciai e di altre masse considerevoli.

Quando enormi masse si ridistribuiscono entro il volume della Terra, l'asse di istantanea rotazione terrestre tende a sovrapporsi a un asse principale di inerzia. La reazione giroscopica induce un movimento conico dell'asse di rotazione: infatti la polodia ha caratteristico andamento a spirale nello stesso senso della rotazione terrestre; la spira viene percorsa con un periodo non rigorosamente costante di circa 433 giorni (**periodo di Chandler**)

Secondo recenti ricerche tale moto è da ascrivere principalmente alle variazioni fisiche (temperatura, salinità, pressione) a carico delle profondità degli oceani.

Le curve descritte dai due poli Nord e Sud non sono simmetriche rispetto al centro di rotazione terrestre (cioè al punto dell'asse di rotazione equidistante dai poli), ma restano comunque contenute entro un cerchio di non più di 20 m di diametro (vedi figura 4.12), salvo cataclismi epocali.

Sembra che la polodia presenti altre periodicità: una di breve periodo (diurna) e una di lungo periodo (secolare), ma al pari dei terremoti non è possibile azzardare previsioni.

Il variare della posizione dei poli determina analoghe variazioni a carico della posizione dei paralleli e soprattutto dei meridiani. Per monitorare la polodia nel 1895 venne costituito l'ILS (Servizio Internazionale delle Latitudini) che nel 1899 cominciò a raccogliere, comparare e coordinare i dati di cinque o sei stazioni di osservazione, tutte poste a 39° 8' N (in Italia a Capoterra (CA)). L'avvento dei satelliti artificiali (in particolare quelli della rete GPS) ha decretato la fine dell'ILS.

Attualmente la misurazione della polodia si avvale dello studio dell'orbita di vari satelliti artificiali, a mezzo di rilevamenti doppler o laser di distanze e di posizioni, nonché dell'interferometria radioelettrica su sorgenti extragalattiche.

L'aberrazione, la precessione, la nutazione (e la parallasse) provocano variazioni delle coordinate delle stelle dovute per il primo fenomeno (e per la parallasse) essenzialmente al moto di rivoluzione

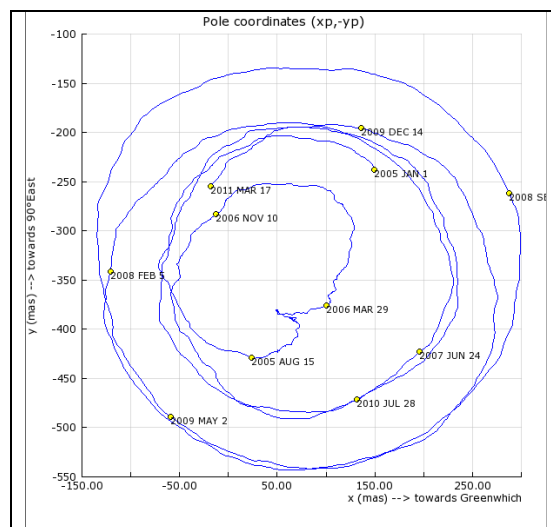


Figura 4.12 – Mappa aggiornata della polodia artica, misurata in millesimi di secondo d'arco. L'origine del riferimento cartesiano è la posizione del polo al 1° gennaio 1900

della Terra attorno al Sole e per gli altri due fenomeni al moto di rotazione, perturbato dall'attrazione luni-solare, della Terra. La precessione e la nutazione causano uno spostamento del sistema di riferimento (elementi fondamentali e origine delle coordinate). Utilizzando le formule della trigonometria sferica applicate al triangolo sferico di vertici il polo Nord, il polo dell'eclittica e la stella si ottengono le correzioni da apportare alle coordinate delle stelle per tener conto della variazione temporale degli elementi di riferimento. Per convenzione le coordinate assolute sono determinate con riferimento ad un fissato equinozio medio (all'inizio di un dato anno, in genere secolare, come il 1900, o semisecolare, come il 1950). Talvolta, invece che di equinozio, si parla, con lo stesso significato, di epoca.

A seconda delle necessità si hanno diversi sistemi di riferimento e quindi per un oggetto si hanno diverse coordinate. Quando si correggono le posizioni vere per gli effetti dovuti alla nutazione e si faccia riferimento ad un prescelto equinozio medio si ottengono le **posizioni medie**. Le coordinate delle stelle riportate nei cataloghi stellari sono appunto le coordinate medie relative alle posizioni (eliocentriche) così definite.

4.6 – La deflessione gravitazionale della luce

C'è un altro effetto legato alla propagazione della luce che solo negli ultimi decenni è stato preso in considerazione, è la deflessione gravitazionale della luce. Prevista già da Newton, è stata risistemata da Einstein nella teoria della relatività generale. Fu misurata da Eddington nel 1919 nel corso di un'eclisse solare.

L'angolo di deflessione dovuto al Sole ha l'espressione

$$[4.29] \quad \vartheta = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 d}$$

dove ϑ è misurato in radianti e d è la distanza minima del raggio dal centro del Sole. In vicinanza del bordo la deflessione prevista è di 1,75'' e decresce in funzione dell'elongazione, riducendosi a 0,004'' a 90° dal Sole.

Tuttavia con tecniche di radiointerferometria anche un angolo così piccolo è misurabile con buona precisione, sì che oggi la previsione di Einstein è verificata, anche a grandi angoli, entro l'1%. In ogni caso, per misure abbastanza accurate, accanto agli altri effetti, è necessario tenere conto anche della deflessione gravitazionale.

Capitolo 5

Distanze e moti stellari

Le stelle, Sole escluso, sono tutte a così grandi distanze da noi da apparirci puntiformi anche se osservate con i più potenti telescopi. Il problema delle loro distanze è tuttavia fondamentale ai fini della descrizione della struttura della Galassia, e più in generale dell'Universo, e della determinazione delle proprietà intrinseche degli oggetti celesti. D'altra parte è ben noto che in astronomia, mentre è piuttosto agevole la misura delle distanze angolari, non lo è altrettanto quella delle distanze lineari. Per la determinazione delle distanze è stato pertanto introdotto l'angolo di parallasse come quell'angolo sotto il quale uno stesso oggetto «vede» due posti distinti. Le diverse posizioni dell'osservatore, e quindi la lunghezza della «base» dai cui estremi vengono fatte le osservazioni per la misura dell'angolo di parallasse, sono collegate al moto di rotazione terrestre (parallasse diurna), o di rivoluzione della Terra attorno al Sole (parallasse annua), o di traslazione del Sole e del sistema planetario rispetto a gruppi di stelle vicine (parallassi secolare e statistica). Il passaggio dalla parallasse alla distanza è poi immediato se è nota la lunghezza della base; ciò consente anche l'introduzione di un'appropriata unità di misura per le distanze, oltre a quelle già note.

La grande distanza delle stelle, anche di quelle più vicine al Sole, comporta che a velocità spaziali (eliocentriche) anche cospicue corrispondano velocità angolari (moti propri) piccole. A ciò è essenzialmente dovuta l'apparente immobilità relativa delle stelle sulla sfera celeste; solo dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo gli spostamenti delle stelle diventano apprezzabili. La velocità spaziale può essere decomposta nella velocità radiale (lungo la visuale dell'osservatore) e nella velocità trasversa (tangenzialmente alla sfera celeste).

Le velocità radiali possono essere ottenute dallo spostamento delle righe spettrali causato dal moto relativo della sorgente rispetto all'osservatore (effetto Doppler). Il passaggio dai moti propri alle velocità trasverse non è in genere fattibile per molte stelle risultando possibile solo per quelle per le quali sono note le parallassi quindi la distanza. Si tratta di norma delle stelle più vicine per le quali possono in genere essere determinate anche le velocità peculiari, che sono riferite all'insieme di stelle considerato, e rispetto al quale può essere individuato lo stesso moto del Sole.

Proprio per effetto del moto solare le velocità osservate delle stelle contengono una componente dovuta alla velocità di trascinamento del Sole. Nell'approssimazione che i moti peculiari delle stelle di un gruppo siano distribuiti completamente a caso si ha che il moto apparente delle stelle avviene mediamente nella direzione esattamente opposta a quella del moto solare. Risulta possibile introdurre la parallasse secolare di gruppi di stelle basandosi soltanto sulle componenti tangenziali della velocità di trascinamento del Sole e, con sviluppi simili, definire la parallasse statistica. D'altra parte, esistono gruppi (ammassi) con stelle che rimangono a distanze reciproche piccole e sono quindi fisicamente legate dalla mutua attrazione gravitazionale. Se, in particolare, le velocità (vettoriali) sono le stesse per tutte le stelle del gruppo si parla di ammassi in moto o di correnti stellari; per essi si può introdurre la parallasse di gruppo sfruttando il fatto che le stelle appaiono muoversi tutte verso uno stesso punto della sfera celeste (determinato dalla comune direzione delle velocità).

Lo studio della distribuzione spaziale e della cinematica delle stelle vicine al Sole permette di avviare a soluzione il problema della determinazione della costituzione delle regioni dello spazio a noi più prossime.

5.1 – Parallassi e distanze

Le distanze delle stelle possono essere ottenute con vari metodi sfruttando tutto un insieme di

possibilità collegate con le caratteristiche dinamiche e le proprietà fisiche delle stelle. In questo paragrafo ci limiteremo alla definizione di parallasse e alla determinazione della distanza trigonometrica, che fu misurata per una stella (61 Cygni) per la prima volta da F. W. Bessel nel 1838; in seguito verranno viste le parallasse secolare, statistica e di gruppo.

5.1.1 – Parallasse trigonometrica

Sia O un osservatore sulla superficie terrestre e C un corpo celeste a distanza d dal centro T della Terra; si definisce parallasse diurna di C per l'osservatore a l'angolo p formato dalle due direzioni di osservazione topocentrica (da O) e geocentrica (da T) del corpo C (vedi figura 5.1). Se z è la distanza zenitale topocentrica di C (e z_0 quella geocentrica) ed R è il raggio della Terra, dal teorema dei seni applicato al triangolo TOC si ha

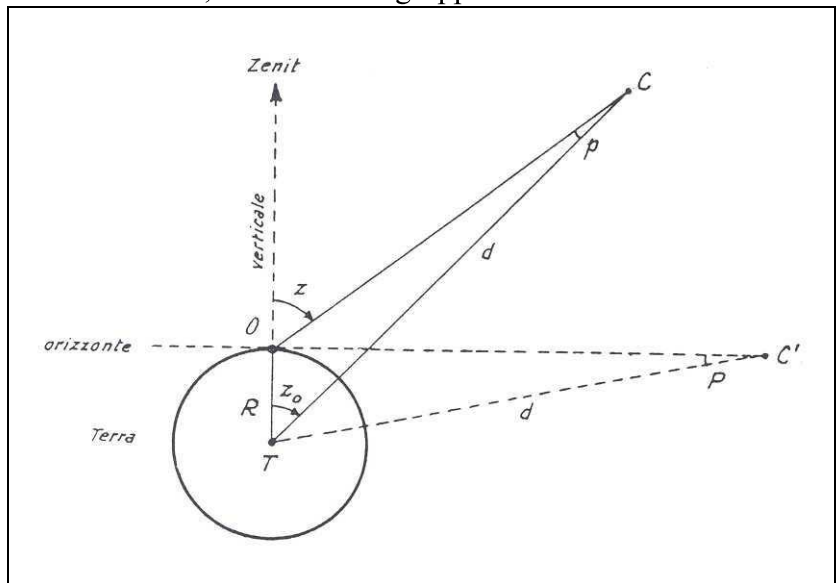


Figura 5.1 – parallasse diurna di un oggetto celeste.

$$[5.1] \quad p = \frac{R \operatorname{sen} z}{d}$$

avendo posto $\operatorname{sen} p \approx p$ (ovviamente in radianti) poiché gli angoli di parallasse sono di norma molto piccoli. Evidentemente è $p = z - z_0$ e pertanto si ha che la parallasse abbassa ($z > z_0$) gli astri sull'orizzonte, contrariamente a quanto avviene per effetto della rifrazione atmosferica.

A causa della rotazione terrestre la parallasse diurna varia da un valore minimo (quando l'oggetto osservato passa al meridiano) ad un valore massimo (quando l'oggetto è all'orizzonte). Per $z = 90^\circ$ il corpo C è all'orizzonte e «vede» il raggio terrestre ortogonalmente; dalla [5.1] segue allora

$$[5.2] \quad d = \frac{R}{P}$$

nella quale P rappresenta la cosiddetta **parallasse orizzontale**.

In pratica la parallasse diurna di un oggetto celeste viene determinata effettuando l'osservazione dell'oggetto ad uno stesso istante da parte di due osservatori terrestri distanti, o da parte di uno stesso osservatore in tempi successivi, quando per effetto della rotazione terrestre la direzione della visuale sia variata sufficientemente. Operativamente si fa ricorso a varie tecniche osservative dipendenti anche dall'oggetto interessato.

La parallasse diurna è diversa da zero

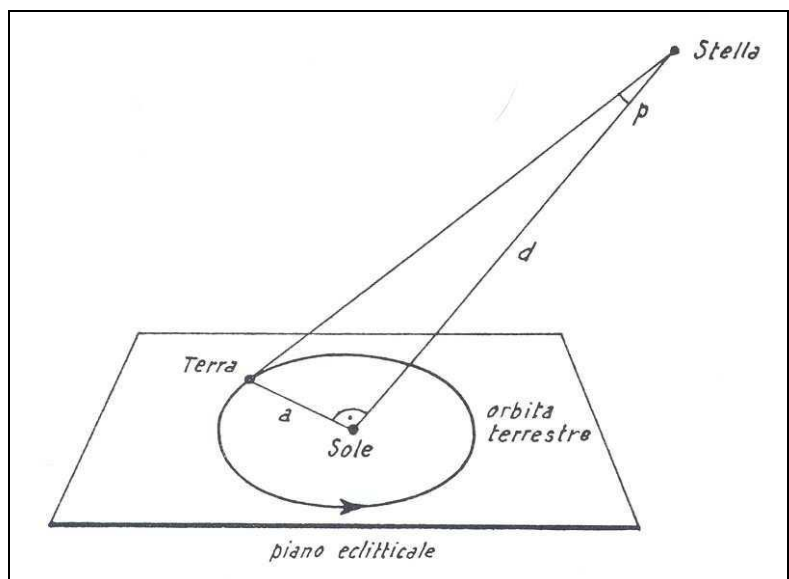


Figura 5.2 – Parallasse annua

solo per oggetti nell'ambito del sistema planetario ed è massima per la Luna, risultando allora di circa 1° cosicché per la sua determinazione occorre tener conto anche dello scarto della Terra dalla forma sferica. Per distanze maggiori la direzione di osservazione è praticamente la stessa qualunque sia la posizione dell'osservatore sulla superficie terrestre; per avere direzioni diverse si deve ricorrere al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Allora, infatti, la base per la triangolazione è maggiore e non è del tutto trascurabile rispetto alle distanze delle stelle più vicine al Sole.

Se si assume, per semplicità, che la Terra si muova attorno al Sole secondo un'orbita circolare di raggio uguale alla distanza media a , sia p l'angolo sotto il quale il raggio dell'orbita terrestre è visto ortogonalmente da una stella alla distanza d dal Sole (vedi figura 5.2). Questo angolo è per definizione la parallasse annua della stella.

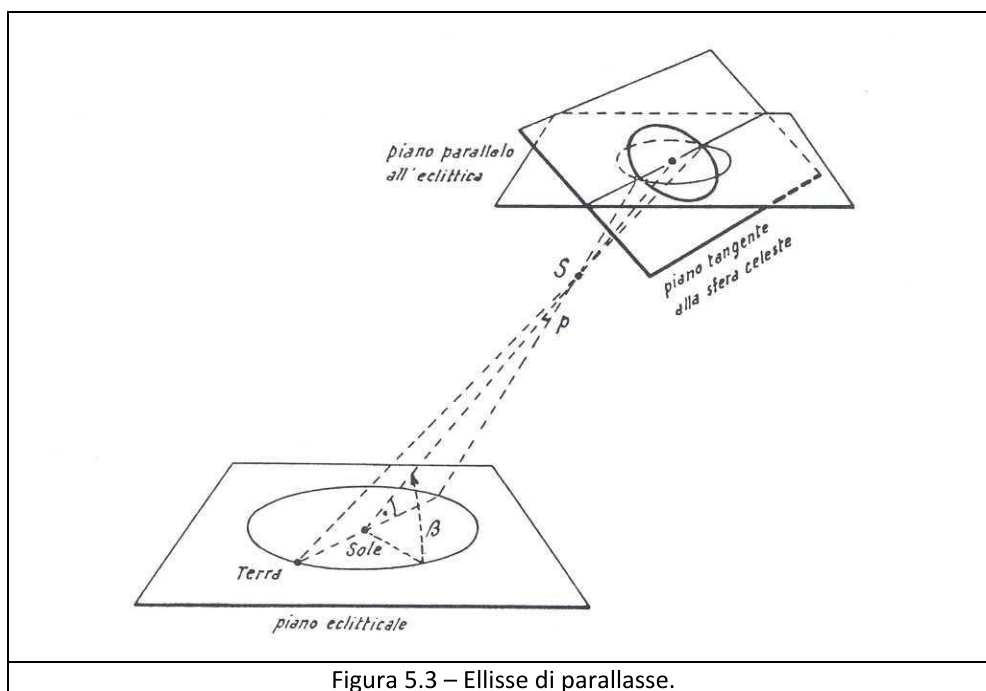
Si ha in generale la relazione, analoga alla [5.2],

$$[5.3] \quad a = d \tan p \approx d \cdot p$$

con $\tan p \approx p$ (sempre in radianti) poiché l'angolo di parallasse è molto piccolo in tutti i casi di interesse. D'altra parte un radiante equivale a 206265 secondi d'arco; dalla [5.3] segue allora

$$[5.4] \quad d = \frac{206265''}{p''} a$$

dove con p'' si è indicato l'angolo di parallasse misurato in secondi d'arco e dove, ovviamente, d risulta espresso nelle stesse unità di a .



Come si vede, la definizione di parallasse trigonometrica è concettualmente molto semplice, tuttavia la sua effettiva determinazione è ben più elaborata e particolarmente accurate devono essere le osservazioni. Nel caso della parallasse annua, a distanza di sei mesi circa (quando la Terra viene a trovarsi in due punti opposti della sua orbita) vengono prese due lastre fotografiche della regione di cielo di interesse. Da esse, per confronto, è possibile ottenere gli spostamenti apparenti delle stelle più vicine rispetto a quelle più deboli (di sfondo), che essendo a distanze maggiori risultano praticamente fisse. Metodi di riduzione abbastanza elaborati consentono poi di passare dagli spostamenti relativi sulle lastre agli angoli di parallasse e quindi alle distanze. In effetti le osservazioni vanno fatte su intervalli di tempo di più anni per arrivare a separare la parallasse dal

moto proprio (che vedremo più avanti).

Come la parallasse diurna varia nel corso di un giorno a causa della rotazione terrestre, così l'angolo collegato alla parallasse annua varia nel corso di un anno a causa della rivoluzione terrestre. La diversità della direzione secondo la quale una stessa stella è vista dalla Terra fa sì che per proiezione la stella appaia descrivere un'ellisse (detta di parallasse) sul piano tangente alla sfera celeste. Il semiasse maggiore dell'ellisse ha una dimensione angolare uguale alla parallasse annua p , quello minore è uguale a $p \sin \beta$ con β latitudine eclittica della stella, in analogia a quanto visto nel caso dell'aberrazione, ma con la differenza che nell'ellisse di parallasse le dimensioni di entrambi i semiasse dipendono dalla distanza e variano quindi da stella a stella (vedi figura 5.3). La parallasse annua, come l'aberrazione annua, costituisce una prova del moto orbitale della Terra attorno al Sole.

5.1.2 – Unità di distanza

L'unità di misura delle distanze più frequentemente utilizzata nel sistema planetario è l'**unità astronomica** (UA) definita come la distanza media tra il Sole e la Terra e pari a $1,486 \cdot 10^{11}$ m.

Per via trigonometrica l'unità astronomica sarebbe calcolabile direttamente tramite la (5.1) una volta che venisse misurata la parallasse diurna del centro del disco solare. Ciò non può però farsi con la desiderata precisione a causa della difficoltà di localizzare tale centro. Si ricorre pertanto a metodi indiretti basati sulla determinazione delle parallasse diurne di corpi del sistema planetario e sulla conoscenza delle loro orbite. A questo scopo si sono calcolate le distanze assolute di pianetini e pianeti dalla Terra misurando le rispettive parallasse, che sono ovviamente tanto più precise quanto più ravvicinati sono i passaggi, e utilizzando come base di partenza una distanza accuratamente misurata sulla superficie terrestre.

D'altra parte, le dimensioni delle orbite di pianeti e pianetini sono determinabili in UA ed è pertanto possibile calcolare, nelle stesse unità, le loro distanze dalla Terra. Il confronto delle misure di tali distanze fornisce il valore dell'UA in km. Alcuni pianetini sono particolarmente indicati per questo tipo di misure; essi si avvicinano alla Terra più di qualsiasi pianeta, appaiono inoltre puntiformi e le loro posizioni rispetto alle stelle di sfondo sono pertanto più facilmente misurabili. Così, ad esempio, il ripetuto avvicinamento di Eros e di Amor alla Terra è stato sfruttato per misure di questo genere. Lo stesso metodo è stato applicato a Marte e Venere che sono i due pianeti che più si avvicinano alla Terra.

Sono stati escogitati anche altri metodi, che vanno dalla determinazione delle modalità del transito dei pianeti inferiori (in particolare Venere) sul disco solare alla misura delle perturbazioni indotte dal Sole sul moto della Luna, dalla determinazione della distanza della Luna, di pianeti e pianetini tramite eco radar alla misura della velocità orbitale della Terra dedotta dall'effetto Doppler sulle righe spettrali di stelle osservate a varie epoche dell'anno. Il risultato attualmente accettato per la parallasse orizzontale solare è $8,79''$. Per distanze molto maggiori di quelle di interesse nel sistema solare si ricorre alla definizione di unità più grandi, che danno quindi luogo a misure di distanza più maneggevoli.

Dalla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** si ottiene subito che la distanza in corrispondenza della quale è $p'' = 1$ risulta uguale a $206265a = 3,086 \cdot 10^{16}$ m. Questa lunghezza prende il nome di **parsec** (pc in simboli); essa rappresenta la distanza dalla quale il semiasse maggiore dell'orbita della Terra attorno al Sole (uguale ad 1 UA) è visto ortogonalmente sotto l'angolo di un secondo d'arco. È molto frequente l'uso dei multipli del parsec: il chiloparsec (kpc), il megaparsec (Mpc) e il gigaparsec (Gpc). Se si misurano le distanze in parsec è allora

$$[5.5] \quad d = \frac{1}{p''}$$

Un'altra unità di misura usata in astronomia, usata meno frequentemente del parsec, ma più nota è

l'anno-luce (a.l. in simboli) che corrisponde alla distanza percorsa dalla luce nel vuoto (alla velocità di $3 \cdot 10^8$ m/s circa) in un anno tropico. Un anno-luce equivale quindi a $9,461 \cdot 10^{15}$ m e si ha pertanto

$$\text{pc} = 3,261 \text{ a.l.}$$

Le parallassi delle stelle non superano 1"; la stella a noi più vicina è la Proxima Centauri (componente di un sistema triplo di stelle comprendente α Centauri) che ha una parallasse di 0",76 corrispondente ad 1,31 pc, ovvero a 4,28 a.l.

Fino a qualche anno fa le migliori misure di parallasse erano state effettuate dalla missione spaziale Hipparcos, acronimo di High Precision Parallax Collecting Satellite (Satellite per ottenere parallassi ad alta precisione). Il satellite è stato ideato e costruito, sotto la supervisione dell'ESA, da un consorzio industriale costituito dalla Matra Marconi Space (Francia) e dall'Alenia Spazio (Italia).

Il progetto era dedicato alla misura delle parallassi stellari e del moto proprio delle stelle. Il satellite è stato utilizzato per misurare la distanza di 2 milioni e mezzo di stelle, situate fino a 150 parsec raccolte nel Catalogo Tycho. Il progetto fu proposto nel 1980 e il satellite fu lanciato da un razzo Ariane 4 il 18 agosto 1989, dalla base spaziale di Kourou, nella Guyana francese. Il satellite è stato spento il 17 agosto



Figura 5.4 – Una rappresentazione artistica del satellite Hipparcos.

1993. Il programma di lavoro era diviso in due parti: l'esperimento Hipparcos, il cui obiettivo era di misurare i parametri astrometrici di circa 120.000 stelle con una precisione da 2 a 4 miliardesimi di secondo, e l'esperimento Tycho, la misura delle proprietà astrometriche e di fotometria in due colori di 400.000 stelle ad una precisione leggermente inferiore.

Il Catalogo Hipparcos finale (120.000 stelle con risoluzione di 1 miliardesimo di secondo) e il Catalogo Tycho finale (più di un milione di stelle con risoluzione di 20-30 miliardesimi di secondo e fotometria a 2 colori) furono completati nell'agosto del 1996, e pubblicati dall'ESA nel giugno del 1997.

I dati dei due cataloghi sono stati utilizzati per realizzare il Millennium Star Atlas (Atlante Stellare del Millennio): un atlante di tutto il cielo, comprendente un milione di stelle fino alla magnitudine 11 dai dati Hipparcos, più circa 10.000 oggetti non stellari. Sebbene poco appariscente, il lavoro di Hipparcos è di importanza fondamentale: senza misure accurate di posizione e soprattutto di distanza non si può fare astrofisica. La parallasse stellare è l'unico metodo diretto per misurare le distanze delle stelle: tutti gli altri, come le candele standard, sono metodi indiretti e incerti che si basano sulla parallasse per essere calibrati correttamente.

C'è da dire che è stato riscontrato un errore di tracciamento delle stelle in Hipparcos (dovuto a leggere variazioni di temperatura), per cui Floor van Leeuwen, dell'osservatorio di Cambridge, ha compiuto un lavoro decennale di ricalcolo delle posizioni stellari. Il risultato è il catalogo chiamato "Hipparcos. The new reduction of the raw data."

Oggi si ritiene che alcuni dati del catalogo Hipparcos siano errati e si è iniziata una osservazione sistematica di stelle che probabilmente sono più vicine di quanto sembri.

Attualmente è operativo il satellite GAIA (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics) che è stato sviluppato dall'Agenzia Spaziale Europea. La missione consiste nella compilazione di un catalogo di circa un miliardo di stelle fino alla magnitudine^[22] 20. L'obiettivo principale della

[22] La magnitudine è una grandezza legata alla luminosità osservata di un oggetto celeste. Si tratterà più avanti.

missione è l'effettuazione di misure astrometriche di altissima precisione. Il satellite determinerà la posizione esatta di ogni stella in tempi diversi durante la durata operativa prevista (cinque anni). Misurerà quindi direttamente il moto proprio con una precisione variabile tra 20 e 200 microarcosecondi, rispettivamente per stelle di magnitudine 15 e 20. Sfruttando l'effetto della parallasse calcolerà anche la distanza di ognuna delle stelle, con una precisione maggiore di quella di Hipparcos. La sonda effettuerà anche misure fotometriche a diverse lunghezze d'onda e in diversi periodi temporali degli oggetti, e sarà in grado di determinarne la velocità radiale.

La missione GAIA è la continuazione della missione Hipparcos e fa parte del programma scientifico Horizon 2000. Il lancio è avvenuto il 19 dicembre del 2013 (9:12:18 UTC) e il satellite ora occupa un'orbita di Lissajous attorno al secondo punto lagrangiano del sistema Sole-Terra. Il punto è conosciuto anche come L2^[23].

In definitiva, Gaia creerà una mappa tridimensionale molto precisa della porzione di Galassia vicina a noi, e una mappa meno accurata ma comunque dettagliata del resto. La mappa comprenderà sia la posizione che i movimenti delle stelle, in modo da poter studiare l'evoluzione della Galassia. Le misure fotometriche forniranno dettagliate informazioni fisiche sulla composizione e sulle caratteristiche delle stelle osservate. Permetteranno di definire la luminosità, la gravità, la temperatura e la composizione chimica di ogni stella misurata. Questa massiva analisi delle stelle fornirà dei dati fondamentali per risolvere dei problemi importanti vertenti l'origine, la struttura e la storia evolutiva della Galassia. Un gran numero di quasar, pianeti extrasolari e oggetti del sistema solare saranno misurati nel contempo. L'altissima risoluzione ottica degli strumenti a bordo di GAIA permetterà anche l'identificazione di eventuali pianeti extrasolari: si stima che entro il termine della missione, previsto per il 2020, sarà possibile individuare circa 8000 pianeti extrasolari e circa 1000 sistemi solari; il pianeta più piccolo individuabile da GAIA è uno con massa pari a quella di Giove, cioè 300 volte quella della Terra, e con periodo orbitale fino a 10 anni. Alla massima distanza osservabile (200 parsec) GAIA potrà individuare pianeti di 2-3 masse gioviane distanti tra 2 e 4 unità astronomiche dalla loro stella, mentre a distanze intorno a 25 parsec sarà possibile individuare pianeti di massa simile a quella di Saturno (95 masse terrestri) a distanza compresa tra 1 e 4 unità astronomiche.



Figura 5.5 – Una rappresentazione artistica del satellite GAIA.

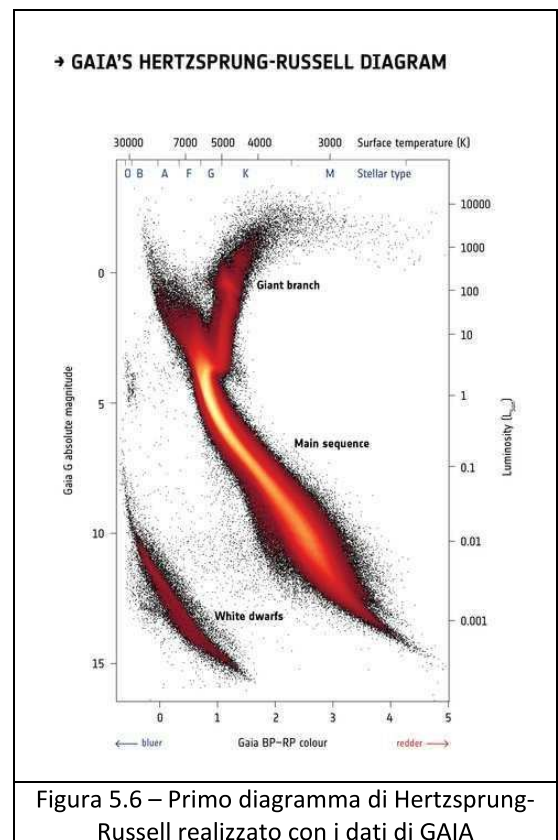


Figura 5.6 – Primo diagramma di Hertzsprung-Russell realizzato con i dati di GAIA

La missione è stata originariamente programmata e finanziata per cinque anni. A dicembre 2017 l'ESA ha prolungato la durata della missione per ulteriori 18 mesi, sino a dicembre 2020, e nel 2018

[23] Vedi prossimi capitoli.

è stata estesa ulteriormente al 2022.

Nel settembre del 2016 è stata rilasciata una prima release dei dati (relativi alle osservazioni compiute fra luglio 2014 e settembre 2015). La seconda release di dati, che copre il periodo osservativo tra luglio 2014 e maggio 2016, è stata resa disponibile il 25 aprile 2018 e comprende:

- Posizione e luminosità: circa 1,7 miliardi di stelle
- Temperatura superficiale: circa 161 milioni di stelle
- Parallasse e moto proprio circa 1,3 miliardi di stelle
- Raggio: circa 77 milioni di stelle
- Velocità radiale: circa 7 milioni di stelle
- Asteroidi del sistema solare analizzati: 14000

Per alcune delle stelle più brillanti della seconda campagna osservativa, il livello di precisione equivale a quella di osservatori a terra in grado di individuare una moneta da un euro situata sulla superficie della Luna. L'analisi di quattro milioni di stelle entro i 5000 a.l. ha consentito di ridefinire dettagliatamente il diagramma Hertzsprung-Russell.

Un terzo blocco di dati dovrebbe essere disponibile verso la fine del 2020 con i dati spettrali e le lunghezze d'onda di emissione delle stelle osservate, oltre ad un campione di asteroidi più numeroso.

5.2 – Moti delle stelle

Le stelle non sono fisse nello spazio ma in moto reciproco tra loro e rispetto al Sole. Si è già detto, tuttavia, che le grandi distanze stellari implicano piccole velocità proiettate sulla sfera celeste e quindi lunghi intervalli di tempo per poter evidenziare gli effettivi spostamenti. D'altra parte un contributo ai movimenti osservati delle stelle è in realtà dovuto anche al fatto che il Sole, e con esso la Terra, si muove nello spazio. Proprio il moto del Sole rispetto alle stelle vicine permette di disporre di basi molto più estese di quelle fin qui usate per la misura delle parallassi stellari, pur di lasciar passare un intervallo di tempo sufficientemente lungo. I primi moti propri furono ottenuti nel 1718 da E. Halley per confronto tra le posizioni di stelle da lui osservate e quelle riportate da Tolomeo (II secolo d.C.).

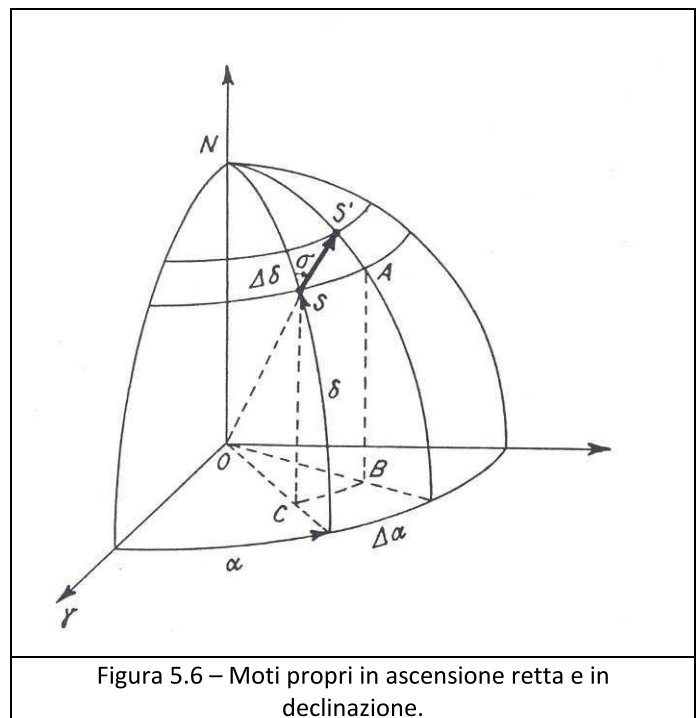


Figura 5.6 – Moti propri in ascensione retta e in declinazione.

5.2.1 – Moti propri

Siano (α, δ) le coordinate equatoriali della posizione S di una stella ad un dato istante t . Se si ridetermina la posizione S' della stessa stella dopo un intervallo di tempo $\Delta t = t' - t$ sufficientemente lungo, si ottengono per le coordinate equatoriali i nuovi valori (α', δ') , in genere diversi da (α, δ) anche dopo aver riportato le misure allo stesso equinozio medio in modo da prescindere dagli effetti

causati dai fenomeni che alterano le posizioni degli astri sulla sfera celeste. Rimangono allora (considerate le coordinate medie) definiti i rapporti

$$[5.6] \quad \begin{cases} \mu_{\alpha} = \frac{\alpha' - \alpha}{t' - t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \\ \mu_{\delta} = \frac{\delta' - \delta}{t' - t} = \frac{\Delta\delta}{\Delta t} \end{cases}$$

che prendono i nomi di **moto proprio in ascensione** e di **moto proprio in declinazione** rispettivamente e che rappresentano le velocità angolari medie del moto della stella proiettato sul parallelo celeste e sul cerchio orario per la stella. Per la stessa definizione data, questi moti propri sono detti assoluti, in contrapposizione ai moti propri relativi che sono invece riferiti alle stelle più deboli (di sfondo) assunte fisse.

Con riferimento alla sfera celeste di figura 5.6, per i piccoli spostamenti in gioco (anche per intervalli di tempo molto lunghi) risulta

$$|SS'|^2 = |SA|^2 + |AS'|^2 = |BC|^2 + |AS'|^2 = \Delta\alpha^2 \cdot \cos^2 \delta + \Delta\delta^2$$

Dividendo ambo i membri di questa relazione per Δt e introducendo il moto proprio (totale)

$$[5.7] \quad \mu = \frac{|SS'|}{\Delta t}$$

segue subito

$$[5.8] \quad \mu^2 = \mu_{\delta}^2 + \mu_{\alpha}^2 \cos^2 \delta$$

Il moto proprio rappresenta la velocità angolare media del moto della stella proiettato sulla sfera celeste. L'**angolo di posizione** σ (rispetto al cerchio orario per S e contato in verso retrogrado a partire dalla direzione del polo Nord) del moto proprio può essere ottenuto dai moti propri in ascensione e in declinazione essendo,

$$\mu_{\alpha} = \mu \frac{\sin \sigma}{\cos \delta} \quad \text{e} \quad \mu_{\delta} = \mu \cos \sigma$$

I moti propri assoluti si ottengono con osservazioni meridiane o con osservazioni fotografiche riferendo le posizioni delle stelle ad un sistema di galassie lontane. I moti propri relativi si misurano confrontando coppie di fotografie prese a distanza di qualche decennio. A causa delle loro modeste entità si conviene di misurare i moti propri in secondi d'arco all'anno. Sono note solo poco più di trecento stelle con moti propri maggiori di 1 "/anno, la stella con il massimo moto proprio è la stella di Barnard (vedi figura 5.7) per la quale $\mu = 10,27$ "/anno; in genere i moti propri risultano minori di 1 "/anno, ciò che rende apparentemente fissa la configurazione del cielo stellato.

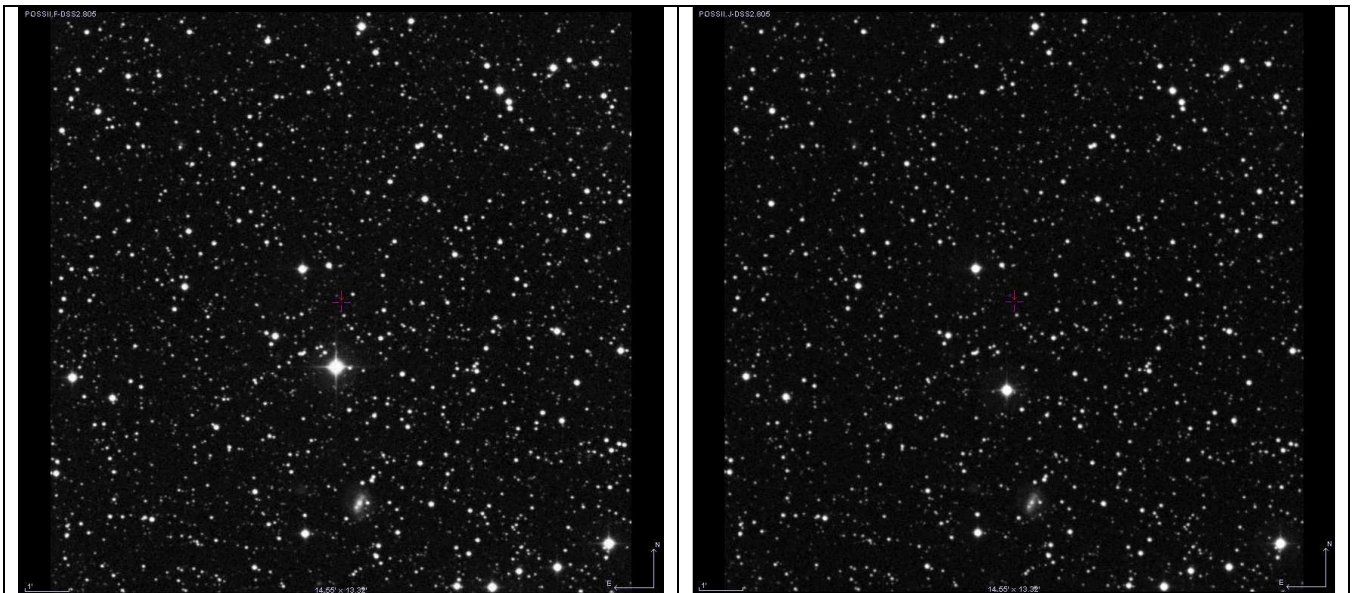


Figura 5.7 – Immagini del campo stellare della stella di Barnard riprese il 12 maggio 1988 alle 09:54:00 e il 16 giugno 1991 alle 07:47:59.

5.2.2 – Velocità radiali e trasverse

I moti propri forniscono le velocità angolari medie del moto eliocentrico delle stelle; il moto effettivo nello spazio è rappresentato dalle velocità lineari (a causa delle grandi distanze in gioco i moti delle stelle possono essere ritenuti rettilinei anche per intervalli di tempo molto estesi). Si consideri allora una stella a distanza r dal Sole e sia \vec{v} la sua velocità rispetto ad una tema di riferimento equatoriale eliocentrica con assi di direzioni fisse (piano xy coincidente con il piano equatoriale celeste e asse x diretto verso il punto γ di un fissato equinozio). Il vettore \vec{v} può essere decomposto in una componente radiale v_r e in una componente trasversa v_t (di norma entrambe espresse in km/s).

La velocità radiale v_r può ottenersi dall'effetto Doppler secondo il quale è

$$[5.9] \quad v_r = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} c$$

con λ_e lunghezza d'onda di una riga spettrale (di emissione o di assorbimento) prodotta in situazione di quiete relativa tra sorgente e osservatore e λ_o lunghezza d'onda osservata (dipendente dal moto relativo della sorgente rispetto all' osservatore); c è la velocità della luce. Se c'è allontanamento tra la sorgente e l'osservatore, essendo $\lambda_o > \lambda_e$, allora $v_r > 0$; se c'è avvicinamento $\lambda_o < \lambda_e$ $v_r < 0$. Il confronto di spettri di stelle con spettri di laboratorio (presi perciò in quiete rispetto all'osservatore) consente di misurare, per righe di lunghezza d'onda λ_e nota, l'entità della differenza $\lambda_o - \lambda_e$ e quindi di determinare v_r una volta che si correggano i dati per i moti della Terra attorno al Sole e attorno a se stessa. Infatti, in base alla definizione di \vec{v} , v_r deve essere la velocità radiale eliocentrica mentre la diretta applicazione della [5.9] alle osservazioni fatte dalla Terra fornirebbe la velocità radiale topocentrica.

Per la velocità trasversa v_t dalla definizione di moto proprio, si ha

$$[5.10] \quad v_t = r\mu .$$

Se r fosse espresso in parsec e μ in radianti all'anno, v_t risulterebbe allora data in parsec/anno. Come si è detto, è invece conveniente esprimere μ in secondi d'arco all'anno e v_t in km/s (come v_r); una volta che si effettui la conversione delle unità da radianti all'anno a secondi d'arco all'anno per μ e da parsec all'anno a chilometri al secondo per v_t ($1 \text{ pc/anno} = 3,086 \cdot 10^{13} / 3,156 \cdot 10^7 \text{ km/s}$) si ottiene:

$$[5.10'] \quad v_t = 4,74 r \mu = 4,74 \frac{\mu}{p}$$

v_t , μ e p (o r) adesso esprimibili nelle loro unità usuali. Il fattore $4,74 = \frac{1,50 \cdot 10^8}{3,156 \cdot 10^7}$ risulta numericamente uguale alla velocità in km/s richiesta per percorrere lo spazio di 1 UA in un anno. La (5.8') mostra che la determinazione di v_t richiede, oltre alla conoscenza del moto proprio, anche quella della parallasse; ciò rende le velocità trasverse più difficili da ottenere delle velocità radiali. Inoltre, mentre queste possono essere calcolate con una sola osservazione, quelle richiedono almeno due osservazioni effettuate a sufficiente distanza di tempo. Per le velocità radiali c'è tuttavia la limitazione dovuta al fatto che per le misure sono necessarie dispersioni spettrali adeguate; ciò limita la determinazione delle velocità radiali alle stelle più brillanti (10^4 circa) mentre sono molto più numerose ($3 \cdot 10^5$ circa) le stelle per le quali si hanno i moti propri.

Per la velocità spaziale (eliocentrica) \vec{v} si ha ovviamente

$$[5.11] \quad v^2 = v_r^2 + v_t^2$$

Le velocità spaziali delle stelle vicine risultano comprese tra qualche km/s e 500 km/s circa. Sempre con riguardo al sistema di riferimento equatoriale eliocentrico, siano \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} le componenti cartesiane di \vec{v} di una stella di coordinate equatoriali (α, δ) . Dalla figura 5.8 si ottiene subito

$$[5.12] \quad \begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \delta \\ y = r \cos \alpha \sin \delta \\ z = r \sin \alpha \end{cases}$$

e quindi, per derivazione rispetto al tempo,

$$[5.13] \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \alpha \cos \delta - r \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \delta - r \dot{\delta} \cos \alpha \sin \delta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \alpha \cos \delta + r \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \delta - r \dot{\delta} \sin \alpha \sin \delta \\ \dot{z} = \dot{r} \sin \delta + r \dot{\delta} \cos \delta \end{cases}$$

con $\dot{\alpha}$ e $\dot{\delta}$ espresse in radianti al secondo.

Poiché $\dot{r} = v_r$ e, per analogia alla [5.10'], $r \dot{\alpha} = r v_{\alpha} = 4,74 r \mu_{\alpha}$ e $r \dot{\delta} = r v_{\delta} = 4,74 r \mu_{\delta}$, dalle [5.13] si ha

$$[5.13'] \quad \begin{cases} \dot{x} = v_r \cos \alpha \cos \delta - 4,74r (\mu_\alpha \sin \alpha \cos \delta + \mu_\delta \cos \alpha \sin \delta) \\ \dot{y} = v_r \sin \alpha \cos \delta + 4,74r (\mu_\alpha \cos \alpha \cos \delta - \mu_\delta \sin \alpha \sin \delta) \\ \dot{z} = v_r \sin \delta + 4,74r \mu_\delta \cos \delta \end{cases}$$

con le velocità, i moti propri e le distanze (o le parallassi) espressi ora nelle loro unità usuali. Essendo ovviamente $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, dalle [5.13'] segue che le velocità spaziali possono essere ottenute solo se sono noti parallassi, velocità radiali e moti propri, quantità che sono tutte conosciute solo per le stelle relativamente vicine al Sole.

5.3 – Magnitudini

5.3.1 – Magnitudine apparente.

La magnitudine apparente (m) di una stella, pianeta o di un altro oggetto celeste è una misura della sua luminosità apparente, ovvero quella rilevabile dal punto d'osservazione. La magnitudine apparente dipende dall'effettiva luminosità dell'oggetto e dalla sua distanza.

Se indichiamo con L la luminosità intrinseca di una sorgente (l'energia emessa in tutte le direzioni), un osservatore a distanza d misurerà un flusso luminoso F dato da:

$$[5.14] \quad F = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

La classificazione delle stelle per luminosità fu introdotta da Ipparco di Nicea (Nicea, 200 a.C. – Rodi, 120 a.C); egli classificò le stelle visibili a occhio nudo in 6 classi di luminosità: la prima classe comprendeva le stelle più luminose del cielo, la sesta quelle appena visibili. Nel 1856, Pogson formalizzò il sistema ideato da Ipparco definendo una stella di prima magnitudine come una stella che fosse 100 volte più luminosa di una stella di sesta magnitudine e da ciò segue che una stella di prima magnitudine è 2,512 volte più luminosa di una stella di seconda. Il valore $2,512 = \sqrt[5]{100}$ è noto come rapporto di Pogson. La scala di Pogson fu fissata in origine assegnando alla stella Polare una magnitudine di 2. Gli astronomi hanno in seguito scoperto che la Polare è leggermente variabile, e non è quindi utilizzabile per definire correttamente la scala delle magnitudini. Oggi la stella Vega (nella costellazione della Lira) viene usata come stella di riferimento. La magnitudine apparente in una determinata banda x dello spettro è definita tramite la formula di Pogson:

$$[5.15] \quad m_x = m_0 - 2,5 \log \frac{F_x}{F_0},$$

dove F_x è il flusso luminoso nella banda x , e m_0 e F_0 sono rispettivamente la magnitudine e il flusso di una stella di riferimento.

Si vede subito dalla definizione che più un oggetto è debole più la sua magnitudine è alta.

Un esempio, una differenza di 3,2 significa che un oggetto è circa 19 volte più luminoso di un altro, infatti il rapporto di Pogson elevato alla potenza di 3,2 è $(\sqrt[5]{100})^{3,2} = 19,054607\dots$. La natura logaritmica della scala è dovuta al fatto che l'occhio umano ha esso stesso una risposta logaritmica.

Consideriamo ora una stella di magnitudine m posta ad una distanza d , qual è la sua magnitudine m' se la stella potesse essere spostata ad una distanza d' ?

Tenendo conto della [5.14] e della [5.15] possiamo scrivere

$$[5.16] \quad m' = m - 2,5 \log \frac{F'}{F} = m - 2,5 \log \frac{\frac{L}{4\pi d'^2}}{\frac{L}{4\pi d^2}} = m - 2,5 \log \frac{d^2}{d'^2} = m - 5 \log \frac{d}{d'}$$

5.3.2 – Magnitudine assoluta.

La magnitudine assoluta (M) è la magnitudine apparente che un oggetto avrebbe se si trovasse ad una distanza di 10 pc (32,616 anni luce)^[24], o $3,0857 \cdot 10^{14}$ km dall'osservatore; è quindi una misura della luminosità intrinseca di un oggetto. Utilizzando la [5.16] si ricava la seguente relazione tra magnitudine assoluta e magnitudine apparente:

$$[5.17] \quad M = m + 5 - 5 \log_{10} d$$

dove d è la distanza dell'oggetto espressa in parsec.

Questa espressione è molto importante perché note le magnitudini permette di ricavare la distanza di un oggetto. Infatti ricavando d si ottiene

$$[5.18] \quad d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{m-M}{5}+1}$$

La differenza tra la magnitudine apparente m e la magnitudine assoluta M di un oggetto celeste è detta **modulo della distanza** e si indica con μ , risulta:

$$[5.19] \quad \mu = m - M .$$

ESERCIZIO Si supponga di avere una stella doppia costituita da stelle di magnitudine apparente m_1 e m_2 , qual è la magnitudine apparente complessiva del sistema?

Dalla formula di Pogson si ha: $m_1 = m_0 - 2,5 \log \frac{F_1}{F_0}$ e $m_2 = m_0 - 2,5 \log \frac{F_2}{F_0}$ da cui si ricavano i flussi $F_1 = F_0 \cdot 10^{-0,4(m_1-m_0)}$ e $F_2 = F_0 \cdot 10^{-0,4(m_2-m_0)}$. La magnitudine apparente totale è

$m = m_0 - 2,5 \log \frac{F_1 + F_2}{F_0}$. Semplificando si ottiene:

$$[5.20] \quad m = -2,5 \log (10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2})$$

Se il sistema è formato da n stelle di magnitudine $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, la magnitudine totale è

$$[5.21] \quad m = -2,5 \log (10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} + 10^{-0,4m_3} + \dots + 10^{-0,4m_n})$$

ESERCIZIO Se una stella ha magnitudine apparente variabile da m_{MIN} a m_{MAX} , qual è la variazione di flusso della stella?

La variazione di flusso è data da

$$[5.22] \quad \Delta F = F_{\text{MAX}} - F_{\text{MIN}} = F_0 10^{0,4m_0} (10^{-0,4m_{\text{MAX}}} - 10^{-0,4m_{\text{MIN}}})$$

dove si è utilizzata la formula di Pogson. Essendo $F_0 10^{0,4m_0} = F_{\text{MAX}} 10^{0,4m_{\text{MAX}}} = F_{\text{MIN}} 10^{0,4m_{\text{MIN}}}$ si ha:

$$[5.23] \quad \Delta F = F_{\text{MIN}} (10^{-0,4(m_{\text{MAX}}-m_{\text{MIN}})} - 1)$$

Per esempio il prototipo delle stelle variabili cefeidi, δ Cephei, passa dalla magnitudine apparente

^[24] Nella maggior parte dei calcoli è sufficiente utilizzare 1 pc = 3,26 anni luce = $3,09 \cdot 10^{13}$ km

3,6 a 4,3 in un periodo di 5,36634 giorni. In tale periodo il suo flusso varia di $\Delta F = F_{\text{MIN}} \left(10^{-0,4(m_{\text{MAX}} - m_{\text{MIN}})} - 1 \right) = F_{\text{MIN}} \left(10^{-0,4(3,6 - 4,3)} - 1 \right) = 0,905 F_{\text{MIN}}$, e quindi $\frac{\Delta F}{F_{\text{MAX}}} = 0,475$ cioè

diminuisce del 47,5% rispetto al flusso massimo.

Alcune delle stelle più brillanti viste dalla Terra.

La lista che segue non può considerarsi completa, poiché se una stella è così lontana che per noi è difficile scorgerla, è difficile misurarne con accuratezza la luminosità effettiva. Le liste redatte dai diversi autori di pubblicazioni astrofisiche differiscono tra loro o nell'ordine in cui compaiono le stelle o nelle stelle stesse che compongono la lista; inoltre, i dati riguardanti le singole stelle sono più o meno affidabili, a seconda dell'interesse degli astrofisici nei confronti dell'astro o dalle difficoltà oggettive nelle misurazioni (come nel caso della Stella Pistola). Le ultime stelle della lista, pur non essendo tra le più luminose conosciute, sono presenti solamente per raffronto.

Nome	Magnitudine apparente	Magnitudine assoluta	Luminosità (L_{\odot})
Eta Carinae (Massimo del 1843)	-0,8	-20,26	55.000.000
Eta Carinae (attuale)	tra 3,9 e 10,5	-12,1	5.500.000
Rho Cassiopeiae	4,4	-9,6	550.000
Alnilam	1,70	-9,2	380.000
Deneb	1,25	-8,73	250.000
Rigel	0,12	-8,03	67.000-100.000
Betelgeuse	0,58	-5,14	135.000
Alnitak	1,79	-7,8	100.000
Mintaka	2,23	-7,6	87.000
Antares	0,92	-7,2	60.000
Spica	1,00	-5,6	14.000
Canopo	-0,62	-5,53	12.900
Bellatrix	1,64	-4,75	6.300
Polaris	1,97	-3,6	2.200
Regolo	1,35	-1,6	350
Aldebaran	0,85	-0,63	140
Arturo	-0,04	-0,31	110
Capella	0,08	0,4	55
Castore	1,98	0,5	50
Vega	0,00	0,58	47
Polluce	1,14	0,7	42
Sirio	-1,46	1,4	22
Alpha Centauri A	-0,01	4,38	1,4
Sole	-26,8	4,75	1,00

Capitolo 6

La legge della gravitazione universale di Newton e le leggi di Keplero

In questo capitolo si dedurrà la legge della gravitazione universale di Newton dalle tre leggi di Keplero e viceversa facendo uso del calcolo differenziale. Alla fine verrà presentato brevemente un metodo che segue la dimostrazione di Newton rivisitata da Feynmann utilizzando proprietà geometriche dell'ellisse per arrivare in modo elementare, ma non banale, alla dimostrazione della legge delle orbite.

6.1 – Le leggi di Keplero

Johannes Keplero nasce a Weil der Stadt (nel sud della Germania) il 27 dicembre 1571. Dal 1591 iniziò lo studio della teologia a Tubinga, una università protestante dove insegnavano alcuni seguaci del copernicanesimo, tra cui Michael Maestlin, che convinse Keplero della validità delle teorie di Copernico. Nel 1594 Keplero divenne insegnante di matematica a Graz (Austria), tra i suoi compiti c'era anche quello di fare oroscopi (cosa molto comune per i matematici dell'epoca; anche Galileo arrotondava lo stipendio in questo modo) che risultavano molto apprezzati. Nel 1597 pubblicò il *Mysterium Cosmographicum*, nella quale tentò una prima descrizione dell'ordine dell'Universo. Nel 1599 Tycho Brahe gli offrì un posto come suo assistente, che accettò l'anno dopo e alla morte di Tycho Brahe, avvenuta nel 1601, divenne il suo successore nell'incarico di matematico ed astronomo imperiale a Praga. Nel 1604 osservò una supernova che ancora oggi è nota col nome di Supernova di Keplero^[25].

Le basi per le sue scoperte astronomiche furono gettate nel 1609, quando pubblicò *Astronomia nova*, in cui formulò le sue prime due leggi. La terza legge fu scoperta nel 1618, ma pubblicata l'anno successivo nell'opera *Harmonice mundi*. Morì a 58 anni a Ratisbona in Baviera. È certo che Keplero poté arrivare alla scoperta delle sue leggi analizzando la grande mole di dati osservativi che Tycho Brahe gli lasciò, con il compito di dimostrare il proprio modello di universo^[26]. Keplero

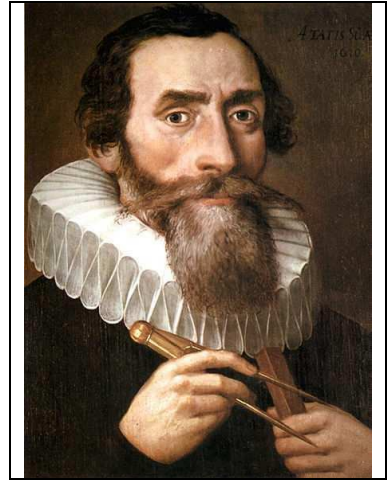


Figura 6.1 – Johannes Keplero

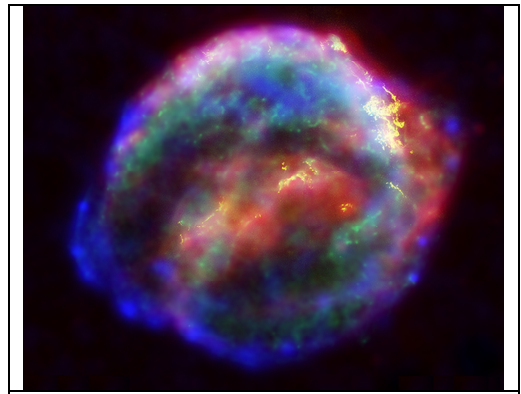


Figura 6.2 – Supernova di Keplero.

^[25] La Supernova 1604, conosciuta anche come la Supernova di Keplero o la stella di Keplero, fu una supernova esplosa nella nostra galassia, nella costellazione dell'Ofiuco. È al momento l'ultima supernova ad essere stata osservata nella nostra galassia, e si trovava ad una distanza di non più di 20.000 anni luce dalla Terra. Fu visibile ad occhio nudo per diciotto mesi, e al suo picco era più brillante di ogni altra stella del cielo, e anche di gran parte dei pianeti, grazie alla sua magnitudine apparente di -2,5. La supernova fu osservata per la prima volta il 9 ottobre 1604. Keplero la vide per la prima volta il 17 ottobre, ma la studiò così a lungo che essa prese il suo nome; pubblicò le sue osservazioni nel libro: *De Stella nova in pede Serpentarii* (Sulla nuova stella nel piede del Serpentario). Fu la seconda supernova osservata nello spazio di una generazione (dopo la SN 1572 vista da Tycho Brahe in Cassiopea). L'immagine della figura 6.2 è una composizione di varie riprese: il blu è dovuto alle zone di emissione di raggi X tra 4 e 6 keV riprese dal Chandra X-ray Observatory; il verde è anch'esso dovuto ai raggi X tra 0.3 e 1.4 keV, sempre ripresi dal Chandra X-ray Observatory; il giallo è dovuto alle emissioni nel visibile ed è stato ripreso dell'Hubble Space Telescope; il rosso all'emissione infrarossa ripresa dallo Spitzer Space Telescope. Le riprese del Chandra sono del giugno 2000, quelle di Hubble dell'agosto 2003 e quelle dello Spitzer dell'agosto 2004.

^[26] Il modello di Tycho (detto anche sistema ticonico) è un modello geocentrico del sistema solare secondo cui il Sole girerebbe attorno alla Terra immobile, e tutti gli altri pianeti girerebbero attorno al Sole. Il motivo per cui riteneva la

disattese le richieste del suo maestro mettendosi anche contro la famiglia di questi.

Le prime due leggi sono state già enunciate nel paragrafo 3.1, ma le rinunciamo qui.

Prima legge di Keplero: **Le traiettorie descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.**

Il fatto che il Sole occupi uno dei fuochi dell'ellisse implica che la distanza di un pianeta da esso non sia costante ma vari da un valore minimo ad un valore massimo. Lo stesso Keplero chiamò **perielio** (dal greco peri = intorno e helios = Sole) il punto di minima distanza e **afelio** (dal greco apo = lontano e helios = Sole) il punto di massima distanza.

Geometricamente l'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. Se in un sistema di assi cartesiani xOy l'asse x è la retta che contiene i fuochi, O il punto medio dei fuochi e l'asse y la perpendicolare a x passante per O (vedi figura 6.4). Dalla geometria si ricava che l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, $\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$ e $b^2 = a^2 - c^2$.

Ricordiamo anche che si definisce **eccentricità** dell'ellisse il rapporto: $e = \frac{c}{a}$ che risulta sempre

compreso tra 0 e 1.

Nel caso $e = 0$ si ha una circonferenza.

Una conica può essere definita anche come il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante il rapporto della distanza tra P e un punto fisso F (detto fuoco) e tra P e una retta d (detta direttrice). Tale rapporto viene indicato con e .

Si può ricavare l'equazione in coordinate polari con polo in F e asse polare x (la retta per F perpendicolare a d).

Dalla definizione di ha:

$$[6.1] \quad e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{r}{h - r \cos \theta}$$

dalla quale si ricava l'equazione polare della conica:

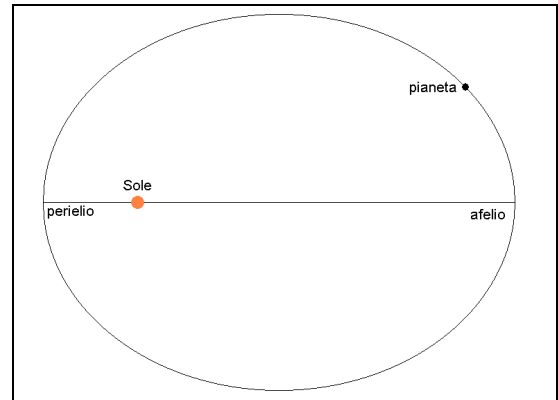


Figura 6.3 – Prima legge di Keplero. Nella figura l'ellisse è molto eccentrica rispetto alla realtà del Sistema Solare.

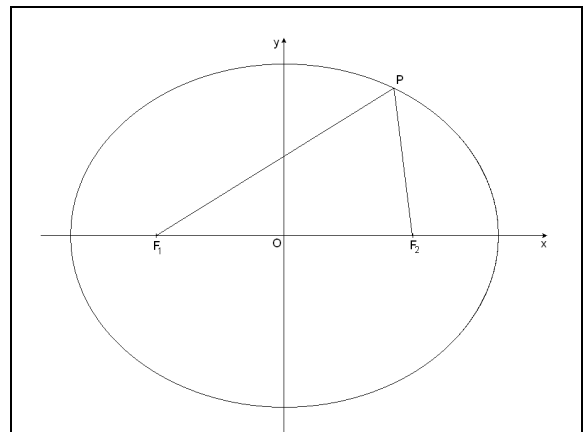


Figura 6.4 – Prima legge di Keplero. Nella figura l'ellisse è molto eccentrica rispetto alla realtà del Sistema Solare.

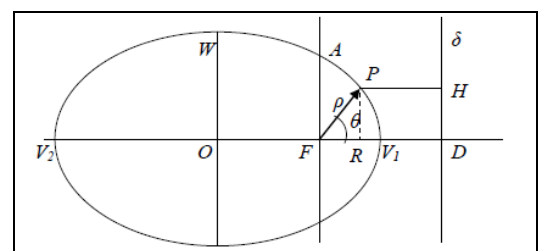


Figura 6.5 – Conica in forma polare.

terra ferma è che non si notava l'effetto di parallasse che in realtà esiste, ma non poteva essere osservato ad occhio nudo né con i telescopi per altri duecento anni perché anche le stelle più vicine sono molto più lontane di quanto gli astronomi dell'epoca ritenessero possibile. Nel modello ticonico la Terra era immobile, al centro di un universo racchiuso dalla sfera delle stelle fisse ed era il centro anche delle orbite della Luna e del Sole che, a sua volta, era il centro delle orbite degli altri 5 pianeti (Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno). Sono ancora necessari ep cicli, eccentrici ed equanti. Il sistema ticonico presentava alcuni vantaggi: i calcoli necessari erano pari a quelli del sistema copernicano e mantenendo la Terra ferma al centro dell'Universo si escludevano i conflitti con le Sacre Scritture.

$$[6.2] \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Si è introdotto il *parametro si scala* $p = eh$.

Si dimostra che la conica è:

- una iperbole se $e > 1$
- una parabola se $e = 1$
- una ellisse se $0 < e < 1$; nel caso $e = 0$ si ha una circonferenza

Nel caso dell'ellisse e è l'eccentricità e si dimostra che:

$$[6.3] \quad \frac{p}{1+e} \leq r \leq \frac{p}{1-e}$$

che sono i punti più vicino ($\theta = 0$) e più lontano ($\theta = \pi$) dal fuoco.

Il semiasse maggiore e il semiasse minore sono:

$$[6.4] \quad a = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right] = \frac{p}{1-e^2}$$

$$[6.5] \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Ne segue che $\frac{b^2}{a} = p$.

Ci tornerà utile ricordare anche che l'area dell'ellisse è: $A = \pi ab$

Seconda legge di Keplero: ***Il raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.***

Da questa legge consegue che la velocità con cui i pianeti orbitano attorno al Sole non è uniforme; se infatti consideriamo che i tratti P_1P_2 e P_3P_4 della figura 6.6 vengono descritti in tempi uguali, allora il tratto P_1P_2 viene percorso più lentamente del tratto P_3P_4 .

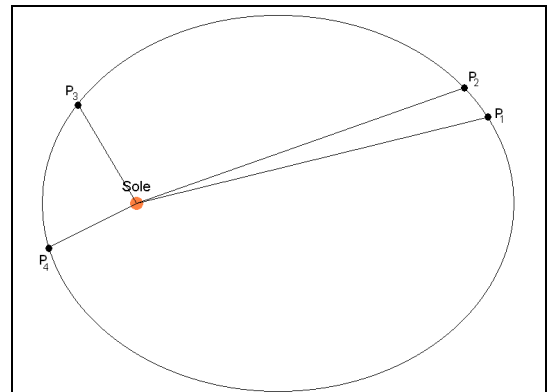


Figura 6.6 – Seconda legge di Keplero.

Terza legge di Keplero: ***I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiasse maggiori delle rispettive orbite.***

Indicato con T il periodo e con a il semiasse maggiore dell'orbita, allora:

$$[6.6] \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$$

Questa terza legge è di una categoria diversa rispetto alle altre due perché non è riferita ad un solo pianeta, ma mette in relazione i pianeti tra loro. Keplero vedeva in essa l'espressione più alta dell'armonia dell'Universo. Con la scoperta di queste leggi, l'astronomia compiva un gigantesco passo in avanti; veniva infatti risolto il problema che aveva assillato per secoli generazioni di scienziati: il calcolo della posizione di un pianeta nella sua orbita in un qualsiasi istante.

6.2 – Newton e la legge della gravitazione universale

Isaac Newton nacque a Woolsthorpe-by-Colsterworth il 25 dicembre 1642 e morì a Londra il 20

marzo 1727. Egli è sicuramente uno dei più grandi geni di tutti i tempi ed è universalmente noto per il suo contributo alla meccanica classica che pubblicò nel 1687 nell'opera: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. In essa descrive anche la legge di gravitazione universale per la formulazione della quale dovette introdurre i primi concetti del calcolo infinitesimale di cui condivide la paternità dello sviluppo con Gottfried Wilhelm Leibniz.

A Newton si deve la sistematizzazione matematica delle leggi di Keplero sul movimento dei pianeti; oltre a dedurle matematicamente dalla soluzione del problema della dinamica applicata alla Forza di gravità (problema dei due corpi) ovvero dalle omonime equazioni di Newton, egli generalizzò queste leggi intuendo che le orbite (come quelle delle comete) potevano essere non solo ellittiche, ma anche iperboliche e paraboliche. Newton si avvale del principio d'inerzia enunciato da Galileo e di una brillante intuizione di Hooke (gli aveva consigliato di studiare il moto dei pianeti dividendolo in due parti: una rappresentata da un moto inerziale lungo la tangente alla traiettoria, l'altra rappresentata da un moto accelerato in direzione del Sole) scoprì quale fosse il significato fisico delle leggi di Keplero. Concluse che essendo il moto dei pianeti non rettilineo e uniforme deve esserci una forza diretta verso il Sole che regola, ma non causa il moto.

Newton scoprì che tale forza segue la legge dell'inverso del quadrato della distanza. I punti salienti del suo ragionamento sono:

- tutti i corpi cadono, in prossimità della superficie terrestre, con un'accelerazione pari a circa $9,8 \text{ m/s}^2$;
- la causa che fa cadere un corpo non viene meno qualunque sia l'altezza a cui il corpo è posto; se così non fosse dovrebbe esistere una determinata quota al di sopra della quale i corpi cessano di cadere e di pesare;
- anche la Luna deve avere un peso e deve in qualche modo cadere^[27] sulla Terra; questo significa che la presenza della Terra regola il moto orbitale della Luna.

L'aneddoto racconta che Newton abbia scoperto la legge della gravitazione universale osservando le mele cadere dagli alberi e confrontando questo fatto col fatto che la Luna non cade. Se l'albero di mele fosse tanto alto da arrivare fino alla Luna, che cosa accadrebbe? Questo frutto dovrebbe necessariamente conservare ancora una certa pesantezza capace di spingerlo verso la Terra. Ma allora anche la Luna dovrebbe essere sospinta verso la Terra da una forza simile a quella della mela. Ma poiché la Luna non cade, pensò che la ragione di ciò avrebbe potuto essere il movimento di quell'astro, allo stesso modo che una bomba può passare sopra di noi senza cadere verticalmente. Questo paragone del movimento della Luna con quello di una bomba, lo spinse ad esaminare più attentamente le cose e scoprì che la Luna seguiva nel suo movimento le stesse regole che si osservano nel movimento di una bomba e se fosse possibile gettarla all'altezza della Luna e con la stessa velocità, tale bomba avrebbe un movimento identico a quello della Luna.

Newton parte dando per scontate le leggi della dinamica, prima fra tutte $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Quando una mela cade dalla pianta lo fa perché è soggetta alla forza peso, contemporaneamente anche la Luna risente di questa forza; se si muove attorno alla Terra con un moto approssimativamente circolare uniforme e non cade deve esserci una forza che la mantiene in quota. L'ipotesi di Newton fu che, in un sistema di riferimento non inerziale solidale con la Terra, la forza che manteneva in quota la Luna fosse la forza centrifuga.

Un'altra fondamentale intuizione di Newton fu di considerare le distanze misurate dal centro della Terra e non dalla sua superficie.

Per verificare quantitativamente l'esattezza delle sue supposizioni Newton scelse quindi il sistema Terra-Luna ed ipotizzò che la forza che faceva cadere i corpi in prossimità della superficie terrestre fosse la stessa che mantiene la Luna nella sua orbita.

I dati in possesso di Newton erano i seguenti:

[27] Potremmo dire che la Luna non cade affatto. Ma se sulla Luna non agisse alcuna forza, essa proseguirebbe in linea retta, mentre invece viaggia lungo una traiettoria circolare, cosicché in realtà cade rispetto alla posizione in cui si troverebbe se non vi fosse nessuna forza.

- raggio della Terra: $R_T \sim 6.400 \text{ km}$
- distanza Terra-Luna: $D_{T,L} \sim 384.000 \text{ km}$
- periodo di rivoluzione della Luna: $T_L = 29 \text{ giorni}$.

Mediante i quali è possibile calcolare le grandezze cinematiche relative al moto della Luna:

- velocità orbitale della Luna: $v_L \approx 1 \text{ km/s}$
- accelerazione centripeta della Luna: $a_{C,L} = 0,0027 \text{ m/s}^2$.

Era noto, fin da Aristarco e Ipparco che la distanza della Luna era di 60 raggi terrestri, per cui il rapporto tra le accelerazioni:

$$[6.7] \quad \frac{a_{C,L}}{g} = \frac{0,0027}{9,8} \approx \frac{1}{3600} = \frac{1}{D_{T,L}^2}$$

e quindi la forza dipende in maniera inversamente proporzionale al quadrato della distanza; in altri termini la Luna cade con un'accelerazione che è 3600 volte più piccola di quella con cui cade la "mela". Ciò convinse Newton a pensare che la forza di gravità variesse con l'inverso del quadrato della distanza:

$$[6.7] \quad F \propto \frac{1}{r^2}$$

La prima edizione della sua opera fu pubblicata nel 1687, ma gran parte del lavoro venne svolto dall'agosto 1665 al maggio 1667, quando a causa della peste si trasferì da Londra la paese natio. Nel libro III, Proposizione IV Teorema IV, Newton afferma: "*La Luna gravita verso la Terra, ed è continuamente ritratta dal moto rettilineo e trattenuta nella sua orbita dalla forza di gravità*" e ne dà una dimostrazione che, con un linguaggio più moderno riportiamo qui sotto.

Nel tempo t che la mela impiega a cadere da un'altezza h , la Luna cade di una quantità s , con linguaggio moderno, si ha:

$$[6.9] \quad \frac{h}{s} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{1}{2}at^2} = \frac{g}{a}$$

Se consideriamo un albero di 5 m, dal quale la mela impiega circa 1 s a cadere, si ha:

$$[6.10] \quad s = \frac{a}{g} h \approx \frac{1}{3600} \cdot (5\text{m}) \approx 1,4\text{mm}$$

Se è vera la legge dell'inverso del quadrato della distanza, allora, mentre la mela cade di 5 m, la Luna cade di circa 1,4 mm.

D'altra parte possiamo osservare che conoscendo il raggio dell'orbita lunare ($D_{T,L}$) e il tempo che la Luna impiega a girare intorno alla Terra (T_L), possiamo calcolare quale tratto (d) percorrerebbe la Luna, in 1 s, se non cadesse.

$$[6.11] \quad d = v \cdot t = \frac{2\pi D_{T,L}}{T_L} \cdot t = \frac{2\pi(384000\text{km})}{29\text{giorni}} \cdot (1\text{s}) \approx 1\text{km}$$

Indicando con s la quantità di cui cade la Luna in 1 s, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo TLP (vedi figura 6.7) si ricava:

$$\overline{TL}^2 + \overline{LP}^2 = \overline{TP}^2 \quad \Rightarrow \quad D_{T,L}^2 + d^2 = (D_{T,L} + s)^2 \quad \Rightarrow \quad D_{T,L}^2 + d^2 = D_{T,L}^2 + 2sD_{T,L} + s^2$$

nella terza espressione si può trascurare il termine s^2 perché piccolo rispetto agli altri termini e quindi si ricava: $s \approx \frac{d^2}{2D_{T,L}} \approx 1,3\text{mm}$. Da

ciò si deduce che la Luna, in 1 s , cade di circa 1,3 mm .

I dati in possesso di Newton permisero un buon risultato che però non lo soddisfaceva: così per diverso tempo non lo rese noto. Solo più tardi (nel 1679), con migliori misure della distanza Terra-Luna, egli ottenne la conferma numerica della sua teoria.

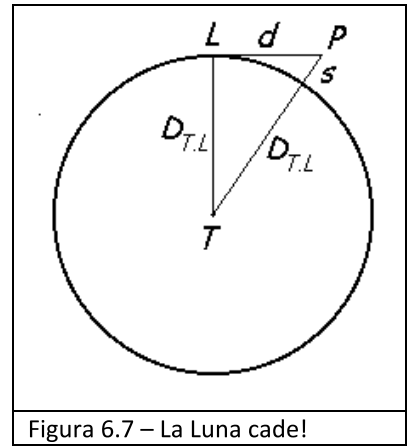


Figura 6.7 – La Luna cade!

È importante capire quali estrapolazioni avesse dovuto compiere Newton per giungere al risultato che la gravità segue la legge secondo la quale l'intensità della forza F varia con l'inverso del quadrato della distanza.

In primo luogo il risultato corretto ottenuto per il sistema Terra-Luna non autorizzava a pensare che esso potesse essere altrettanto corretto in altri sistemi con caratteristiche totalmente diverse da quello preso in esame. L'ipotesi di Newton, posta nel 1666, è stata verificata solo in tempi relativamente recenti studiando sistemi di stelle doppie.

In secondo luogo sorgeva il problema non secondario che il calcolo delle distanze usate per rapportare tra loro g e $a_{C,L}$, veniva eseguito partendo dal centro della Terra. Per poter giustificare questo calcolo Newton dovette prima sviluppare quegli strumenti matematici (il calcolo infinitesimale) che gli permisero poi di dimostrare che se due corpi sferici esercitano l'uno verso l'altro una forza che varia come $1/r^2$ allora si può supporre che tutta la massa di ciascun corpo sia concentrata nel centro del corpo stesso (il baricentro).

Ma non è tutto. Fino a quel momento, infatti, era opinione corrente che il moto dei pianeti si svolgesse attorno ad un punto coincidente con il centro del corpo centrale (il Sole) ritenuto immobile. Newton superò questa concezione applicando al moto planetario la sua terza legge del moto, il principio di azione e reazione. Egli affermò che per il terzo principio le azioni dei corpi che attraggono e che sono attratti sono sempre reciproche ed uguali: perciò se ci sono due corpi nessuno dei due può trovarsi in quiete, ed entrambi orbitano attorno a un centro comune (il *centro di massa* del sistema).

Newton formulò poi la *legge della gravitazione universale*, che possiamo enunciare come segue: **due corpi di masse m_1 ed m_2 esercitano l'uno sull'altro una forza, diretta lungo la loro congiungente, che è direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i loro centri.** In formula:

$$[6.12] \quad \mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Dove G è nota come *costante di gravitazione universale* ed assume nel Sistema Internazionale il valore $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ e \mathbf{u}_r è il versore della congiungente le due masse.

6.3 – Deduzione della legge di Newton dalle leggi di Keplero

Dalla cinematica del moto vario si ha:

$$[6.13] \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

Si ricordi che se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono i versori in una terna cartesiana e $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}$ quelli di una terna cilindrica, si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\
 \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\
 [6.14] \quad \dot{\mathbf{u}}_r &= \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\sin \theta \dot{\theta} \mathbf{i} + \cos \theta \dot{\theta} \mathbf{j} = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\
 \dot{\mathbf{u}}_\theta &= \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\cos \theta \dot{\theta} \mathbf{i} - \sin \theta \dot{\theta} \mathbf{j} = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r
 \end{aligned}$$

Utilizzando l'idea di Newton, considereremo Sole e pianeti come punti materiali ed esprimeremo tutto in coordinate cilindriche.

Indichiamo con m la massa del pianeta, con \mathbf{r} la sua distanza dal Sole e con \mathbf{v} la sua velocità; il momento angolare \mathbf{L} del pianeta rispetto al Sole è quindi dato da:

$$[6.15] \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r\mathbf{u}_r \times m(\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\mathbf{k}.$$

Dalla prima legge di Keplero segue che essendo l'ellisse una curva piana, **il verso del momento angolare è costante.**

$$[6.16] \quad \frac{\mathbf{L}}{L} = \text{costante}$$

Se il raggio vettore descrive in un intervallo dt un angolo $d\theta$, allora l'area spazzata dA è:

$$[6.17] \quad dA = \frac{1}{2} ds \cdot r = \frac{1}{2} (r \cdot d\theta) \cdot r = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Per la seconda legge di Keplero, dalla [6.15], segue che:

$$[6.18] \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

Quindi il vettore momento angolare \mathbf{L} non solo ha verso costante, ma anche modulo costante.

Scriviamo ora, per comodità, l'equazione polare dell'orbita [6.2] nella forma:

$$[6.19] \quad \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

Deriviamo rispetto a θ due volte

$$[6.20] \quad \frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin \theta$$

$$[6.21] \quad \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} = -\frac{e}{p} \cos \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$$

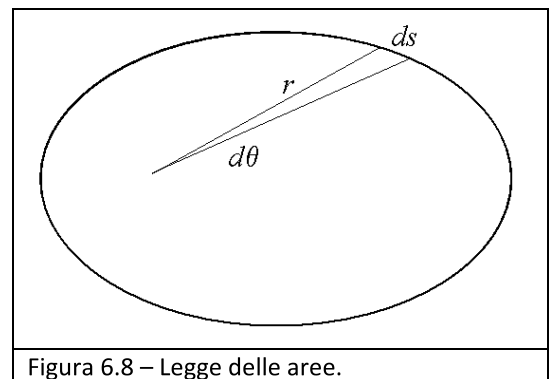


Figura 6.8 – Legge delle aree.

L'ipotesi da cui partiva Newton era che la forza fosse radiale, ossia: $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$. Calcoliamo quindi la forza F che agisce sul pianeta; per prima cosa determiniamo \dot{r} e \ddot{r} :

$$[6.22] \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d(1/r)} \frac{d(1/r)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{-1/r^2 dr} \left(-\frac{e}{p} \sin\theta \right) \frac{L}{mr^2} = \frac{Le}{mp} \sin\theta$$

$$[6.23] \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{Le}{mp} \cos\theta \right) \dot{\theta} = \frac{L^2 e}{m^2 r^2 p} \cos\theta = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)$$

Dalle [6.12] si ha che la componente radiale dell'accelerazione è: $a_r = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r$ e dalla [6.15] si ricava:

$$[6.24] \quad \dot{\theta}^2 r = \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 r = \frac{L^2}{m^2 r^3}$$

quindi

$$[6.25] \quad a_r = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{1}{p}$$

Ne segue che

$$[6.26] \quad \mathbf{F} = F\mathbf{u}_r = m\mathbf{a}_r = -m \frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{1}{p} \mathbf{u}_r = -\frac{L^2}{mr^2 p} \mathbf{u}_r$$

Dalla seconda legge di Keplero, in forma differenziale: $dA = \frac{L}{2m} dt$ si ha: $\int_0^A dA = \int_0^T \frac{L}{2m} dt$ da cui

segue: $A = \frac{L}{2m} T$ e quindi $\frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}$. Il periodo è quindi:

$$[6.27] \quad T = \frac{2\pi abm}{L}$$

Per la terza legge di Keplero $\frac{T^2}{a^3} = K' = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m^2}{L^2 a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 p}{L^2}$ e quindi $\frac{L^2}{mp} = \frac{4\pi^2 m}{K'} = K \cdot m$ con

$K = \frac{4\pi^2}{K'}$. Confrontando con la [6.25] si ha:

$$[6.28] \quad F = -K \frac{m}{r^2}$$

Nell'ipotesi (di Newton) che K sia direttamente proporzionale alla massa del Sole M si ha:

$$[6.29] \quad F\mathbf{u}_r = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r$$

6.4 – Il problema dei due corpi

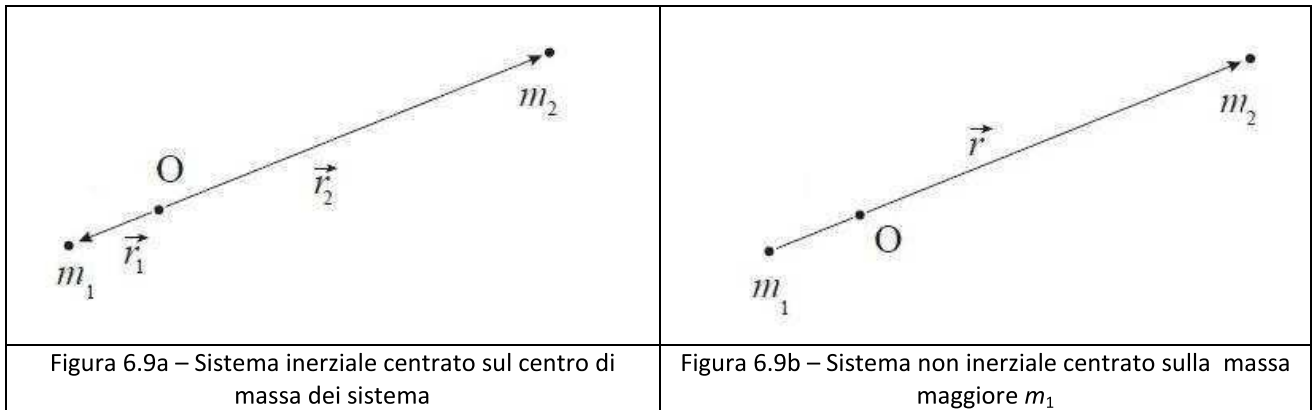
Ricavare le leggi di Keplero dalla legge di gravitazione universale di Newton equivale a risolvere il **problema dei due corpi**, cioè lo studio delle equazioni del moto di due corpi puntiformi, isolati, sotto l'azione della mutua interazione gravitazionale.

L'approssimazione è valida anche se si considerano corpi sferici, a patto di considerare la massa nei rispettivi centri di massa.

Il problema può essere affrontato da due sistemi di riferimento:

- quello inerziale, centrato nel centro di massa del sistema
- quello non inerziale centrato in uno dei due corpi, in genere si utilizza il corpo di massa

maggiore.



Affrontiamo il problema dal punto di vista inerziale. In coordinate polari si ha:

$$[6.30] \quad \begin{cases} \mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{r_1} \\ \mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{r_2} \end{cases}$$

inoltre risulta $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2|$. Dalla definizione di centro di massa si ha:

$$[6.31] \quad m_1 r_1 + m_2 r_2 = m_{tot} r_g = 0$$

dove $m_{tot} = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema e r_g è il modulo del vettore posizione del centro di massa ed è ovviamente $r_g = 0$. Dalla [6.31] si ricava:

$$[6.32] \quad \begin{cases} |r_1| = \frac{m_2}{m_1} |r_2| \\ |r_2| = \frac{m_1}{m_2} |r_1| \end{cases}$$

Risulta anche $\mathbf{u}_{r_1} = -\mathbf{u}_{r_2}$ per cui conviene porre $\mathbf{u}_{r_1} = \mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_{r_2} = -\mathbf{u}_r$.

Torniamo alla [6.30] e moltiplichiamo la prima per m_2 e la seconda per m_1 . Utilizziamo le definizioni sui versori date sopra, si ha:

$$[6.33] \quad \begin{cases} m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \\ m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = +m_1 G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda otteniamo

$$[6.34] \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove

$$[6.35] \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

è la cosiddetta **massa ridotta del sistema**; abbiamo posto $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$.

Affrontiamo il problema dal punto di vista di un sistema di riferimento non inerziale solidale con il punto di massa maggiore (m_1 per esempio). Siano O e O' i sistemi di riferimento solidale con m_1 e

con il centro di massa. Gli assi dei due sistemi rimangono paralleli nel tempo (non ruotano $\omega = 0$). Nel sistema di riferimento di O abbiamo:

$$[6.36] \quad \begin{cases} m_1 a_1' = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = F_{12} \\ m_2 a_2' = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = F_{21} \end{cases}$$

Nel sistema di riferimento di O' abbiamo:

$$[6.37] \quad \begin{cases} m_1 a_1 = 0 \\ m_2 a_2 = F_{21} + F_{tr} \end{cases}$$

con F_{tr} sono state indicate le forze di trascinamento; risulta:

$$[6.38] \quad F_{tr} = -m_2 a_1' = -m_2 \frac{m_1 a_1'}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1} F_{12} = \frac{m_2}{m_1} F_{21}$$

quindi la seconda delle [6.37] può essere scritta nella forma:

$$[6.39] \quad m_2 a_2 = F_{21} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)$$

F_{21} è la stessa nei due sistemi, quindi da questa si ricava:

$$[6.40] \quad \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{a}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

e quindi

$$[6.41] \quad \mu \mathbf{a}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r.$$

Che è la stessa soluzione trovata nel caso inerziale visto che $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$.

La questione può essere interpretata come se ci fosse un corpo di massa m ad orbitare attorno al comune centro di massa del sistema.

Si consideri ora il sistema Sole-pianeta come sistema isolato e onde evitare inutili appesantimenti della formule indichiamo con M la massa del Sole e con m la massa del pianeta. Per il principio di conservazione dell'energia: $E = T + U = \text{costante}$, risulta:

$$[6.42] \quad E = \frac{1}{2} \mu (v_{rad}^2 + v_{\perp}^2) - G \frac{Mm}{r}$$

dove μ è la massa ridotta del sistema. Ricordiamo che: $v_{rad} = \dot{r}$, $v_{\perp} = r\dot{\theta}$, $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$. Si ha:

$$[6.43] \quad E = \frac{1}{2} \mu v_{rad}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G \frac{Mm}{r}.$$

Si definisce energia potenziale efficace U_{eff} la quantità:

$$[6.44] \quad U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - G \frac{Mm}{r}.$$

Si dimostra facilmente che $U_{eff} = 0$ per $r = \frac{L^2}{2GMm\mu}$; inoltre $E = U_{eff}$ implica $v_{rad} = 0$ e quindi il moto è circolare uniforme.

Il momento angolare totale del sistema è $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}$; ricordiamo inoltre che $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ e che $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$. Essendo infine le forze centrali il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è nullo $\left(\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \right)$ e da ciò segue che $\mathbf{L} = \text{costante}$ e quindi **il moto del pianeta avviene su di un piano**. Sostituendo nella [6.43] l'espressione del modulo del momento angolare, si ha:

$$[6.45] \quad E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 - G \frac{Mm}{r}$$

da cui si ricava che

$$[6.46] \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - r^2 \dot{\theta}^2}$$

Il segno della radice non è inessenziale. Dall'espressione del momento angolare, $L = \mu r^2 \dot{\theta}$, si ricava che: $r^2 \dot{\theta}^2 = r^2 \left(\frac{L}{\mu r^2} \right)^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$ che sostituita nella [6.46] dà:

$$[6.47] \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili e possiamo scriverla nella forma:

$$[6.48] \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}$$

Ricordando che $d\theta = \dot{\theta} dt = \frac{L}{\mu r^2} dt$, si ha l'equazione:

$$[6.49] \quad d\theta = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}$$

che risolta ci permette di trovare l'equazione polare della traiettoria del pianeta intorno al Sole. Integriamo quindi la [6.49] tra una posizione iniziale θ_0 a cui corrisponde r_0 e una posizione generica θ a cui corrisponde r .

$$[6.50] \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r(\theta_0)}^r \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2GM^2 m^2}{(M+m)r} - \frac{L^2}{r^2}}}$$

Per calcolare l'integrale a destra effettuiamo un cambiamento di variabile ponendo $u = \frac{1}{r}$ e per

semplificare i calcoli poniamo momentaneamente $c = 2\mu E$, $b = \frac{GM^2 m^2}{M+m}$. Si ha quindi

$du = -\frac{1}{r^2} dr$. Si consideri ora l'integrale indefinito a secondo membro della [6.50], con le sostituzioni di cui sopra si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2GM^2 m^2}{(M+m)r} - \frac{L^2}{r^2}}} &= -\int \frac{Ldu}{\sqrt{c + 2bu - L^2 u^2}} = -\int \frac{Ldu}{\sqrt{c + \frac{b^2}{L^2} - \frac{b^2}{L^2} + 2bu - L^2 u^2}} = \\ &= -\int \frac{Ldu}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{b}{L} - Lu\right)^2}} = -\int \frac{Ldu}{k \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{b}{L} - Lu}{k}\right)^2}} \end{aligned}$$

dove si è posto $k^2 = c + \frac{b^2}{L^2}$. Con un nuovo cambiamento di variabile, $z = \frac{\frac{b}{L} - Lu}{k}$ e quindi

$dz = -\frac{L}{k} du$, si ha:

$$\int \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2GM^2 m^2}{(M+m)r} - \frac{L^2}{r^2}}} = -\int \frac{Ldu}{\sqrt{c + 2bu - L^2 u^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arcsenz}$$

Risostituendo:

$$\text{arcsenz} = \text{arcsen} \frac{\frac{b}{L} - Lu}{\sqrt{c + \frac{b^2}{L^2}}} = \text{arcsen} \frac{\frac{b}{L} \left(1 - \frac{L^2}{b} u\right)}{\frac{b}{L} \sqrt{\frac{L^2 c}{b^2} + 1}} = \text{arcsen} \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r}\right) \right]$$

si è posto:

$$[6.51] \quad p = \frac{L^2}{b} = \frac{L^2 (M+m)}{GM^2 m^2}$$

$$[6.52] \quad e = \sqrt{\frac{L^2 c}{b^2} + 1} = \sqrt{1 + \frac{2\mu EL^2 (M+m)^2}{G^2 M^4 m^4}}.$$

Dalla [6.50] si ha quindi:

$$[6.53] \quad \theta - \theta_0 = \left[\text{arcsen} \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r}\right) \right] \right]_{r_0}^r = \text{arcsen} \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r}\right) \right] - \text{arcsen} \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r_0}\right) \right]$$

Ponendo $\theta_0 = 0$ al perielio, si ottiene: $r_0 = a - c = a - ea = a(1-e) = \frac{p}{1-e^2}(1-e) = \frac{p}{1+e}$.

Interpretando p come parametro di scala ed e come eccentricità dell'orbita si ottiene: $a = \frac{p}{1-e^2}$.

Nella [6.53] si ha $\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r_0}\right) = \frac{1}{e}(1 - (1+e)) = -1$ da cui $\arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r_0}\right)\right] = -\frac{\pi}{2}$ e quindi

$\theta = \arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r}\right)\right] + \frac{\pi}{2}$. Ne segue che:

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r}\right)\right] \Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r}\right) \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - 1\right)$$

ed infine

$$[6.54] \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

che è l'equazione dell'orbita.

Dalla definizione di e si ricava che l'eccentricità dell'orbita dipende dall'energia del sistema.

- Se $E > 0$, $e > 1$ e quindi l'orbita è un'iperbole.
- Se $E = 0$, $e = 1$ e l'orbita è una parabola.
- Se $E < 0$, $0 < e < 1$ e l'orbita è una ellisse.

Il caso $e = 0$, l'orbita circolare, corrisponde ad una energia $E = -\frac{G^2 M^4 m^4}{2\mu L^2 (M+m)^2}$.

La seconda legge di Keplero deriva dal fatto che essendo le forze centrali il momento torcente è nullo e quindi il momento angolare è costante; in modulo del momento angolare è: $L = \mu r^2 \dot{\theta}$.

Poiché l'area è $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, l'area spazzata nell'intervallo di tempo dt è data da:

$$[6.55] \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} = \text{costante}.$$

Per ricavare la terza legge di Keplero si integra la [6.55] su tutto il periodo T , si ottiene: $A = \frac{L}{2\mu} T$.

Ricordando l'area dell'ellisse si ha: $T^2 = \frac{4\mu^2 \pi^2 a^2 b^2}{L^2}$ e quindi:

$$[6.56] \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\mu^2 \pi^2}{L^2} \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2}{L^2} \mu^2 p = \frac{4\pi^2}{L^2} \frac{M^2 m^2}{(M+m)^2} \frac{L^2 (M+m)}{GM^2 m^2} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

Si è utilizzata la definizione di massa ridotta e la [6.51].

6.5 – Il moto dei pianeti intorno al sole (Una lezione di Richard Feynman)

La lezione tenuta da Richard Feynman il 23 marzo 1964 al Caltech (California Institute of Technology), pubblicata da David e Judith Goodstein in un volume che in Italia è edito da Zanichelli riporta un metodo per determinare la legge delle ellissi in modo elementare, senza utilizzo del calcolo differenziale. Feynman tenne questa lezione "soltanto per il piacere di farla, e per vostro divertimento", come egli disse accolto dagli applausi degli studenti; la lezione fu registrata e l'edizione inglese del volume è corredata da una compact disc con la registrazione.

Nel corso della lezione Feynman si riferiva continuamente a delle figure che andava disegnando alla lavagna. Di esse restano soltanto alcuni schizzi, ritrovati tra i suoi appunti e riprodotti in questo volume. Su questa base David Goodstein ha ricostruito il contenuto della lezione.

"Le cose semplici hanno dimostrazioni semplici" aveva scritto Feynman negli appunti della lezione. Poi aveva sostituito semplici con "elementari". Come osserva Goodstein, la dimostrazione che Feynman si accingeva a presentare "era senz'altro elementare, nel senso che faceva uso di una matematica non più avanzata di quella del liceo, ma era ben lontana dall'essere semplice".

Newton si rese conto che la seconda legge di Keplero equivale ad affermare che le forze sono centrali. Ed "è facile dimostrare" sulla base della terza legge, che la forza varia secondo l'inverso del quadrato della distanza. Tuttavia, affermava Feynman, "la più straordinaria" delle scoperte di Newton fu che la legge delle ellissi, la prima legge di Keplero, era una conseguenza delle altre due. Una volta stabilito, cioè, che la forza è diretta verso il Sole e varia secondo l'inverso del quadrato della distanza, "il contributo di Newton consiste nel calcolare la sottile combinazione di velocità e variazione di velocità che determina l'orbita, mostrando che essa è un'ellisse". Ed è questa dimostrazione che Feynman presenta nella sua lezione, seguendo inizialmente il procedimento geometrico di Newton. "Egli [Newton] scriveva in un'epoca in cui la conoscenza delle sezioni coniche era la cosa più ovvia del mondo" e così, confessa Feynman, "usa delle proprietà (per me) completamente sconosciute e io mi trovo a doverle dimostrare mentre procedo". Fino al punto da rendersi conto di non riuscire "a seguire molto bene" la dimostrazione di Newton, "dato che implica tante proprietà delle sezioni coniche". Con una felice intuizione geometrica e fisica Feynman inventa allora una propria dimostrazione "elementare". "Elementare", egli spiega ai suoi studenti, vuol dire che "è necessario sapere ben poco in anticipo per poterla capire", ci vuole solo intelligenza.

La lezione si sviluppa nei seguenti punti:

- un'introduzione storica al problema;
- una descrizione di alcune proprietà geometriche di un'ellisse;
- dimostrazione di Newton che se un pianeta descrive un'orbita mediante una forza diretta verso il sole allora vale la seconda legge di Keplero;
- dimostrazione di Feynman che ad uguali variazioni della velocità corrisponde una uguale variazione degli angoli nell'orbita;
- dimostrazione di Feynman, usando le tecniche di Fano, che questi cambiamenti di velocità implicano che l'orbita sia ellittica.
- discussione sugli esperimenti del Rutherford con la dispersione delle particelle di alfa e la scoperta del nucleo atomico.

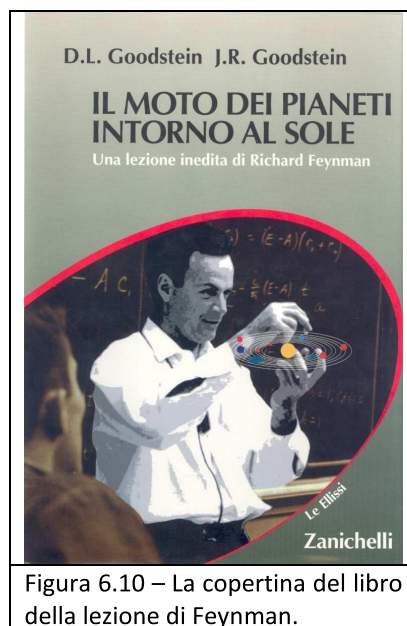


Figura 6.10 – La copertina del libro della lezione di Feynman.

Capitolo 7

Il problema di Keplero

Si è vista qual è la forma delle orbite nel problema dei due corpi, ora si vedrà come collegare l'orbita alle osservazioni. Dapprima come, dalla conoscenza degli elementi orbitali si possa determinare la posizione del corpo celeste (effemeridi), poi il problema inverso, ossia come ricavare gli elementi orbitali dalle osservazioni. Si ricaveranno i risultati facendo riferimento al Sistema Solare.

7.1 – Equazione di Keplero

Sia t l'istante in cui un pianeta si trova nel punto $P(x,y)$ della sua orbita ellittica che scriviamo in forma canonica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e T l'istante in cui il pianeta è passato al perielio A . Quindi $t - T$ è l'intervallo di tempo che impiega a percorrere l'arco AP .

Sia a anche il raggio di una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ avente lo stesso centro dell'ellisse e E l'angolo ACQ detto **anomalia eccentrica**. Il punto P ha coordinate $P(a \cos E, b \sin E)$ in quanto è evidente che $x_p = a \cos E$ ed essendo un punto dell'ellisse

$\frac{(a \cos E)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ da cui segue $y^2 = b^2 \sin^2 E$. Il

punto Q ha coordinate $P(a \cos E, a \sin E)$, per cui

$$\frac{PR}{QR} = \frac{y_P}{y_Q} = \frac{b \sin E}{a \sin E} = \frac{b}{a}.$$

Consideriamo i triangoli RSP e RSQ ; avendo la stessa base, per le aree si ha che, $\frac{\mathcal{A}(RSP)}{\mathcal{A}(RSQ)} = \frac{b}{a}$.

Consideriamo ora i semisegmenti di ellisse ARP e di circonferenza ARQ , si ha:

$$\mathcal{A}(ARQ) = \int_{a \cos E}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ e } \mathcal{A}(ARP) = \frac{b}{a} \int_{a \cos E}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ per cui: } \frac{\mathcal{A}(ARP)}{\mathcal{A}(ARQ)} = \frac{b}{a} \text{ da ciò segue}$$

$$\text{che, essendo } \mathcal{A}(ASP) = \mathcal{A}(ARP) - \mathcal{A}(SRP) = \frac{b}{a} \mathcal{A}(ARQ) - \frac{b}{a} \mathcal{A}(SRQ) = \frac{b}{a} \mathcal{A}(ASQ) \text{ e}$$

$$\mathcal{A}(ASQ) = \mathcal{A}(ACQ) - \mathcal{A}(SCQ) = \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} (ea)(a \sin E) \text{ (dalla definizione di eccentricità,$$

essendo S un fuoco dell'ellisse, $e = \frac{CS}{a}$)

$$\mathcal{A}(ASP) = \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} ea^2 \sin E \right) = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E)$$

Per la seconda legge di Keplero, inoltre:

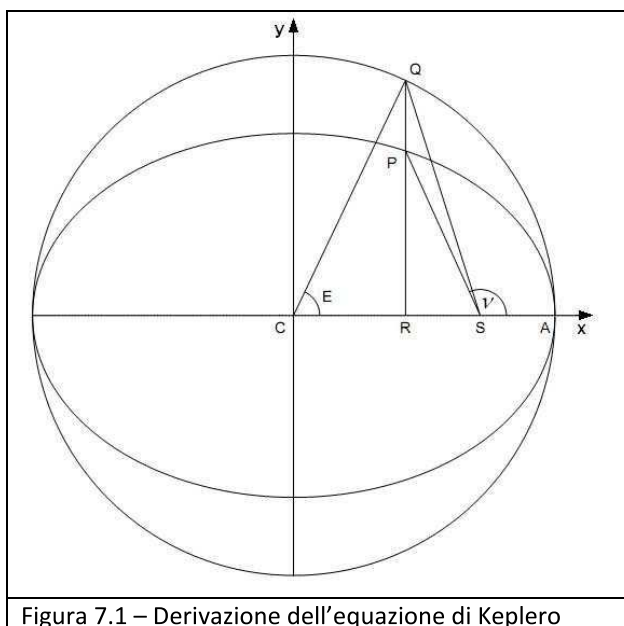


Figura 7.1 – Derivazione dell'equazione di Keplero

$$\mathcal{A}(ASP) : \mathcal{A} = (t - T) : P$$

dove $\mathcal{A} = \pi ab$ è l'area dell'ellisse e P il periodo. Si ha: $\mathcal{A}(ASP) = \pi ab \frac{(t - T)}{P}$. Quindi:

$$\frac{1}{2} ab (E - esenE) = \pi ab \frac{(t - T)}{P} \text{ da cui:}$$

$$[7.1] \quad E - esenE = \frac{2\pi}{P} (t - T)$$

La [7.1] è detta **equazione di Keplero**. È un'equazione trascendente e non ammette soluzioni algebriche. La soluzione può essere determinata in vari modi.

La quantità $\frac{2\pi}{P} = n$, che può essere vista come la velocità angolare media del pianeta, viene detta **moto medio**. Definiamo **anomalia media** la quantità:

$$[I] \quad M = n(t - T)$$

E l'equazione di Keplero può essere scritta nella forma:

$$[II] \quad E - esenE = M$$

Trovata E con la [7.1] è ora necessario determinare l'anomalia vera v . Da $CR = CS - RS$ si ha:

$$[7.2] \quad a \cos E = ae - r \cos(\pi - v) = ae + r \cos v$$

Dall'equazione polare dell'ellisse in forma polare: $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ dove $p = a(1 - e^2)$ si ha:

$$r \cos v = \frac{a(1 - e^2) \cos v}{1 + e \cos v}, \text{ per cui } a \cos E = ae + \frac{a(1 - e^2) \cos v}{1 + e \cos v}$$

$$\cos E = e + \frac{(1 - e^2) \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{e + \cancel{e^2 \cos v} + \cos v - \cancel{e^2 \cos v}}{1 + e \cos v} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}.$$

Si usa più frequentemente:

$$[III] \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

che si ricava dalle formule di bisezione $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}$ ed essendo

$$1 - \cos E = 1 - \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{1 + e \cos v - e - \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{(1 - e) - (1 - e) \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{(1 - e)(1 - \cos v)}{1 + e \cos v}$$

$$1 + \cos E = 1 + \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{1 + e \cos v + e + \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{(1 + e) + (1 + e) \cos v}{1 + e \cos v} = \frac{(1 + e)(1 + \cos v)}{1 + e \cos v}$$

$$\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{(1 - e)(1 - \cos v)}{(1 + e)(1 + \cos v)} \quad \text{da cui} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}.$$

Nel risultato non è importante il segno in quanto sia $E/2$ che $v/2$ sono nello stesso quadrante.

Trovata l'anomalia vera, r può essere determinato dall'equazione delle orbite o dalla [7.2], ma è più semplice esprimere r in termini dell'anomalia eccentrica. L'equazione dell'orbita può essere scritta nella forma $r + r e \cos v = a(1 - e^2)$ e dalla [7.2], moltiplicata per e : $r e \cos v = a(e \cos E - e^2)$ e sottraendo membro a membro:

$$[\text{IV}] \quad r = a(1 - e \cos E)$$

In un sistema di riferimento (ξ, η) , con l'asse ξ coincidente con l'asse x e l'asse η parallelo all'asse y e passante per S , le coordinate del punto P sono:

$$[\text{7.3}] \quad \begin{aligned} \xi &= \overline{SR} = \overline{SC} - \overline{CR} = -ae + a \cos E \\ \eta &= \overline{RP} = \frac{b}{a} \overline{RQ} = b \sin E \end{aligned}$$

Con le relazioni [I] – [IV] che risolvono il problema di Keplero, sono facilmente calcolabili le due coordinate polari v e r del pianeta per ogni istante t , quando siano conosciute le quantità geometriche a ed e dell'ellisse e il tempo T .

Nella maggior parte delle applicazioni l'equazione di Keplero [7.1] deve essere risolta rispetto a E . Il caso più normale è quello del calcolo delle effemeridi^[28] di un pianeta, di cui si conoscono gli elementi orbitali e si vuole determinare la posizione a un certo istante t ; nella [7.1] sono dunque noti M , dalla (I), ed e e si vuole determinare E ^[29].

Si possono trovare in letteratura decine di metodi diversi per la soluzione di questo problema; la maggior parte di questi si basa su un processo iterativo che si sviluppa essenzialmente in due fasi:

- 1) determinare una formula di partenza che fornisce un valore approssimato E_0 ;
- 2) determinare una formula iterativa che corregge un valore approssimato E_n fornendo un nuovo valore E_{n+1} più vicino alla soluzione.

In questo modo è possibile costruire una successione di valori $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ che converge verso la soluzione esatta: il procedimento viene arrestato dopo un numero finito di passi, quando l'errore è sceso al disotto di un valore prefissato.

Senza entrare in particolari, citiamo due metodi iterativi molto semplici, consigliabili per valori di eccentricità non troppo elevati.

Il primo è il metodo delle tangenti di Newton-Raphson che si utilizza per determinare gli zeri di una funzione. Si cercano gli zeri dell'equazione $F(E) = 0$ approssimando la funzione F con il suo sviluppo di Taylor troncato al primo termine

$$F(E_{n+1}) \approx F(E_n) + F'(E_n)(E_{n+1} - E_n)$$

[²⁸] Il termine effemeride (dal greco ephemeris, "giornaliero") indica una tavola in cui si riportano in anticipo (solitamente da un anno per l'altro con periodicità giornaliera) le coordinate celesti del Sole, della Luna e dei pianeti principali. Fino a poche decine di anni fa era uno strumento essenziale per astronomi e marinai.

[²⁹] Per il resto del paragrafo confronta Mario Carpino: Introduzione ai metodi di calcolo di effemeridi e determinazione orbitale. (www.brera.mi.astro.it/~carpino/didattica/detorb.pdf)

Imponendo $F(E_{n+1}) = 0$ si ottiene

$$E_{n+1} = E_n - \frac{F(E_n)}{F'(E_n)}$$

Nel caso dell'equazione di Keplero

$$[7.4] \quad F(E) = E - e \sin E - M$$

$$[7.5] \quad F'(E) = 1 - e \cos E$$

Da cui

$$E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \sin E_n}{1 - \cos E_n}$$

Un altro metodo molto usato (anche se converge un po' più lentamente del precedente) consiste nel porre semplicemente

$$[7.6] \quad E_{n+1} = M + e \sin E_n$$

esso si basa sul fatto che l'applicazione $E_n \rightarrow E_{n+1}$ è una contrazione, perciò la successione $\{E_n\}$ tende a un limite che è il punto unito della [7.6], cioè la soluzione cercata.

Come valore di partenza per le iterazioni si può adottare per entrambi i metodi il valore

$$[7.7] \quad E_0 = M$$

C'è da notare però che con questa scelta del valore di partenza il metodo di Newton-Raphson non è convergente per valori di eccentricità $e > e^*$ con $e^* \approx 0,9733$.

Ci siamo fino a ora occupati del moto del pianeta nel suo piano orbitale; in particolare le equazioni [7.3] forniscono la soluzione nel sistema di riferimento orbitale (ξ, η, ζ) , in cui il piano (ξ, η) coincide con il piano dell'orbita (ζ è parallelo al momento angolare \mathbf{L}) e l'asse ξ è diretto verso il perielio. Per passare alla posizione del pianeta in un generico sistema di riferimento (x_1, x_2, x_3) occorre conoscere l'orientazione degli assi (ξ, η, ζ) rispetto agli assi (x_1, x_2, x_3) ; questa è descritta, come è usuale in geometria, da una terna di angoli di Eulero che, nel caso del problema dei due corpi, assumono nomi particolari:

- l'**inclinazione orbitale** i è l'angolo tra il piano orbitale e il piano (x_1, x_2) , cioè tra il vettore momento angolare \mathbf{L} e l'asse x_3 ;
- la **longitudine del nodo ascendente** Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2) , misurato sul piano (x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);

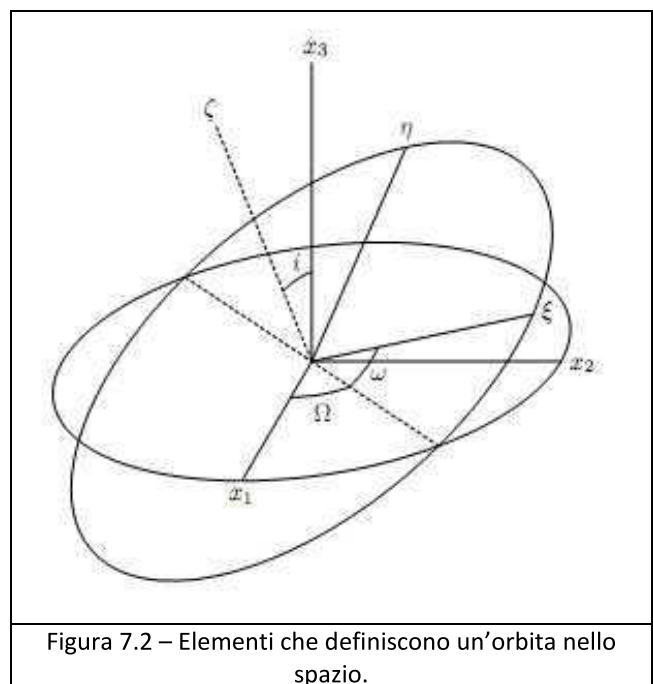


Figura 7.2 – Elementi che definiscono un'orbita nello spazio.

- l'argomento del perielio ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsidi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.

In alternativa all'argomento del perielio ω viene a volte usata la **longitudine del perielio**^[30] definita come $\varpi = \Omega + \omega$.

È comodo esprimere la trasformazione tra (ξ, η, ζ) e (x_1, x_2, x_3) in funzione delle matrici di rotazione; si chiama matrice di rotazione $\mathbf{R}_j(\alpha)$ la matrice che trasforma la terna di coordinate (x_1, x_2, x_3) nelle coordinate (x'_1, x'_2, x'_3) associate ad un nuovo sistema di riferimento, ruotato di un angolo α attorno all'asse x_j (in senso diretto)

$$[7.8] \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_j(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le matrici di rotazione $\mathbf{R}_i(\alpha)$ attorno agli assi x_i sono:

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si ottengono una dall'altra per permutazione ciclica delle linee e delle colonne.

Come si può ricavare dalla Figura 7.2, la terna (x_1, x_2, x_3) può essere ottenuta dalla terna (ξ, η, ζ) per mezzo di tre rotazioni successive:

1. una rotazione di $-\omega$ attorno all'asse ζ , che porta l'asse ξ a coincidere con la linea dei nodi (nodo ascendente);
2. una rotazione di $-i$ attorno al nuovo asse ξ (risultato della precedente rotazione), che porta l'asse ζ a coincidere con l'asse x_3 ;
3. una rotazione di $-\Omega$ attorno al nuovo asse ζ (risultato delle due precedenti rotazioni).

La trasformazione cercata è dunque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\Omega, i, \omega) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

^[30] Riguardo alla nomenclatura degli angoli bisogna osservare che, nell'uso tradizionale

- vengono chiamati anomalie gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea degli apsidi (direzione del perielio);
- vengono chiamati argomenti gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea dei nodi (nodo ascendente);
- vengono chiamati longitudini gli angoli misurati nel piano fondamentale (x_1, x_2) del sistema di riferimento inerziale a partire dall'asse x_1 , anche quando (come nel caso della longitudine del perielio) l'angolo sia in realtà formato dalla somma di più termini, di cui solo il primo è misurato a partire dall'asse x_1 .

dove $\mathbf{R}(\Omega, i, \omega) = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i)\mathbf{R}_3(-\omega)$; sostituendo le espressioni esplicite delle matrici di rotazione si ottiene

$$[7.9] \mathbf{R}(\Omega, i, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

In definitiva l'orbita di un pianeta può essere individuata per mezzo dei sei elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω ed M . a ed e descrivono la forma e le dimensioni dell'orbita; i, ω, Ω danno l'orientazione del piano orbitale nel sistema di riferimento usato e M indica la posizione del pianeta lungo l'orbita a un certo istante di tempo.

È opportuno pensare ai sei parametri come ad un altro modo di specificare le coordinate del pianeta, alternativo rispetto alle sei componenti dei vettori \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$, ma ad esso completamente equivalente, tanto che tra le due rappresentazioni esiste una corrispondenza biunivoca^[31].

I sei elementi orbitali kepleriani a, e, i, ω, Ω ed M non sono ben definiti però per orbite di eccentricità e /o inclinazione prossime a zero: in particolare, la longitudine del nodo Ω e l'argomento del perielio ω risultano indeterminati per $i = 0$; ancora l'argomento del perielio ω e l'anomalia media M sono indeterminati per $e = 0$. Ciò significa che la trasformazione di coordinate da elementi kepleriani a vettori posizione e velocità è localmente non invertibile nell'intorno di $i = 0, e = 0$ (la matrice jacobiana della trasformazione è singolare); questo fatto introduce instabilità numeriche in alcune applicazioni, per cui è talvolta consigliabile utilizzare una parametrizzazione dell'orbita che non presenti questo inconveniente. Ciò può essere ottenuto usando opportuni accorgimenti:

7.2 – Aspetto dei pianeti

Alcune considerazioni sull'aspetto dei pianeti sulla volta celeste. La Figura (7.3) mostra le possibili configurazioni Terra, Sole, pianeta, con la terminologia usuale di congiunzioni, opposizioni, elongazioni.

Per l'osservatore terrestre le semplici orbite kepleriane si traducono in strani cammini apparenti sulla volta celeste, sia rispetto alle stelle che al Sole. In più, i due pianeti inferiori (Mercurio, Venere) non possono mai discostarsi dal Sole per più di $22^\circ 46'$ e $46^\circ 20'$ rispettivamente. Essi possono anche passare davanti al disco del Sole; ciò può succedere a Mercurio (i transiti possono avvenire in maggio o novembre e mentre questi ultimi hanno periodi di 7, 13 o 33 anni, quelli di maggio avvengono solo ad intervalli di 13 o 33 anni). Per Venere invece il fenomeno è molto più raro, con qualche eccezione ogni 243 anni si

Transiti di Mercurio sul disco del Sole	Transiti di Venere sul disco del Sole.
7 novembre 1960	7 dicembre 1631
9 maggio 1970	4 dicembre 1639
10 novembre 1973	6 giugno 1761
13 novembre 1986	3 giugno 1769
6 novembre 1993	9 dicembre 1874
15 novembre 1999	6 dicembre 1882
7 maggio 2003	8 giugno 2004
8 novembre 2006	6 giugno 2012
9 maggio 2016	11 dicembre 2117
11 novembre 2019	8 dicembre 2125
13 novembre 2032	11 giugno 2247
7 novembre 2039	9 giugno 2255
7 maggio 2049	13 dicembre 2360
9 novembre 2052	10 dicembre 2368
11 novembre 2065	12 giugno 2490
14 novembre 2078	10 giugno 2498

[31] Per essere precisi, la corrispondenza tra gli elementi kepleriani così come sono stati qui definiti e i vettori posizione e velocità è biunivoca solo nel caso di orbite ellittiche (stati legati con energia $E < 0$) ma la trattazione può essere generalizzata o introducendo elementi orbitali definiti in modo differente per orbite paraboliche e iperboliche, o introducendo elementi universali, validi per tutti i tipi di orbita.

verificano due passaggi distanziati di 8 anni; l'ultima coppia di passaggi è avvenuta nel 2004 e nel 2012.

In corrispondenza dei vari aspetti geocentrici, il disco del pianeta appare più o meno illuminato, cioè si hanno fasi proprio come per la Luna. Per i pianeti superiori tali fasi sono molto meno importanti, in pratica solo per Marte si ha una linea separante la parte in luce da quella in ombra (linea detta terminatore), di forma convessa; per Giove e Saturno si ha solo un lieve oscuramento al bordo.

Questa apparente complessità ha confuso per molti millenni le idee, ed ha portato alla costruzione di vari modelli geometrici del Sistema Solare, tra cui quello tolemaico.

Oltre alle leggi di Keplero, si tenga conto che tutti i pianeti rivolvono in senso diretto attorno al Sole praticamente sullo stesso piano; questa proprietà non scaturisce dalle leggi fondamentali, deve derivare dal meccanismo di formazione del Sistema Solare; varie comete (quale la Halley) e alcuni asteroidi rivolvono invece in senso retrogrado, con inclinazioni anche molto forti; hanno rivoluzione retrograda anche alcune lune dei pianeti gioviani. Più variegato è invece lo stato di rotazione dei pianeti, che non ruotano tutti nel senso della rivoluzione; notevole è il caso di Venere (lentissima rotazione retrograda con periodo di 242,9 giorni), e anche quello di Urano, il cui asse di rotazione è praticamente sul piano orbitale.

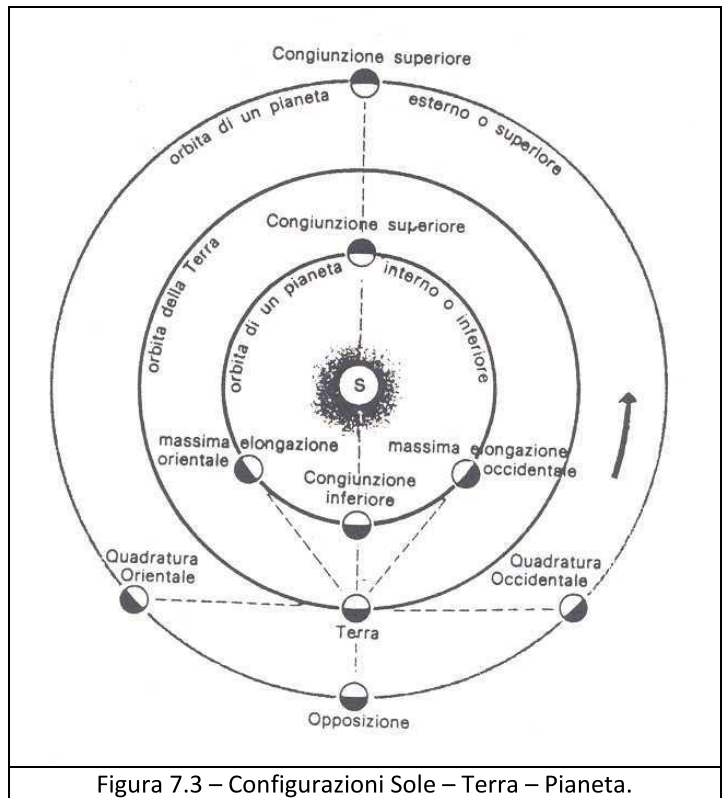


Figura 7.3 – Configurazioni Sole – Terra – Pianeta.

L'osservatore terrestre deve poi distinguere tra **periodo orbitale siderale** e **periodo apparente geocentrico** (o **sinodico**), che è evidentemente influenzato dalla rivoluzione annua. Il primo si ottiene dividendo 2π per il moto medio n , il secondo si può definire come intervallo medio tra due congiunzioni eliocentriche di Terra e pianeta; quindi, essendo n_T il moto medio terrestre:

$$P_{sin} = \frac{2\pi}{n_T \pm n}, \quad n = n_T \pm \frac{2\pi}{P_{sin}}$$

n	Distanza UA	Pianeta	Distanza UA
0	0,4	Mercurio	0,387
3	0,7	Venere	0,723
6	1	Terra	1
12	1,6	Marte	1,524
24	2,8		
48	5,2	Giove	5,203
96	10	Saturno	9,539
192	19,6	Urano	19,18
384	38,8	Nettuno	30,06

dove il segno + vale per un pianeta interno, il segno – per uno esterno.

C'è un altro dato degno di nota: la regolare distribuzione in distanza dei pianeti dal Sole. Di tale apparente regolarità si accorse per primo, nel 1741, il filosofo e giurista tedesco Christian Wolff (1679 – 1754). Ci fu la sua riscoperta da parte di Johann Daniel Titius (1729 – 1796) nel 1772 e divenne nota per l'opera di divulgazione di Johann Elert Bode (1747 – 1826) che nel 1778 ne diede anche una formulazione matematica. La prima formulazione dice che la distanza in UA di un pianeta dal Sole segue la legge

$$[7.10] \quad a_n = \frac{4+n}{10}$$

con $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$, ossia una sequenza di numeri che a partire dal terzo è il doppio del precedente.

La [7.10] è equivalente a:

$$[7.11] \quad a_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$$

con $n = -\infty$ per Mercurio, $n = 0$ per Venere, $n = 1$ Terra, etc. fino a Urano che fu scoperto nel 1781; la legge non funziona bene per Nettuno.

La mancanza di un pianeta, previsto dalla formula, tra Marte e Giove portò alla ricerca del pianeta mancante, e infine alla scoperta della fascia degli asteroidi tra Marte e Giove (il primo, Cerere, fu trovato da padre Piazzi a Palermo, la notte del 1 gennaio 1801).

Nel tempo vennero proposte altre formule più precise:

$$[7.12] \quad a_n = \frac{1}{3}(2^{2^{n-2}} + 1)$$

Con $n = 1$ per Mercurio, $n = 2$ per Venere, $n = 3$ Terra, $n = 5$ la fascia degli Asteroidi, etc.

$$[7.13] \quad a_n = 1,53^n$$

$n = -2$ Mercurio, $n = -1$ Venere, $n = 0$ Terra, $n = 1$ Marte, per $n = 2$ e $n = 3$ si hanno due famiglie di asteroidi, $n = 4$ Giove, $n = 5$ Saturno, $n = 6$ Urano, manca $n = 7$, $n = 8$ Nettuno, $n = 9$ Plutone.

Una formulazione più generale è la seguente:

$$[7.14] \quad a_n = r_0 \cdot K^n$$

una progressione geometrica, con K e r_0 opportune costanti.

Questa apparente regolarità può essere collegata con il meccanismo di formazione del Sistema Solare, ma sembra estranea alle leggi fondamentali.

Non c'è inoltre alcuna ragione per fermare tali leggi a qualche pianeta (nel passato ci si fermava a Plutone) e in effetti di recentemente sono stati scoperti decine di asteroidi di dimensioni ragguardevoli, confrontabili con Plutone, che però non rientrano in queste leggi.

Capitolo 8

Determinazione dei parametri orbitali da tre osservazioni

8.1 – Introduzione

In questo capitolo^[32] vedremo come si possono determinare i parametri orbitali di un corpo celeste, e quindi una effemeride, da tre osservazioni. Ci riferiremo ad un pianeta in orbita intorno al sole, ma ovviamente la questione è più generale.

Il problema è complicato per due ragioni:

- 1) le osservazioni sono fatte dalla Terra (geocentriche)
- 2) può essere determinata facilmente solo la posizione del corpo sulla sfera celeste (due angoli), mentre la sua distanza è sconosciuta.

Poiché gli elementi orbitali sono 6 è evidente che sono necessarie 6 equazioni indipendenti e quindi occorrono tre osservazioni effettuate in tre tempi diversi t_1, t_2, t_3 , che daranno, in genere, ascensione retta α e declinazione δ del corpo in quegli istanti. Si è vista qual è la forma delle orbite nel problema dei due corpi, ora vedremo come collegare l'orbita alle osservazioni. Dapprima come, dalla conoscenza degli elementi orbitali si possa determinare la posizione del corpo celeste (effemeridi) e poi come ricavare gli elementi orbitali dalle osservazioni.

Supponiamo quindi di conoscere:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha(t_1) & \delta_1 &= \delta(t_1) \\ \alpha_2 &= \alpha(t_2) & \delta_2 &= \delta(t_2) \\ \alpha_3 &= \alpha(t_3) & \delta_3 &= \delta(t_3) \end{aligned}$$

[8.1]

Esse definiranno un sistema di 6 equazioni tutt'altro che facile da risolvere specialmente per la presenza dell'equazione di Keplero che è un'equazione implicita e trascendente. Occorre perciò ricorrere a un procedimento numerico.

Questo problema ebbe grande importanza tra la fine del XVIII secolo e gli inizi del XIX: anni in cui si passò dalla scoperta di Urano (1781) a quella del primo asteroide (Cerere, 1801) poi via via a molti altri. Il problema occupò pertanto i maggiori astronomi e matematici del tempo, e la soluzione più completa e generale fu data da Gauss e pubblicata nel 1809 nel classico libro *Theoria motus corporum coelestium* ...

Sebbene ai nostri tempi la soluzione di problemi del genere sia stata enormemente facilitata dall'uso dei calcolatori elettronici, i metodi sviluppati allora ne costituiscono ancora la base, ed è perciò utile conoscerne almeno le linee generali.

Un metodo frequentemente usato in questi casi è quello per approssimazioni successive, in cui la conoscenza di una soluzione approssimata consente di ottenerne una più corretta. Quando questo accade, e quando la successione delle approssimazioni ha un limite, il metodo iterativo si dice convergente e ciò rappresenta una condizione necessaria per lo scopo voluto. In pratica, tra diversi metodi che si possono escogitare sarà migliore quello che mostra una convergenza più rapida, cioè quello che richiede un minor numero d'iterazioni.

^[32] Confronta il capitolo M2 degli appunti di lezione di Elio Fabri e Umberto Penco
www.df.unipi.it/~penco/Astronomia/index_astr.html

Anche per il nostro specifico problema sono stati messi a punto diversi procedimenti iterativi; in questo capitolo presentiamo quello dovuto a Laplace, che è più semplice, ma applicabile solo nei casi in cui i tre istanti t_1, t_2, t_3 siano vicini ed equidistanti.

Il metodo di Gauss è decisamente più complesso, ma di applicazione generale e convergenza assai rapida ed è quello più utilizzato.

Nel caso di più di tre misure si utilizza il metodo dei minimi quadrati.

Come già detto in precedenza, ci limitiamo a discutere il caso di orbite ellittiche.

La figura 8.1 mostra il significato delle notazioni che verranno usate:

ρ_i : indicano le posizioni geocentriche del Sole nei tre istanti di osservazione ($i = 1, 2, 3$); questi vettori si suppongono noti in quanto ricavabili dalle effemeridi del Sole (che danno anche le coordinate cartesiane);

u_i : indicano le direzioni geocentriche dell'oggetto in esame, ricavabili immediatamente dalle coordinate (angolari) osservate;

$r'_i = |\mathbf{r}'_i|$: sono le distanze geocentriche, che non si ottengono direttamente dalle osservazioni, ma si troveranno come risultato secondario del calcolo;

\mathbf{r}_i (posizioni eliocentriche) sono le incognite principali del problema.

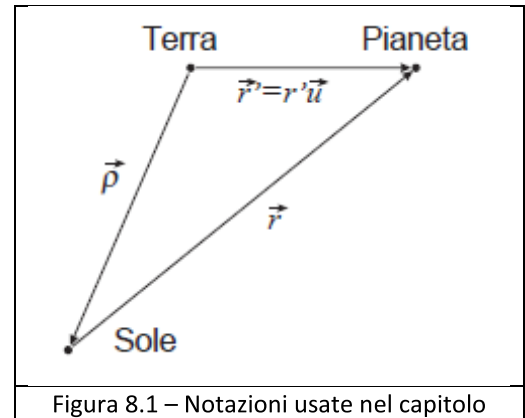


Figura 8.1 – Notazioni usate nel capitolo

8.2 – Cenni del metodo di Laplace

Supponiamo che le tre osservazioni siano state fatte in tempi abbastanza vicini: ciò permetterà di ottenere senza troppo errore i valori della velocità e dell'accelerazione, trascurando infinitesimi di ordine superiore al secondo nel tempo. Per la stessa ragione, invece di ρ_1, ρ_2, ρ_3 consideriamo noti $\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}$ (posizione, velocità e accelerazione, del Sole, e quindi della Terra, ad un istante t), anch'essi ricavabili dalle effemeridi.

Poniamo $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$, essendo gli istanti vicini possiamo effettuare uno sviluppo in serie di Taylor di \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_3 intorno a \mathbf{u}_2 avremo:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \dot{\mathbf{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^3)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 + \dot{\mathbf{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^3)$$

dalle quali, sommando e sottraendo membro a membro si ricava

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1}{2\Delta t}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3}{\Delta t^2}$$

Da ciò si ricava che possiamo supporre noti $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$. Il problema sarà risolto non appena avremo trovato \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$.

In relazione alla figura 8.1 procediamo come segue: derivando due volte rispetto al tempo la relazione

$$[8.2] \quad r' \mathbf{u} = \rho + \mathbf{r}$$

dapprima otteniamo

$$\dot{r}' \mathbf{u} + r' \dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{r}}$$

e infine

$$\ddot{r}' \mathbf{u} + 2\dot{r}' \dot{\mathbf{u}} + r' \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\mathbf{r}}.$$

Da quest'ultima, utilizzando l'equazione del moto nella forma $\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, dove $k^2 = G(M+m)$ è la costante di Gauss^[33], si ha:

$$[8.3] \quad \ddot{r}' \mathbf{u} + 2\dot{r}' \dot{\mathbf{u}} + r' \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} - k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

ponendo ancora $\mathbf{r} = r' \mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}$ nella [8.3] rimangono come incognite r' , \dot{r}' e \ddot{r}' .

Per eliminare due di queste si moltiplica scalarmente la [8.3] per il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}$ che, essendo perpendicolare sia a \mathbf{u} che a $\dot{\mathbf{u}}$ riduce la [8.3] a

$$[8.4] \quad r'(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}) = \ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{v} - \frac{k^2}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} anche la [8.2], si ha:

$$r'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Sostituendo nella [8.4] si ricava ha

$$[8.5] \quad r' = \frac{\ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{v}}{\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}} - \frac{k^2}{(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v})r^3}(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v})$$

A questo punto potremmo sostituire la [8.5] nella [8.2], ma l'equazione che si ottiene non si risolve con metodi elementari. Conviene allora procedere per iterazione. Se il pianeta è abbastanza lontano dal Sole, r è grande e nella [8.5] il termine proporzionale a $\frac{1}{r^3}$ è trascurabile rispetto al resto. Si ricava così un valore r'_1 di r' e anche \mathbf{r}'_1 . Dalla [8.2] si troverà il corrispondente valore $\mathbf{r}_1 = r'_1 \mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}$ che posto nella [8.5] al posto di r , ci dà una seconda approssimazione r'_2 di r' . Iterando il procedimento questo converge (se r è grande) e fornisce \mathbf{r} (e anche \mathbf{r}') all'istante t_2 .

Per trovare $\dot{\mathbf{r}}$ partiamo dalla [8.3], moltiplicando scalarmente per $\dot{\mathbf{u}}$ abbiamo

$$\dot{r}'(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + 2\dot{r}'(\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + r'(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = (\dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \frac{k^2}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}})$$

[33] La costante di Gauss è il valore assunto dalla costante di gravitazione universale in unità riferite al sistema solare piuttosto che in unità del sistema internazionale. La costante, introdotta da Gauss, consente il calcolo del moto planetario pur essendo ignote le dimensioni del sistema solare o la massa dei pianeti in unità del Sistema Internazionale. Gauss utilizzò le seguenti unità:

- lunghezza A : unità astronomica,
- tempo D : giorno solare medio,
- massa S : massa solare.

Dalla terza legge di Keplero applicata al moto della terra, Gauss determinò per la costante il valore $k = 0,01720209895 A^{3/2} S^{-1/2} D^{-1}$.

$$2\dot{r}'|\dot{\mathbf{u}}|^2 + r'(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = (\ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \frac{k^2}{r^3}(\boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\mathbf{u}})$$

essendo $(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = 0$ in quanto \mathbf{u} è un versore.

Da questa si ricava \dot{r}' . Infine, dalla derivata prima della [8.2], ricaviamo $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}'\mathbf{u} + r'\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}$ e quindi resta determinato $\dot{\mathbf{r}}$.

Come già detto nel capitolo precedente i vettori \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$ sono del tutto equivalenti ai sei parametri kepleriani e quindi la loro conoscenza determina la conoscenza dell'orbita del corpo celeste.

Vediamo ora come passare dalle coordinate cartesiane \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$ agli elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω e M (sempre nel caso di un'orbita ellittica)^[34].

Calcoliamo il vettore momento angolare \mathbf{L} (a rigore si trova $\mathbf{h} = \mathbf{L}/\mu$ in quanto non si conosce la massa ridotta del sistema Sole-Pianeta)

$$[8.6] \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{L}}{\mu} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

le cui componenti nel sistema di riferimento inerziale sono:

$$\begin{cases} h_1 = h \sin \Omega \sin i \\ h_2 = -h \cos \Omega \sin i \\ h_3 = h \cos i \end{cases}$$

l'inclinazione orbitale i e la longitudine del nodo Ω possono essere calcolate da:

$$[8.7] \quad \begin{cases} \cos i = \frac{h_3}{h} \\ \sin i = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h} \end{cases}$$

e

$$[8.8] \quad \begin{cases} \cos \Omega = -\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ \sin \Omega = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{cases}$$

Il semiasse maggiore a si ricava da:

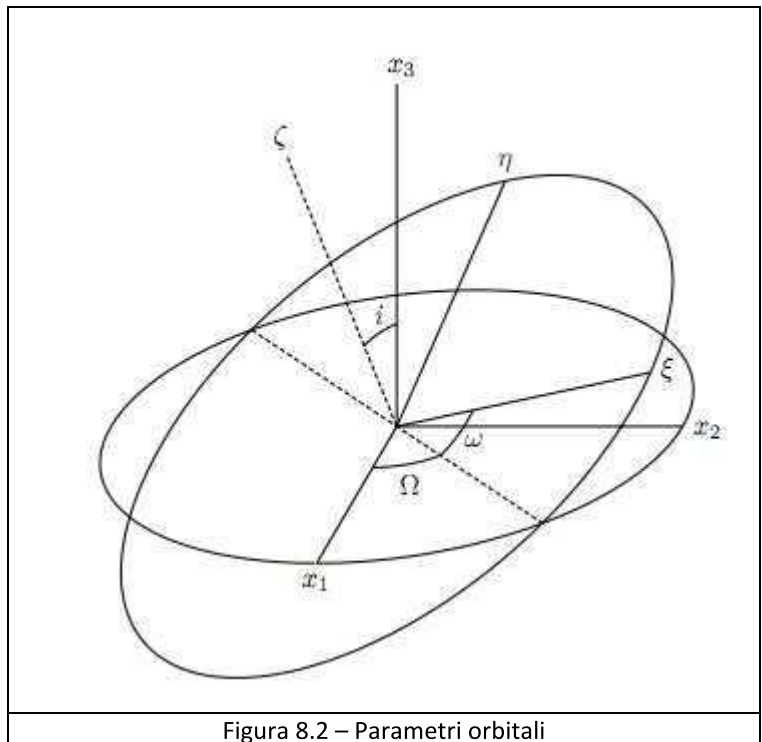


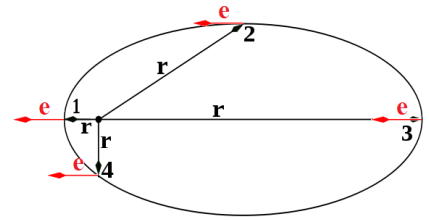
Figura 8.2 – Parametri orbitali

^[34] Confronta Mario Carpino: Introduzione ai metodi di calcolo di effemeridi e determinazione orbitale. (www.brera.mi.astro.it/~carpino/didattica/detorb.pdf)

$$[8.9] \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{\mu}$$

Si può dimostrare che il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz^[35], definito da

$$[8.10] \quad \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$



altro non è che l'eccentricità e dell'orbita.

Moltiplichiamo scalarmente la [10] per \mathbf{r} si ha: $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = er \cos \theta = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} \cdot \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}$, ma

$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$ e $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, per cui: $er \cos \theta = \frac{h^2}{\mu} - r$; da ciò segue

$$r(1 + e \cos \theta) = \frac{h^2}{\mu} \quad \text{e quindi l'equazione dell'orbita } r = \frac{h^2/\mu}{(1 + e \cos \theta)}.$$

Il semiasse maggiore è quindi dato da:

$$[8.11] \quad a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{h^2/\mu}{1 - e^2}.$$

Inoltre il versore della linea dei nodi

$$[8.12] \quad \mathbf{k} = \mathbf{x}_3 \times \frac{\mathbf{h}}{h} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

(\mathbf{x}_3 è il versore dell'asse x_3); l'argomento del perielio ω è l'angolo compreso tra i vettori \mathbf{k} e \mathbf{e} , quindi il suo coseno è uguale al prodotto scalare dei due versori, mentre il suo seno è uguale alla proiezione del loro prodotto vettoriale lungo la direzione del momento angolare:

$$[8.13] \quad \cos \omega = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}}{e} \quad \sin \omega = \left(\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{e} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{h} \right)$$

Per l'anomalia vera v , essendo l'angolo compreso tra la linea degli apsi \mathbf{e} e il vettore posizione \mathbf{r} , quindi

$$[8.14] \quad \cos v = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \quad \sin v = \left(\frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}}{er} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{h} \right)$$

^[35] In meccanica classica, il vettore di Laplace-Runge-Lenz più spesso noto o semplicemente vettore di Lenz è un vettore utilizzato comunemente per descrivere la forma e l'orientazione dell'orbita di un corpo celeste attorno ad un altro, come nel caso della rivoluzione di un pianeta attorno al sole. Per due corpi interagenti secondo la gravità Newtoniana, il vettore di Lenz è una costante del moto, nel senso che esso, per una data orbita, conserva il suo aspetto indipendentemente dal punto o dal momento in cui esso venga calcolato; in modo equivalente, si può dire che il vettore venga "conservato" durante il moto. Più in generale, questo vettore risulta conservato in tutti i problemi in cui due corpi interagiscono mediante una forza centrale che varia secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanze. Il vettore di Lenz, per come viene definito giace sul piano dell'orbita ed è diretto parallelamente alla linea degli apsi dall'afelio verso il perielio.

infine dall'anomalia vera si ricava l'anomalia eccentrica E

$$[8.15] \quad \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2}$$

e da questa l'anomalia media M utilizzando l'equazione di Keplero:

$$[8.16] \quad M = E - esenE .$$

Naturalmente per applicare questo metodo occorrerà sempre controllare a posteriori la validità delle ipotesi semplificative che si sono fatte.

Il procedimento che abbiamo appena descritto o altri simili, sono utili quando avviene la scoperta di un oggetto celeste (generalmente un nuovo asteroide o cometa) e, non avendo altre informazioni, con tre misure di posizione si riesce a stimare i parametri orbitali. In seguito, quando l'oggetto continua ad essere osservato e quindi si accumulano un gran numero di osservazioni, un modo molto comune di affrontare il problema è quello dei minimi quadrati.

Capitolo 9

Il problema dei tre corpi e il volo interplanetario

9.1 – Introduzione

La presenza di più corpi nel sistema planetario rende necessario valutare le interazioni mutue di ciascuno con gli altri; il problema non presenta nessuna soluzione analitica neppure per il caso più semplice di soli tre corpi. L'unica possibilità è di affrontarlo con metodi perturbativi. Tali metodi si rendono frequentemente necessari dato che oltre il 50% dei sistemi stellari sono multipli.

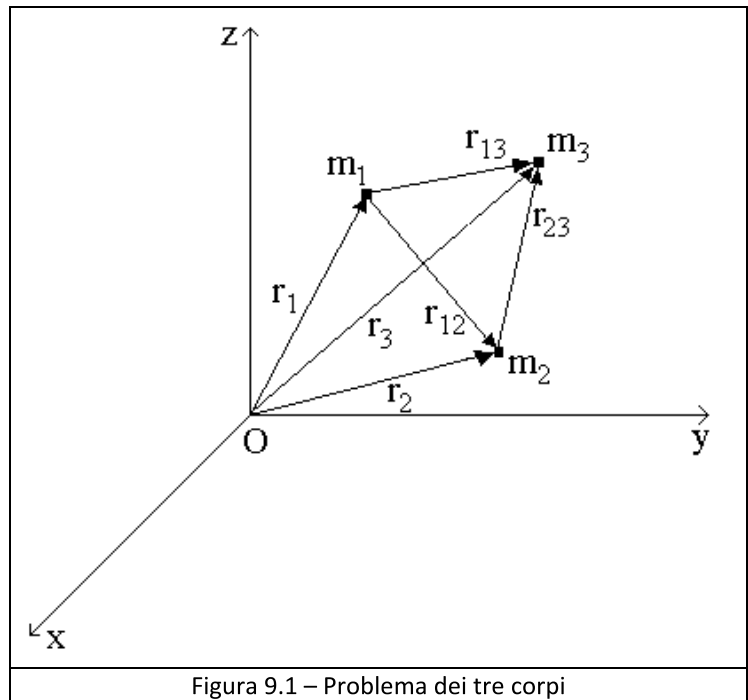
Il problema dei tre corpi, definito da Whittaker “*the most celebrated of all dynamical problems*”, si enuncia come segue:

Tre masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la legge newtoniana di gravitazione. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale.

Nell'ambito della Meccanica Celeste il problema dei tre corpi si presenta come lo schema più naturale in cui inquadrare, almeno in prima approssimazione, problemi quali: il moto dei pianeti interni all'orbita di Giove (Mercurio, Venere, Terra, Marte) o degli asteroidi quando si tenga conto dell'azione di Giove e del Sole; il moto degli oggetti transnettuniani; il moto della Luna; la dinamica della navicelle spaziali e così via.

Consideriamo tre corpi di masse rispettivamente m_1, m_2, m_3 posti in un sistema di riferimento inerziale sottoposti alla mutua attrazione gravitazionale. Le loro equazioni di moto sono

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \right) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = G \left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \right) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -G \left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \right) \end{cases}$$



Per il segno delle forze si considera i versi scelti in figura 9.1, dove $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$. La somma delle tre equazioni di moto fornisce indicazioni sul centro di massa. Infatti

$$[9.1] \quad m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = 0$$

Che integrata due volte dà:

$$[9.2] \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}' t + \mathbf{k}''$$

dove \mathbf{k}' e \mathbf{k}'' sono due vettori costanti generici. Se indichiamo con \mathbf{R} il vettore rappresentativo della posizione del centro di massa e con M la massa totale la [9.2] fornisce

$$[9.3] \quad M \mathbf{R} = \mathbf{k}' t + \mathbf{k}''$$

Questa costituisce il primo integrale dell'equazione di moto.

Consideriamo ora il momento angolare totale del sistema: $\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ e calcoliamone la derivata prima rispetto al tempo:

$$[9.4] \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) = G \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) = \\ = G \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_{12} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_{23} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_{13} \right] = 0$$

in quanto tutti i prodotti vettoriali sono tra vettori paralleli. Questa fornisce il secondo integrale del moto. La [9.4] può essere vista come caso specifico della conservazione del momento angolare per sistemi isolati in campi centrali.

C'è infine la conservazione dell'energia

$$[9.5] \quad E = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right) + \frac{1}{2} (m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 + m_3 \dot{r}_3^2)$$

che costituisce un terzo integrale dell'equazione di moto.

Le equazioni del moto sono quindi tre equazioni differenziali del secondo ordine, due vettoriali e una scalare e per essere risolte necessitano quindi di quattordici parametri.

Dalla conoscenza di \mathbf{k}' e \mathbf{k}'' si ottengono sei parametri ai quali ne vanno aggiunti altri tre ricavabili dalla [9.4]; la [9.5], non essendo invece un'espressione vettoriale, fornisce un solo altro parametro.

I tre corpi sono così legati gravitazionalmente tra loro ma con equazioni di moto indipendenti. In tal modo non è possibile aggiungere altre costanti alle dieci viste sopra, cosicché il problema rimane insolubile in forma analitica (a meno che non vi siano degli interventi esterni che limitino i gradi di libertà del sistema). Questo suggerisce di affrontare il problema con integrazioni numeriche o sotto opportune approssimazioni.

9.2 – Il problema ristretto

Il problema ristretto dei tre corpi è quello in cui un corpo ha massa trascurabile rispetto agli altri due. Consideriamo quindi solo il moto piano, e la distanza tra i due primari sia supposta

rigorosamente costante (moto circolare uniforme). Come sistemi che approssimano il problema ristretto possiamo citare Sole-Giove-asteroide, oppure Terra-Luna-satellite artificiale.

Indichiamo con M_1 e M_2 le masse dei primari e con m la massa del terzo corpo. Dalla definizione risulta $m \ll M_1$ e $m \ll M_2$. Sia inoltre \mathbf{a}_0 il vettore da M_1 a M_2 . Se ci poniamo in un riferimento inerziale di origine nel centro di massa G , i corpi maggiori ruotano con velocità angolare n_0 data da

$$[9.6] \quad n_0^2 a_0^3 = G(M_1 + M_2)$$

Indicheremo con \mathbf{n}_0 il vettore di modulo n_0 perpendicolare al piano orbitale di M_1 e M_2 .

Se invece ci mettiamo in un riferimento rotante con questa velocità, ma sempre con origine nel centro di massa, i corpi principali sono fissi.

Per studiare il moto del corpo di massa m vogliamo partire dall'integrale dell'energia. In un riferimento inerziale si conserverebbe la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale $K + U$ data da

$$E = K + U = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - Gm \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right)$$

Poiché il nostro riferimento non è inerziale occorre introdurre le forze apparenti, ma solo se queste sono conservative vale ancora l'integrale dell'energia.

La forza di Coriolis chiaramente non influisce: essendo $\mathbf{f}_{Cor} = -2m\mathbf{n}_0 \times \dot{\mathbf{r}}$ perpendicolare a $\dot{\mathbf{r}}$, essa è a lavoro nullo e non altera il bilancio energetico. La forza centrifuga \mathbf{f}_c dipende invece solo da \mathbf{r} , quindi è conservativa e il suo potenziale è $U_c = -\frac{1}{2} m |\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2$. Possiamo allora scrivere l'integrale dell'energia

$$[9.7] \quad \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - Gm \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) - \frac{1}{2} m |\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = E$$

La [9.7] prende il nome di *integrale di Jacobi*.

9.3 – Superfici di Hill

Dalla [9.7] si possono ricavare subito delle limitazioni sui punti per i quali la massa m non può passare.

Per prima cosa riscriviamo la [9.7] nella forma

$$[9.8] \quad -Gm \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) - \frac{1}{2} m |\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = E - \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 \leq E$$

La [9.8] ci dà delle limitazioni su \mathbf{r} (e quindi anche su \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2) e quindi restano individuate delle regioni dello spazio in cui la massa m può muoversi e quelle che le sono precluse. Se nella [9.8]

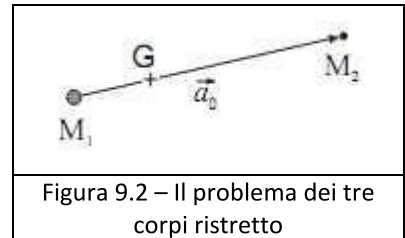


Figura 9.2 – Il problema dei tre corpi ristretto

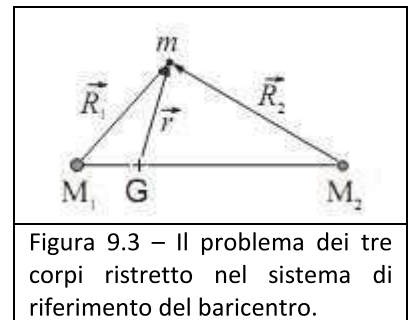


Figura 9.3 – Il problema dei tre corpi ristretto nel sistema di riferimento del baricentro.

poniamo $\dot{\mathbf{r}} = 0$ essa diventa $-G\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) - \frac{1}{2}|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = \frac{E}{m}$; la soluzione di tale equazione ci permette di individuare le superfici che separano le zone permesse dalla zone precluse al moto della massa m . Tali superfici si chiamano **superfici di Hill**.

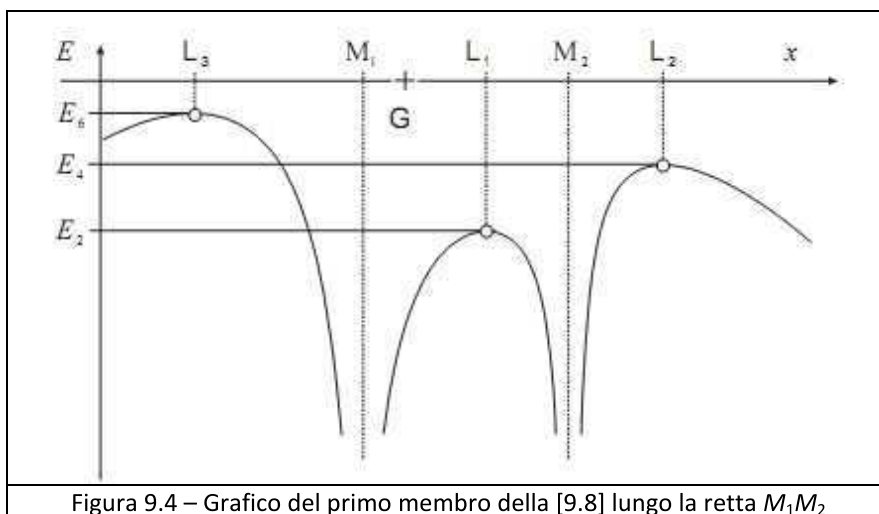


Figura 9.4 – Grafico del primo membro della [9.8] lungo la retta M_1M_2

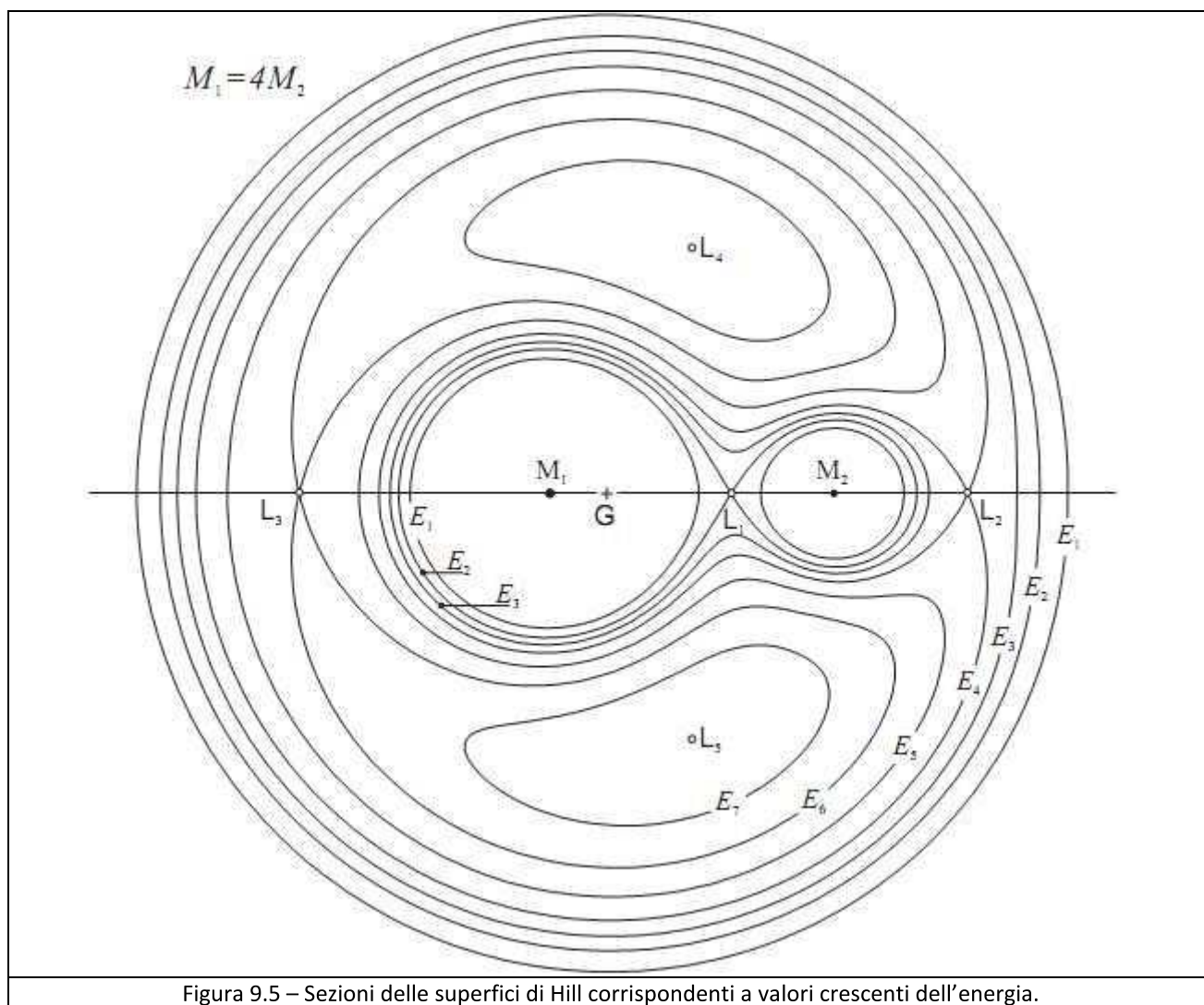


Figura 9.5 – Sezioni delle superfici di Hill corrispondenti a valori crescenti dell'energia.

E' utile costruire le superfici di Hill, poiché un corpo non può mai superare la superficie a velocità nulla relativa all'energia di cui è dotato. In figura 9.4 si vede un grafico del primo membro della [9.8] (diviso per m) lungo la retta M_1M_2 ; in figura 9.5 le sezioni delle superfici di Hill corrispondenti a diversi valori di E ($E_1 \dots E_7$ dati in ordine crescente) nel piano per M_1 e M_2 perpendicolare ad \mathbf{n}_0 .

Le stesse sezioni sono riportate, separatamente, anche in figura 9.6. Dalle figure si vede che un corpo che abbia energia molto bassa (E_1) è vincolato a stare vicino a uno dei due primari, oppure lontano da entrambi. Solo se $E > E_1$ le due superfici interne si fondono nel punto L_1 .

Per esemplificare, supponiamo che M_1 sia la Terra e M_2 la Luna: se si vuol mandare un satellite attorno alla Luna occorre dargli un'energia superiore a E_2 . Se ad esempio l'energia fosse E_3 , il corpo resterebbe confinato all'interno della zona indicata: dunque con tale energia un satellite non sfuggirebbe dalle vicinanze della Terra e della Luna. Se lo si vuol mandare lontano dal sistema Terra-Luna occorrerà un'energia $E > E_4$: infatti per $E > E_4$ la superficie di Hill si apre nel punto L_2 . In tal caso il satellite potrà sfuggire, ma solo dalla parte destra della figura, in quanto la regione racchiusa dalla curva E_5 gli è preclusa. Infine, per energie maggiori di E_6 può sfuggire anche a sinistra, dato che la superficie si apre anche in L_3 .

Dalle figure 9.5 e 9.6 si deduce che ci sono due punti di massima energia: L_4 e L_5 .

Spesso si parla di sfera di Hill (il cui raggio è detto raggio di Hill); essa indica le dimensioni della sfera di influenza gravitazionale di un corpo celeste rispetto alle perturbazioni di un altro corpo, di massa maggiore, attorno al quale esso orbita.

La sfera di Hill è la più grande sfera, centrata sul secondo corpo, all'interno di cui la somma delle tre forze è sempre orientata verso il secondo corpo. Un terzo corpo più piccolo può orbitare intorno al secondo all'interno della sfera di Hill, con questa forza risultante come forza centripeta.

La sfera di Hill si estende fra i punti di Lagrange L_1 e L_2 . La regione di influenza del secondo corpo è più piccola lungo quella direzione, oltre quella distanza un terzo oggetto in orbita intorno al secondo spenderebbe almeno parte della relativa orbita oltre la sfera di Hill e verrebbe progressivamente perturbato dalle forze di marea del corpo centrale, finendo per orbitare attorno a quest'ultimo.

Nel caso che stiamo trattando il raggio r della sfera del corpo M_2 ha raggio circa uguale a

$$[9.9] \quad r \approx a_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}.$$

Per esempio, la Terra ($M_2 = 5,9742 \cdot 10^{24}$ kg) orbita intorno al Sole ($M_1 = 1,9891 \cdot 10^{30}$ kg) ad una

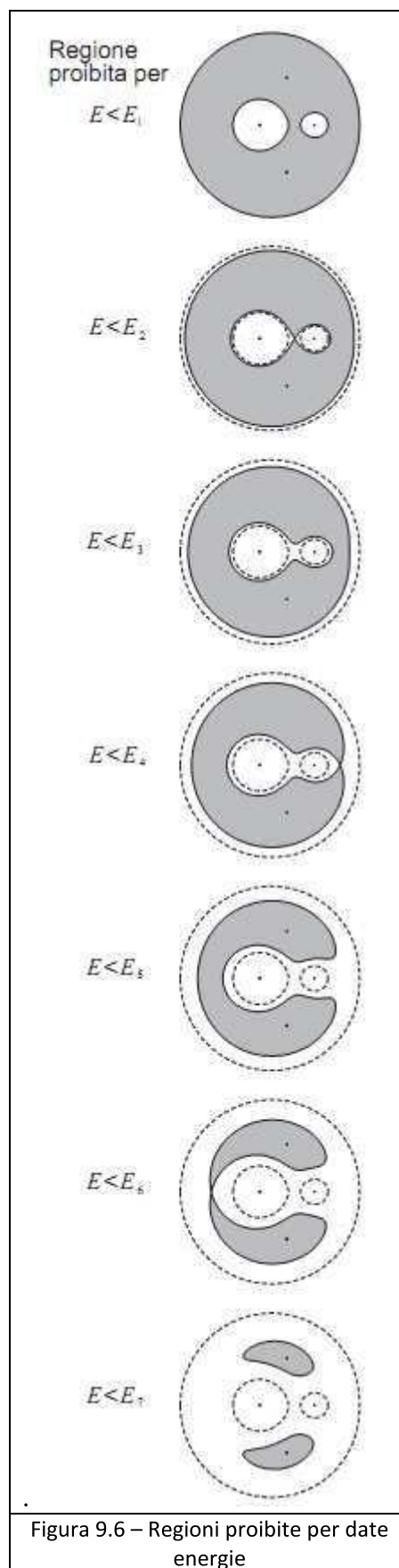


Figura 9.6 – Regioni proibite per date energie

distanza di circa $1,4960 \cdot 10^{11}$ m. La sfera di Hill per la Terra si estende a circa $1,4966 \cdot 10^9$ m (0,01 UA). L'orbita della Luna, che si trova ad una distanza di circa $3,844 \cdot 10^8$ m dalla Terra, è tranquillamente all'interno della sfera gravitazionale di influenza della Terra e non è quindi a rischio di essere attratta in un'orbita indipendente intorno al Sole.

Un astronauta non può orbitare attorno allo Space Shuttle se questo orbita ad un'altitudine di 300 km poiché la sfera di Hill dello Shuttle risulta avere soltanto circa 60 cm di raggio, molto più piccola dello Shuttle stesso. In effetti per tutte le orbite terrestri basse (LEO) un corpo sferico dovrebbe essere 800 volte più denso del piombo per poter essere completamente contenuto entro la propria sfera di Hill (condizione necessaria per poter sostenere l'orbita di un proprio satellite).

Un satellite geostazionario sferico dovrebbe essere 5 volte più denso del piombo per avere a sua volta un satellite, il quale dovrebbe essere 2,5 volte più denso dell'Iridio che è, assieme all'Osmio, il materiale naturale più denso esistente sulla Terra.

Solamente ad una quota orbitale doppia rispetto a quella geostazionaria una sfera di piombo potrebbe avere un proprio satellite; la Luna dovrebbe trovarsi ad almeno 3 volte la quota geostazionaria (a $2/7$ della sua distanza attuale) per poter supportare un oggetto orbitante intorno ad essa; dato che invece si trova a più di nove volte la distanza di un satellite geostazionario, le orbite lunari risultano possibili, come hanno dimostrato le missioni spaziali sul nostro satellite.



Figura 9.7 – Ida e Dactyl

Nell'ambito del sistema solare, il pianeta con la più grande sfera di Hill è Nettuno con un raggio di $1,16 \cdot 10^{11}$ m (0,775 UA); la sua distanza dal Sole compensa grandemente lo svantaggio di massa rispetto a Giove (la cui sfera di Hill misura invece $5,3 \cdot 10^{10}$ m). Gli asteroidi della fascia principale possono avere sfere di Hill fino a $220 \cdot 10^6$ m di raggio (per Cerere), che diminuiscono rapidamente al diminuire della massa dell'asteroide.

Nella fascia principale degli asteroidi non sono rari asteroidi con proprie lune. Il primo individuato è Ida (scoperto nel 1884) con il suo satellite Dactyl (scoperto dalla sonda Galileo nel suo viaggio verso Giove nell'agosto del 1993). Ida non ha forma sferica, le sue dimensioni sono ($53,6 \times 24,0 \times 15,2$ km) e Dactyl, con un diametro medio di 1,4 km (per la verità è un "uovo" di $1,6 \times 1,4 \times 1,2$ km), orbita in circa 20 ore, ma i suoi parametri orbitali non sono noti con sufficiente precisione a

causa delle poche misure fatta dalla sonda Galileo che tra l'altro si trovava sul piano orbitale del sistema.

9.4 – I punti di Lagrange

I punti L_i ($i = 1 \dots 5$), detti **punti di Lagrange**, sono di equilibrio: il gradiente del potenziale si annulla, e lo stesso quindi accade per la forza risultante.

Questo però non ci dice nulla circa la stabilità, e non ci si può neppure basare sul consueto criterio del minimo, in quanto anche la forza di Coriolis – che non entra nel calcolo dell'energia – ha un ruolo importante nelle modalità del moto.

Si dimostra infatti che si può avere stabilità addirittura dove l'energia potenziale ha un massimo.

La posizione dei punti L_1, L_2, L_3 dipende dal rapporto delle masse; risulta inoltre che essi sono di equilibrio instabile. L_4 e L_5 hanno invece posizioni fisse, che formano due triangoli equilateri con M_1 e M_2 : la cosa notevole è che sebbene – come si è visto – essi siano punti di massimo del potenziale, se un corpo si sposta da quella posizione la forza di Coriolis tende a riportarlo, per cui risultano di equilibrio stabile (almeno se il rapporto $M_2 = M_1$ è abbastanza piccolo).

Dimostriamo che L_4 e L_5 sono i vertici di due triangoli equilateri di base M_1M_2 . A questo scopo basta studiare il caso piano, in cui l'energia potenziale per unità di massa è data da

$$\frac{U}{m} = -\frac{1}{2}n_0^2 r^2 - \frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2}$$

Calcoliamone il gradiente:

$$[9.10] \quad \frac{1}{m} \vec{\nabla} U = -n_0^2 \mathbf{r} + \frac{GM_1}{R_1^3} \mathbf{R}_1 + \frac{GM_2}{R_2^3} \mathbf{R}_2$$

Poiché G è il centro di massa del sistema, vale la relazione (vedi figura 9.3)

$$\mathbf{r} = \frac{M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2}{M_1 + M_2}$$

Moltiplicando la [9.6] per \mathbf{r} e dividendo per a_0^3 si ottiene

$$n_0^2 \mathbf{r} = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_0^3} \mathbf{r} = \frac{G}{a_0^3} (M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2)$$

sostituendo nella [9.10] e imponendo $\vec{\nabla} U = 0$, per trovare i punti di equilibrio, si ha l'equazione:

$$-\frac{G}{a_0^3} (M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2) + \frac{GM_1}{R_1^3} \mathbf{R}_1 + \frac{GM_2}{R_2^3} \mathbf{R}_2 = 0$$

ossia

$$[9.11] \quad M_1 \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \mathbf{R}_1 + M_2 \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \mathbf{R}_2 = 0$$

Sono quindi possibili due casi:

a) \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 non sono paralleli.

Allora devono essere contemporaneamente nulli i coefficienti

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{a_0^3} = 0 \\ \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{a_0^3} = 0 \end{cases}$$

da cui segue $R_1 = R_2 = a_0$ e quindi i punti L_4 e L_5 .

b) \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 sono paralleli (m sta sulla retta congiungente M_1 e M_2). In questo caso si ottiene un'equazione che ha tre soluzioni reali (i punti L_1, L_2, L_3) e, come già detto la posizione dipende dal rapporto tra le masse M_1 e M_2 .

Tralasciandone i particolari della dimostrazione, si ha che i punti di Lagrange L_4 e L_5 sono stabili se

$$[9.12] \quad n_0^4 - \frac{27}{4} n_0^4 (1 - \alpha^2) \geq 0$$

dove $\alpha = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$. Si ricava quindi $\frac{M_2}{M_1} \leq \frac{2}{25 + \sqrt{621}} \approx \frac{1}{25}$.

L'esistenza dei punti di Lagrange stabili L_4 e L_5 ha un'interessante applicazione nel caso Sole-Giove. Supponiamo per semplicità che l'orbita di Giove sia circolare (in realtà per Giove $e \approx 0,05$). Se poniamo un pianettino in uno dei punti (che cadono proprio lungo l'orbita di Giove, 60° avanti e 60° indietro rispetto al pianeta) e gli diamo la giusta velocità, in modulo pari a quella di Giove, il pianettino percorrerà esattamente l'orbita di Giove con lo stesso anticipo o ritardo iniziale.

Il fatto che l'equilibrio è stabile vuol dire che se la velocità o la posizione non è perfettamente giusta il pianettino seguirà un moto più complicato, oscillando attorno al punto di equilibrio ma sempre seguendo in media l'orbita di Giove. Anche l'eccentricità di Giove causa oscillazioni, ma non distrugge la stabilità.

Si può dunque pensare che in passato alcuni pianetini siano stati catturati con le giuste condizioni iniziali e che siano rimasti approssimativamente in L_4 e L_5 . E' proprio ciò che si osserva: attorno a quei due punti sono state trovate due famiglie di pianetini (detti "Troiani" e "Greci") che seguono o precedono il moto di Giove (vedi figura 9.9).

Si è pensato che anche per il sistema Terra-Luna potrebbe aversi un addensamento di materia in quei due punti (micrometeoriti, polvere cosmica) ma per ora non è stato trovato nulla.

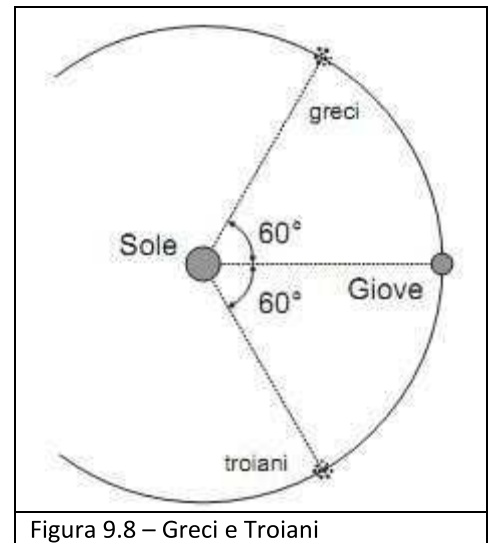


Figura 9.8 – Greci e Troiani

9.5 – Orbite di Hohmann

Per collegare con voli interplanetari due diversi pianeti dello stesso sistema si fa uso solitamente di orbite di trasferimento che permettano il minor dispendio di energia. Delle molte orbite eseguibili

quelle più economiche sono le cosiddette orbite di Hohmann, cioè ellissi tangenti all'orbita dei pianeti di partenza e di arrivo e in cui il Sole occupa uno dei fuochi, dal momento che gli effetti perturbativi si fanno sentire solo nelle immediate vicinanze dei pianeti medesimi.

Tracciando delle circonferenze tangenti all'orbita nei punti di partenza e di arrivo di raggio rispettivamente r_1 e r_2 si può scrivere $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ dove a è il semiasse maggiore dell'orbita di Hohmann.

Si dimostra facilmente che per un'orbita circolare su r_1 si ha

$$[9.13] \quad v_{1c} = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

ma essendo un'ellisse

$$[9.14] \quad v_e = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1} \frac{r_2}{r_1 + r_2}}$$

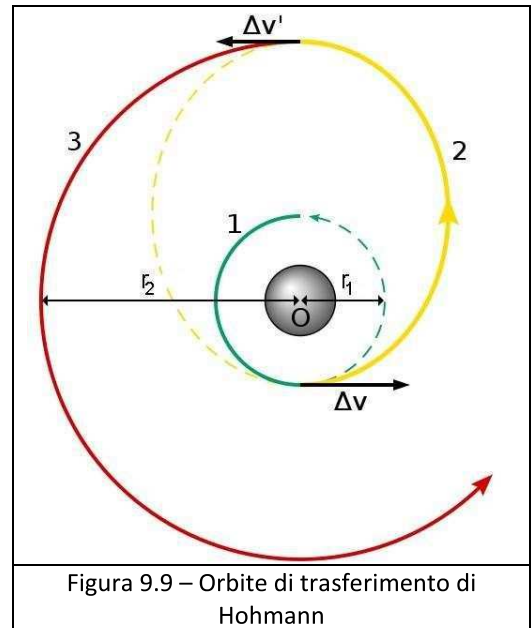


Figura 9.9 – Orbite di trasferimento di Hohmann

Si deve far notare che a rigore nella [9.14] ci dovrebbe essere la somma delle masse ($M + m$) invece di M , ma la massa M è quella del Sole, mentre m è quella dell'oggetto che compie l'orbita ellittica, il satellite artificiale, la cui massa risulta svariati ordini di grandezza inferiore ai più sottili apprezzamenti.

Se adesso si fa il rapporto tra le due velocità, subito al quadrato per semplicità, si arriva a quanto segue

$$[9.15] \quad \left(\frac{v_{1c}}{v_e} \right)^2 = \frac{r_1 + r_2}{2r_2}$$

tale rapporto è minore di 1 se $r_2 > r_1$. Analogamente sull'orbita di arrivo $v_{2c} = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$ ed il rapporto

$$[9.16] \quad \left(\frac{v_{2c}}{v_e} \right)^2 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1}$$

è maggiore di 1 se $r_2 > r_1$.

Ciò significa che se la sonda parte da un'orbita interna verso una esterna essa va prima accelerata per portarla dall'orbita circolare interna all'orbita ellittica di Hohmann e poi nuovamente accelerata per portarla dall'orbita di trasferimento a quella circolare di arrivo. Esattamente al contrario la sonda andrà due volte decelerata per immetterla su di un'orbita interna.

In realtà quando si deve lanciare un razzo si ha a che fare con un problema ben più complicato (anche senza tener conto di tutti i problemi tecnici) perché entra in gioco anche la velocità della piattaforma di lancio, ovvero la velocità dovuta alla rotazione terrestre attorno al proprio asse.

Trattandosi di un'ellisse percorsa da perielio ad afelio, o viceversa, il tempo di transito sull'orbita di trasferimento t , equivarrà a metà del periodo T . Siccome i periodi vanno come i semiasse maggiori a $3/2$, il valore del tempo di volo sull'orbita di Hohmann sarà legato al periodo di rivoluzione sull'orbita di partenza (T_1) dalla relazione

$$[9.17] \quad t = \frac{T}{2} = \frac{T_1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \right)^{\frac{3}{2}} = T_1 \left(\frac{r_1 + r_2}{2^{5/3} r_1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Riferendosi come esempio pratico alla Terra come orbita di partenza, tutte le volte che si fanno trasvolate interplanetarie servendosi delle orbite di Hohmann, i tempi sono superiori ad un anno se

$$[9.18] \quad \frac{r_2}{r_1} \geq 2^{\frac{5}{3}} - 1 \approx 2,17$$

vale a dire se $r_2 \gtrsim 2,17\text{UA}$, cioè pressappoco dall'orbita di Marte in poi. Un tempo più corto necessita di un dispendio maggiore di energia, oppure si devono sfruttare altri metodi, quali l'effetto fionda, qualora la traiettoria desiderata lo consenta.

Per ridurre al minimo le conseguenze di effetti spuri o di errori si preferisce solitamente inserire una navicella spaziale prima in un'orbita provvisoria prossima a Terra e solo dopo lanciarla sull'orbita di trasferimento, anche se questo richiede un dispendio maggiore di energia.

9.6 – Effetto fionda

Le sonde spaziali interplanetarie spesso fanno uso dell'effetto fionda gravitazionale che imprime loro alte velocità.

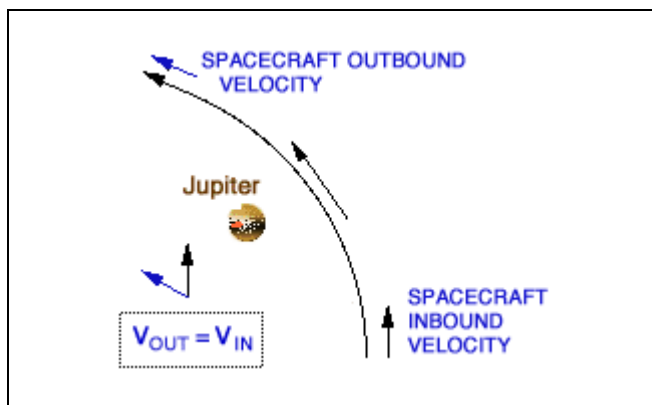


Figura 9.10 – Variazione della velocità rispetto al pianeta

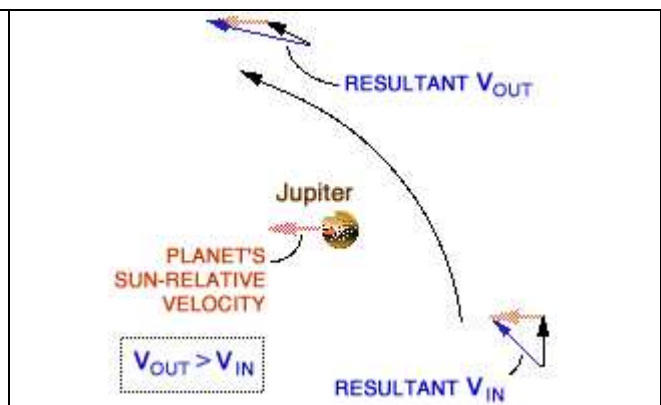


Figura 9.11 – Variazione della velocità rispetto al Sole

Nelle figure 9.10 e 9.11 la composizione delle velocità nel sistema di riferimento del pianeta e in quello del Sole.

Dal momento che la gravità è una forza conservativa, può sembrare strano che un oggetto può ottenere un guadagno netto in velocità a causa di un incontro ravvicinato con una grande massa gravitazionale. Si potrebbe immaginare che la velocità guadagnata mentre si avvicina il pianeta viene persa quando ci si allontana dal pianeta. Tuttavia, questo non è il caso, come si può vedere con semplici considerazioni sull'energia cinetica e la quantità di moto, le quali mostrano come un pianeta sia in grado di trasferire energia cinetica al veicolo spaziale.

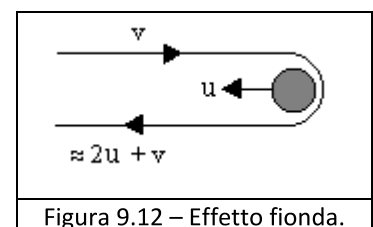


Figura 9.12 – Effetto fionda.

Una forma estrema della manovra sarebbe quello di avvicinarsi al pianeta di fronte ad una velocità v , mentre il pianeta si muove direttamente verso di noi a una velocità u (entrambe le velocità definite in relazione ad un sistema di riferimento fisso sul Sole). Se la traiettoria è quella giusta e passiamo dietro al pianeta in un'orbita molto eccentrica (iperbolica), facendo un giro a 180° , come illustrato in figura 9.10 l'effetto netto è quasi come se noi rimbalzassimo sulla parte anteriore del

pianeta. Rispetto al pianeta ci siamo avvicinati alla velocità $u + v$, e quindi ce ne dovremmo andare alla velocità $u + v$, ma rispetto al Sole il pianeta è ancora in movimento a (quasi) la velocità u , per cui, sempre rispetto al Sole che ne andremo a $2u + v$. Questo è esattamente come una palla da biliardo molto piccola che rimbalza su una molto grande. Per essere un po' più precisi, la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto prima e dopo l'interazione richiede che:

$$[9.19] \quad \begin{cases} Mu_1^2 + mv_1^2 = Mu_2^2 + mv_2^2 \\ Mu_1 - mv_1 = Mu_2 - mv_2 \end{cases}$$

Gli indici 1 e 2 denotano le quantità prima e dopo l'interazione con il pianeta. Ricavando u_2 dalla seconda $u_2 = \frac{Mu_1 - mv_1 + mv_2}{M}$ e sostituendo nella prima, si ha:

$$Mu_1^2 + mv_1^2 = M \left(\frac{Mu_1 - mv_1 + mv_2}{M} \right)^2 + mv_2^2$$

da cui si ricava

$$[9.20] \quad v_2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)v_1 + 2u_1}{1 + \frac{m}{M}}$$

Poiché il rapporto m/M è praticamente zero (la sonda ha una massa trascurabile in confronto a quella di un pianeta), questa si reduce

$$[9.21] \quad v_2 = v_1 + 2u_1.$$

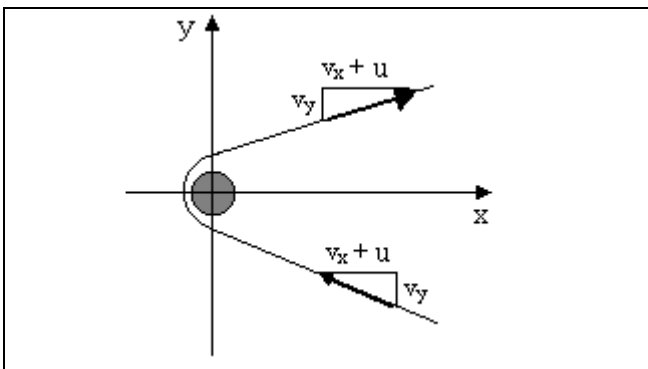


Figura 9.13 – Variazione della velocità rispetto al pianeta

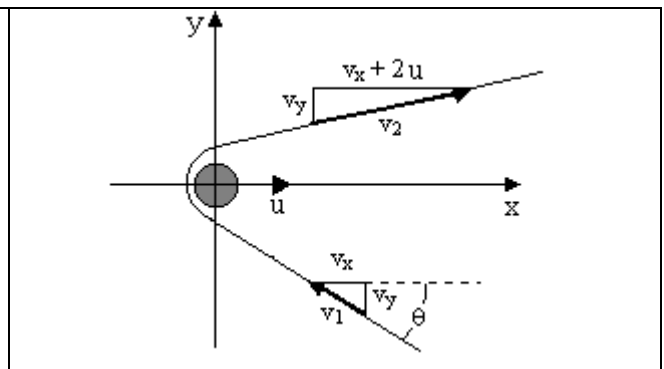


Figura 9.14 – Variazione della velocità rispetto al Sole

Naturalmente la maggior parte dei *fly-bys* planetari non sono semplici inversioni frontali, ma gli stessi principi si applicano per qualsiasi angolo di interazione. Poniamo la direzione del moto del pianeta come asse x e la direzione perpendicolare (in piano orbitale) come l'asse y (vedi figure 9.13 e 9.14). La sonda è inizialmente in movimento con una velocità v rispetto al riferimento solidale con il Sole, in una direzione che si avvicina il pianeta in arrivo a un angolo θ . Le figure 9.13 e 9.14 rappresentano il moto rispetto al riferimento del pianeta e rispetto riferimento solare.

Disegnando il parallelogramma delle velocità per la sonda e il pianeta e supponendo che l'orbita parabolica sia simmetrica rispetto all'asse x (nel sistema del pianeta), il vettore velocità iniziale della sonda rispetto Sole è:

$$[9.22] \quad \begin{cases} v_{1x} = -v_1 \cos \theta \\ v_{1y} = v_1 \sin \theta \end{cases}$$

ed il vettore velocità finale è

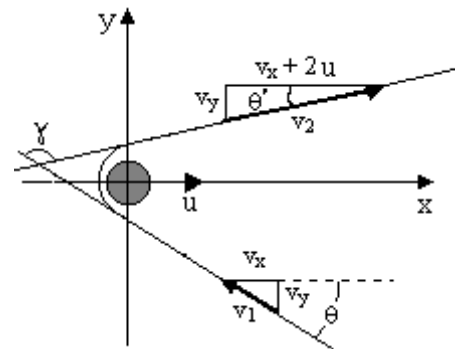
$$[9.23] \quad \begin{cases} v_{2x} = v_1 \cos \theta + 2u \\ v_{2y} = v_1 \sin \theta \end{cases}$$

la velocità finale è

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{(v_1 \cos \theta + 2u)^2 + (v_1 \sin \theta)^2} = \sqrt{v_1^2 + 4u^2 + 4v_1 u \cos \theta} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + 4u^2 + 4v_1 u \cos \theta \pm 4v_1 u} = \sqrt{(v_1 + 2u)^2 - 4v_1 u (1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$[9.24] \quad v_2 = (v_1 + 2u) \sqrt{1 - \frac{4v_1 u (1 - \cos \theta)}{(v_1 + 2u)^2}}$$



La sonda subisce una deviazione $\gamma = 180^\circ - (\theta + \theta')$ dove θ' è l'angolo che v_2 forma con l'asse delle x . Si dimostra

facilmente che $\theta \geq \theta'$, infatti: $\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}$, mentre

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v_y}{v_x + 2u}$$

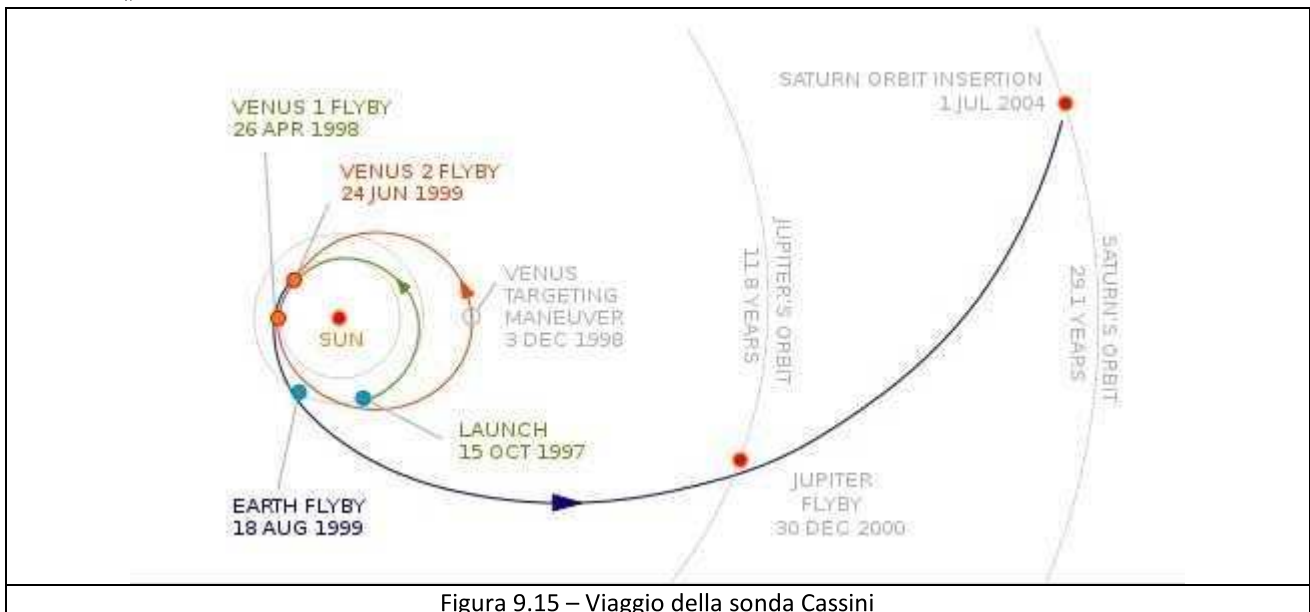


Figura 9.15 – Viaggio della sonda Cassini

Se $\theta = 0$, allora la [9.24] si riduce alla [9.21].

Se per esempio la velocità della sonda fosse uguale a quella del pianeta ($v_1 = u$) si avrebbe: $v_2 = v_1 \sqrt{5 + 4 \cos \theta}$. Un caso più realistico è quello in cui la sonda si avvicina al pianeta in direzione quasi perpendicolare al percorso del pianeta (vale a dire $\theta = 90^\circ$). In questo caso si avrebbe $v_x = 0$ e

$v_y = v_1$, quindi $v_2 = 3v_1 \sqrt{1 - \frac{4u^2}{9u^2}} = v_1 \sqrt{5} \approx 2,24v_1$, si avrebbe anche $\operatorname{tg} \theta' = \frac{v_y}{v_x + 2u} = \frac{1}{2}$ e quindi

$\theta' = 26,56^\circ$.

Al giorno d'oggi quasi tutte le missioni spaziali subiscono effetti di fionda gravitazionale per raggiungere le proprie mete.

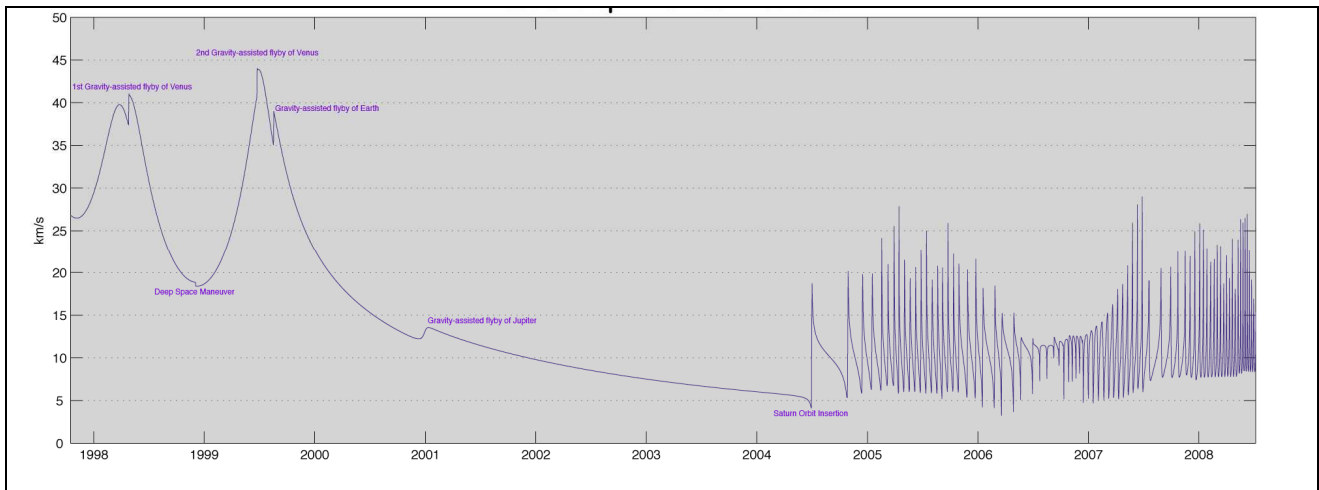


Figura 9.16 – Variazione della velocità della sonda Cassini rispetto al Sole

Analogamente se la sonda si avvicina al pianeta “passandogli davanti” si può dimostrare che la velocità finale rispetto al Sole diminuisce producendo un effetto di frenamento.

Se le condizioni sono giuste la sonda può anche essere messa in orbita ellittica attorno al pianeta.

La sonda Messenger che tra il 2011 e il 2015 è stata in orbita intorno a Mercurio ha subito diversi fenomeni di questo tipo nel suo avvicinamento alla meta.

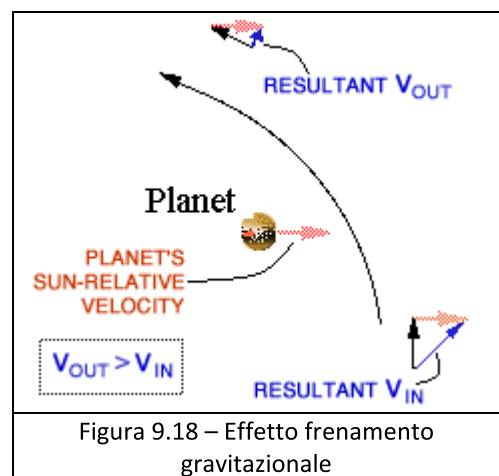


Figura 9.18 – Effetto frenamento gravitazionale

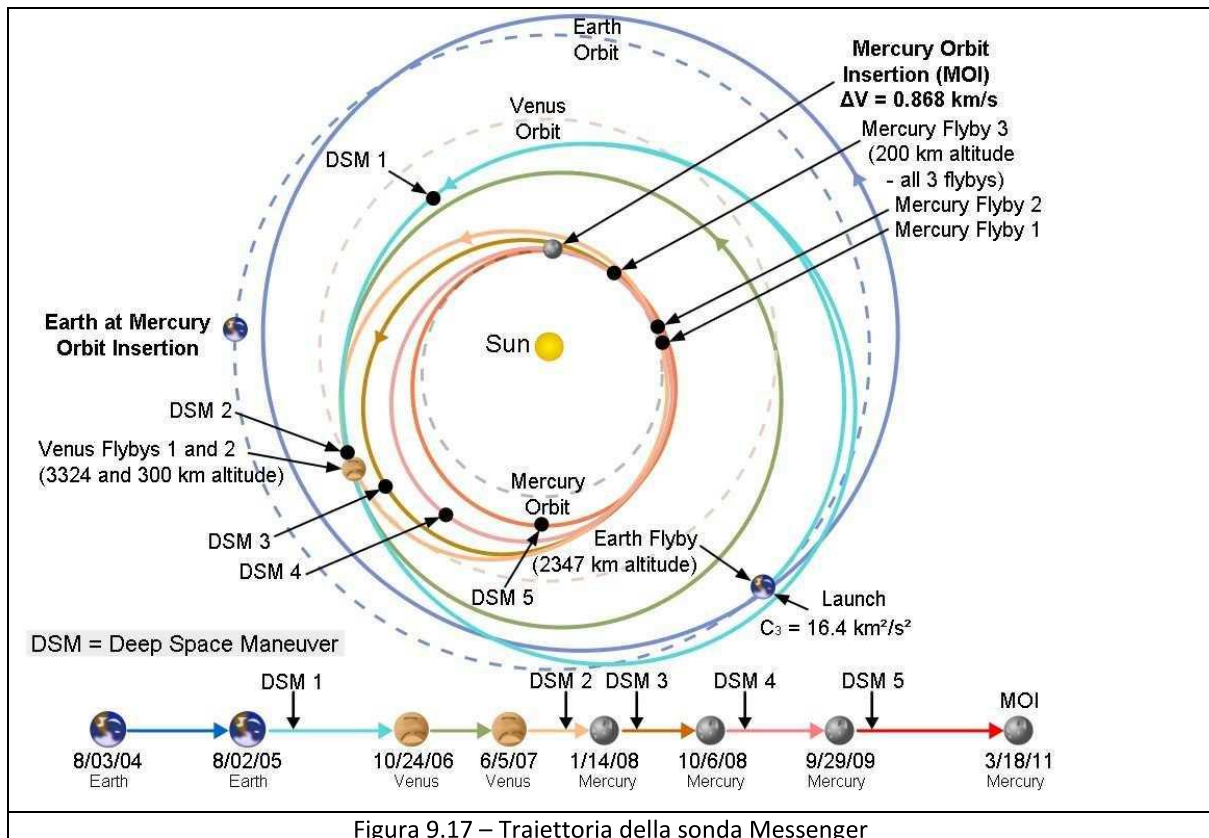


Figura 9.17 – Traiettoria della sonda Messenger

Capitolo 10

Elementi di Astrofisica

10.1 – Generalità

Definizione: una stella è massa di gas al cui interno avvengono reazioni (non transitorie) di fusione nucleare. In generale si ha equilibrio tra la gravità del gas e la spinta verso l'esterno.

Le stelle costituiscono l'ossatura dell'Universo visibile (che però sembra sia solo il 4% del totale) e sono disposte in configurazioni gerarchiche dominate dalla gravità, l'interazione più debole dell'Universo.



Figura 10.1 – Da sinistra a destra: il Sole, la Stella Polare, la stella doppia Albireo, la doppia doppia ϵ Lyrae

Oltre alle stelle singole o piccoli gruppi di alcune stelle, la gerarchia prevede:

- **associazioni stellari.** Sono degli ammassi stellari caratterizzati da un legame gravitazionale molto debole. Le associazioni stellari vennero scoperte nel 1947 dall'astrofisico russo-armeno Viktor Ambartsumian (Tbilisi, 18 settembre 1908 – 12 agosto 1996). Le associazioni stellari sono destinate a separarsi in tempi astronomici relativamente brevi, dell'ordine di pochi milioni di anni. Ciò significa che le associazioni attualmente osservabili sono composte di stelle di recente formazione, alcuni milioni di anni al massimo. Le principali associazioni stellari comprendono l'Associazione Stellare dell'Orsa Maggiore, l'Associazione Locale (o Associazione delle Pleiadi), il superammasso IC 2391, l'Associazione Stellare di Castore e il superammasso delle Iadi. Il tipo più conosciuto di associazione stellare è l'associazione OB, caratterizzato dalla presenza di stelle del tipo spettrale O e B. Esistono anche associazioni T, composte da stelle giovanissime di tipo T Tauri, e le associazioni R, composte da giovani stelle blu avvolte in banchi di nebulosità riflettenti la loro stessa luce.



Figura 10.2 – Associazione stellare OB in Orione


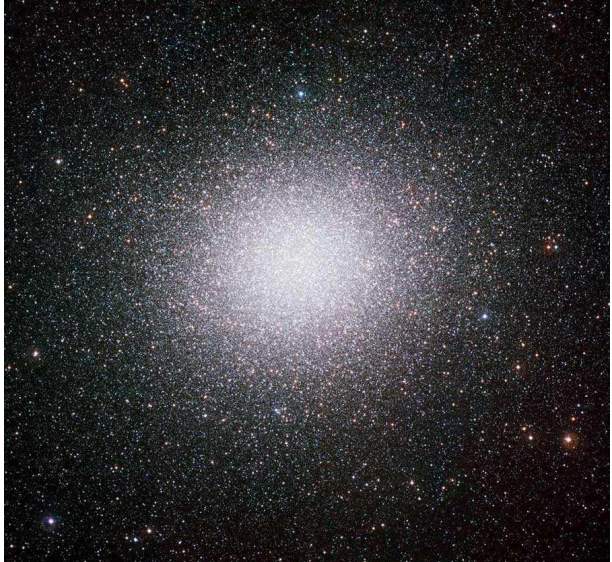
- **ammassi aperti.** Un ammasso aperto è un gruppo di stelle nate insieme da una nube molecolare gigante, e ancora unite dalla reciproca attrazione gravitazionale. Sono anche chiamati ammassi galattici, poiché si trovano solo all'interno del disco galattico. Gli ammassi aperti sono oggetti giovani e contengono molte stelle calde e luminose. Questo rende gli ammassi aperti visibili da grandi distanze, nonché una tipologia di oggetti facili da osservare anche con piccoli strumenti. La nube molecolare "genitore" è a volte ancora associata all'ammasso, che ne illumina alcune parti che diventano visibili come una o più nebulose. Tutte le stelle di un ammasso aperto hanno all'incirca la stessa età e la stessa composizione chimica. La maggior parte degli ammassi aperti sono dominati dalle loro stelle massicce di classe O e B, che sono molto luminose ma di vita breve. L'uniformità delle stelle di un ammasso lo rende un buon banco di prova per i modelli di evoluzione stellare. Le stelle che compongono un ammasso aperto sono inizialmente molto vicine, e si muovono con la stessa velocità attorno al centro della Galassia. Dopo un tempo dell'ordine del mezzo miliardo di anni, un normale ammasso aperto tende ad essere disturbato da fattori esterni; le sue stelle iniziano a muoversi con velocità leggermente differenti e l'ammasso inizia a sfaldarsi. L'ammasso diventa quindi più simile ad una corrente di stelle, le quali non sono abbastanza vicine per essere considerate un ammasso, sebbene siano tutte legate tra di loro e posseggano lo stesso moto proprio.



Figura 10.3 – Ammasso aperto del Trapezio in Orione

- **ammassi globulari.** Un ammasso globulare (detto anche ammasso chiuso o ammasso di alone) è un insieme sferoidale di stelle che orbita come un satellite intorno al centro di una galassia. Gli ammassi globulari sono sorretti al loro interno da una forte gravità, che dà loro il tipico aspetto sferico e mantiene al loro centro una densità di stelle relativamente molto elevata. Gli ammassi globulari sono in genere composti da centinaia di migliaia di stelle vecchie confinate in pochi parsec cubici. Gli ammassi globulari sono piuttosto numerosi: se ne conoscono 158 attorno alla Via Lattea. Pare che le galassie più grandi possano averne un numero nettamente superiore (la Galassia di Andromeda potrebbe averne fino a 500). Alcune galassie ellittiche giganti (come M87) ne contano fino a 10 000. Questi oggetti sono considerati parte dell'alone delle galassie, orbitando attorno ai centri di queste a distanze fino a 40 kpc (circa 130 000 anni luce) o più. L'alta densità stellare degli ammassi globulari fa sì che le interazioni tra stelle e le collisioni mancate siano relativamente frequenti. Il loro centro presenta caratteristiche ideali per la

formazione di oggetti peculiari, come le stelle vagabonde blu (ritenute il risultato della fusione di due stelle) o pulsar veloci con periodi di millisecondi, tutti fenomeni presumibilmente risultanti dall'interazione tra più stelle. La formazione di un ammasso globulare resta un fenomeno piuttosto misterioso. Gli studiosi non sono sicuri se le stelle si sono formate in una singola generazione, o si estendono per diverse generazioni in periodi di diverse centinaia di milioni di anni.

	
<p>Ammasso globulare di Ercole (M13): distanza 25100 a.l., diametro apparente 23,0'; dimensioni 165 a.l.; massa $6 \times 10^5 M_{\odot}$; età stimata 12-14 miliardi di anni</p>	<p>Ammasso globulare Omega Centauri: distanza 16000 a.l., diametro apparente 36,3'; dimensioni 97 ± 6 a.l.; massa $5 \times 10^6 M_{\odot}$; età stimata ~12 miliardi di anni</p>

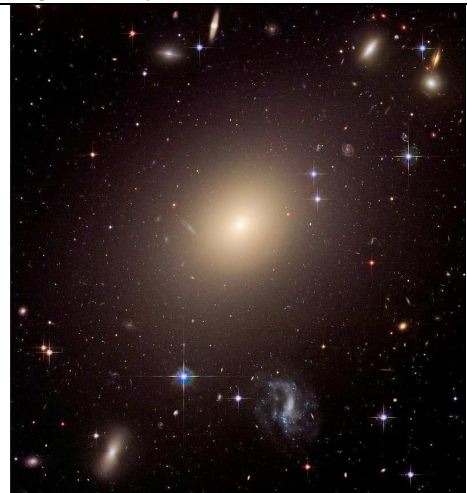
- galassie.** Una galassia è un grande insieme di stelle, sistemi, ammassi ed associazioni stellari, gas e polveri (che formano il mezzo interstellare), legati dalla reciproca forza di gravità. Il nome deriva dal greco *γαλαξίας* (*galaxias*), che significa "di latte, latteo"; è una chiara allusione alla Via Lattea, la Galassia per antonomasia, di cui fa parte il sistema solare. Le galassie sono oggetti dalle vastissime dimensioni; variano dalle più piccole galassie nane, contenenti poche decine di milioni di stelle, alle galassie giganti, che hanno anche mille miliardi di stelle, orbitanti attorno ad un comune centro di massa. Le galassie sono state catalogate secondo la loro forma apparente. Una tipologia molto diffusa è quella ellittica, che, come si può ben arguire dal nome, ha un profilo ad ellisse. Le galassie spirali possiedono invece una forma discoidale con delle strutture spiraliformi che si dipartono dal nucleo. Le galassie con forma irregolare o insolita sono dette galassie peculiari; la loro strana forma è solitamente il risultato degli effetti delle interazioni mareali con le galassie vicine. Se tali interazioni sono particolarmente intense, a causa della grande vicinanza tra le strutture galattiche, può aver luogo la fusione delle due galassie, che risulta nella formazione di una galassia irregolare. La collisione tra due galassie dà spesso origine ad intensi fenomeni di formazione stellare (in gergo *starburst*). Nell'universo osservabile sono presenti probabilmente più di 100 miliardi di galassie; gran parte di esse ha un diametro compreso fra 1 000 e 100 000 parsec e sono di solito separate da distanze dell'ordine di milioni di parsec (megaparsec, Mpc). Lo spazio intergalattico è parzialmente colmato da un tenue gas, la cui densità è inferiore ad un atomo al metro cubo. I dati provenienti dalle osservazioni inducono a pensare che al centro di molte galassie, sebbene non di tutte, esistano dei buchi neri supermassicci; la presenza di questi singolari oggetti spiegherebbe l'attività del nucleo delle galassie cosiddette attive. Tuttavia la loro presenza non implica necessariamente che la galassia che li ospiti sia attiva, dato che anche la Via Lattea sembrerebbe nascondere nel suo nucleo uno di questi buchi neri.



La Via Lattea ripresa dal Cerro Paranal, sito del Very Large telescope (VLT) in Cile



La galassia di Andromeda



La galassia ellittica gigante ESO 325-G004

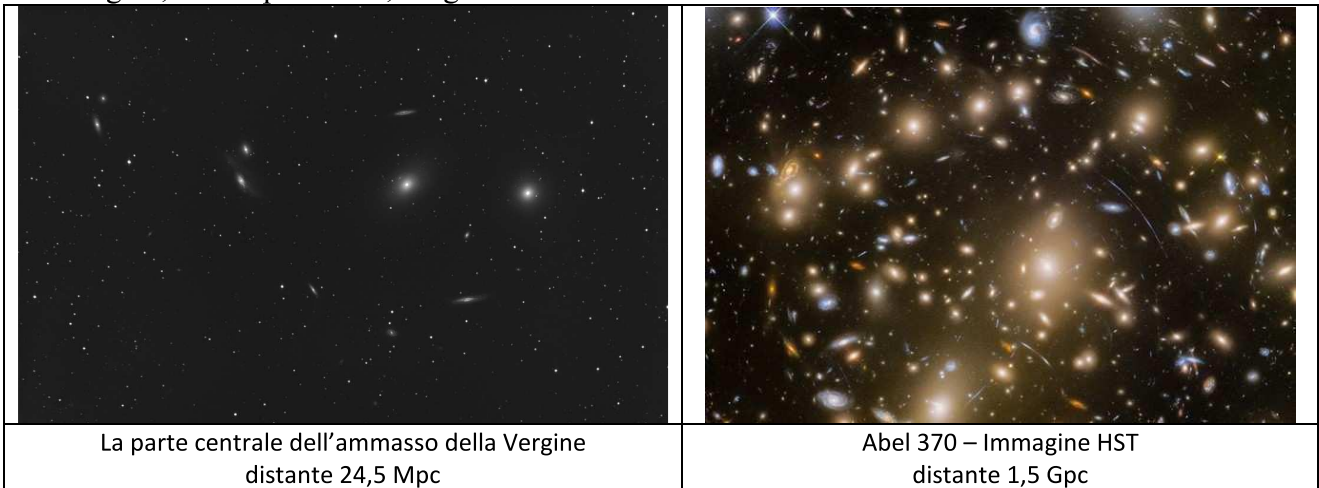


M104 – La galassia Sombrero



Il nucleo di M51

- **ammassi di galassie e loro gruppi** . Nella maggior parte dei casi le galassie sono organizzate secondo precise gerarchie associative, dalle più piccole associazioni, formate da alcune galassie, agli ammassi, che possono essere formati anche da migliaia di galassie. Tali strutture, a loro volta, si associano nei più imponenti superammassi galattici. Queste grandi strutture sono di solito disposte all'interno di enormi correnti (come la cosiddetta Grande Muraglia) e filamenti, che circondano immensi vuoti dell'Universo. I gruppi, ammassi e superammassi di galassie tenuti insieme dall'attrazione di gravità. La ricerca scientifica effettuata sulla struttura, sulla organizzazione e sulla evoluzione degli ammassi, è fondamentale per comprendere meglio l'origine, la composizione, l'organizzazione e il futuro dell'universo stesso.



Le stelle sono i laboratori di sintesi chimica dell'Universo. Nel corso della loro vita costruiscono, a partire da H e He tutti gli elementi chimici conosciuti.

10.2 – Caratteristiche fisiche delle stelle

10.2.1 – La massa

La massa delle stelle è compresa tra 10^{29} kg e 10^{32} kg pari a circa $0,08 M_{\odot}$ e $150 - 200 M_{\odot}$ (M_{\odot} è la massa del Sole, pari a $1,9891 \times 10^{30}$ kg. Al di sotto di $0,08 M_{\odot}$ ($= 80 M_J$ – masse di Giove) non sarebbero possibili reazioni di fusione nucleare adatte a produrre energia sufficiente a mantenere la stella in equilibrio.

Se la massa è compresa tra $13 M_J$ e $80 M_J$ si parla di nane brune.

Gli oggetti la cui massa è compresa tra quella necessaria affinché il corpo sia in equilibrio idrostatico (il corpo assume una forma pressoché sferica) e $13 M_J$ sono pianeti. Tutto il resto viene chiamato “corpi minori”.

Non sembrano esistere stelle di massa superiore a $150 - 200$ masse solari perché supererebbero il Limite di Eddington che è un limite alla luminosità di una stella, in equilibrio idrostatico tra la forza di gravità e la pressione di radiazione. Il limite di Eddington è una funzione della massa M della stella e può essere espresso nella forma

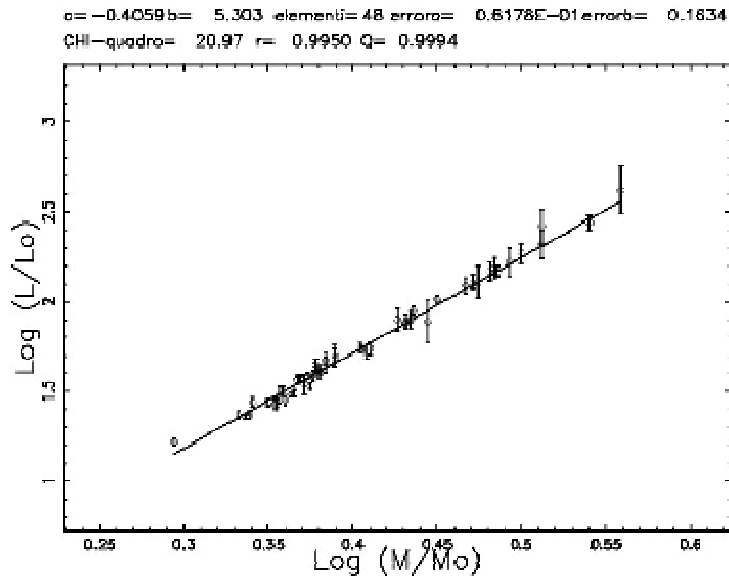
$$[10.1] \quad L_{Edd} = 33000 \frac{M}{M_{\odot}} L_{\odot}$$

$L_{\odot} = 3,827 \times 10^{26}$ W è la luminosità del Sole.

Se la luminosità superasse il limite di Eddington, la pressione di radiazione sarebbe così forte da generare un forte vento stellare in grado di espellere gli strati più esterni. Il corpo tenderebbe a

dissolversi e ciò provocherebbe una diminuzione della sua produzione di energia, e un riabbassamento della luminosità sotto del limite di Eddington.

Ricordiamo una importante relazione utile nel seguito: la relazione luminosità – massa.



Dalle osservazioni si deduce la relazione empirica:

$$\frac{L}{L_{\odot}} \propto \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha} \quad \text{con } 1 < \alpha < 6.$$

Più precisamente, in base ad alcuni modelli stellari, si ha:

$$[10.2] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{per } M < 0,43M_{\odot} & \frac{L}{L_{\odot}} \approx 0,23 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2,3} \\ \text{per } 0,43M_{\odot} < M < 2M_{\odot} & \frac{L}{L_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4 \\ \text{per } 2M_{\odot} < M < 20M_{\odot} & \frac{L}{L_{\odot}} \approx 1,5 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3,5} \\ \text{per } M > 20M_{\odot} & \frac{L}{L_{\odot}} \propto \frac{M}{M_{\odot}} \end{array} \right.$$

10.2.2 – La temperatura e la composizione chimica

La temperatura varia a seconda del tipo di stella e della sua fase evolutiva tra 1800 K e $5 \cdot 10^9$ K.

Tutti gli elementi chimici naturali (dall' idrogeno all'uranio), che sono identificati sulla Terra, sono anche presenti nelle componenti (stelle e materia diffusa) dell'Universo e nessun elemento osservato nell'Universo è assente sulla Terra. Pur essendo i costituenti chimici della Terra gli stessi di quelli dell'Universo, non vi sono tuttavia presenti in uguale misura frazionaria. Si definisce *abbondanza*, o percentuale in massa, di una specie chimica la massa di quella specie contenuta nella massa unitaria del materiale in considerazione. La *concentrazione* di un elemento chimico è invece il numero di atomi (ioni, se la materia è ionizzata) della specie chimica considerata contenuti nell'unità di

volume. Le concentrazioni dei vari elementi vengono usualmente espresse tramite i loro rapporti con la concentrazione, di norma, dell'idrogeno, che è l'elemento più abbondante.

In Astronomia è correntemente usuale fare riferimento solo all'idrogeno, all'elio e al complesso dei metalli, intendendo per questi tutti gli elementi più pesanti dell'elio. Non rimane tuttavia escluso che, tra questi ultimi, si possano distinguere alcuni singoli costituenti, relativamente più abbondanti e/o particolarmente caratterizzanti.

Vari metodi di analisi degli spettri solare e stellari sono in grado di fornire, seppure con alcuni scarti significativi, i rapporti tra le concentrazioni N_i (con $i > 1$) di praticamente tutte le specie chimiche della fotosfera solare e degli elementi più abbondanti delle atmosfere stellari e la concentrazione $N_1 \equiv N_H$ dell'idrogeno. La metallicità solare è ottenuta dalla misura (affidabile) di quasi tutti i rapporti N_i/N_H (con $i > 2$), ricavabili dallo spettro solare, mentre il rapporto $N_2/N_1 \equiv N_{He}/N_H$ (per l'elio) è fornito dal vento solare, così come per il neon e per l'argon (cfr. Tabella 2).

Per le stelle, invece, gli spettri consentono misure attendibili solo per i rapporti N_i/N_H di alcuni metalli. Il loro ridotto illuminamento riduce infatti la possibilità di ottenere spettri adeguati per un'analisi chimica completa. Inoltre, sono anche alquanto differenti le precisioni con le quali possono essere ottenute le abbondanze dei diversi elementi. Ciò ha indotto a fare precipuo riferimento al ferro, che, tra i metalli, è quello con abbondanza meglio determinabile, e a definire, ad esempio, i rapporti tra i numeri degli atomi di ferro (N_{Fe}) e di idrogeno (N_H), tra quelli di ossigeno (N_O) e di ferro e così via. In particolare, poi, questi rapporti sono messi in relazione con i corrispondenti rapporti nel Sole. Più precisamente rimangono definiti, ad esempio, i rapporti

$$[10.3] \quad [Fe/H] = \log \left(\frac{N_{Fe}}{N_{Fe\odot}} / \frac{N_H}{N_{H\odot}} \right) = \log \frac{N_{Fe}}{N_H} - \log \left(\frac{N_{Fe}}{N_H} \right)_{\odot}$$

$$[O/Fe] = \log \left(\frac{N_O}{N_{O\odot}} / \frac{N_{Fe}}{N_{Fe\odot}} \right) = \log \frac{N_O}{N_{Fe}} - \log \left(\frac{N_O}{N_{Fe}} \right)_{\odot}$$

Siano ora M_H , M_{He} , M_Z le masse rispettivamente di idrogeno, di elio e di tutti i metalli presenti nella massa M dell'elemento di materia analizzata; le corrispondenti abbondanze sono, nell'ordine, indicate con

$$[10.4] \quad X = \frac{M_H}{M} \quad Y = \frac{M_{He}}{M} \quad Z = \frac{M_Z}{M}$$

Dalle stesse definizioni segue immediatamente che

$$[10.5] \quad X + Y + Z = 1,$$

sicché sono sufficienti solo due delle tre quantità per individuare la composizione chimica della materia interessata. Se nell'ambito di Z si vogliono distinguere singoli componenti, ne indicheremo le relative abbondanze con Z_i (essendo $i > 2$) o, ad esempio, con $Z_{Fe} = M_{Fe}/M$ per il ferro, $Z_O = M_O/M$ per l'ossigeno, ecc.

I rapporti delle concentrazioni (in numero) sono direttamente collegabili ai rapporti delle abbondanze tramite i pertinenti pesi atomici. Considerata infatti la specie chimica i -esima di peso atomico A_i e detti M_i ed N_i i corrispondenti valori, per unità di volume, della massa e del numero di atomi (ioni), è $M_i = u A_i N_i$ essendo u l'unità di massa atomica ($=1,6605402 \times 10^{-27}$ kg). Per $i \neq j$ si ha

$$[10.6] \quad \frac{M_i}{M_j} = \frac{A_i}{A_j} \frac{N_i}{N_j}$$

essendo M_i/M_j uguale al rapporto delle corrispondenti abbondanze.

NOTA Il valore A_i del peso atomico dell'elemento i -esimo è determinato avendo posto uguale a $12u$ la massa dell'isotopo ^{12}C del carbonio. Il peso atomico A_i si riferisce al valore medio (pesato) dei pesi atomici degli isotopi stabili dell'elemento considerato presenti nella composizione terrestre, che è circa uguale a quella solare. Conviene notare che con lo stesso simbolo A_i viene indicato, per l'elemento i -esimo, anche il numero di massa, definito come il numero intero più vicino al peso atomico A_i .

Modelli standard di Big Bang implicano che all'inizio dell'esistenza dell'Universo ha avuto luogo una nucleosintesi primordiale, antecedente quella stellare, con trasformazione di parte dell'idrogeno in elio (e in ammontare trascurabile negli elementi leggeri: deuterio, litio, berillio e boro) per una composizione chimica risultante

$$Y_p = 0,23 \div 0,24, \quad Z_p = 0, \quad X_p = 1 - Y_p - Z_p = 0,76 \div 0,77.$$

Le prime stelle formatesi dovevano quindi avere la composizione chimica primordiale, quelle condensatesi successivamente abbondanze dell'elio e dei metalli maggiori a causa della nucleosintesi intervenuta nelle stelle e della successiva immissione dei materiali così sintetizzati nel mezzo interstellare. Da osservazioni di regioni HII^[1] risulta che l'abbondanza in elio è correlata all'abbondanza in metalli secondo la

$$[10.7] \quad Y = Y_p + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} Z$$

con $\frac{\Delta Y}{\Delta Z}$ sostanzialmente indipendente da Z e con 2,5 suo valore più comunemente accettato. La

[10.6] è interpretabile in termini di sviluppo in serie di Taylor di $Y(Z)$ arrestato al primo ordine e, come tale, è intesa sottintendere anche una implicazione teorica.

La fotosfera della maggioranza delle stelle e quella solare hanno conservato la composizione chimica originaria, quella cioè della nebulosa dalla quale esse si sono formate. Le eccezioni riguardano stelle molto evolute, nelle quali episodi di drenaggio profondo hanno portato in superficie, per convezione, materiale interessato dalla fusione nucleare interna (vedi paragrafo 11.8.3)

Nel caso del Sole i dati delle osservazioni forniscono i rapporti $N_{\text{He}}/N_{\text{H}} = 1/10$ ed $N_{\text{Z}}/N_{\text{H}} = 1/35 A_{\text{Z}}$ (essendo N_{Z} la concentrazione di tutti i metalli e A_{Z} il valore medio dei loro pesi atomici). In forza della [10.4] seguono quindi

$$\frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{H}}} = \frac{A_{\text{He}}}{A_{\text{H}}} \frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{H}}} = 4 \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0,4, \quad \frac{M_{\text{Z}}}{M_{\text{H}}} = \frac{A_{\text{Z}}}{A_{\text{H}}} \frac{N_{\text{Z}}}{N_{\text{H}}} = \frac{A_{\text{Z}}}{A_{\text{H}}} \frac{1}{35 A_{\text{Z}}} = \frac{1}{35} = 0,0286$$

[1] Una regione H II (pronunciato regione acca secondo) è una nebulosa a emissione associata con stelle giovani, blu e calde (dei tipi OB, nell'angolo superiore del diagramma H-R). H II è il termine che indica l'idrogeno ionizzato, e le regioni H II sono nubi di gas ionizzato dalla radiazione ultravioletta dalle stelle giovani. Le zone di formazione stellare si trovano infatti sempre in corrispondenza di questo tipo di oggetti nebulosi. Si trovano nei bracci di spirale delle galassie, perché è in essi che la maggior parte delle stelle si formano. Nella Via Lattea, ne sono esempi la Nebulosa di Orione e la Nebulosa Aquila. In luce visibile, sono caratterizzate dal loro colore rosso, causato dalla forte linea di emissione dell'idrogeno H α a 656,3 nanometri. Oltre all'idrogeno si trovano, in misura minore, anche altre specie atomiche. In particolare si osservano comunemente le linee proibite dell'ossigeno, dell'azoto e dello zolfo.

avendo approssimato i pesi atomici con i numeri atomici di massa. Con questi valori dei rapporti e con riferimento alla [10.3] si ha allora $M = M_H + M_{He} + M_Z = M_H + \frac{2}{5}M_H + \frac{1}{35}M_H = \frac{10}{7}M_H$, da cui $X_{\odot} = 0,70$ e poi, a seguire, $Y_{\odot} = 0,28$ e $Z_{\odot} = 0,02$.

Come già accennato, il grande illuminamento del Sole permette un'analisi spettroscopica dettagliata e la determinazione delle abbondanze di praticamente tutti gli elementi presenti. In particolare, indicato con $i > 2$ il generico metallo, la sua abbondanza riferita alla massa di tutti i metalli è data dal rapporto

$$[10.8] \quad q_i = \frac{M_i}{M_Z}$$

Per la coppia di metalli di indici i e j si ha, quindi, $q_i/q_j = M_i/M_j$. L'insieme di questi valori q_i costituisce la cosiddetta *partizione solare* (o *miscela solare*) dei metalli. Ovviamente, essendo le abbondanze q_i e Z quantità relative, si possono anche avere stelle con Z uguali e insiemi di valori q_i diversi e, viceversa, q_i uguali e Z diversi. I rapporti q_i/q_j (per i e j maggiori di 2) dedotti dalla partizione solare concordano con i corrispondenti valori medi relativi alta crosta terrestre e alle meteoriti. Nella Tabella 1 è riportata la partizione solare (secondo Ross e Aller) dei metalli più abbondanti.

Dalle osservazioni si verifica che per la maggior parte delle stelle i rapporti N_i/N_j (con i e j maggiori di 2) tra i numeri degli atomi di elementi metallici sono praticamente uguali ai corrispondenti rapporti presenti nella partizione solare. Per quanto già detto, ci si limita pertanto a considerare solo il ferro come indicatore della metallicità Z . Dalla prima delle [10.3], moltiplicando entrambi gli argomenti dei logaritmi per il rapporto A_{Fe}/A_H dei pesi atomici, si ottiene

$$[10.9] \quad [Fe/H] = \log \left(\frac{N_{Fe}}{N_H} \frac{A_{Fe}}{A_H} \right) - \log \left(\left(\frac{N_{Fe}}{N_H} \right)_{\odot} \frac{A_{Fe}}{A_H} \right) = \log \frac{M_{Fe}}{M_H} - \log \left(\frac{M_{Fe}}{M_H} \right)_{\odot} =$$

$$= \log \left(\frac{M_{Fe}}{M_Z} \frac{M}{M_H} \frac{M_Z}{M} \right) - \log \left(\frac{M_{Fe}}{M_Z} \frac{M}{M_H} \frac{M_Z}{M} \right)_{\odot} = \log \frac{Z}{X} - \log \left(\frac{Z}{X} \right)_{\odot}$$

avendo tenuto conto che, per l'assunta uguaglianza tra le partizioni dei metalli nelle stelle e nel Sole, è $M_{Fe}/M_Z = (M_{Fe}/M_Z)_{\odot}$. Se poi si tiene presente che $X \approx X_{\odot}$ (con uno scarto al più del 10% nell'intervallo $10^{-4} \leq Z \leq 0,04$) e che $Z_{\odot} = 0,02$, risulta

$$[10.10] \quad [Fe/H] = \log \frac{Z}{Z_{\odot}} = \log Z + 1,70.$$

Ovviamente, per il Sole è $[Fe/H]_{\odot} = 0$.

TABELLA 1			
<i>Numeri atomici Z_i, pesi atomici A_i e rapporti $q_i = M_i/M_Z$ delle masse dei metalli (indice i) più abbondanti nel Sole rispetto alla massa totale dei metalli M_Z (partizione solare di Ross-Aller). I pesi atomici dell'idrogeno e dell'elio sono rispettivamente 1,0078 e 4,0026.</i>			
Elemento	Numero atomico	A_i	q_i
C	6	12,0111	0,2179
N	7	14,0067	0,0531
O	8	15,9994	0,4816
Ne	10	20,1790	0,0326
Na	11	22,9898	0,0019
Mg	12	24,3050	0,0421
Si	14	28,0866	0,0546
S	16	32,060	0,0221
Ca	20	40,080	0,0039
Ti	22	47,90	0,0002
Fe	26	55,8470	0,0768
Ni	28	58,710	0,0049

10.2.3 – Radiazione stellare

La radiazione stellare è costituita da fotoni di energia $E = h\nu$. Essendo bosoni, non interagiscono tra loro, ma in presenza di materia sono continuamente assorbiti e riemessi in una situazione di equilibrio dinamico descritta dalla distribuzione di corpo nero (Planck, 1901)

$$[10.11] \quad u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1} \quad (h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})$$

dove la funzione $u_\nu(T)$ rappresenta, per una certa temperatura T , l'energia emessa per unità di volume e per unità di frequenza. Si ha cioè:

$$[10.12] \quad \int_V \int_0^\infty u_\nu(T) d\nu dV = U$$

U rappresenta l'energia totale emessa dal corpo nero.

Ponendo $x = \frac{h\nu}{kT}$ la distribuzione di corpo nero diventa, a

meno di costanti, la funzione $y = \frac{x^3}{e^x - 1}$ il cui grafico è un

figura 10.4. Con la sostituzione indicata si può integrare^[2] la

[10.11] rispetto a ν e si ottiene l'energia per unità di volume

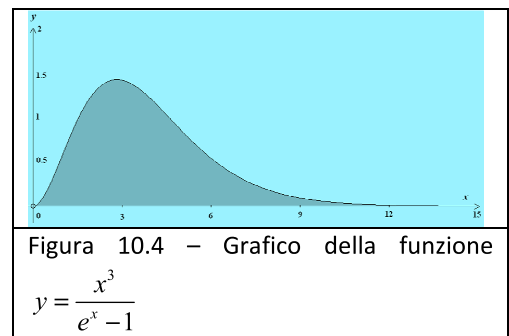
$$[10.13] \quad u = aT^4$$

con $a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} = 7,536 \cdot 10^{-15} \text{ erg/m}^3$. Il massimo della funzione obbedisce alla legge

$$[10.14] \quad \lambda_{MAX} T = \text{costante} = 0,2898 \text{ cm} \cdot \text{K} \quad (\text{legge di Wien}).$$

Al crescere della temperatura le curve della distribuzione variano di molto, senza intersecarsi mai (figura 10.5). L'approssimazione di corpo nero è abbastanza buona per le stelle di sequenza principale (circa il 90% del totale). Nella figura 4 è rappresentato lo spettro del Sole al di fuori dell'atmosfera (punti) confrontato con la distribuzione di corpo nero a 6000 K (tratto e punto) e con lo spettro della radiazione raccolta alla superficie della Terra (linea continua).

Oggi lo studio dell'astronomia viene fatto essenzialmente attraverso l'analisi delle onde elettromagnetiche che arrivano dallo spazio. La presenza dell'atmosfera non permette però a tutto lo spettro elettromagnetico di giungere a terra; in figura 10.7 viene riportato uno schema dalla trasparenza dell'atmosfera alle varie lunghezze d'onda. È chiaro quindi perché la prima astronomia è avvenuta nel visibile. Solo alla fine della seconda guerra mondiale ci si è accorti che il radar, allora di recente invenzione, era in grado di rilevare dei segnali provenienti dal cosmo (nasce la Radioastronomia). Successivamente, mediante palloni sonda e aerei d'alta quota sono state fatte rilevazioni nell'infrarosso, ma solo con la possibilità di mettere in orbita satelliti artificiali (fine anni



[2] L'integrale $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ si calcola per serie o estendendolo nel piano complesso.

'50 inizio anni '60 del secolo scorso) è stato possibile dare il via all'astronomia nelle microonde, nei raggi ultravioletti, X e γ .

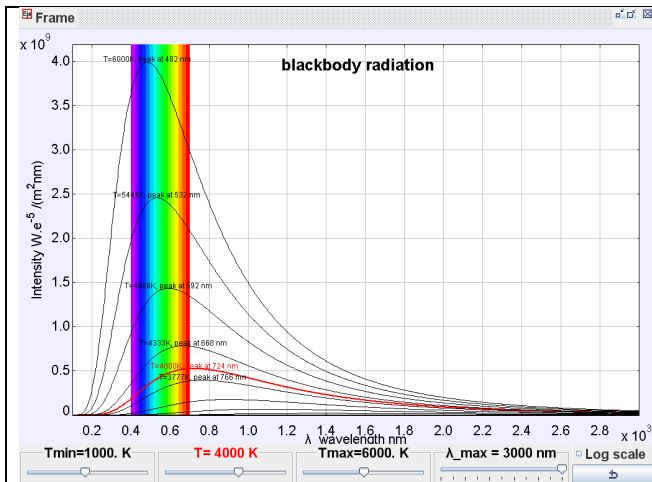


Figura 10.5 – Dipendenza della distribuzione di Planck dalla temperatura.

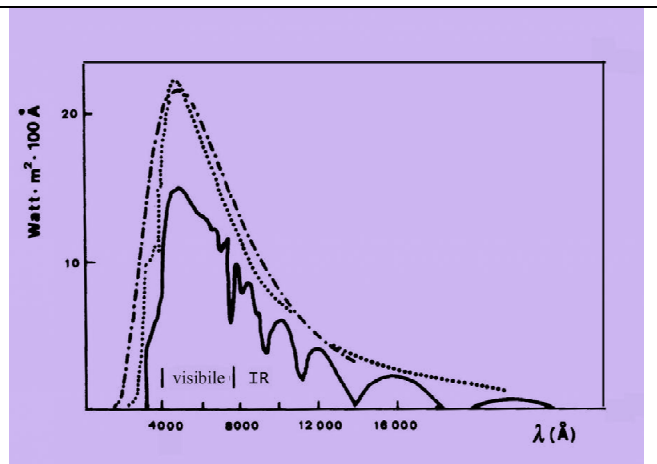


Figura 10.6 – Lo spettro del sole

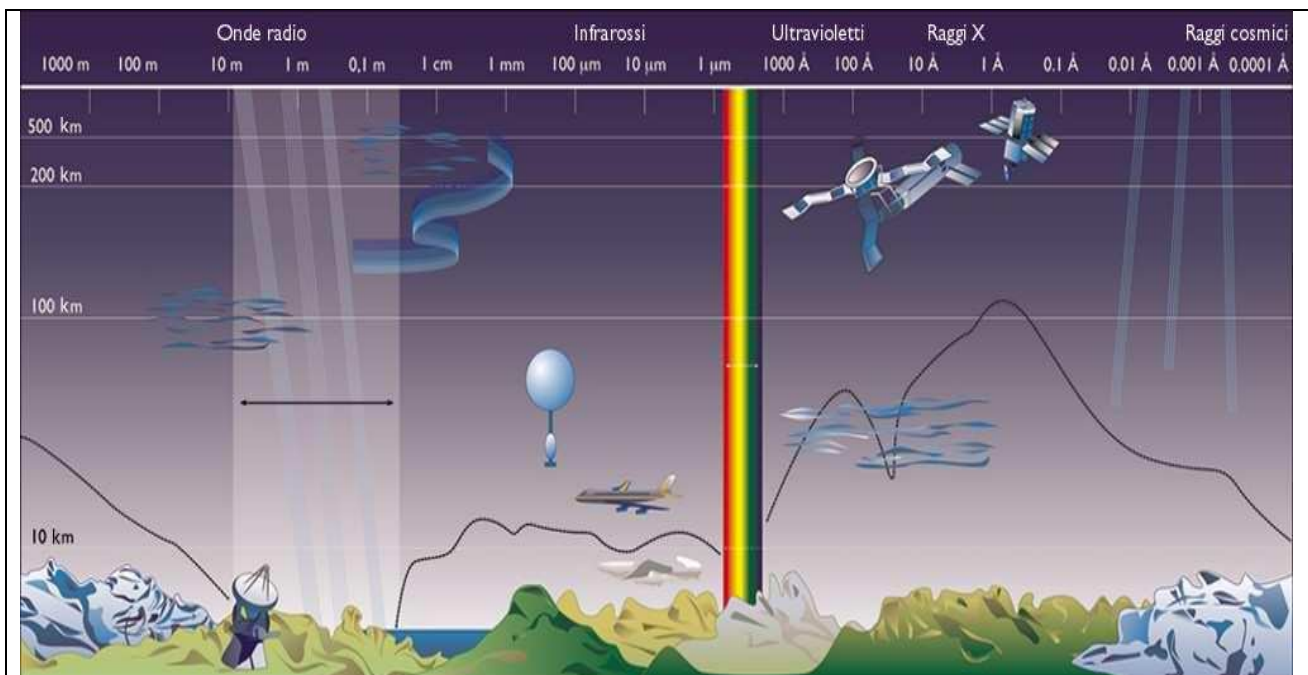


Figura 10.7 – Le onde elettromagnetiche e l'assorbimento atmosferico.

10.2.4 – Flusso – Temperatura effettiva

Si definisce **flusso di energia** di una sorgente L^* la potenza emessa per unità di superficie, ovvero l'energia per unità di tempo e di superficie (W/cm^2).

Dalla [10.13], ponendo $\sigma = \frac{ac}{4}$, σ prende il nome di costante di Stefan, con dimensioni $Js^{-1}m^{-2}K^{-4}$, ricaviamo per il flusso l'espressione

[10.15]
$$L^* = \sigma T^4$$

Possiamo poi definire la **luminosità** L della configurazione come la potenza totale emessa. Considerando la stella come un corpo nero sferico di raggio R avremo

$$[10.16] \quad L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (\text{Legge di Stefan-Boltzmann})$$

dove T_{eff} (detta **temperatura effettiva**) è definita come la temperatura superficiale della stella se fosse un corpo nero ideale, ossia è la temperatura di un corpo nero con la stessa luminosità per unità di area della stella. Per il Sole $T_{eff} = 5777$ K.

Nella grande maggioranza dei casi le T_{eff} stellari variano fra 3000 K e 50000 K, con alcuni casi eccezionali (pre-nane bianche, nane brune). Molto più ampie sono le variazioni di L .

Spesso è importante la **luminosità monocromatica** L_λ , cioè la luminosità per unità di lunghezza d'onda. Si ha

$$[10.17] \quad L = \int_0^\infty L_\lambda d\lambda$$

La luminosità che noi possiamo misurare da Terra dipende ovviamente dalla distanza della sorgente, dall'assorbimento del mezzo interstellare (selettivo) e da quello della nostra atmosfera.

10.2.5 – Le magnitudini (approfondimento)

In questo paragrafo si riprende quanto già detto nel paragrafo 5.3.

Il flusso F raccolto da un rivelatore sulla Terra è dunque alterato dalla distanza D della stella:

$F = \frac{L}{4\pi D^2}$, poi l'assorbimento selettivo del mezzo interstellare lo modifica in modo diverso a

seconda della lunghezza d'onda: $F_\lambda = A(\lambda) F'_\lambda$; $F = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda$. Infine si paga il contributo all'atmosfera, che è minimo per una stella allo zenit e aumenta con l'angolo calcolato rispetto a esso (distanza zenitale). Alcune zone dello spettro (p. es. l'UV estremo e tutte le lunghezze d'onda più corte) vengono completamente assorbite. Una volta calcolate tutte le perdite, il flusso per unità di lunghezza d'onda superstita F_λ e quello integrato su tutte le lunghezze d'onda, F , permette di calcolare la **magnitudine apparente** di una stella:

$$[10.18] \quad m_v = -2,5 \log F + \text{costante} \quad (\text{Formula di Pogson})$$








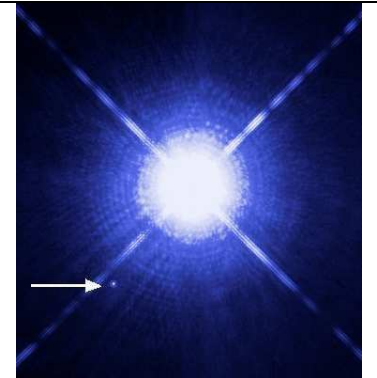

N.B. Più la stella è brillante, più la magnitudine è **negativa**!

Motivo della formula di Pogson è la sensibilità (logaritmica) dell'occhio umano: un tentativo di riprodurre la scala di magnitudini (da 1 a 6) usata dagli astronomi del passato (Ipparco, Tolomeo). Il valore della costante era stato scelto in modo che la magnitudine apparente di α Lyrae (Vega), scelta come riferimento per tutte le altre, fosse esattamente zero, ma errori compiuti nel trasferimento dei formati fotometrici da una regione all'altra del cielo hanno fatto sì che oggi la magnitudine di Vega sia fissata a 0,14.

Più importante della magnitudine apparente è quella **assoluta**, definita come la magnitudine apparente che ogni stella avrebbe se fosse portata alla distanza di 10 pc (32,63 anni luce):

$$[10.19] \quad M_v = m_v + 5 \log \frac{10}{r} - A$$

r è la distanza in parsec e A è la correzione per l'assorbimento interstellare, massimo sul piano galattico. In tale direzione si può stimare, in unità di magnitudine, $A \sim r/2000$.

<p><i>ALDEBARAN</i> gigante rossa (K5) $m = 0,8$ $d = 68$ a.l. $R = 37 R_S$</p> 	<p><i>BETELGEUSE</i> supergigante rossa (M2) $m = 0,8$ $d = 650$ a.l. $R = 800 R_S$</p> 	<p><i>CAPELLA</i> Gialla (G5) $m = 0,1$ $d = 43$ a.l.</p> 
<p><i>DENEB</i> Supergigante bianca (A2) $m = 1,2-1,3$ $d=1800$ a.l.</p> 	<p><i>MINTAKA</i> Azzurra (B0) $m = 2,1-2,3$ $d = 900$ a.l.</p> 	<p><i>PROCIONE</i> Gialla (F5) $m = 0,4$ $d = 11$ a.l.</p> 
<p><i>RIGEL</i> Azzurra (B8) $m = 0,1$ $d = 900$ a.l.</p> 	<p><i>SIRIO</i> Bianca (A1) $m = -1,46$ $d = 8,6$ a.l.</p> 	<p><i>VEGA</i> Bianca (A0) $m = 0,03$ $d = 25,3$ a.l.</p> 
<p>Figura 10.8 – I colori delle stelle</p>		

10.2.6 – Indici di colore e classi spettrali

Si comprende come la magnitudine stellare fornisca molte più informazioni quando viene analizzata alle varie lunghezze d'onda. A questo scopo sono stati studiati molti diversi *sistemi fotometrici*, il più famoso dei quali è il sistema UBV di Johnson e Morgan, che prevede la misura delle

magnitudini in tre diverse bande: U (centrata a 364 nm), B (442 nm) e V (540 nm). In tempi più recenti sono state aggiunte altre due bande, la R (rossa, 700 nm) e la I (infrarossa, 900 nm).

A partire dalle bande UBV si definiscono gli **indici di colore**, cioè le differenze tra le magnitudini misurate nelle varie lunghezze d'onda:

$$U-B = m_U - m_B ; \quad B-V = m_B - m_V$$

Essi dipendono ovviamente dal colore della stella: per Vega sono entrambi zero. Più la stella è blu, più piccolo è l'indice di colore. Per il Sole si ha: $B-V = 0,66$.

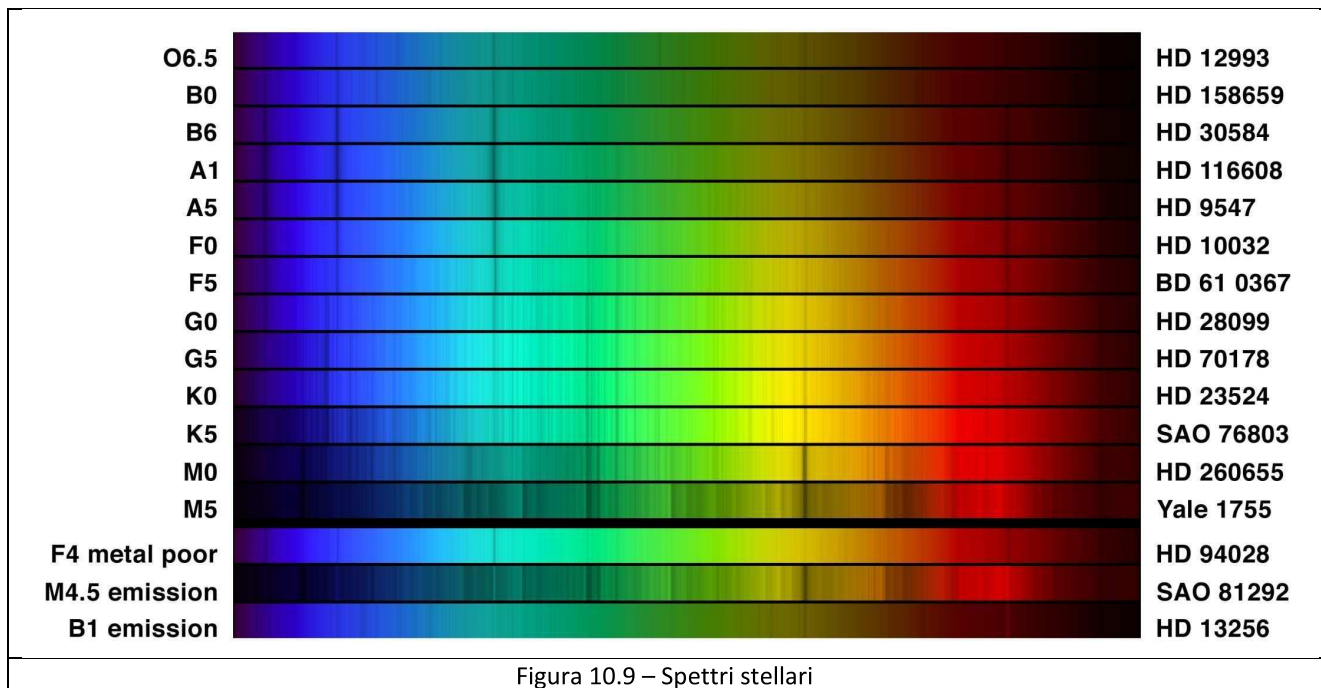
Con gli indici di colore si può surrogare (in parte) la conoscenza degli spettri.

In astronomia le stelle vengono classificate sulla base del loro spettro. La classe spettrale di una stella è assegnata a partire dalla sua temperatura superficiale, che può essere stimata mediante la legge di Wien in base alla sua emissione luminosa.

La maggior parte delle stelle è classificata usando le lettere O, B, A, F, G, K e M (in lingua inglese è stata coniata una frase per ricordarsi facilmente questa scala: "Oh Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me"; Oh, sii una ragazza/un ragazzo gentile, baciami): le stelle di tipo O sono le più calde, le altre lettere sono assegnate a stelle via via meno calde, fino a quelle più fredde di classe M. È uso descrivere le stelle di classe O come "blu", quelle di classe B come "azzurre", quelle di classe A come "bianche", quelle di classe F come "bianco-gialle", quelle di classe G come "gialle", quelle di classe K come "arancioni" e quelle di classe M come "rosse". Tuttavia i colori che appaiono all'osservatore possono differire da questi in ragione delle condizioni di osservazione e delle caratteristiche della stella osservata.

L'attuale ordine non alfabetico deriva da un precedente schema classificatorio che utilizzava tutte le lettere dalla A alla O; alcune delle classi originali furono conservate, ma riordinate secondo la temperatura quando la relazione fra le classi e la temperatura superficiale delle stelle diventò chiara; inoltre alcune classi vennero eliminate perché doppioni di altre. Nell'attuale schema di classificazione (la classificazione di Morgan-Keenan) ogni classe è divisa in dieci sottoclassi numerate da 0 a 9. Più il numero è basso, maggiore è la temperatura della stella. Per esempio, la classe F0 raccoglie le stelle di classe F più calde e quindi più vicine a quelle di classe A.

Classe spettrale	Temperatura superficiale	Colore	Magnitudine assoluta (SP)
O5	40000 K	Blu	- 5,8
B0	28000 K	Blu	- 4,1
A0	9900 K	Blu-bianco	+ 0,7
F0	7400 K	Bianco	+ 2,6
G0 (Sole = G2)	6000 K	Giallo	+ 4,4
K0	4900 K	Arancione	+ 5,9
M0	3480 K	Rosso-arancio	+ 9,0
R, N	3000 K	Rosso	
S	3000 K	Rosso	



Altre informazioni possono essere fornite aggiungendo delle lettere o altri simboli. Un numero romano serve per indicare la luminosità.

I0, Ia, Ib	<i>IPERGIGANTI</i>
II	<i>SUPERGIGANTI</i>
III	<i>GIGANTI</i>
IV	<i>SUBGIGANTI</i>
V	<i>NANE (= SEQUENZA PRINCIPALE). SOLE: G2V</i>
VI	<i>SOTTONANE</i>
VII	<i>NANE BIANCHE</i>

10.3 – Popolazioni stellari

Le stelle vengono divise in due grandi classi chiamate popolazione I e popolazione II. Un'ulteriore classe chiamata popolazione III è stata aggiunta nel 1978.

10.3.1 – Popolazione II

Sono stelle relativamente povere di metalli perché sono molto antiche e si sono formate nell'universo primitivo quando questo conteneva frazioni piccolissime di elementi diversi dall'idrogeno e dall'elio. La percentuale di metalli nelle stelle di popolazione II si aggira in media intorno allo 0,1%.

Nel 2014 fu annunciata la scoperta di SMSS J031300.36-670839.3, che ha una percentuale di metalli 10 milioni di volte inferiore a quella del Sole. È anche la stella più vecchia conosciuta, probabilmente si è formata solo 100 milioni di anni dopo il Big Bang.

Le stelle di popolazione II si trovano soprattutto negli aloni galattici e negli ammassi globulari.

10.3.2 – Popolazione I

La generazione successiva di stelle è quella di popolazione I. Tali stelle nacquero da nubi di gas contaminate dai metalli prodotti dalle stelle di popolazione II e rilasciati nel mezzo interstellare

dopo la fine della loro esistenza. Queste stelle più giovani presentano una percentuale di metalli del 2-3%.

A parità di massa le stelle di popolazione I sono meno luminose delle stelle di popolazione II, ciò è dovuto al fatto che i metalli presenti al loro interno assorbono parte dei fotoni prodotti, rendendole maggiormente opache. I metalli tendono ad assorbire prevalentemente le frequenze più corte (blu), a parità di massa le stelle di popolazione I risultano più rosse e meno calde di quelle di popolazione II.

L'alta metallicità delle stelle di popolazione I rende più probabile che esse possiedano un sistema planetario, dato che i pianeti, specie quelli terrestri, si formano mediante l'accrescimento di metalli.

Nella Via Lattea, la metallicità tende a decrescere mano a mano che ci si allontana dal centro galattico poiché ci sono più stelle nei pressi del centro galattico che con il passare del tempo rilasciano metalli nel mezzo interstellare.

Il Sole è una stella di popolazione I come pure gran parte delle stelle visibili a occhio nudo dalla Terra.

10.3.3 – Popolazione III

Le stelle di popolazione II sono povere di metalli, ma non ne sono del tutto prive, ciò fa presupporre l'esistenza di una popolazione precedente (popolazione III) in quanto nel Big Bang si sono prodotti solo idrogeno ed elio (e tracce di litio-7).

Tali stelle, all'epoca della loro formazione, erano completamente prive di metalli; al termine della loro esistenza hanno però disperso i metalli da esse prodotti e questi sono poi confluiti nelle nubi di gas da cui si sono formate le stelle di popolazione II. Evidenze indirette dell'esistenza di stelle di popolazione III sono state ottenute tramite l'utilizzo di galassie molto distanti come lenti gravitazionali.

Secondo alcune teorie sono esistite due generazioni di stelle di popolazione III.

Riguardo alla massa delle stelle di popolazione III ci sono alcune teorie. Secondo una prima teoria l'assenza di metalli e l'elevata temperatura del mezzo interstellare dopo il Big Bang avrebbero favorito l'esistenza di stelle di parecchie centinaia di masse solari. Una teoria alternativa si basa sull'osservazione di stelle di popolazione II molto povere di metalli che si pensa derivino dalle stelle di popolazione III e queste avrebbero avuto una massa compresa fra 20 e 130 M_{\odot} come quelle attuali. Infine una teoria intermedia prevede che le prime stelle fossero stelle molto massicce circondate da parecchie stelle di massa minore.

10.4 – Statistica stellare

I processi di formazione stellare privilegiano le stelle di piccola massa: circa tre quarti delle stelle nella Via Lattea sono di tipo spettrale M (con un massimo intorno al tipo M4). I risultati variano per le altre galassie, ma questo fatto resta valido: le stelle di grande massa sono estremamente rare.

Un conteggio più accurato fornisce (sempre nella Via Lattea), per ogni stella di tipo spettrale O

- 3400 stelle di tipo spettrale B
- 17 000 stelle di tipo spettrale A
- 85 000 stelle di tipo spettrale F
- 221 000 stelle di tipo spettrale G
- 255 000 stelle di tipo spettrale K
- 1 700 000 stelle di tipo spettrale M

10.5 – Il diagramma di Hertzsprung e Russell

Lo studio statistico delle proprietà delle stelle mostra l'esistenza di un notevole intervallo di luminosità e di temperature. In particolare le stelle di tipo spettrale O appaiono essere sistematicamente più luminose di quelle di tipo M, e pure la temperatura segue un andamento parallelo, con le stelle O più calde e quelle M più fredde. Infine il diagramma massa – luminosità fornisce l'indicazione aggiuntiva che le stelle O hanno masse maggiori di quelle di tipo M. La regolarità di questi andamenti suggerì inizialmente l'idea ingenua, presto abbandonata, che essi indicassero un cambiamento evolutivo delle stelle: esse sarebbero nate calde di tipo spettrale O con grande luminosità e si sarebbero progressivamente trasformate in stelle meno massive, avendo bruciato il loro combustibile, più fredde meno luminose. Un ricordo di quell'idea rimane nella suddivisione delle stelle in early-type, stelle giovani, e late-type, stelle vecchie.

Se quell'idea fosse stata corretta, sarebbe dovuta emergere una relazione tra luminosità e tipo spettrale. Nel 1905 un astronomo danese Ejnar Hertzsprung (1873 – 1967), utilizzando i dati delle stelle meglio conosciute, ricavò una tabella che mostrava appunto una buona correlazione tra

quelle grandezze. Si trovò però a dover spiegare perché le stelle di tipo K – M coprissero un grande intervallo di luminosità, alcune ancora luminose come le O, altre molto più deboli. Propose che ciò fosse dovuto ad una differenza nelle dimensioni; secondo la legge sulla luminosità di un corpo nero:

$$[10.20] \quad R = \frac{1}{T_{\text{eff}}^2} \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}}$$

e quindi le stelle più luminose, ma con la stessa temperatura, avrebbero avuto un raggio maggiore: per questo le chiamò giganti.

Qualche anno più tardi l'americano Henry Norris Russell (1877 – 1957) giunse allo stesso risultato indipendentemente. Il diagramma originale pubblicato da Russell su Nature nel 1914 è illustrato in Figura 10.10 che mostra una relazione tra il tipo spettrale e la magnitudine visuale assoluta. Al posto del tipo spettrale si può o anche usare l'indice di colore in quanto sono ambedue legati alla temperatura superficiale. Questo primo diagramma mostra già tutte le caratteristiche di un moderno **diagramma di Hertzsprung-Russell**, più concisamente **diagramma HR**.

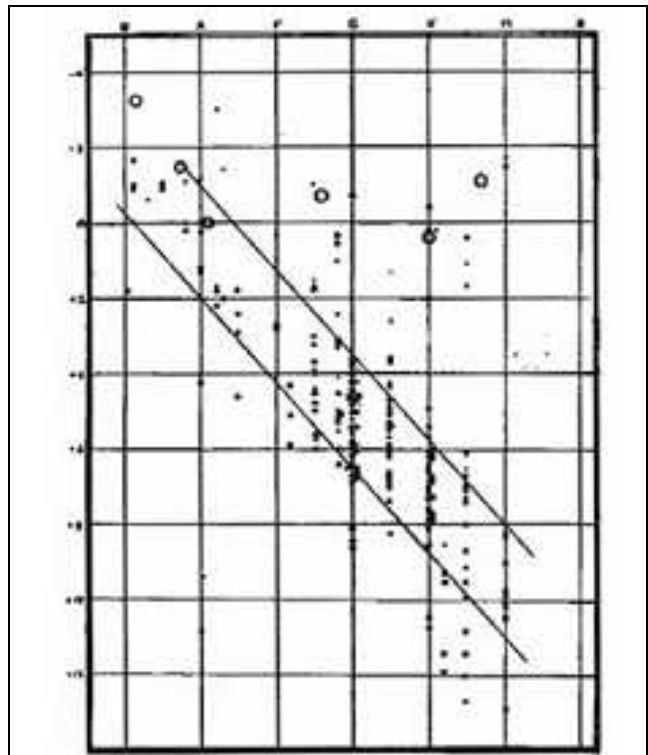


Figura 10.10 – Diagramma magnitudine assoluta vs tipo spettrale (Russell, Nature 93, 252, 1914)

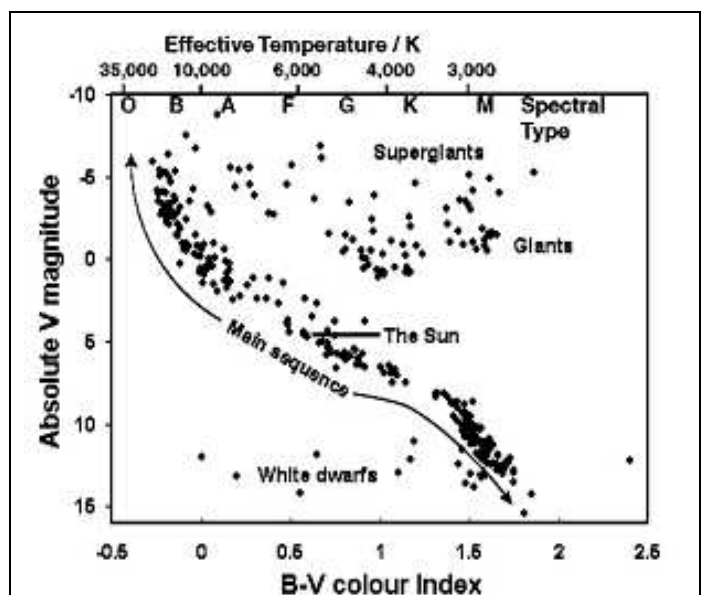


Figura 10.11 – Diagramma HR osservativo delle stelle nelle vicinanze del sistema solare

Delle 200 stelle utilizzate da Russell, l'80-90% si dispongono lungo una striscia che si estende dalle stelle B calde e luminose fino alle stelle M fredde e deboli: questa striscia fu chiamata da Russell sequenza principale. Moderni diagrammi HR sono riportati nelle figure 10.11 e 10.12, dove oltre il tipo spettrale delle stelle è dato in ascissa anche l'indice di colore B-V e la temperatura corrispondente. Nella parte destra in alto del diagramma si dispongono le stelle giganti rosse e supergiganti rosse (stelle di bassa temperatura e alta luminosità), nella parte sinistra in basso si dispongono le stelle nane bianche (stelle di alta temperatura e bassa luminosità). Incidentalmente si noti che il Sole è una stella G2V di sequenza principale.

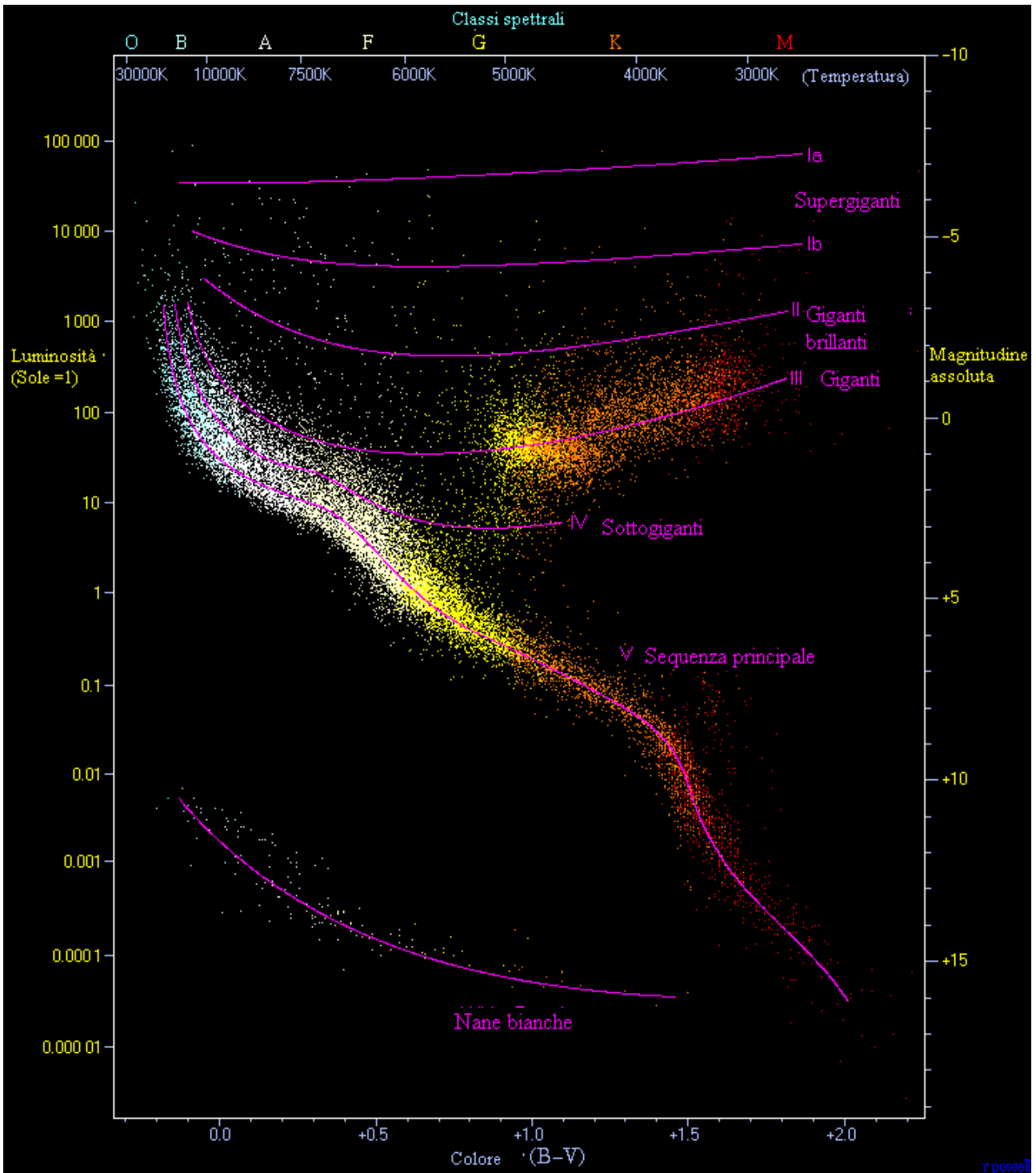


Figura 10.12 – Diagramma HR che riporta la posizione di 22.000 stelle tratte dal Catalogo Hipparcos e di 1.000 stelle di bassa luminosità (nane bianche e nane rosse) tratte dal Catalogo Gliese.

Le stelle appaiono dunque essere sorgenti di caratteristiche fisiche definite: riferendosi alla sequenza principale, si ricava che tutte le stelle aventi un dato “colore” hanno una ben precisa luminosità, il che indica che esiste un unico parametro intrinseco che determina le caratteristiche osservative. Eddington propose, facendo riferimento alla relazione massa - luminosità, che tale parametro fosse la massa, proposta confermata dai modelli di struttura stellare.

In genere si usa suddividere le stelle della sequenza principale in due gruppi: le stelle di alta sequenza ($M \geq 1,5M_{\odot}$) e quelle di bassa sequenza ($M < 1,5M_{\odot}$). Le caratteristiche fisiche di tali stelle sono molto diverse.

Il diagramma di Hertzsprung–Russell è uno strumento assai versatile. Usi più importanti sono:

- Misura di distanze stellari
- Valutazione dell'età di campioni stellari ristretti (misure di età di ammassi aperti o globulari)
- Variazioni nella composizione chimica standard di un certo campione di stelle

Gli effetti di distanza, età e composizione chimica sono molto difficili da studiare globalmente. Ammassi aperti e globulari sono importanti, perché le stelle hanno tutte la stessa età: hanno avuto una sola generazione.

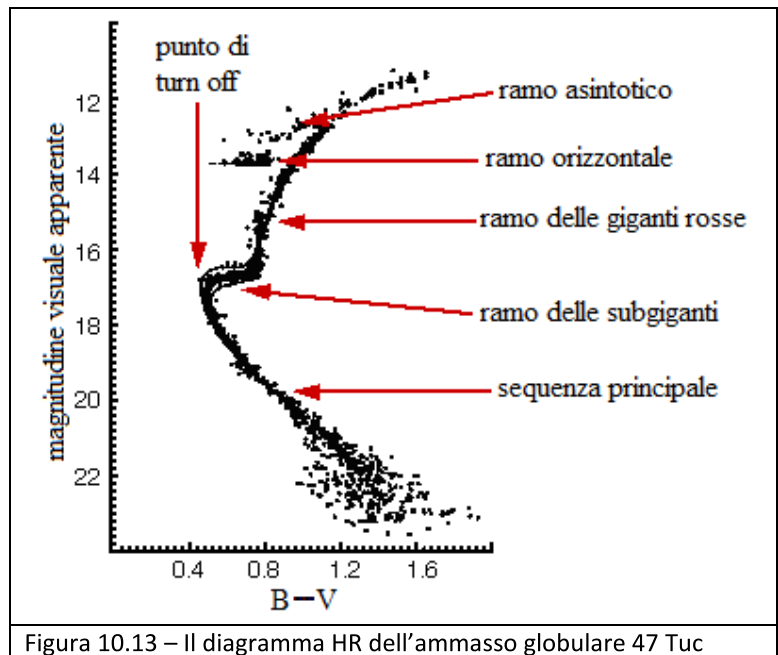


Figura 10.13 – Il diagramma HR dell'ammasso globulare 47 Tuc

10.6 – Il Sole

10.6.1 – Generalità

Come esempio di stella consideriamo ora il Sole e ne analizzeremo la struttura e alcune caratteristiche.

Il Sole è la stella più vicina alla Terra, orbita a una distanza dal centro della Via Lattea stimata in 26000 ± 1400 anni luce ($7,62 \pm 0,32$ kpc). È situato in una regione periferica della Galassia, all'interno della Bolla Locale, una cavità nel mezzo interstellare collocata nel bordo più interno del Braccio di Orione, un braccio galattico secondario posto tra il Braccio di Perseo e il Braccio del Sagittario.

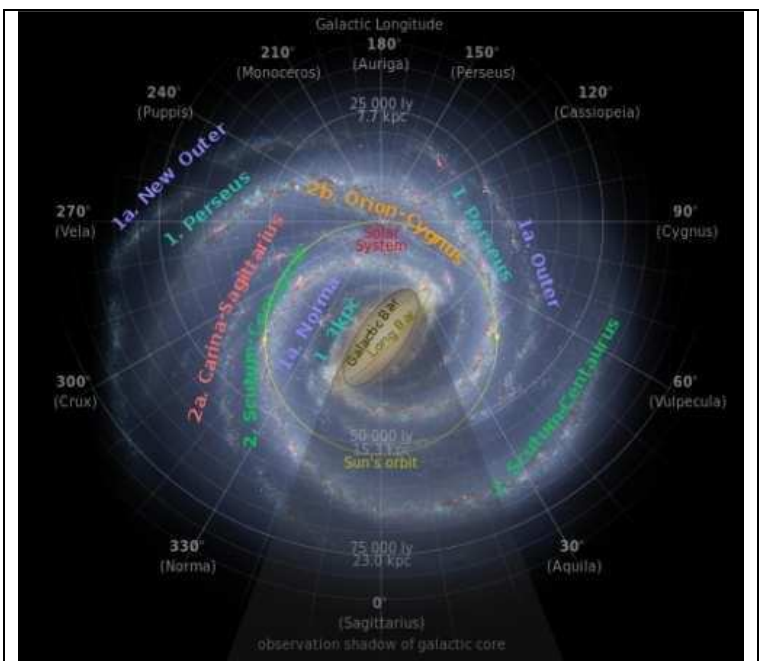


Figura 10.14 – Schema della Via Lattea

Attualmente si trova nella Nube Interstellare Locale, un addensamento del mezzo interstellare.

La relativa lontananza dal centro galattico fa sì che il sistema solare si trovi in quella che viene definita zona galattica abitabile.

Il sistema solare impiega 225–250 milioni di anni per completare una rivoluzione attorno al centro della Galassia (anno galattico) perciò il Sole avrebbe completato 20–25 orbite dal momento della sua formazione (circa 4,57 miliardi di anni) ed 1/1250 di orbita dalla comparsa dell'essere umano sulla Terra.

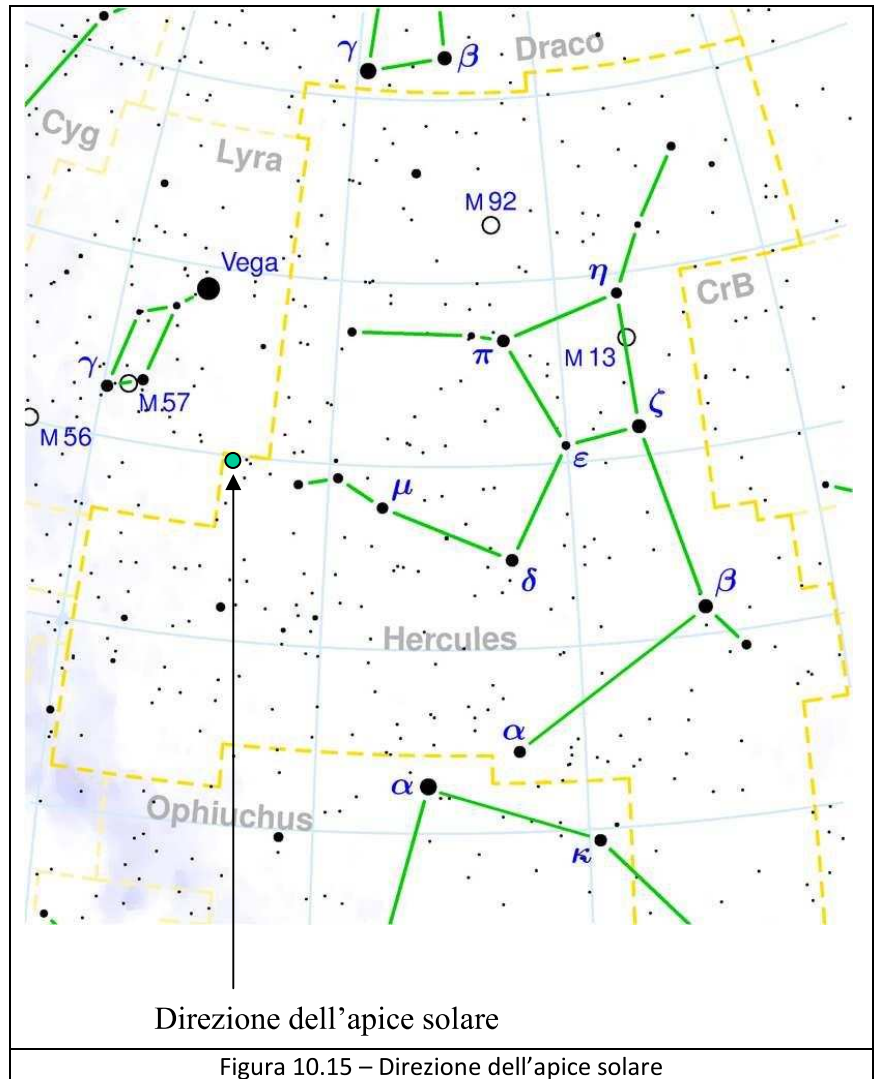


Figura 10.15 – Direzione dell'apice solare

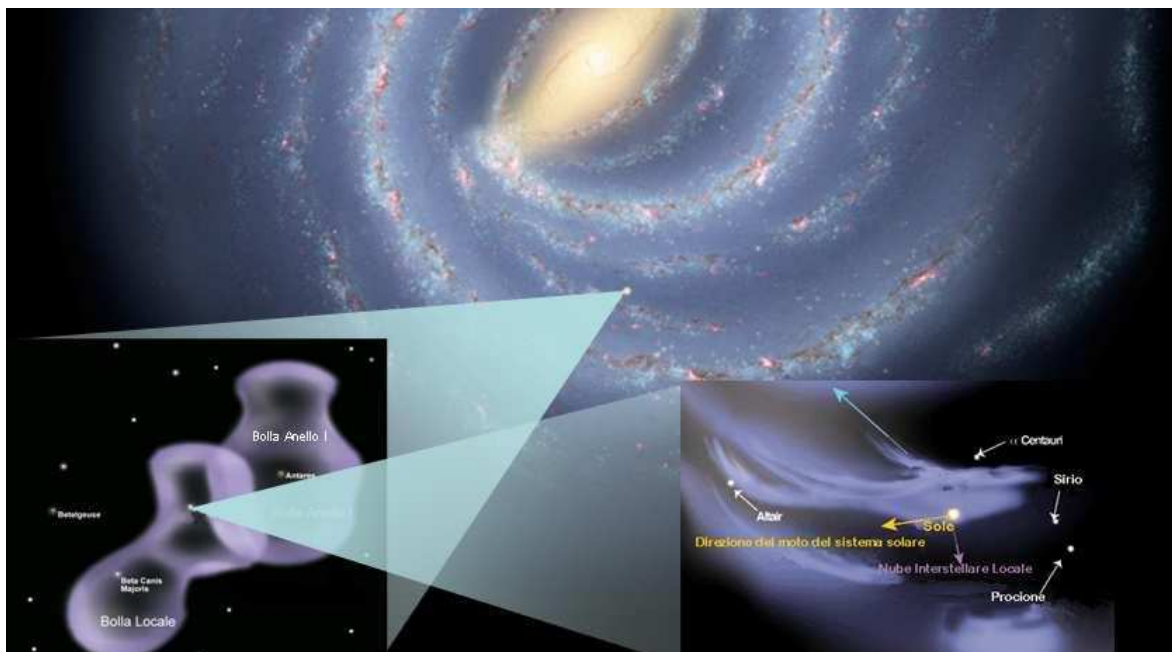


Figura 10.16 – Posizione attuale del Sole

La velocità orbitale della nostra stella è di circa 220 km/s; a questa velocità il sistema solare impiega circa 1400 anni per percorrere la distanza di un anno-luce, ossia 8 giorni per percorrere una unità astronomica.

La direzione apparente verso cui si muove la nostra stella durante la propria rivoluzione attorno al centro di massa della Galassia prende il nome di apice solare e punta verso la stella Vega e la costellazione di Ercole.

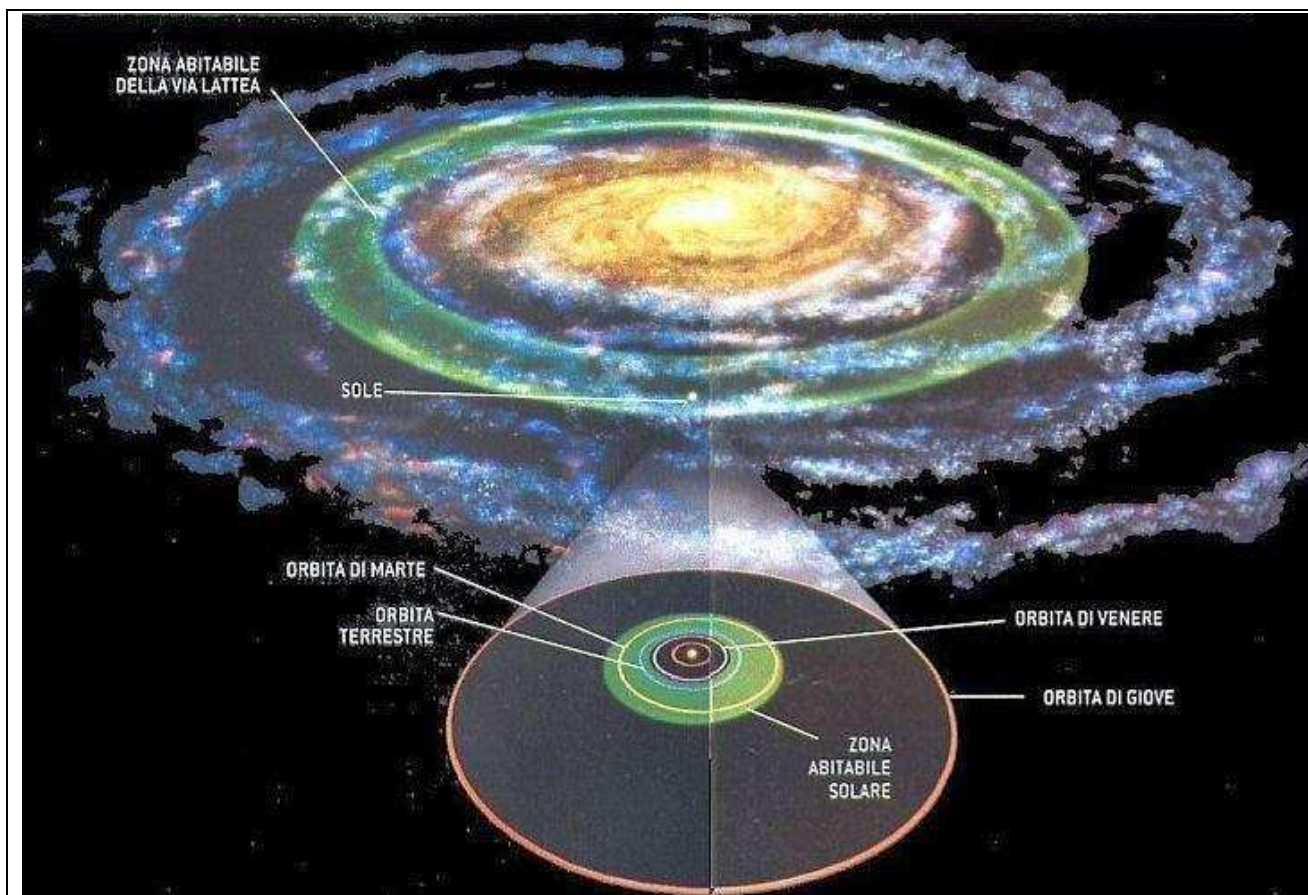


Figura 10.17 – Zona abitabile della Via Lattea

Il Sole oscilla al di sopra e al di sotto del piano galattico mediamente 2,7 volte ogni orbita, secondo un andamento assimilabile ad un moto armonico. Tali oscillazioni coincidono spesso con un incremento nel tasso degli impatti meteoritici sulla Terra dovuto alle forze mareali che le altre stelle esercitano sugli asteroidi della Fascia principale o della Cintura di Kuiper o sulle comete della Nube di Oort.

Il Sole è una delle 100 milioni di stelle di classe spettrale G2 note e supera in luminosità l'85% delle stelle della Galassia.

Tra le stelle luminose più vicine, poste entro un raggio di 17 anni luce, il Sole occupa la quinta posizione in termini di luminosità intrinseca: la sua magnitudine assoluta, infatti, è pari a +4,83. Più luminose del Sole sono infatti Sirio A (1,47), Altair (2,22), Procyone A (2,66) e α Centauri A (4,38).

Lo studio rigoroso del Sole è iniziato solo ai primi dell'800, quando è nata la spettroscopia. I dati raccolti in questi anni sia con osservazioni da Terra, sia con l'uso di strumentazioni poste in orbita al di fuori dell'atmosfera terrestre hanno permesso di individuare la struttura esterna del Sole. Le

leggi della Fisica applicate ai dati conosciuti hanno permesso di ricostruire la struttura interna del Sole.

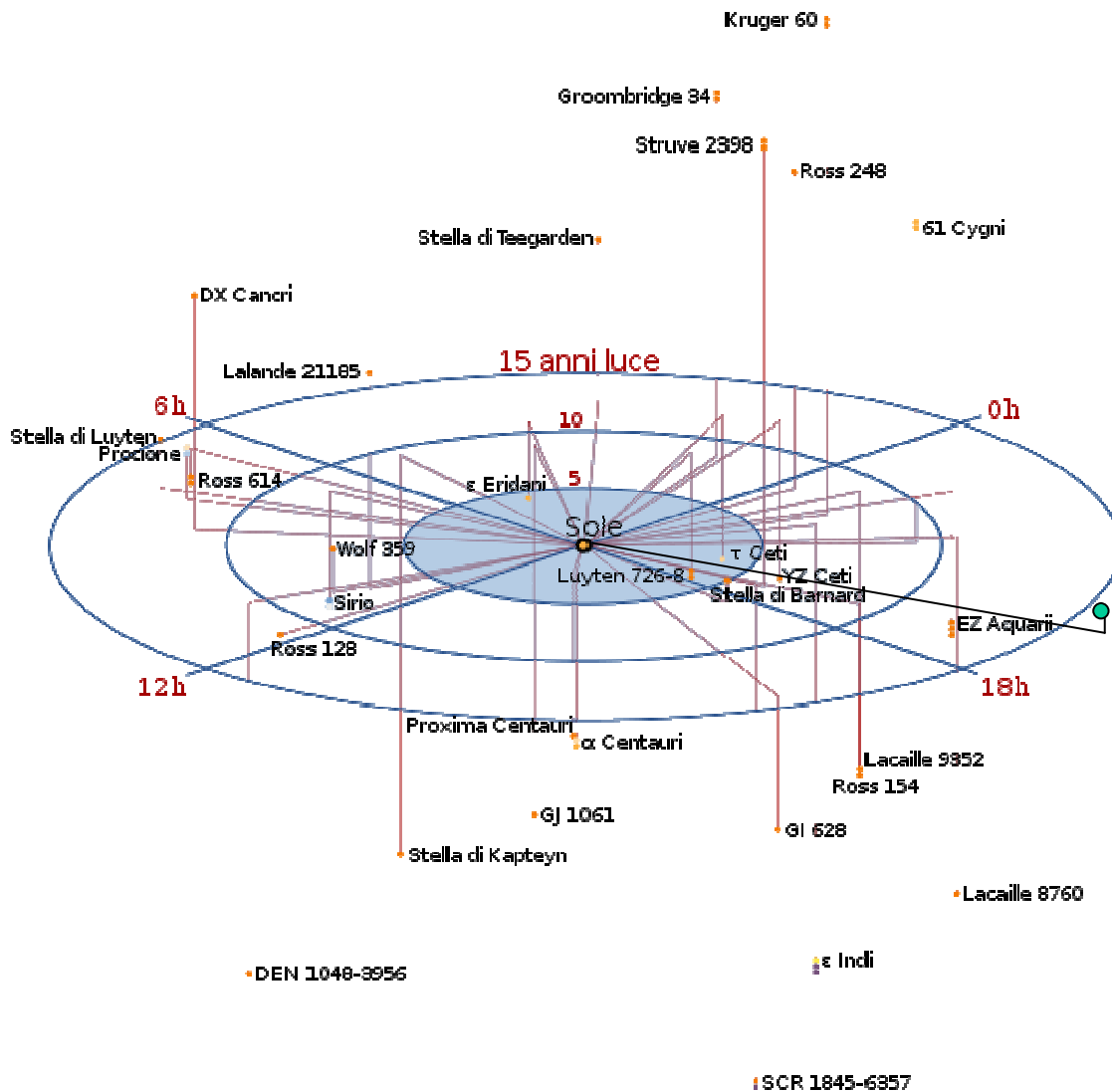


Figura 10.18 – le stelle entro 17 anni luce dal Sole. Il pallino verde è la stella Altair a 17 anni luce dal Sole

Lo studio rigoroso del Sole è iniziato solo ai primi dell'800, quando è nata la spettroscopia. I dati raccolti in questi anni sia con osservazioni da Terra, sia con l'uso di strumentazioni poste in orbita al di fuori dell'atmosfera terrestre hanno permesso di individuare la struttura esterna del Sole. Le leggi della Fisica applicate ai dati conosciuti hanno permesso di ricostruire la struttura interna del Sole.

Il Sole è costituito principalmente da idrogeno

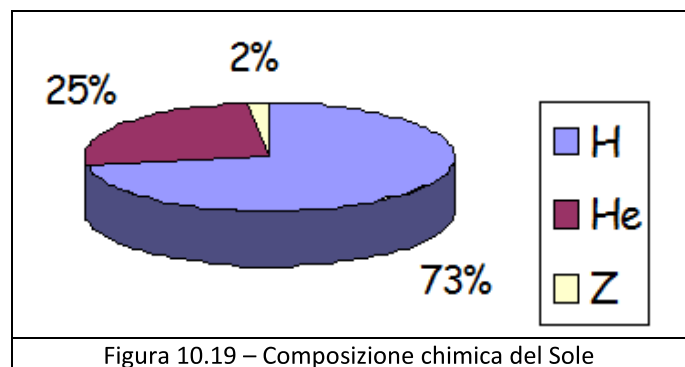
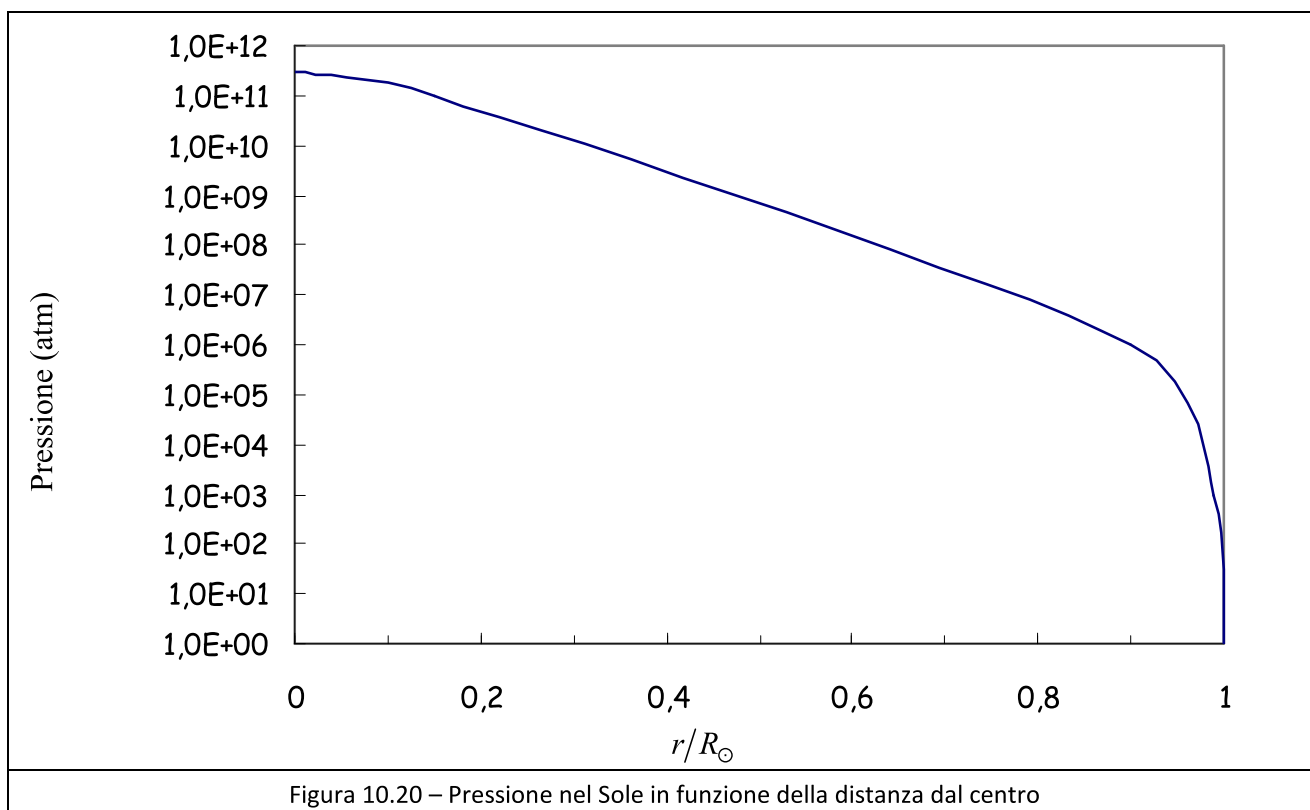


Figura 10.19 – Composizione chimica del Sole

(circa il 74% della sua massa, il 92,1% del suo volume) ed elio (circa il 24-25% della massa, il 7,8% del volume), cui si aggiungono altri elementi più pesanti per un totale di circa il 2% della massa.

L'interno del Sole è inosservabile: l'unico mezzo diretto per sondarne la struttura è costituito dai neutrini. Dopo un lungo periodo di contrasto, le osservazioni hanno confermato le conclusioni teoriche dei modelli interni del Sole (con la scoperta che i neutrini hanno massa). Tali modelli sono ormai considerati molto affidabili e forniscono anche informazioni sull'evoluzione della nostra stella (e delle altre).

Il peso della materia che forma il Sole produce una pressione via via più elevata mano a mano che ci si avvicina al centro. Si stima che nel nucleo ci sia una pressione di $5 \cdot 10^{11}$ atm, che andando verso l'esterno diminuisce, dapprima lentamente e poi molto rapidamente in prossimità della superficie. Il grafico in figura 10.18 descrive l'andamento della pressione in funzione della distanza dal centro.



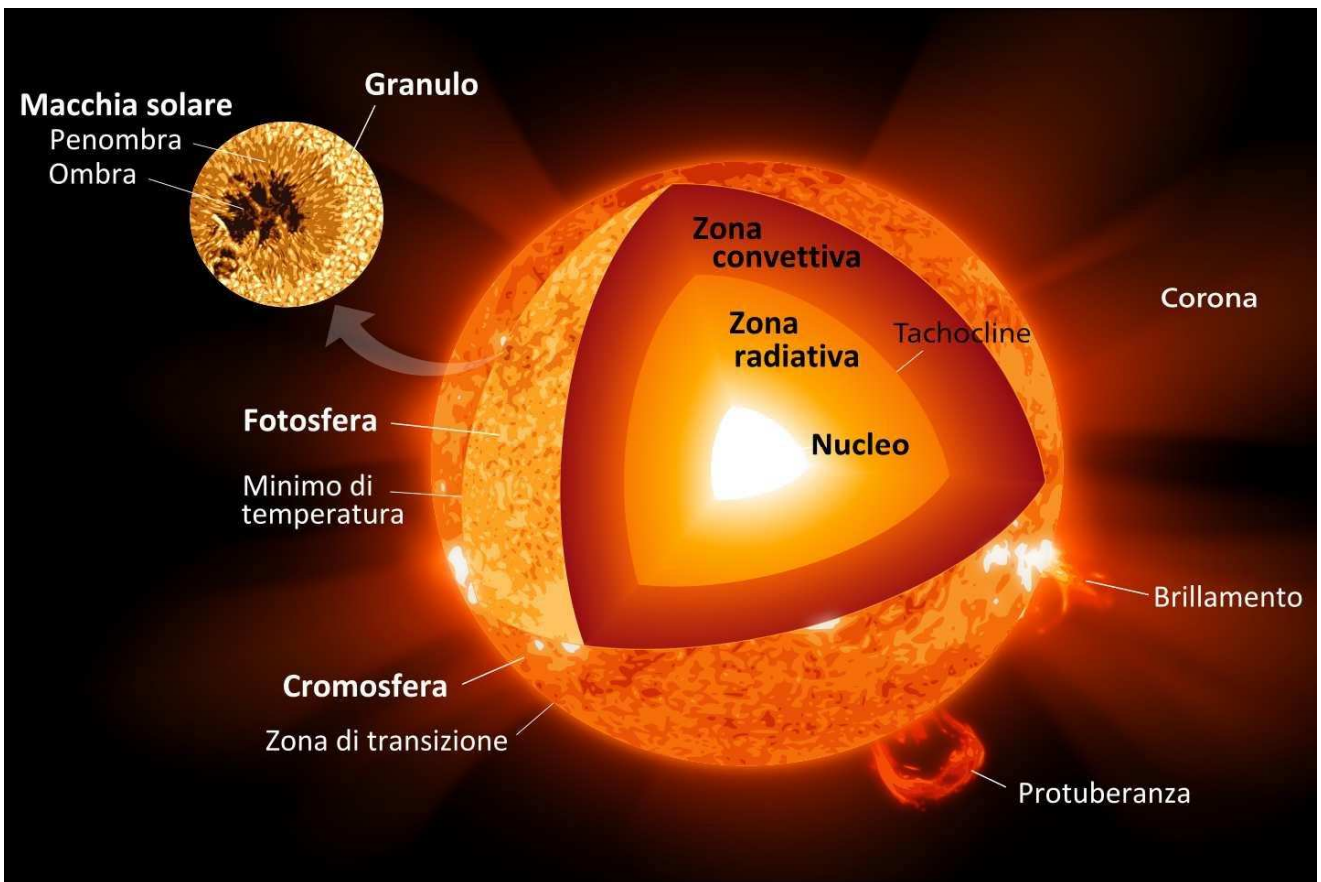
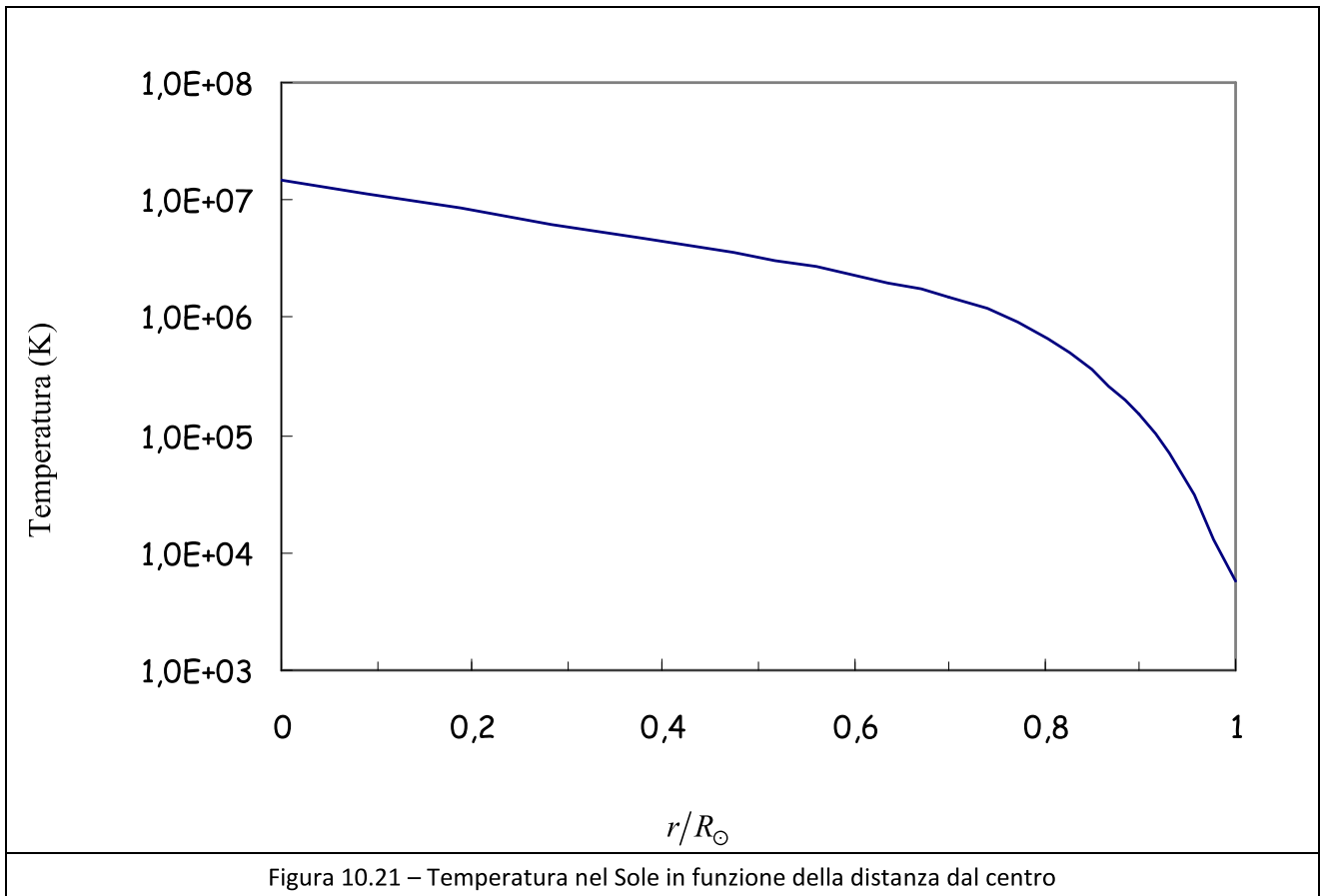
I modelli teorici permettono di stimare che la temperatura all'interno del Sole sia di $1,55 \cdot 10^7$ K. Essa diminuisce lentamente nella parte più interna; a $0,7 R_{\odot}$ è dell'ordine di 10^6 K, mentre tra $0,9 R_{\odot}$ e $1 R_{\odot}$ diminuisce di 100 volte fino ad arrivare sulla superficie a circa 5780 K

10.6.2 – La struttura del Sole

La struttura del Sole può essere suddivisa in un serie di involucri concentrici.

L'interno del Sole (che contiene quasi tutta la sua massa) è costituito dal **nucleo** centrale, da una **zona radiativa** e da una **zona convettiva** separate dalla **tachocline**.

C'è quindi la superficie visibile del Sole, detta **fotosfera** e al di sopra c'è l'**atmosfera solare** in cui distinguiamo la **cromosfera** e la **corona**.



Il **nucleo** è la sede delle reazioni nucleari che producono l'energia necessaria per sostenere gli strati superiori. È composto prevalentemente da idrogeno. La temperatura si aggira sui 16 milioni di gradi. Il volume è circa il 10% di quello del Sole, mentre la sua massa è superiore al 40% di tutta la massa solare. Il raggio viene stimato in circa il 30% del raggio del sole. La densità è stimata il 150 g/cm³.

La **zona radiativa** si estende da circa il 30% al 70% del raggio solare, cioè dal nucleo fino al confine con la zona convettiva per un totale di circa 350000 km. Nella zona radiativa, l'energia prodotta dal nucleo è trasportata da fotoni che percorrono il plasma impiegando, a causa dell'assorbimento e della riemissione, anche centinaia di migliaia di anni per attraversare la zona. I neutrini, che interagiscono poco con la materia, attraversano la zona quasi alla velocità della luce. La temperatura della zona radiativa varia da circa 6.500.000 K in prossimità del nucleo, fino a circa 3.000.000 °C all'interfaccia con la zona convettiva.

Il termine **tachocline** designa la zona di transizione, all'interno del Sole, tra la zona radiativa e la zona convettiva. Situata nel terzo più esterno della stella, la tachocline segna il passaggio tra la parte più interna della stella, la cui rotazione è paragonabile a quella di un corpo solido, e la porzione esterna, che ruota in maniera differenziale comportandosi come un fluido. Recenti studi condotti tramite l'indagine eliosismologica indicano che la tachocline abbia un raggio circa 0,70 volte quello del Sole. Gli astrofisici ritengono che tali dimensioni siano una delle cause dei campi magnetici che caratterizzano la stella: infatti le simmetrie e l'estensione della tachocline sembrano rivestire un ruolo di primo piano nella formazione della cosiddetta dinamo solare, poiché rinforzano i deboli campi poloidali creando un più intenso campo di forma toroidale.

La **zona convettiva** è uno strato interno del Sole in cui l'energia termica, attraverso i moti convettivi, viene portata negli strati più esterni e quindi in superficie. I moti convettivi consistono in movimenti del plasma all'interno del Sole, che di solito formano correnti circolari di convezione che riscalda il plasma in discesa, il quale, dopo essere risalito, cede energia all'esterno, raffreddandosi, raddensandosi e riprecipitando verso l'interno. La zona convettiva solare occupa il 30% del raggio, e si trova nella parte esterna, a contatto con la superficie. Una volta che il gas incandescente è giunto alla fotosfera, emette fotoni nello spazio.

Le stelle non hanno una superficie solida, esiste però una profondità sotto la quale il gas non è più trasparente ai fotoni, questa profondità fornisce una superficie visibile alla stella ed è la **fotosfera**. Per il Sole la fotosfera non presenta alcuna discontinuità con la regione convettiva sottostante come con la corona solare più esterna. La fotosfera del Sole ha una temperatura che varia dagli 8000 ai 5000 °C circa per le penombre delle macchie solari, mentre per "le oscurità" dette ombre vengono calcolati valori fino a 2700 °C. Essa decresce con l'allontanamento dagli strati più interni per quelli più esterni. Egualmente si deduce il tasso di variazione di temperatura proporzionale alla quota. La fotosfera solare è composta da celle di convezione chiamate granuli; ogni granulo è una tempesta di plasma ad altissima temperatura larga da 500 a 1000 km, al centro della quale del gas caldo sale dall'interno della stella, raffreddandosi e ricadendo ai bordi per moto convettivo. Un singolo granulo ha una vita media di 8 minuti, ma se ne formano di nuovi continuamente, dando alla fotosfera un aspetto complessivo simile ad una lenta ebollizione. Tra i granuli normali si trovano dei supergranuli con diametri fino a 30.000 chilometri, capaci di resistere fino ad un giorno. La granulazione resta una delle prove fondanti della presenza di moti convettivi all'interno del Sole, mentre non sappiamo d'altra parte se queste formazioni si trovino anche su altre stelle, perché sono troppo piccole per essere viste.

Altre formazioni presenti sulla fotosfera sono le **macchie solari** e i **flare solari (brillamenti)**.

Le macchie solari sono causate da fenomeni magnetici e spesso sono visibili in gruppi. Esse aumentano e diminuiscono in numero secondo un ciclo di circa 11 anni; il ciclo è causato dall'inversione del campo magnetico del Sole. Le macchie solari sono costituite da una zona interna, detta ombra, più scura a circa 4.000 K (ma anche meno), ed una esterna, detta penombra, più chiara con una temperatura di circa 5.000 K. Le dimensioni variano da quelle di una macchia singola, di

circa un migliaio di chilometri, detta anche poro, alla dimensione dei gruppi, larghi centinaia di migliaia di chilometri. Si formano e spariscono sotto l'azione del campo magnetico solare e possono persistere per alcune settimane; le più longeve durano anche un paio di mesi e possono essere riviste dopo una rotazione solare.

Il brillamento solare o anche eruzione solare è una violenta eruzione di materia che esplode dalla fotosfera sprigionando una energia equivalente a varie decine di milioni di bombe atomiche. È causato da un improvviso rilascio di energia in occasione di un fenomeno di riconnessione delle linee del campo magnetico.

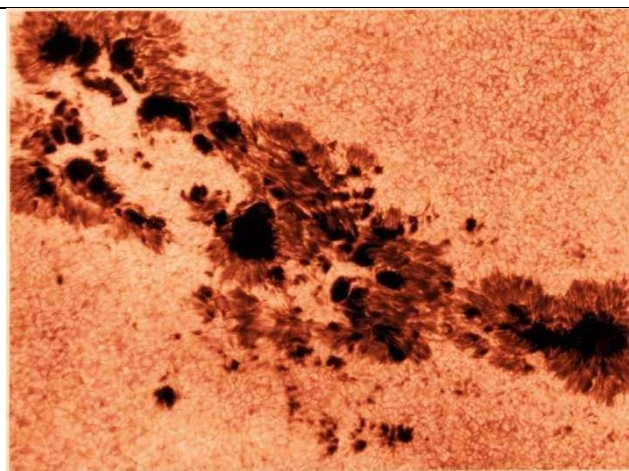


Figura 10.23 – Macchie solari

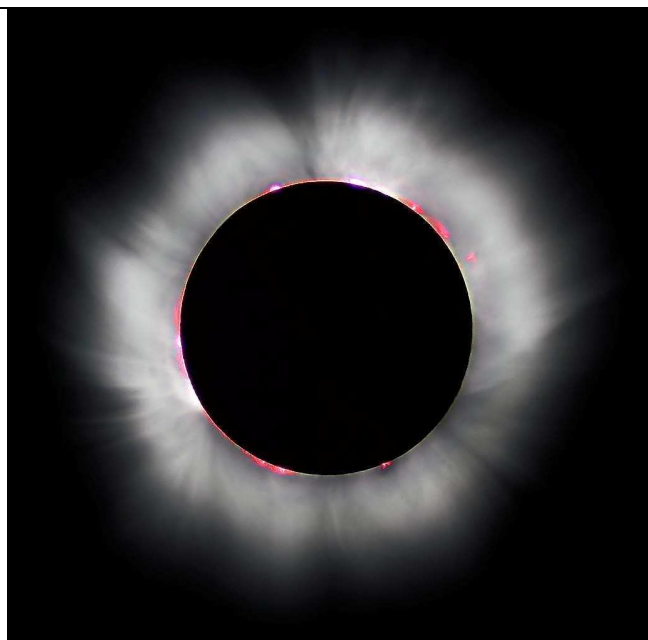


Figura 10.24 – L'atmosfera solare visibile durante un'eclisse totale di Sole

L'atmosfera visibile del Sole è composta da altri strati posti sopra la fotosfera.

Per **atmosfera stellare** si intende la regione gassosa più esterna di una stella, che circonda i suoi strati più interni (il nucleo, la zona radiativa e convettiva) e la sua superficie (la fotosfera). La composizione dei gas atmosferici varia a seconda del tipo e dell'età della stella. Il componente prevalente è l'idrogeno, con una percentuale minoritaria di elio; gli elementi più pesanti, come l'ossigeno, il boro, il carbonio e così via, sono presenti in piccole percentuali o in tracce. È costituita dalla **cromosfera**, dalla **zona di transizione** e dalla **corona**.

La **cromosfera** è lo strato più basso e più freddo dell'atmosfera stellare. Non è visibile direttamente a causa dell'estrema luminosità della fotosfera sottostante, ma si può vedere durante le eclissi (la linea rossa nella figura 10.24) o con speciali strumenti, i coronografi, che filtrano la luce stellare lasciando passare solo la riga $H\alpha$. La cromosfera è anche sede di intense eruzioni, in corrispondenza della comparsa di macchie stellari nella fotosfera, che liberano una energia pari a circa 10^{21} J sotto forma di luce, raggi ultravioletti, raggi gamma e onde radio. Il suo aspetto è quello di una prateria in fiamme: si vede una serie infinita di lingue di fuoco dette spicole, che ondeggiando incessanti e si estendono verso l'alto per circa 7.000 km. Nella sua parte bassa, la temperatura è inferiore a quella della fotosfera sottostante, ma dai 500 km di quota in su comincia a salire, fino a raggiungere e superare il milione di gradi nella parte più alta, al confine con la corona.

Al di sopra della cromosfera si trova la **zona di transizione**, in cui la temperatura sale rapidamente dai circa 100000 K degli strati più esterni della cromosfera, fino al milione di kelvin della corona. Ciò provoca una transizione di fase dell'elio, che qui diventa completamente ionizzato. La zona di

transizione non possiede un limite di altitudine ben definito: forma infatti una sorta di alone attorno alle formazioni della cromosfera come le spicule ed i filamenti, ed è in moto costante e caotico. La zona di transizione non è facilmente visibile dalla Terra, ma è ben rilevabile dallo spazio attraverso strumenti sensibili alle lunghezze d'onda dell'ultravioletto lontano.

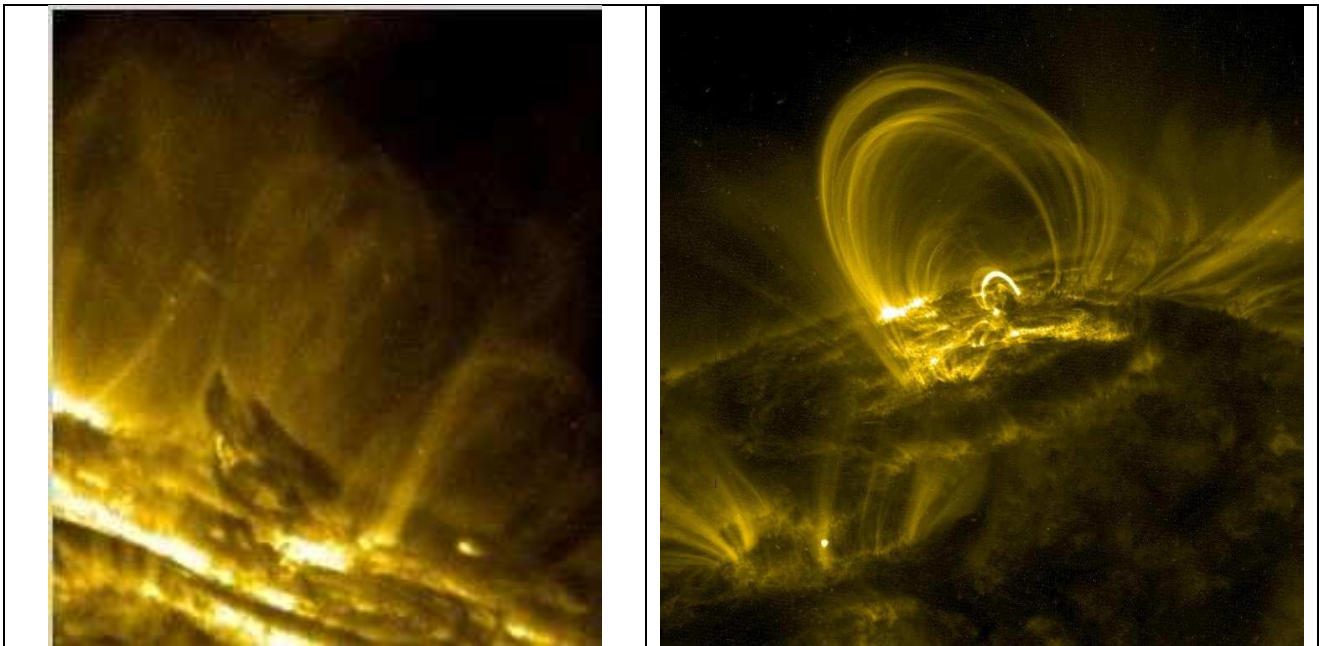


Figura 10.25 – Immagini della zona di transizione riprese dalla sonda TRACE (*Transition Region and Coronal Explorer*) alla lunghezza d'onda di 19,5 nm.

La **corona** è composta di gas con una densità media di qualche microgrammo per metro cubo e caldissimo: la temperatura dei gas coronali può andare da uno ad alcuni milioni di gradi. Il motivo di una temperatura tanto alta è tuttora sconosciuto, anche se probabilmente è dovuto all'interazione dei campi magnetici stellari con il gas, che in queste condizioni è completamente ionizzato e in forma di plasma. Si estende dal limite della cromosfera fino allo spazio esterno, e la sua forma risente del campo magnetico solare e di quello, molto intenso, delle macchie solari: è sferica e molto estesa nei periodi di alta attività del sole e si restringe in modo irregolare nei periodi di sole calmo (niente macchie solari). Non è possibile vederla direttamente, ma bisogna attendere una eclissi o usare degli strumenti particolari: quando è visibile, ha una luminosità circa uguale a quella della luna piena. Data la sua temperatura perde materia che si disperde nello spazio esterno dando origine al vento solare. Anche nella corona l'effetto delle macchie solari provoca eruzioni, le cosiddette **protuberanze**, getti di gas e materia verticalmente alla superficie della stella che si estendono per centinaia di migliaia di chilometri.

Altri fenomeni che si originano negli strati più bassi e si sviluppano nella corona sono i **pennacchi** o **streamer**, cioè formazioni radiali di forma appuntita, con strutture interne ad arcata che collegano regioni di polarità magnetica opposta. Il plasma è intrappolato da queste strutture ed è per questo che i pennacchi sono molto brillanti (vedi figura 10.24).

I **Coronal Mass Ejections** (CME) sono manifestazioni spesso associate ai brillamenti nelle quali vengono espulse grandi quantità di plasma. Questi eventi comportano l'espulsione di massa coronale compresa fra i 10^{12} - 10^{14} kg. Il plasma si muove ad una velocità compresa fra i 20 e i 3200 km/s con una velocità media di 500 km/s. Durante i periodi di massimo dell'attività solare possono essere rilevati diversi eventi di CME al giorno, mentre durante il minimo si ha un evento ogni 5-10 giorni.

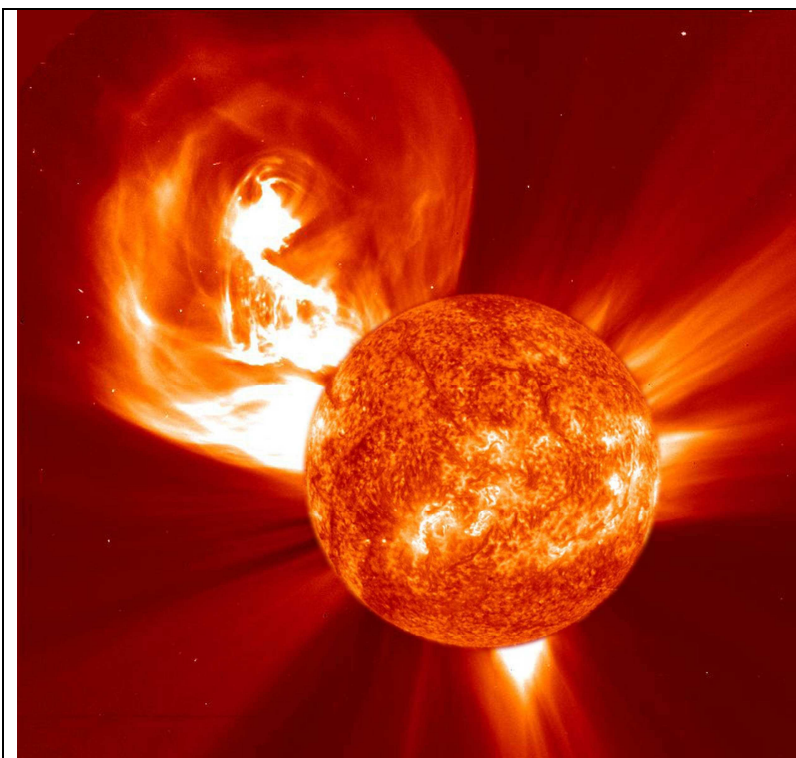


Figura 10.26 – Steamer e CME nella stessa immagine. Le riprese sono della sonda Soho

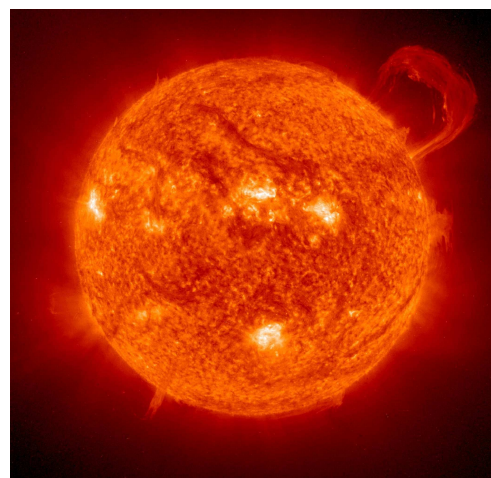


Figura 10.27 – Protuberanza. Immagine della sonda Soho

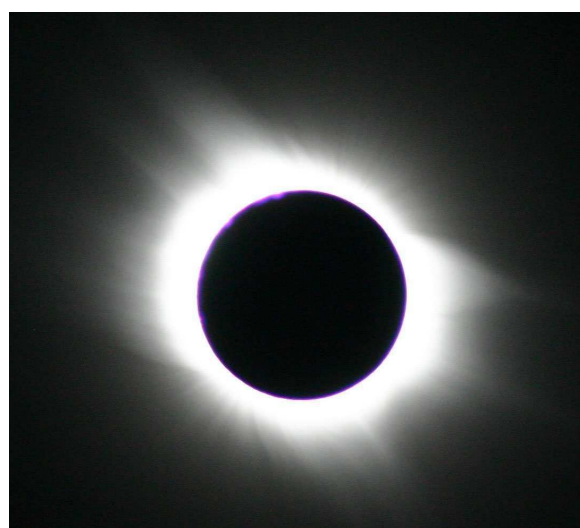
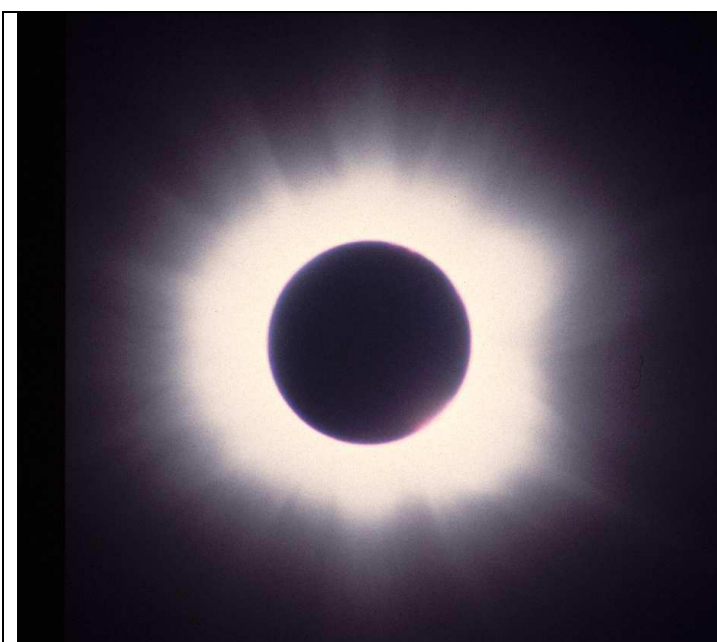


Figura 10.28 – La corona solare ripresa durante due eclissi: a sinistra il 21 giugno 2001 da Sumbè (Angola), a destra il 29 marzo 2006 da El Solloum (Egitto).

Capitolo 11

Evoluzione stellare

11.1 – Introduzione

Sulla base delle considerazioni sui modelli stellari di quasi-equilibrio affrontiamo ora lo studio dell'evoluzione stellare, parleremo quindi delle nubi molecolari interstellari e delle loro caratteristiche, del collasso gravitazionale e delle condizioni iniziali della vita di una stella, dell'innesco delle reazioni nucleari e della sequenza principale del diagramma HR, dell'esaurimento dell'idrogeno nel nucleo e alla fine analizzeremo le fasi finali della vita della stella e i "resti" che lascia dietro di sé.

Occorre premettere alcune considerazioni iniziali. Anzitutto va ricordato che, fin dai primi modelli analitici, fu chiaro come il bruciamento dell'idrogeno permettesse di rappresentare stelle della sequenza principale del diagramma HR, mentre il bruciamento dell'elio o di elementi più pesanti corrispondeva a giganti rosse. Molto più incerta era la sorte delle cosiddette stelle nane bianche che poi fu chiarito come richiedesse equazioni di stato di gas di elettroni degeneri. Tale osservazione suggeriva dunque che il diagramma HR fosse da interpretare in termini evolutivi e non puramente morfologici.

Alcune considerazioni iniziali ci portano a comprendere alcuni aspetti dell'evoluzione stellare. All'interno di grandi nubi interstellari fredde ($T < 50$ K), formate da gas (soprattutto H_2) e polveri, che sono presenti principalmente nei bracci delle galassie a spirale, si possono formare delle instabilità locali che fanno sì che la gravità tenda a far cadere il gas stellare verso il centro della nube. La stella ha bisogno di qualcosa che contrasti la gravità e questo qualcosa è la pressione di radiazione, dovuta all'emissione di energia, cioè, per esistere la stella deve produrre continuamente energia e per quel che ne sappiamo oggi l'unica sorgente durevole di energia è costituita dalle reazioni nucleari. L'emissione continua di energia, finché dura, sostiene l'equilibrio della stella e tale emissione è proporzionata alla spinta della gravità, ma la forza di gravità è proporzionale alla massa della struttura e quindi la massa della stella determina allora la produzione di energia e quindi anche luminosità, temperatura e tipo di reazioni nucleari che avvengono all'interno della stella (ammesso che siano presenti gli elementi adatti a fungere da combustibile). In conclusione: massa e composizione chimica sono i parametri essenziali per la comprensione del funzionamento delle stelle.

I meccanismi di produzione di energia all'interno delle stelle sono di due tipi:

- **DINAMICI** – quando la temperatura interna è insufficiente a produrre energia nucleare o il combustibile è in esaurimento; sono meccanismi transitori. Distinguiamo le fasi di caduta libera (free-fall) e la contrazione quasi-stazionaria di Kelvin – Helmholtz.
- **NUCLEARI** – quando le condizioni sono adatte affinché all'interno della stella avvengano le reazioni nucleari. le principali sono
 - la conversione $H \rightarrow He$ (cicli p-p, ciclo CNO)
 - la conversione $He \rightarrow C$ (reazione 3α)
 - cicli successivi (fino alla formazione del Fe)

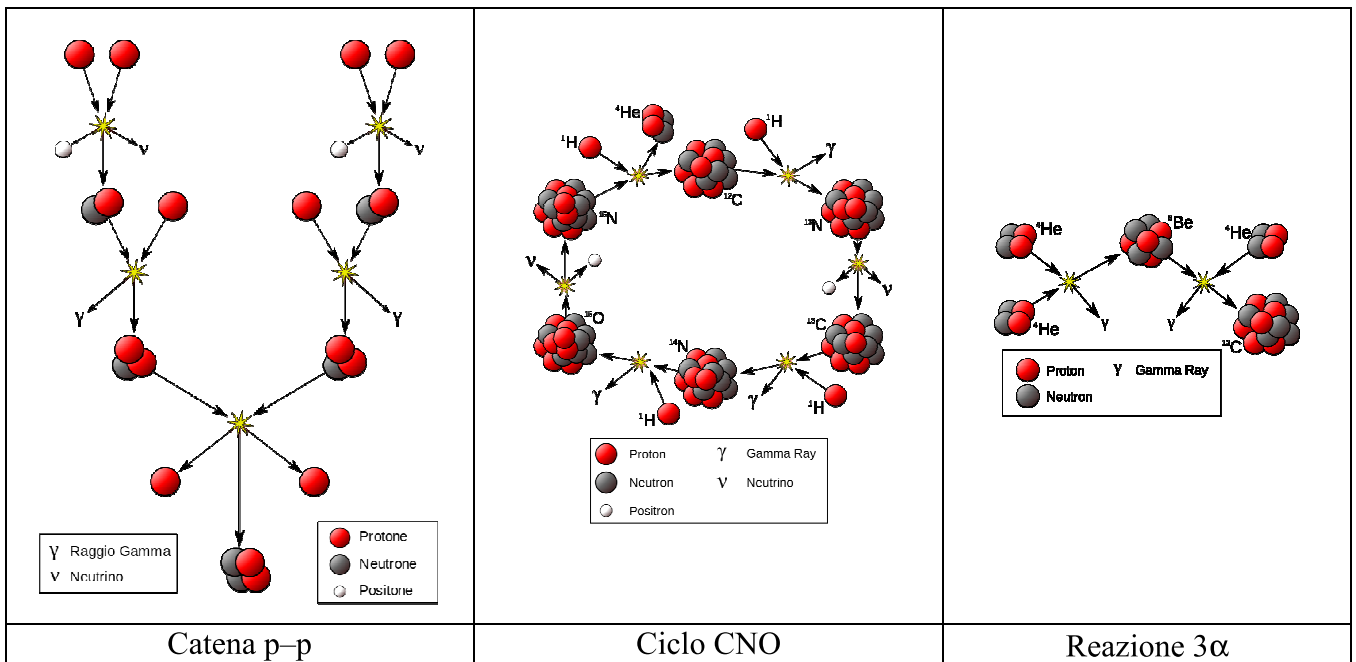
Le fasi evolutive caratteristiche della vita di una stella sono:

- **Fasi termonucleari.** Si tratta di fasi in cui l'irraggiamento stellare è sostenuto dalla produzione di energia termonucleare nelle regioni centrali di alta temperatura, $T \geq 5 \times 10^6$ K. Si può valutare la durata di queste fasi considerando che le trasformazioni nucleari liberano tipicamente energie dell'ordine di $10^{-3} Mc^2$, dove il fattore riduttivo include un 1% di efficienza di conversione di energia di massa e una percentuale del 10% di massa in cui

avviene la conversione di idrogeno in elementi di massa maggiore. In prima approssimazione si ottiene:

$$[11.1] \quad t_{nucl} \approx 10^{-3} \frac{Mc^2}{L} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right) \text{ anni.}$$

Si tratta di fasi estremamente lunghe, in cui la stella rimane osservativamente immutata. Si vede facilmente che per il Sole $t_{nucl} \approx 10^{10}$ anni, per una stella di massa $M = 0,1M_{\odot}$, tenendo conto che $L \approx 10^{-3}L_{\odot}$, si ha $t_{nucl} \approx 10^{12}$ anni e per una stella di massa $M = 10M_{\odot}$, essendo $L \approx 5 \times 10^3 L_{\odot}$ si ha $t_{nucl} \approx 2 \times 10^7$ anni.



- **Fasi di contrazione di quasi-equilibrio, tempo di Kelvin.** Nelle fasi in cui le temperature centrali non consentono reazioni termonucleari, le stelle tendono a raffreddarsi per le perdite radiative. Il teorema del viriale ci permette di valutare che si può tendere a nuove configurazioni di maggior temperatura centrale attraverso contrazioni di quasi-equilibrio in tempi caratteristici di Kelvin (nel caso di $\gamma = 5/3$ e stella omogenea):

$$[11.2] \quad t_K \approx -\frac{U}{2L} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{LR} = 9,4 \times 10^6 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) \text{ anni.}$$

I tempi di contrazione alla Kelvin sono dunque relativamente più brevi e rappresentano fasi evolutive che coprono intervalli tra combustioni termonucleari successive in quanto consentono di aumentare la temperatura delle regioni centrali delle stelle fino a raggiungere la temperatura d'innesco delle nuove reazioni. Per il Sole è $t_K \approx 9,4 \times 10^6$ anni.

- **Fasi dinamiche di caduta libera.** Quando la pressione stellare non mantiene lo stato di quasi-equilibrio e la stella non può sorreggersi contro la gravità, la dinamica prende il sopravvento e non sono possibili soluzioni di equilibrio. La stella subisce un collasso gravitazionale secondo la relazione: $\ddot{R} = -GM/R^2$. Si tratta delle fasi iniziali della

formazione stellare e di quelle finali del collasso verso stati compatti. I tempi scala sono molto brevi; integrando si ottiene:

$$[11.3] \quad t_{coll} \simeq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R^2}{2GM}} = 5,4 \times 10^{-5} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{3/2} \text{ anni.}$$

Il Sole, qualora venisse a mancare la pressione termica, collasserebbe su se stesso in circa 30 minuti.

Le fasi termonucleari sono dunque le più persistenti e corrispondono alle stelle normalmente osservabili. Le fasi di contrazione di quasi equilibrio e di collasso sono invece relativamente rapide e stelle osservabili in tali fasi sono quindi rare. Dal punto di vista modellistico le fasi di collasso non possono essere trattate con sequenze di modelli quasi-stazionari, ma richiedono sia inclusa esplicitamente la dinamica. In tal caso si debbono cioè usare equazioni differenziali alle derivate parziali nel tempo t e nelle tre coordinate spaziali.

11.2 – Le nubi interstellari

Tutto comincia dalle nubi interstellari fredde ($T < 50$ K), formate da gas (soprattutto H_2) e polveri che sono presenti principalmente nei bracci delle galassie a spirale.



La regione di formazione stellare N11B, una nube molecolare nella Grande Nube di Magellano.

Sono piuttosto comuni in buona parte delle galassie e hanno masse comprese tra 10^{-1} e $10^6 M_{\odot}$. Nella Via Lattea seguono la stessa disposizione dei bracci a spirale. Le più massicce risultano gravitazionalmente legate: per $M \sim 10^6 M_{\odot}$ e $R \sim 100$ a.l. la velocità di fuga al bordo della nube è

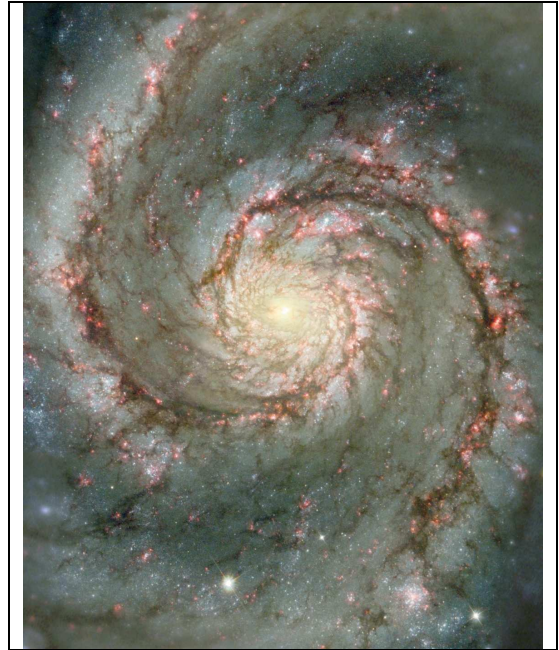
$$[11.4] \quad v \sim \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 12 \text{ km/s}$$

e risulta dello stesso ordine di grandezza delle più alte velocità di turbolenza osservate, quindi

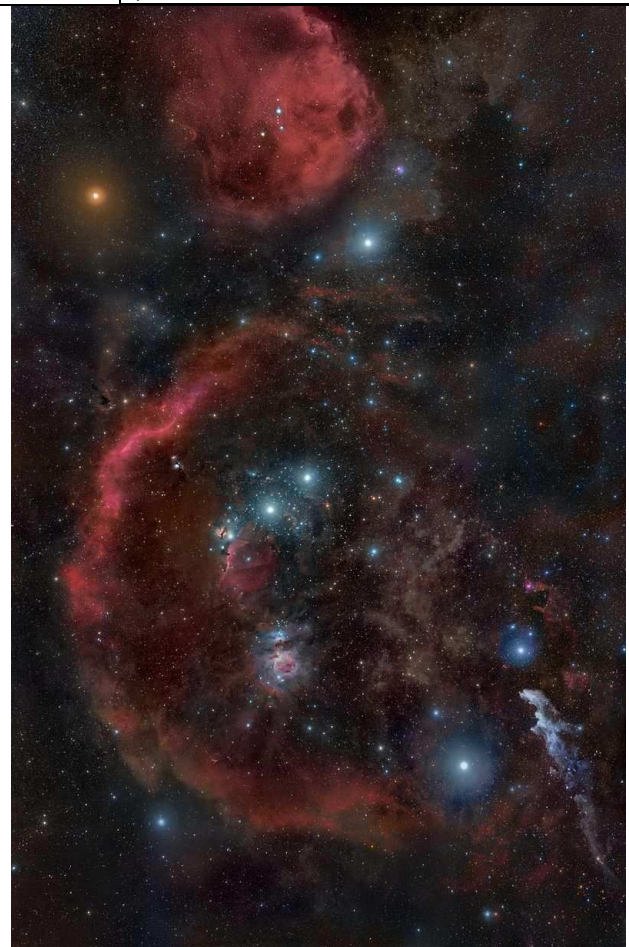
l'interno è dominato dalla gravità.

Per molte nubi esistono evidenze osservative di rotazione, con velocità angolari paragonabili al valore galattico $\Omega_{gal} \sim 10^{-15}$ rad/s.

Vi sono anche diversi esempi di nubi dotate di campo magnetico, che alle basse temperature e densità tipiche dell'ambiente interstellare si trova accoppiato con le molecole del gas (campo "congelato"), seguendo il moto delle particelle. In queste ipotesi la conservazione del flusso di campo magnetico fornisce la condizione $B \sim \rho^{2/3}$, che lega il campo alla densità. La presenza del campo magnetico tende ad inibire il collasso della nube.



Un dettaglio della Galassia M51 che mostra addossate ai bracci di spirale diverse nubi interstellari, tra cui varie regioni H II (in rosato) e nubi di polveri oscure, luoghi d'elezione dei processi di formazione stellare. HST-NASA/ESA



A sinistra la Nebulosa Testa di Cavallo, una grande colonna di idrogeno molecolare e polveri oscure che si sovrappone al chiarore di IC 434, entrambe fanno parte del complesso di Orione (immagine a destra).

11.3 – Le condizioni iniziali di collasso

La situazione è ben descritta dal teorema del viriale. All'equilibrio il teorema prevede $2E_T + U = 0$ (E_T è l'energia cinetica delle molecole, U l'energia potenziale gravitazionale), ma il collasso tende a diminuire il momento di inerzia della configurazione e anche l'energia potenziale diventa più negativa (R diminuisce). Si ha quindi collasso per $2E_T + U < 0$, o anche

$$[11.5] \quad E_T < \left| \frac{U}{2} \right|.$$

Consideriamo ora una nube di idrogeno molecolare inizialmente omogenea, con massa $M = 2Nm_p$, temperatura T e densità ρ . Alle basse temperature tipiche dell'ambiente interstellare i gradi di libertà rotazionali, vibrazionali, eccetera del gas sono congelati, quindi scriveremo l'energia E_T come

$$[11.6] \quad E_T = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \frac{M}{2m_p} kT$$

Per l'energia gravitazionale potremo invece scrivere:

$$[11.7] \quad \left| \frac{U}{2} \right| = -\frac{U}{2} = \frac{1}{2} G \int_0^M \frac{M(r) dM(r)}{r} = \frac{1}{2} G \int_0^R \frac{1}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \cdot 4\pi \rho r^2 dr = \frac{1}{2} G \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr =$$

$$= \frac{1}{2} G \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 R^5 = \frac{1}{2} G \frac{3}{5} \left(\frac{16}{9} \pi^2 \rho^2 R^6 \right) \cdot \frac{1}{R} = \frac{3}{10} G \frac{M^2}{R}$$

Allora la condizione di collasso equivale a $\frac{3}{2} \frac{M}{2m_p} kT < \frac{3}{10} G \frac{M^2}{R}$, cioè

$$[11.8] \quad kT < \frac{2}{5} G \frac{Mm_p}{R}$$

Ricordando l'equazione che esprime la massa $M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$, il raggio è $R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$ e sostituendo nella [11.8] otteniamo

$$[11.9] \quad kT < \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} G M^{2/3} m_p \rho^{1/3}.$$

A densità molto basse, come quelle iniziali della nube (~ 50 atomi H/cm³, equivalente a $\rho \sim 10^{-24}$ g/cm³) la nube è del tutto trasparente e la temperatura non dipende molto dalle condizioni specifiche della nube in questione, ma piuttosto dall'ambiente interstellare in generale, come la presenza di stelle nelle vicinanze, il flusso di raggi cosmici e così via.

Possiamo dunque supporre che T non vari molto nelle prime fasi del collasso, restando intorno al valore tipico di 10 K. Allora la condizione $M^{2/3} \rho^{1/3} > C$, o anche $\rho > \frac{C}{M^2}$, relazione che collega la densità minima di collasso alla massa della struttura.

Dalla relazione appena trovata, sostituendo i valori dei parametri (in unità cgs), ricaviamo la condizione

$$[11.10] \quad \rho > 10^{-18} \frac{M_{\odot}^2}{M^2}$$

Si ottiene così la tabella

M/M_{\odot}	1	10	100	10^4	10^6
ρ (g/cm ³)	10^{-19}	10^{-20}	10^{-22}	10^{-26}	10^{-30}

dalla quale si deduce che il collasso delle nubi fredde più massicce appare inevitabile. Esistono però evidenze osservative del contrario! Si comprende allora che è necessario tener conto di altri fattori di equilibrio: campi magnetici, turbolenza, rotazione...

11.3.1 – Il ruolo della rotazione

La presenza di rotazione (dimostrata dai dati osservativi) produce un termine aggiuntivo all'energia termica, che diventa

$$[11.11] \quad E_T \rightarrow \frac{3}{2} NkT + E_{rot} = E_{th} + E_{rot}$$

definendo ora

$$[11.12] \quad \alpha = \frac{E_{th}}{|U|} \quad \beta = \frac{E_{rot}}{|U|}$$

possiamo riformulare la condizione di collasso del viriale come

$$[11.13] \quad \alpha + \beta < \frac{1}{2}$$

Per un'ulteriore discussione delle prime fasi del collasso supporremo che, oltre alla temperatura T , anche la massa M e il momento angolare L si conservino.

Nelle nostre ipotesi semplificatrici abbiamo

$$[11.14] \quad E_{th} = \frac{3}{2} NkT \quad (\text{costante}) \text{ come anche}$$

$$[11.15] \quad E_{rot} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} \approx \frac{L^2}{2} \frac{5}{2MR^2} = \frac{5}{4} \frac{L^2}{M \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{2/3}} = C' \cdot \rho^{2/3}$$

ricordando che M e L si considerano costanti. Allo stesso modo si deduce:

$$[11.16] \quad U \approx -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = C'' \rho^{1/3}$$

In termini della densità ρ risulta dunque

$$[11.17] \quad \alpha(\rho) = \frac{E_{th}}{|U|} = \alpha(\rho_0) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-1/3}$$

$$\beta(\rho) = \frac{E_{rot}}{|U|} = \beta(\rho_0) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3}$$

Con le notazioni $\alpha(\rho_0) = \alpha_0$, $\beta(\rho_0) = \beta_0$, $\psi = \frac{\rho}{\rho_0}$, definiamo la funzione f :

$$[11.18] \quad f(\psi) = \alpha_0 \psi^{-1/3} + \beta_0 \psi^{5/3}$$

La condizione di collasso espressa dal teorema del viriale diventa così $f(\psi) < \frac{1}{2}$, mentre il sistema

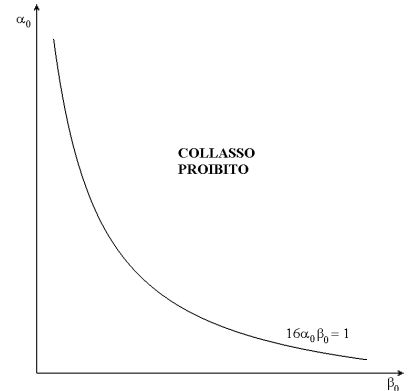
si espanderà se fosse $f(\psi) > \frac{1}{2}$. Derivando la f si trova l'unico punto stazionario:

$$[11.19] \quad f'(\psi) = \left[-\frac{1}{3}\alpha_0\psi^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\beta_0\psi^{\frac{1}{3}} \right] \cdot \frac{1}{\psi} = 0 \quad \text{per} \quad \psi = \left[\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right]^{\frac{3}{2}} = \psi_0$$

Il punto trovato è di minimo e si ha

$$[11.20] \quad f(\psi_0) = 2\sqrt{\alpha_0\beta_0}.$$

Quindi finché il sistema resta isoterma e conserva M e L avremo che il collasso non avrà luogo se $f(\psi) > \frac{1}{2}$, vale a dire $16\alpha_0\beta_0 > 1$.



11.3.2 – Casi particolari di collasso isoterma

- $\beta_0 = 0$ (assenza di rotazione): finché l'energia termica resta costante, secondo l'ipotesi isoterma, il collasso fa diminuire α , perché nel contempo cresce $|U|$. Il sistema approssima un collasso libero, raggiungendo in teoria densità infinite in un tempo finito. Ciò non si verifica in realtà, poiché ben presto viene a cadere l'ipotesi di collasso isoterma.
- $\beta_0 < \alpha_0$: il collasso inizialmente accelera finché rimane $\beta < \alpha$, ma come si è visto α tende a decrescere. Quando la condizione non è più soddisfatta il collasso rallenta e può, a seconda dei casi, arrestarsi. In questo caso possono verificarsi fenomeni di fissione della struttura.
- $\beta_0 > \alpha_0$: l'effetto della rotazione diventa rapidamente preponderante e blocca il collasso. Trascurando la fissione (che potrebbe invece aver luogo) si raggiungerà l'equilibrio quando $\alpha + \beta = 1/2$. Essendo però α in continua diminuzione, stiamo sicuri con la condizione $\beta = 1/2$,

cioè: $\beta_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ da cui ricaviamo la massima densità raggiunta: $\rho^* = \rho_0 \left(\frac{1}{2\beta_0} \right)^3$. In generale,

$\alpha + \beta = 1/2$ equivale a una condizione meccanica $\vec{F} = 0$, non $\vec{v} = 0$. Quando il sistema in collasso raggiunge quella condizione continua a contrarsi, salvo poi rimbalzare indietro e assestarsi all'equilibrio dopo una serie di oscillazioni smorzate.

11.4 – Il criterio di Jeans

È stato il primo tentativo (1929) di analisi quantitativa di strutture autogravitanti in situazioni lontane dall'equilibrio. Oggi si hanno grossi dubbi sulle previsioni quantitative ricavabili dall'uso del criterio: anche il suo valore qualitativo è messo in discussione.

Le condizioni iniziali previste da Jeans sono quelle di un mezzo infinito in equilibrio (cioè $\vec{v} = 0$), con pressione P_0 , densità ρ_0 e potenziale specifico gravitazionale (per unità di massa) ϕ_0 costanti in tutto lo spazio. Le ipotesi formulate sono, a rigore, inconsistenti: l'equazione di Poisson dà infatti

$$[11.21] \quad \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_0$$

e la costanza di ϕ_0 fornisce $\rho_0 = 0$, situazione fisicamente priva di interesse.

Se si riesce ad ignorare quanto visto, il procedimento standard per ricavare il criterio di Jeans fornisce la relazione di dispersione

$$[11.22] \quad \omega^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho_0 .$$

Il criterio per l'instabilità secondo Jeans è $\omega^2 < 0$ (in modo da non avere soluzioni oscillanti), una condizione che in termini del vettore d'onda \vec{k} dà:

$$[11.23] \quad k < \sqrt{4\pi G \rho_0 \frac{2m_p}{kT}} \equiv k_J$$

Invece, in termini della lunghezza d'onda della perturbazione, $\lambda = 2\pi/k$, si trova che l'instabilità prende piede per

$$[11.24] \quad \lambda > \lambda_J = \lambda = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi k T}{G \rho_0 2m_p}}$$

(Attenzione: k sotto la radice è la costante di Boltzmann) Per ogni lunghezza d'onda fissata λ_J la più piccola massa che può collassare sarà

$$[11.25] \quad M_J = \frac{4}{3} \pi \rho_0 \lambda_J^3 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 \left(\frac{\pi k T}{G \rho_0 2m_p} \right)^{\frac{3}{2}} = (\text{costante}) \cdot \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\rho_0^{\frac{1}{2}}}$$

L'applicazione del criterio di Jeans fa ritrovare nuovamente (a meno di coefficienti poco diversi dall'unità) la condizione di instabilità già determinata in precedenza.

Il criterio di Jeans è però (almeno in linea di principio) ancora più potente: esso infatti prevede che al diminuire della temperatura T diminuisca anche M_J . Pertanto, oltre al collasso globale della struttura, possono avviarsi processi di collasso per sottostrutture, che condurrebbero facilmente a fenomeni di frazionamento: lo stesso potrebbe accadere in seguito, quando ancora T è costante e ρ aumenta.

La situazione reale è complicata; anche in assenza di rotazione, campi magnetici e turbolenza lo sviluppo delle sotto-condensazioni in un ambiente già in rapido collasso può non avvenire affatto (per non parlare dell'inconsistenza delle ipotesi iniziali del criterio...). Le simulazioni numeriche sembrano gettare seri dubbi sulla realtà dei processi di frazionamento. Tuttavia la situazione resta aperta e non esiste una sentenza definitiva: è in questo spazio molto ristretto che si può ancora parlare del criterio di Jeans.

11.5 – Il collasso adiabatico

Con il crescere della densità la struttura non potrà restare a lungo trasparente. Il cammino libero medio dei fotoni all'interno della nube diventa minore del raggio R della nube stessa: la temperatura comincia ad aumentare.

La definizione classica di cammino libero medio è

$$[11.26] \quad l = \frac{1}{\kappa \rho}$$

(qui κ rappresenta l'opacità^[3]) e la condizione per l'inizio del riscaldamento è

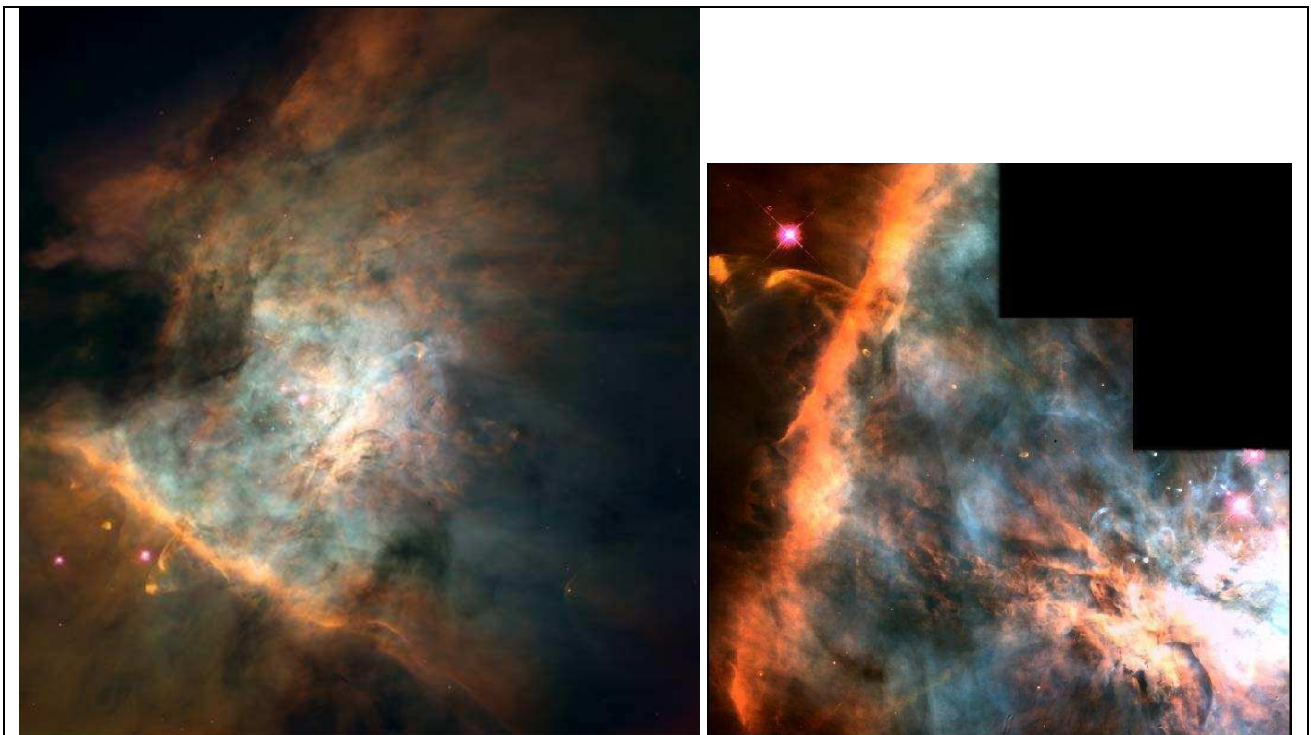
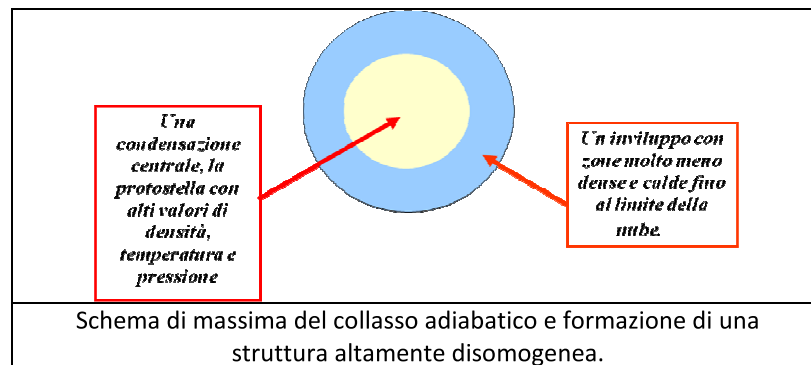
^[3] Quando un raggio di luce che attraversa un gas perde fotoni per assorbimento e l'equazione che descrive questo processo è la seguente: $dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds$. Ossia l'assorbimento per lunghezza d'onda è proporzionale al cammino ds nel

[11.27]

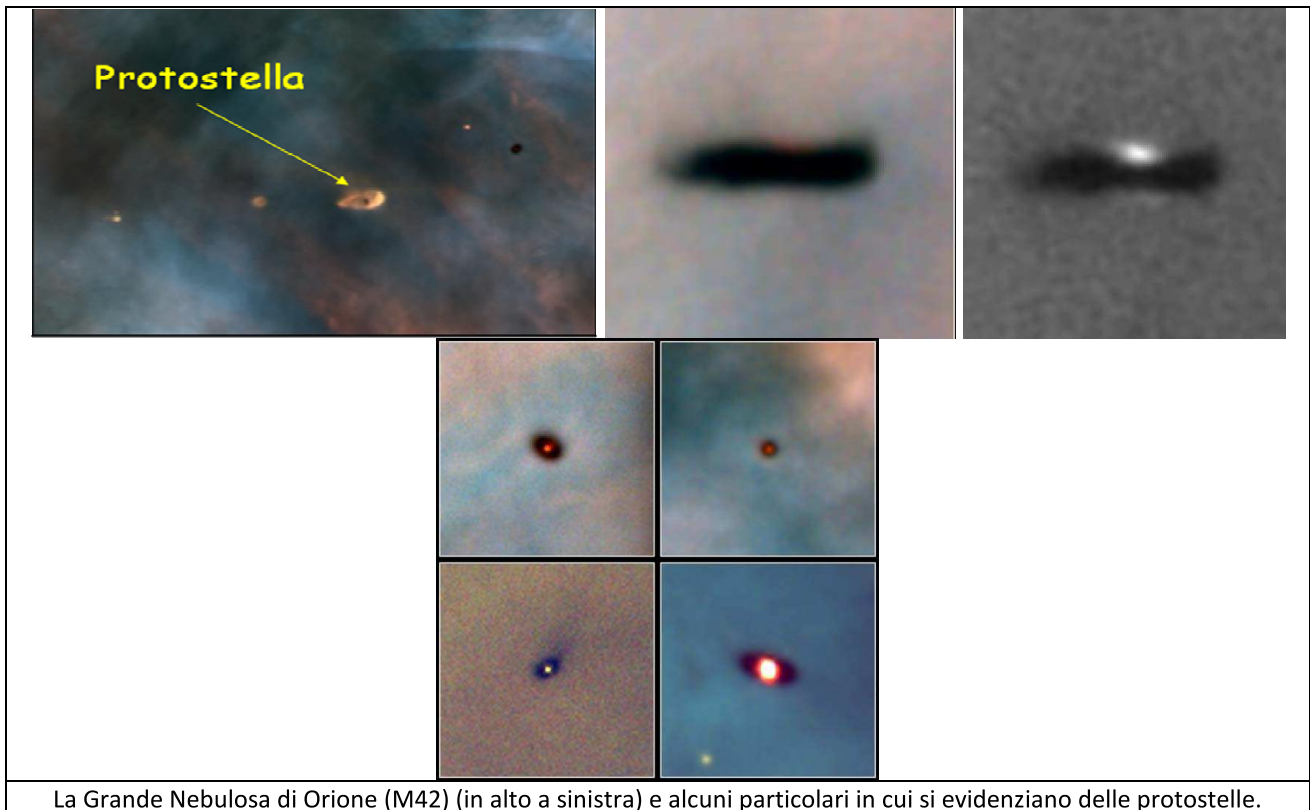
$$l < R \rightarrow \kappa \rho R > 1$$

L'opacità tende ad aumentare sensibilmente con la temperatura T . In questo stadio si può dire che comincia la fase adiabatica del collasso. Non si tratta di una vera adiabatica, perché buona parte dell'energia viene emessa: tuttavia le relazioni tra le variabili termodinamiche seguono un andamento adiabatico. Si ha $P \propto \rho^{5/3}$ (gas monoatomico) oppure $P \propto \rho^{7/5}$ (gas biatomico).

Durante la prima fase del collasso adiabatico si forma una condensazione centrale (core) in equilibrio idrostatico, con un disco di accrescimento equatoriale nel quale si riversa la materia proveniente dall'involuppo, che è ancora in caduta libera. La rapidità del collasso è ulteriormente accelerata dai processi di dissociazione dell'idrogeno molecolare, che si verificano per $T \approx 2000$ K; essi infatti rallentano l'aumento di T e P al crescere di ρ . Verso la fine del collasso la zona centrale è in contrazione quasi-statica, mentre le zone periferiche continuano a cadere verso il centro; questo causa un fenomeno di rimbalzo, dopo il quale tutta la struttura si assesta in uno stato di quasi equilibrio.



gas, alla densità del gas e alla intensità iniziale stessa. La quantità κ è detta coefficiente di assorbimento o opacità e dipende dalla densità, temperatura e composizione del gas.



La Grande Nebulosa di Orione (M42) (in alto a sinistra) e alcuni particolari in cui si evidenziano delle protostelle.

11.6 – La traccia di Hayashi

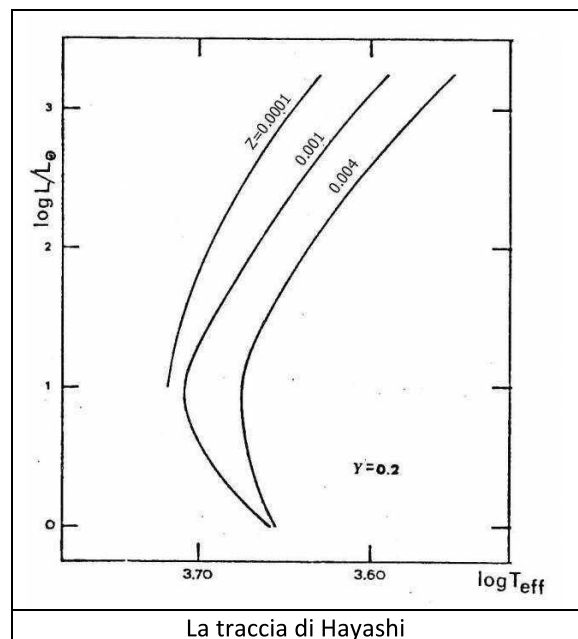
Negli stadi di pre-sequenza è utile la definizione della cosiddetta **traccia di Hayashi**, una curva nel diagramma H-R che si determina imponendo alla struttura la condizione di completa convettività. La traccia dipende dalla massa e dalla composizione chimica.

Hayashi ha mostrato che protostelle, cioè strutture stellari di equilibrio interamente convettive con atmosfera radiativa, esistono soltanto per temperature effettive alla sinistra di una linea del diagramma HR:

[11.28]

$$T_{eff} \approx 2 \times 10^3 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0,15} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{0,01} \left(\frac{Z}{0,02} \right)^{-0,04} \text{ K}$$

Z indica la metallicità^[4] della stella.



La traccia di Hayashi

^[4] La metallicità di un oggetto può fornire indicazioni sulla sua età. Secondo le attuali teorie cosmologiche, quando l'universo si formò, era composto quasi completamente da idrogeno ed elio, e così le stelle più vecchie (quelle di popolazione II e di popolazione III – vedi più avanti) hanno metallicità molto basse. Crescendo l'età dell'universo cresce anche il contenuto di metalli, a causa della nucleosintesi stellare e dell'arricchimento di metalli che il mezzo interstellare subisce attraverso le nebulose planetarie e le supernovae. La metallicità in funzione della massa: X → Funzione della massa di H, Y → Funzione della massa di He e Z → Funzione della massa dei "metalli", deve essere X + Y + Z = 1. La composizione primordiale dell'Universo è: X_p=0,76±0,77 Y_p=0,23±0,24 Z=0,00. Per il Sole, attualmente è X=0,70 Y=0,28 Z=0,02

Per temperature effettive inferiori non esiste nessun meccanismo in grado di trasportare fuori dalla stella la luminosità del corrispondente corpo nero.

Tale linea, detta traccia limite di Hayashi, è, per ogni data massa, quasi verticale nel diagramma HR, è quindi indipendente dalla luminosità.

La protostella si trova inizialmente su un punto del limite di Hayashi ed evolve contraendosi in condizioni di quasi-equilibrio secondo il tempo scala di Kelvin dato dalla [11.2] che espressa in termini della temperatura effettiva diventa:

$$[11.29] \quad t_{Hayashi} = t_K \approx 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^3 \left(\frac{T_{eff\odot}}{T_{eff}} \right)^4 \text{ anni}$$

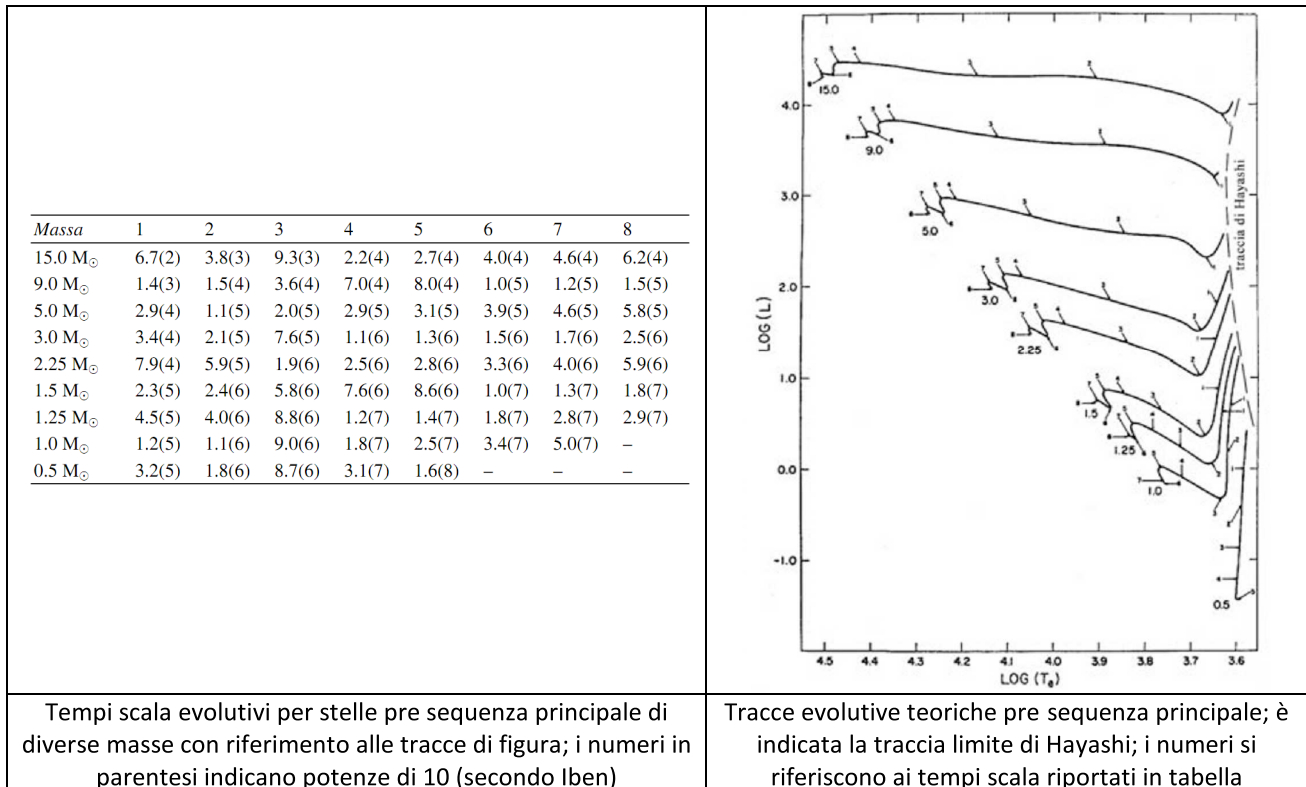
dove tipicamente $\left(\frac{T_{eff\odot}}{T_{eff}} \right)^4 \approx 10$.

Il bilancio energetico richiede che nella contrazione la luminosità decresca perché lo strato radiativo superficiale mantiene le sue caratteristiche di opacità invariate e quindi una temperatura effettiva circa costante. Sul diagramma HR il punto rappresentativo della protostella si muove a luminosità decrescente e a T_{eff} quasi costante lungo il limite di Hayashi. La luminosità e la temperatura effettiva per le tracce evolutive di Hayashi, in funzione del raggio, per diverse masse sono date dalle relazioni:

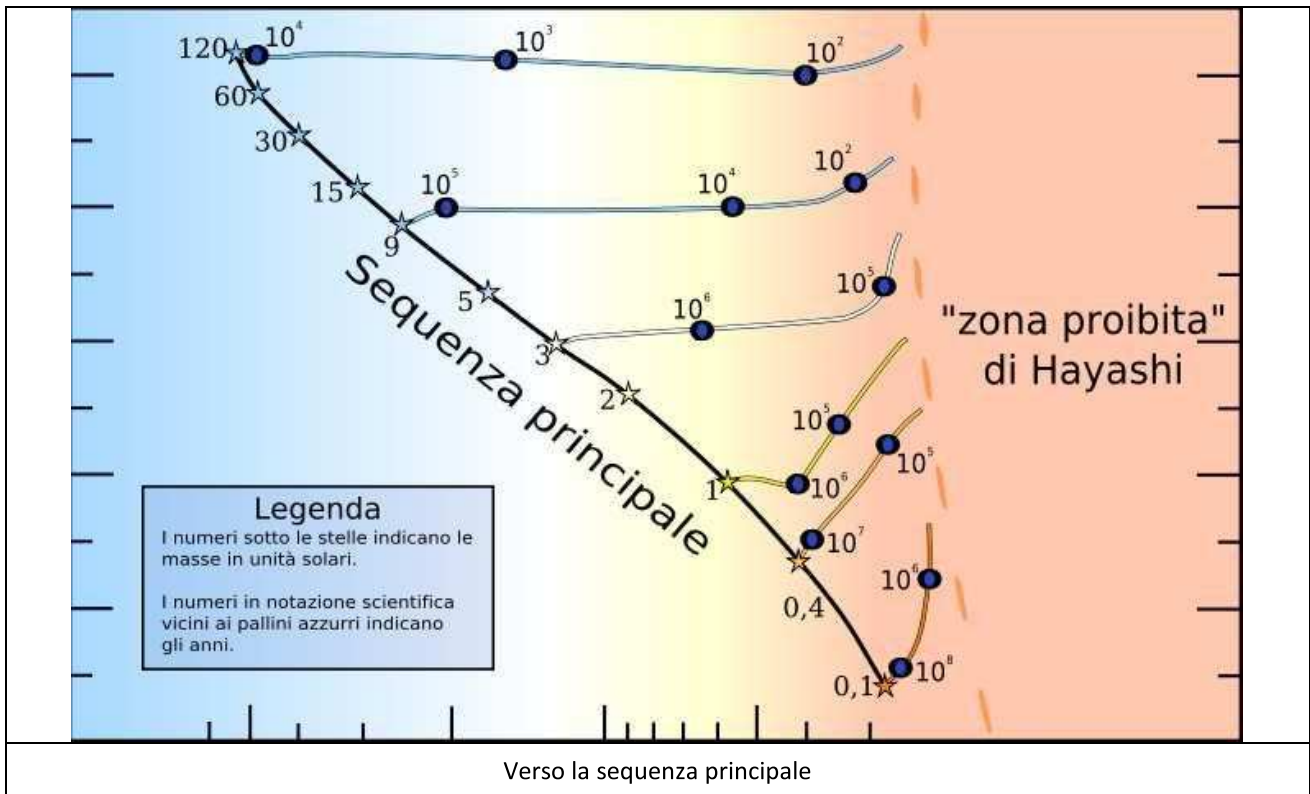
$$[11.30] \quad L = 0,23 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{0,8} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{2,2} L_\odot$$

$$[11.31] \quad T_{eff} = 3,3 \times 10^3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{0,2} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{0,06} \text{ K}$$

A destra della traccia non esistono strutture di equilibrio. Infatti la contrazione in quella zona molto più rapida (da lì provengono le protostelle in contrazione). La traccia si sposta verso sinistra (T_{eff} più alte) aumentando l'abbondanza iniziale di He (Y) o diminuendo la metallicità (Z).



11.7 – La sequenza principale (MS)



Il progressivo innalzamento della temperatura centrale determina l'innesco delle prime reazioni fusione termonucleare. Tra 10^6 K e $5 \cdot 10^6$ K si attiva la fusione degli elementi leggeri D, Li, Be, B, i cui prodotti sono ^3He e ^4He . L'unico loro effetto sensibile, data la massiccia presenza di convezione, è quello di modificare l'abbondanza superficiale degli elementi suddetti. La distruzione è tanto più efficace quanto più piccola è la massa della struttura.

Alla soglia fatidica di 10^7 K si ha l'innesco delle catene di fusione dell'idrogeno; l'efficienza delle reazioni nucleari è però ridotta a causa della temperatura (ancora piuttosto bassa) e dall'abbondanza degli elementi secondari e intermedi delle reazioni, che deve crescere fino al valore ottimale.

Importante: il tempo necessario perché tutto quanto vada a regime è abbastanza lungo da rendere la composizione chimica disomogenea, e di questo va tenuto conto nei modelli stellari.

Nella figura della pagina successiva le linee di raggio costante sono ricavabili dalla relazione di corpo nero

$$[11.32] \quad L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

I cerchietti indicano le fasi iniziali di contrazione gravitazionale. Il primo punto sulla traccia segnala l'ultimo modello totalmente convettivo, il penultimo punto il primo modello sorretto nuclearmente e l'ultimo il modello di Sequenza Principale di Età Zero (ZAMS). I tempi lungo le tracce sono in anni.

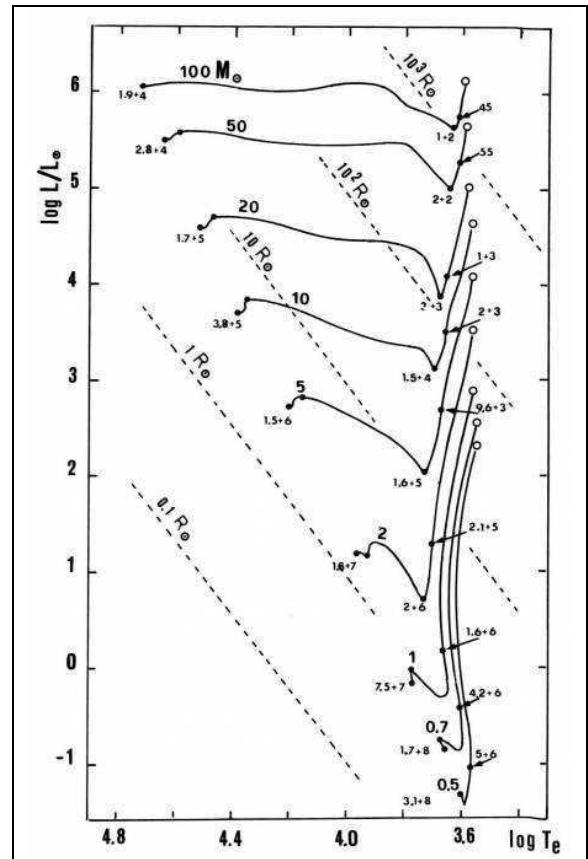
Quando la fusione nucleare diviene il processo dominante di produzione dell'energia e l'energia ricavata dalla contrazione gravitazionale si è dispersa, la stella giace in un punto della sequenza principale nel diagramma H-R, dipendente principalmente dalla sua massa. Gli astronomi si riferiscono a questo stadio dell'evoluzione stellare con l'espressione *Zero-Age Main Sequence* (ZAMS), sequenza principale di età zero.

Una stella rimane nella sua posizione iniziale all'interno della sequenza principale finché una significativa porzione dell'idrogeno presente nel suo nucleo viene convertita in elio.

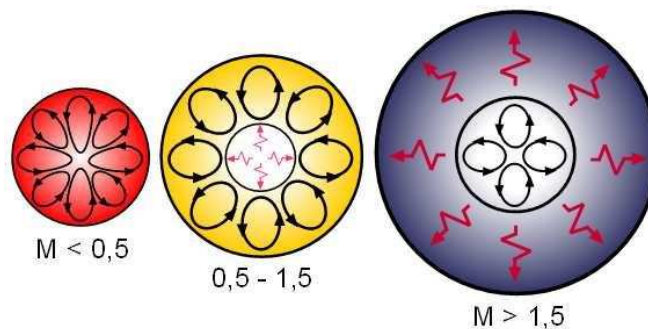
La sequenza principale è occupata dalle stelle che producono energia fondendo l'idrogeno presente nel loro nucleo.

Quando la stella arriva in sequenza principale si verificano alcuni fatti rilevanti:

- lo sviluppo di un nucleo radiativo tende ad arrestare la diminuzione di luminosità, poiché rallenta e infine blocca la contrazione;
- all'accensione delle prime reazioni nucleari dell'idrogeno la stella è leggermente più brillante rispetto alla situazione di equilibrio;
- man mano che l'efficienza cresce la struttura evolve verso temperature centrali leggermente più basse;
- le stelle di massa media ($> \sim 4M_{\odot}$) e grande ($> \sim 10M_{\odot}$) raggiungono l'innesco delle reazioni di fusione dell'idrogeno già in regime di efficienza del ciclo CNO;
- la fortissima dipendenza ($\propto T^{15}$!) dell'efficienza del CNO dalla temperatura aumenta il gradiente termico e favorisce lo sviluppo di nuclei convettivi;
- a differenza delle piccole masse, il raggiungimento dell'equilibrio in CNO aumenta l'abbondanza dell'elemento meno attivo, ^{14}N , deprimendo l'efficienza del ciclo. Di conseguenza il nucleo convettivo diminuisce leggermente e la temperatura centrale aumenta.

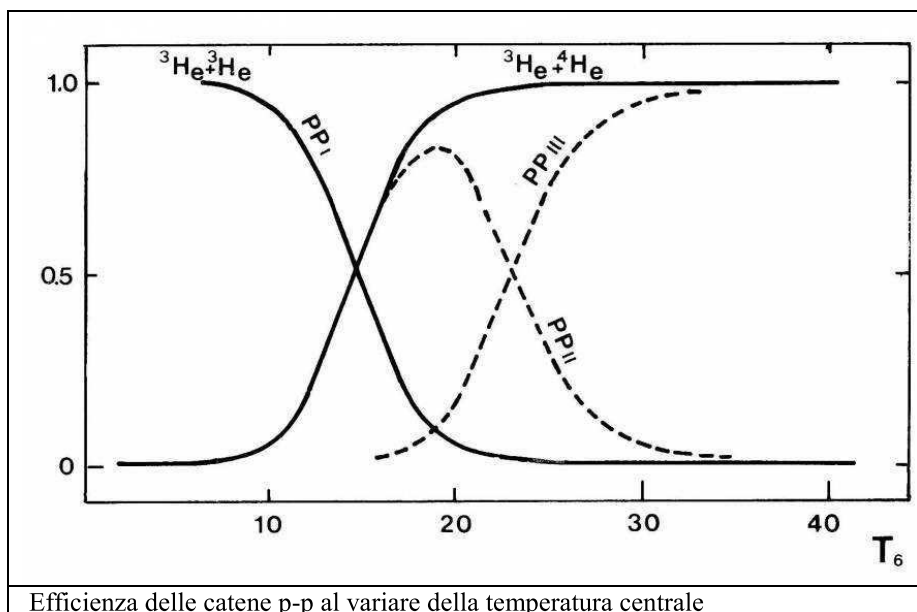


Tracce teoriche per l'evoluzione pre-sequenza di stelle di varie masse e composizione chimica solare.



Tipo di trasporto di energia in funzione della massa.

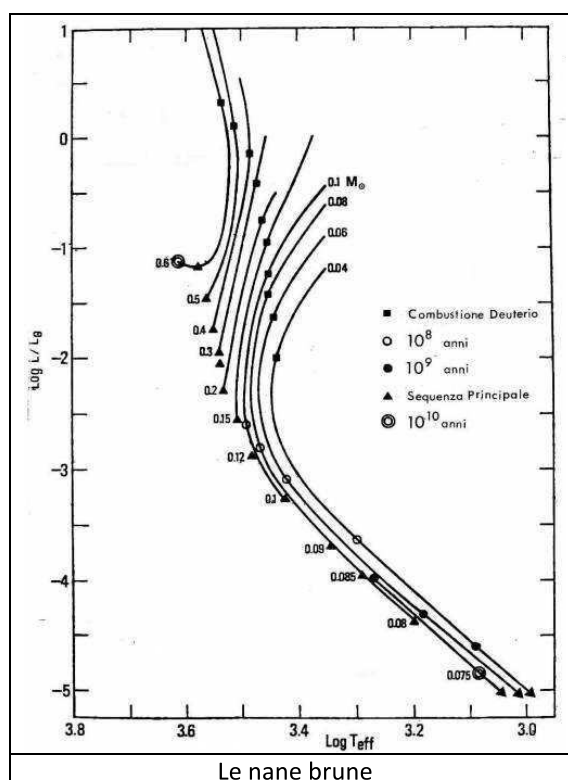
I modelli teorici ci dicono che per le stelle in sequenza principale il trasporto di energia è puramente convettivo per stelle di massa inferiore alle $0,5 M_{\odot}$, per stelle la cui massa è compresa tra $0,5 M_{\odot}$ e $1,5 M_{\odot}$ si ha un nucleo radiativo e un involucro convettivo, per stelle di massa maggiore di $1,5 M_{\odot}$ il nucleo è convettivo e l'involucro è radiativo. Quindi per stelle di piccola massa sono più efficienti le catene p-p, per stelle di massa più grande è più efficiente il ciclo CNO.

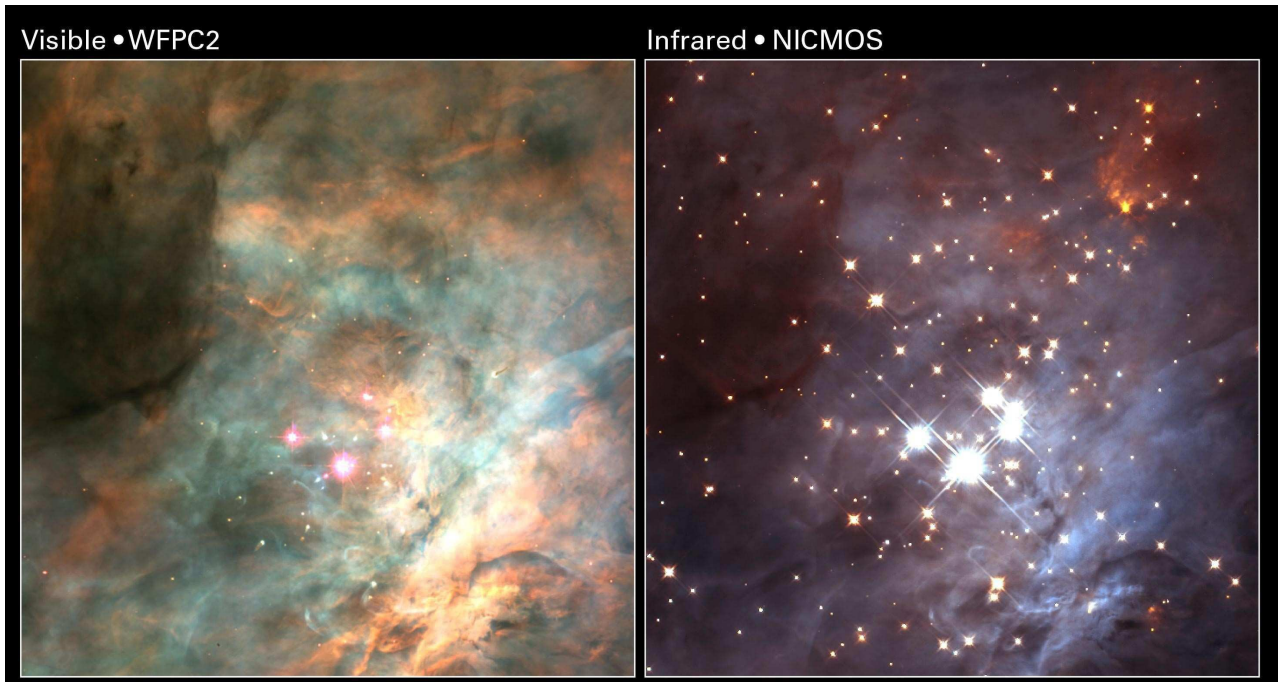


Stelle di massa molto piccola arrivano con difficoltà all'innesco dell'idrogeno. La figura mostra la contrazione di protostelle con $M \leq 0,6 M_{\odot}$. Oltre all'allungamento progressivo dei tempi di arrivo in sequenza, esiste un limite, teoricamente posto a $0,078 M_{\odot}$, al di sotto del quale la struttura consegue un grado di degenerazione tanto elevato da non riuscire a raggiungere la temperatura minima richiesta per l'innesco. Questo canale evolutivo porta alla formazione delle *nane brune*.

La degenerazione del gas stellare è dovuta al fatto che questo devia dall'andamento statistico normale, ossia dall'equilibrio termodinamico. In condizioni normali la pressione del gas è una funzione che dipende essenzialmente da due parametri (temperatura e densità del gas). Nel caso di degenerazione il gas non segue più la distribuzione statistica di Maxwell-Boltzmann, ma una diversa che prende il nome di distribuzione di Fermi-Dirac. In questa distribuzione rientra un gas composto di soli elettroni la cui pressione dipende unicamente dalla densità del gas.

Si possono considerare due casi di degenerazione: quello non relativistico e quello relativistico, a seconda che il momento della quantità di moto massimo (momento di Fermi) che le particelle possono occupare in una distribuzione degenere, sia molto più piccolo o all'incirca uguale alla quantità $m_e c$, dove m_e è la massa dell'elettrone.





Nell'ammasso del Trapezio (il cuore della nebulosa di Orione), nell'infrarosso, il telescopio spaziale Hubble ha visto una ventina di nane brune molto giovani (1 milione di anni) con massa tra $0,0095$ e $0,076 M_{\odot}$.



Le stelle più massicce oggi conosciute; superammasso stellare R136, posto al centro della Nebulosa Tarantola nella Grande Nube di Magellano.

Esistono anche stelle estremamente massicce, le più massicce che si conoscono sono la R136a1 ($\sim 315 M_{\odot}$) e la R136c ($\sim 230 M_{\odot}$). Entrambe fanno parte del superammasso stellare R136, posto al centro della Nebulosa Tarantola, la più grande regione di formazione stellare del Gruppo Locale nella Grande Nube di Magellano.

La diversa risposta dei cicli p-p e CNO si riflette sulla collocazione nel diagramma H-R delle sequenze principali. La transizione dalle stelle dominate dal ciclo p-p a quelle dominate dal CNO dipende dalla composizione chimica. L'aumento di Z e quello di Y favoriscono entrambi il CNO, sia direttamente (aumentando la presenza di C, N e O) sia indirettamente (accrescendo la temperatura centrale).

Non va dimenticato che le variazioni di Y e Z spostano la posizione della sequenza principale.

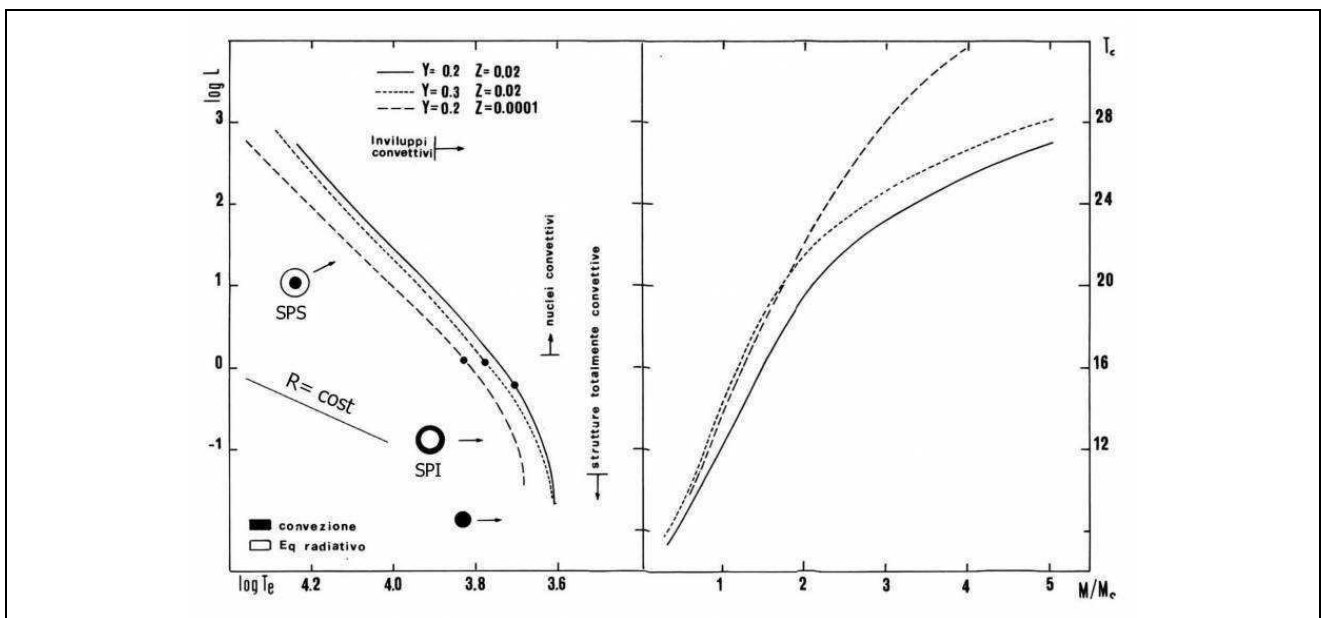
Il tempo di permanenza in sequenza principale dipende soprattutto dalla massa, poi anche dalla composizione chimica.

$Y ; Z$	$0,1 ; 10^{-3}$	$0,24 ; 0,02$	$0,3 ; 0,1$
M_t / M_{\odot}	1,75	1,5	1

Una formula approssimata per la stima della durata di questa fase (che è comunque la più lunga nella vita di ogni stella) è, espressa in anni:

$$[11.33] \quad t_{SP} \approx 10^{11} q \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right),$$

dove q rappresenta la frazione della massa di idrogeno della stella che si converte in elio. Per masse solari si ottiene $t_{SP} \approx 10^{10}$ anni. Per stelle di 0,1 masse solari questo tempo può salire a 10^{12} anni (e quindi queste piccole stelle dovrebbero essere tranquillamente ancora in sequenza principale fin dalla prima generazione), mentre per 100 masse solari il tempo decresce fino a 10^6 anni.



A sinistra: distribuzione nel diagramma HR di strutture di sequenza principale per le composizioni chimiche indicate. Il punto lungo le sequenze segnala la collocazione dei modelli di massa pari a quella del Sole.
A destra: andamento delle temperature centrali (in milioni di gradi) al variare della massa negli stessi modelli.



M16 – Ammasso aperto +
Nebulosa

Distante circa 6500 a.l. ha dimensioni di circa 70×55 a.l. L'ammasso centrale contiene molte stelle che sono ancora in fase di pre-sequenza. Le componenti più brillanti sono delle supergiganti blu la cui massa varia fra 2 e 85 M_{\odot} . L'età dell'ammasso è di 2-3 milioni di anni.



M45 – Ammasso aperto delle
Pleiadi è un ammasso aperto
visibile nella costellazione del
Toro.

Questo ammasso, piuttosto vicino (440 anni luce), conta diverse stelle visibili ad occhio nudo. Tutte le sue componenti sono circondate da leggere nebulose a riflessione, osservabili specialmente in fotografie a lunga esposizione. I membri visibili delle Pleiadi sono stelle blu o bianche, molto luminose; l'ammasso conta in realtà centinaia di altre stelle. Le Pleiadi sono un ammasso giovane, con un'età stimata di circa 80 milioni di anni, e una vita prevista di soli altri 250 milioni di anni, a causa della sua bassa densità.



M11 – Ammasso dell’Anatra Selvatica o con la sigla NGC 6705 è un ammasso aperto visibile nella costellazione dello Scudo.

E’ uno dei più ricchi e densi ammassi aperti conosciuti: contiene circa 3000 stelle. Dista 6000 anni luce dalla Terra e ha un’età stimata di 250 milioni di anni.

La densità di stelle nell’ammasso è stata stimata in circa 83 stelle per parsec cubico nelle vicinanze del centro, e in circa 10 stelle per parsec cubico intorno alla metà del suo raggio. Si fa notare che il parsec cubico centrato sul Sole non contiene altre stelle).

11.8 – Oltre la sequenza principale

11.8.1 - L’esaurimento dell’idrogeno centrale

Quando termina la combustione dell’idrogeno nel nucleo della stella, iniziano le fasi finali della sua esistenza e ancora una volta la massa ha un ruolo fondamentale.

In tutte le strutture la diminuzione dell’idrogeno nel nucleo fa aumentare la temperatura e la densità centrali, quindi cresce la luminosità e la stella si allontana dalla ZAMS.

Strutture di alta sequenza mostrano una contrazione del nucleo prima dell’esaurimento finale dell’H (tratto AB nella figura sotto a sinistra). La velocità di questa fase è provata dall’assenza di stelle in quella regione.

Con l’idrogeno centrale esaurito la combustione si sposta in un involucro esterno contiguo al nucleo (shell). La conseguenza è un’espansione degli strati esterni: la luminosità resta più o meno costante, mentre scende la temperatura superficiale. La combustione in shell è tutta CNO quindi gli strati esterni diventano rapidamente convettivi. La stella si sposta verso la sua traccia di Hayashi e aumenta progressivamente di luminosità, finché la shell di idrogeno resta l’unica sorgente efficiente di energia nucleare.

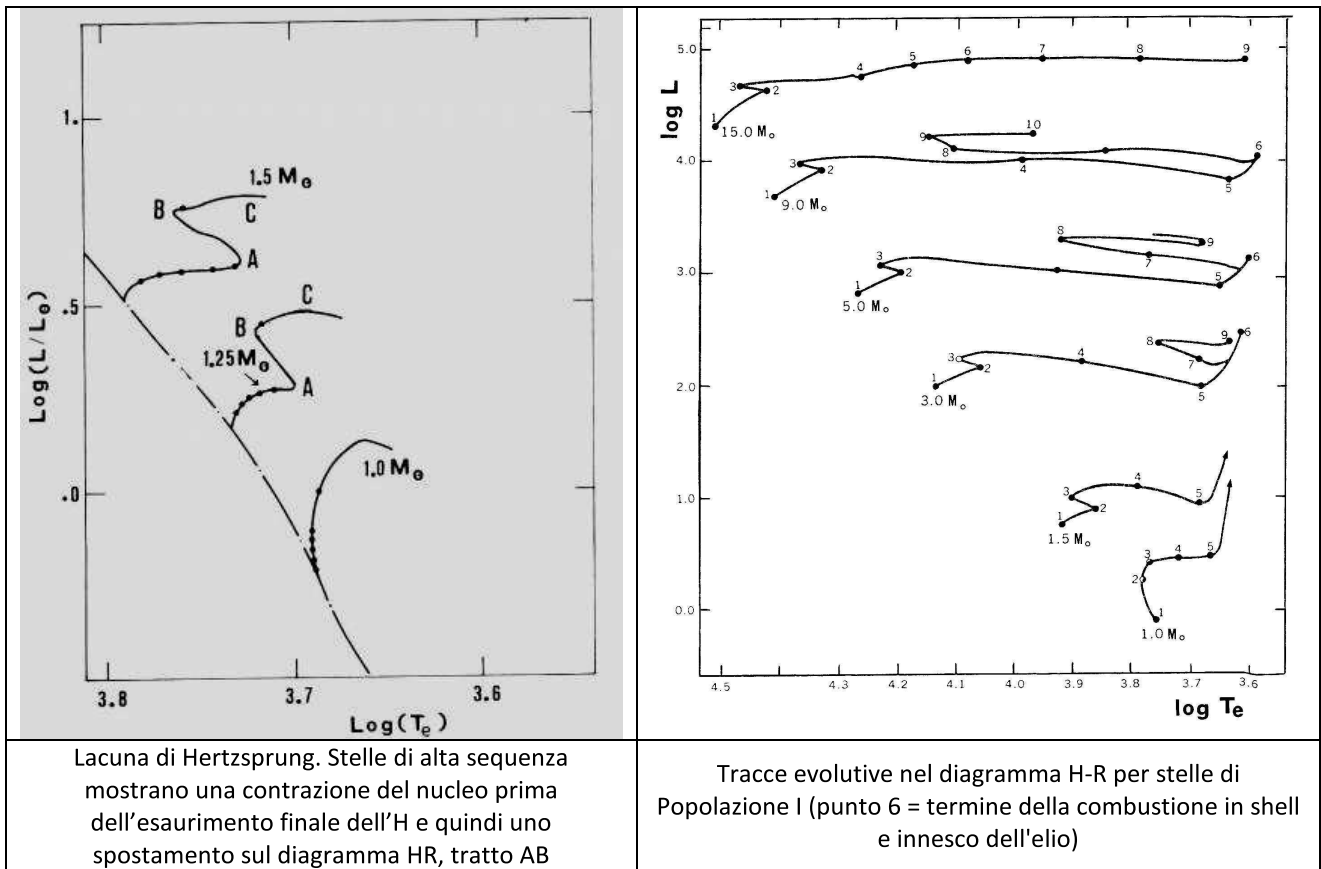
Come regola generale, le combustioni centrali collocano i modelli verso alte temperature superficiali, mentre le combustioni a shell li spostano a destra, verso le rispettive tracce di Hayashi. L’idrogeno che circonda il nucleo inerte di He viene trasformato anch’esso in He e il nucleo aumenta di massa, mentre la shell si sposta gradatamente verso l’esterno.

Privo di sorgenti di energia, il nucleo tende inizialmente verso una struttura isoterma, reagendo poi alla continua crescita in massa con una contrazione e un conseguente riscaldamento, che condurrà all’innesco delle reazioni dell’elio.

Le stelle di alta sequenza rimangono abbastanza “ferme” finché il nucleo di He non raggiunge il 10% circa della massa totale (limite di Schönberg-Chandrasekhar): oltre tale limite non esistono soluzioni delle equazioni di equilibrio che ammettano un nucleo isoterma.

I nuclei allora si contraggono e la stella va verso la traccia di Hayashi dove, dopo una breve risalita, innesca la combustione centrale dell’He. I tempi scala sono molto minori sia di quelli precedenti

che di quelli della successiva combustione di He: quindi tra la sequenza principale e le giganti rosse c'è una zona spopolata (lacuna o “gap” di Hertzsprung).



Fase	2	3	5	6	9
3M _⊙	227	239	249	253	326
5 M _⊙	65,5	68,2	70,3	70,8	87,8

I dati in tabella riportano due esempi di tempi evolutivi (espressi in milioni di anni) per due stelle della figura più sopra a sinistra.

11.8.2 – Verso l'innesco dell'elio

Le stelle di massa $> \sim 6M_{\odot}$ hanno nuclei convettivi che superano il limite di Schönberg-Chandrasekhar già in sequenza principale. L'esaurimento dell'H centrale è subito seguito dalla contrazione del nucleo di He, con spostamento verso la traccia di Hayashi dove parte la combustione 3α .

Stelle ancora più massicce ($> \sim 15M_{\odot}$) innescano l'He prima di raggiungere la traccia di Hayashi. Strutture povere di metalli lo fanno a masse anche minori (al limite $Z = 0$ persino le stelle di $2,5 M_{\odot}$).

A bassi Z crescono le temperature centrali e la luminosità delle stelle, aumenta anche la massa del nucleo convettivo e si raggiungono condizioni che per Z maggiori sono caratteristiche di stelle più massicce.

Stelle con massa $< \sim 2,5 M_{\odot}$ hanno nuclei di He nei quali inizia la degenerazione elettronica: per questo motivo, benché provengano dall'alta sequenza, la loro storia successiva sarà identica alle strutture di bassa sequenza.

Si possono definire stelle di piccola massa tutte quelle in cui al termine della combustione centrale dell'H si formano nuclei di He almeno in parte degeneri.

Le masse limite per la degenerazione dipendono dalla composizione chimica della struttura originaria: la degenerazione è favorita al diminuire di Y e al crescere di Z.

L'evoluzione delle strutture di piccola massa risulta di particolare rilevanza perché rappresentano un importante campione osservativo delle più antiche popolazioni stellari.

La degenerazione agisce "congelando" la struttura: la pressione degli elettroni degeneri ostacola la contrazione del nucleo e quindi anche l'innesco della combustione di He. I tempi scala della combustione a shell aumentano sensibilmente.

Al termine della combustione centrale di H le stelle di piccola massa raggiungono la loro traccia di Hayashi e, senza innescare l'He, proseguono inerpicandosi lungo la traccia.

La combustione in shell aumenta la massa del nucleo di elio.

E' questa la fase di Gigante Rossa, ossia quella in cui le stelle presentano un nucleo degeneri di elio e nella quali la fusione dell'idrogeno avviene in un guscio che circonda il nucleo.

In tale fase, nel nucleo, si manifestano con crescente efficienza processi di produzione di termoneutrini, che estraggono energia ("raffreddando" il nucleo) e inibendo ulteriormente l'innalzamento delle temperature e l'innesco dell'He.

La stella in questa fase perde energia da due distinte regioni, la superficie (tramite fotoni) e le zone centrali (tramite neutrini).

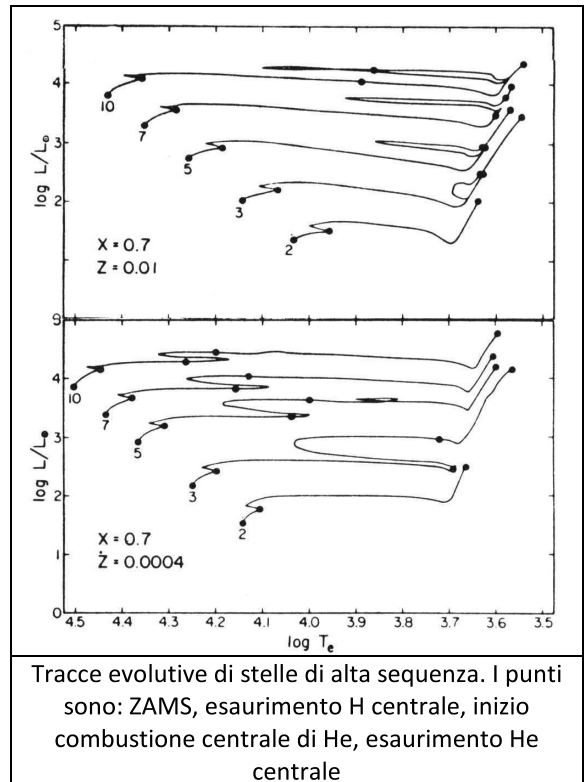
La temperatura raggiunge il massimo in una regione intermedia, e decresce verso la superficie come anche verso il centro della stella. L'innesco dell'He non avviene allora al centro della struttura, ma in una shell. La figura mostra la situazione di una stella di $1,3 M_{\odot}$ subito prima del flash dell'elio.

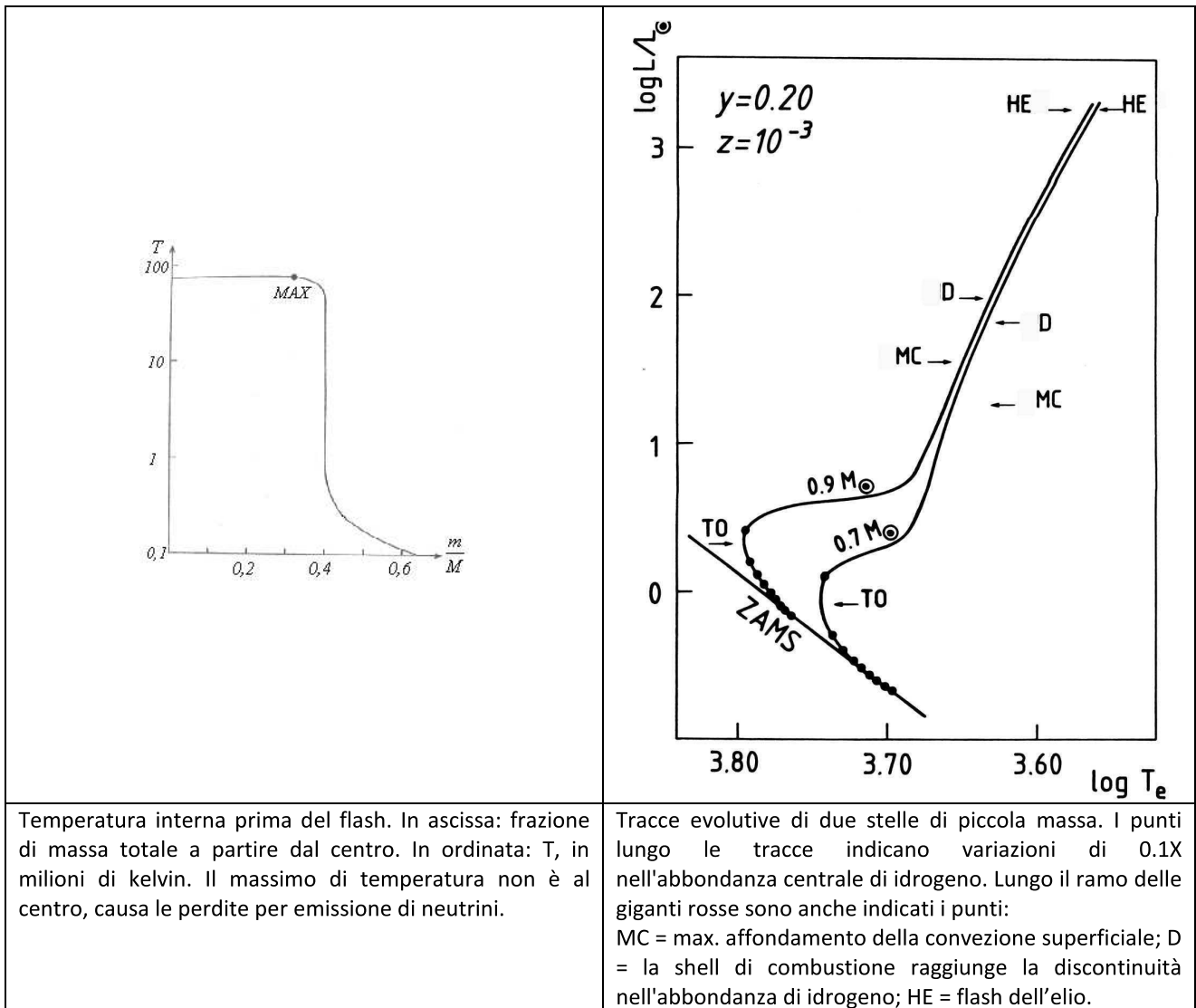
Il ritardo causato dai termoneutrini accresce la massa del nucleo al momento dell'innesco: una variazione di pochi punti percentuali, ma che avrà sensibili conseguenze sulla luminosità delle strutture nella successiva fase di combustione centrale di He.

L'innesco della reazione 3α ha luogo quando il nucleo di elio raggiunge una massa di circa $0,5 M_{\odot}$ (il valore esatto dipende dalla massa e dalla composizione chimica).

L'innesco in una struttura degeneri è potenzialmente devastante: l'energia prodotta innalza la temperatura locale, ma non la pressione (fornita dagli elettroni degeneri). La stella non si espande e l'unico effetto è l'incremento ulteriore di velocità delle reazioni e della produzione energetica.

Si ha così il flash dell'elio, che dalla zona di innesco (leggermente decentrata) si propaga con flash successivi a tutto il nucleo. Il fenomeno prosegue finché non si raggiungono temperature in grado di rimuovere la degenerazione e attivare l'espansione del nucleo.





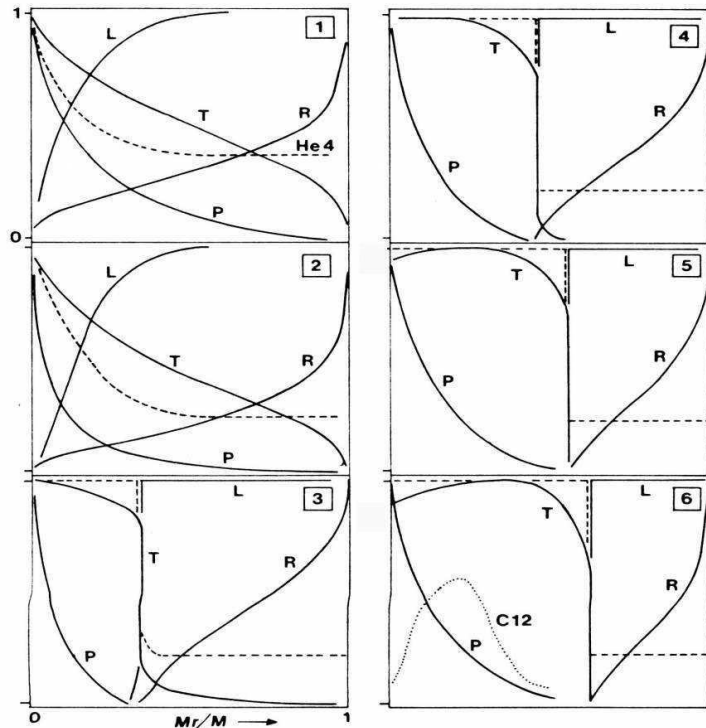
L'innesco in una struttura degenere è potenzialmente devastante: l'energia prodotta innalza la temperatura locale, ma non la pressione (fornita dagli elettroni degeneri). La stella non si espande e l'unico effetto è l'incremento ulteriore di velocità delle reazioni e della produzione energetica.

Si ha così il flash dell'elio, che dalla zona di innesco (leggermente decentrata) si propaga con flash successivi a tutto il nucleo. Il fenomeno prosegue finché non si raggiungono temperature in grado di rimuovere la degenerazione e attivare l'espansione del nucleo.

Non vi sono apprezzabili variazioni della luminosità, perché l'energia prodotta viene totalmente riassorbita nell'espansione degli strati interni e la violenza del fenomeno resta nascosta all'interno della struttura.

La figura della pagina successiva illustra le tipiche variazioni strutturali di una stella di piccola massa dalle fasi finali di sequenza principale sino all'innesco dell'elio. Si noti come, in presenza del nucleo di He, le variabili fisiche P (pressione) e T (temperatura) compiano in pratica la loro intera escursione all'interno del nucleo medesimo. Da ciò la larga insensibilità dell'evoluzione del nucleo alle caratteristiche dell'involuppo, che viene sentito come una trascurabile modifica alle condizioni al bordo del nucleo $P \sim 0$ e $T \sim 0$. Caratteristica di queste fasi è anche l'estrema sottigliezza della shell di combustione dell'idrogeno. Nelle fasi più avanzate l'intera energia finisce con l'essere prodotta in uno strato contenente non più di 10^{-3} - 10^{-4} della massa totale (fase di shell sottile). Per meglio comprendere questa evidenza si può usare un'immagine gastronomica, asserendo che l'idrogeno

viene bruciato “alla piastra”: viene infatti combusto giusto l'idrogeno che viene in contatto con la superficie “arroventata” del nucleo di elio. Nella figura sono riportate le caratteristiche strutturali di una stella di $0,8 M_{\odot}$, $Y = 0,20$, $Z = 10^{-3}$ dalla fine della fase di sequenza principale fino all'innesco del flash dell'He. Nell'ultimo grafico (il 6) si noti il Carbonio prodotto dall'inizio del flash. (Tutte le grandezze sono normalizzate al loro valore massimo).



Il nucleo, pur giungendo a contenere più di metà della massa stellare, rimane sempre di dimensioni molto ridotte, quindi una gigante rossa è formata da un tenue, enorme involucro ricco di H che “galleggia” sul nucleo, che fornisce gravità. Per esempio, a metà del raggio di una gigante rossa la densità è ancora inferiore quella dell'atmosfera terrestre!

Il nucleo cresce col tempo in massa ma non in raggio, che anzi diminuisce leggermente e progressivamente.

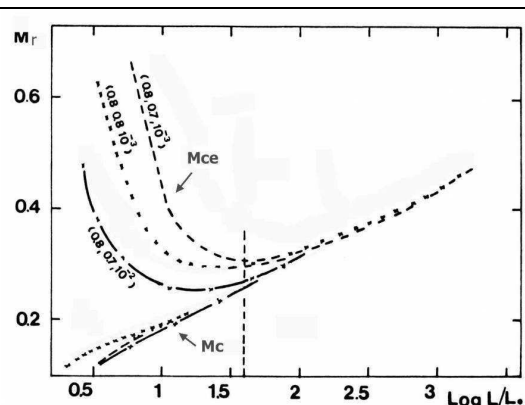
Stelle di massa minore di $0,5 M_{\odot}$ non sono in grado di attivare la combustione dell'elio e terminano la loro evoluzione perdendo massa (viene espulsa gran parte dell'involuppo) e si raffreddando diventando nane bianche di elio.

L'osservazione delle giganti rosse e dei loro “successori” evolutivi consente di osservare astronomicamente il comportamento di un gas di He a temperature dell'ordine di 10^8 K e densità dell'ordine di 1 tonnellata/cm³, ben al di là delle possibilità sperimentali nei laboratori terrestri.

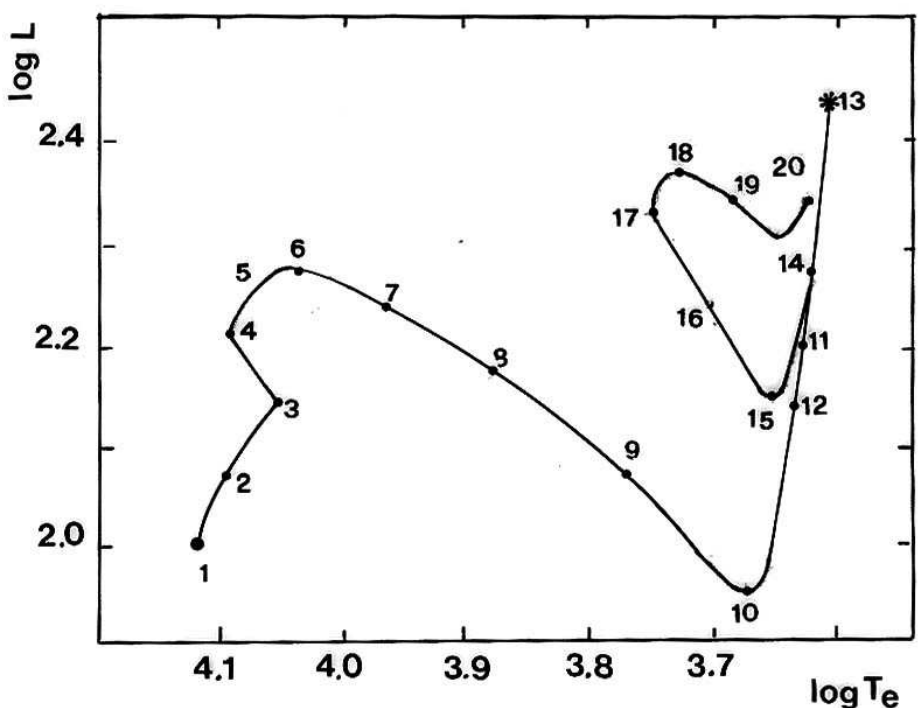
FASE	Tc (10^6 K)	Log ρ_c	log P _c	R(10^6 km)
Sequenza Principale	12,6	1.9	17.4	0,5
Esaurimento H centrale	19,5	2.4	18.0	0,6
Gigante rossa (L = 30 L _⊙)	36,3	5.2	21.3	5
Gigante rossa (L = 100 L _⊙)	45,7	5.5	22.0	16
Gigante rossa (L = 1000 L _⊙)	66,1	5.9	22.5	32
Flash dell'He (L ≈ 2000 L _⊙)	75,9	6.0	22.3	50

L'evoluzione di una stella di piccola massa nella fase di Gigante Rossa presenta ulteriori e rilevanti caratteristiche che meritano di essere esaminate anche perché se ne ricavano ulteriori opportunità di possibili riscontri osservativi. La figura mostra l'evoluzione della massa del nucleo di elio e della profondità dell'involuppo convettivo in funzione della luminosità della struttura. I dati in figura mostrano come per luminosità maggiori o dell'ordine di $\log L \sim 1,5$ si manifesti una correlazione tra luminosità e massa del nucleo di elio, largamente indipendente dai parametri evolutivi della struttura. La massa del nucleo di elio fissa quindi con buona approssimazione la luminosità, mentre l'involuppo governa la temperatura efficace (il raggio) della struttura.

La stessa figura mostra come la convezione dell'involuppo raggiunga alla sua massima estensione una frazione di massa $M_r \sim 0,3$, interessando dunque strati parzialmente elaborati nuclearmente nel corso della combustione centrale di idrogeno che, a causa della bassa dipendenza dalla temperatura della catena p-p, ha interessato una porzione relativamente vasta della struttura. Ne segue che il rimescolamento convettivo arricchirà la superficie della stella con elio prodotto dalle combustioni, producendo nel contempo una discontinuità nelle abbondanze di elio e di idrogeno in corrispondenza del limite inferiore raggiunto dalla convezione.



Evoluzione temporale della massa del nucleo di He (Mc) e della profondità dell'involuppo convettivo (Mce) in funzione della luminosità della struttura per alcuni modelli di Gigante Rossa. I numeri tra parentesi riportano, nell'ordine, la massa, il contenuto originario di elio e la metallicità dei modelli.



Traccia evolutiva di una stella di $3,0 M_{\odot}$ di popolazione I, tipica di stelle al limite del flash dell'elio. L'asterisco indica la posizione dell'innesco dell'elio. L'evoluzione è seguita sino all'esaurimento dell'elio al centro ed all'instaurarsi della combustione a doppia shell. I tempi evolutivi delle varie fasi (in 10^8 anni) sono riportati in tabella. La luminosità L è in luminosità solari.

Punto	t	Punto	t	Punto	t	Punto	t
2	1,39	7	2,47	12	2,507	17	3,07
3	2,24	8	2,479	13	2,53	18	3,19
4	2,34	9	2,484	14	2,56	19	3,23
5	2,40	10	2,489	15	2,78		
6	2,44	11	2,498	16	2,94		

Per la prima volta nella sua storia la stella subisce quindi un “dredge up”, cioè il trasporto negli strati atmosferici di prodotti delle combustioni interne. Tale dredge up, oltre che a portare in superficie elio, altererà anche l'abbondanza superficiale di elementi secondari che, se pur coinvolti in reazioni nucleari scarsamente efficienti ed energeticamente trascurabili, hanno avuto il tempo nella ormai lunga storia della stella di modificare lentamente la loro abbondanza originaria. Ci si attende così che nelle atmosfere di giganti di piccola massa si riduca l'abbondanza di ^{12}C , orientativamente di circa il 30%, e che si raddoppi ^{14}N come conseguenza di una sia pur modesta efficienza delle reazioni CNO in una vasta regione interna. Lo sviluppo del dredge up è quindi un segnale di evoluzione interna che raggiunge la superficie della stella dove può essere rivelato ed analizzato spettroscopicamente.

11.8.3 – Dal flash dell’Elio al ramo orizzontale

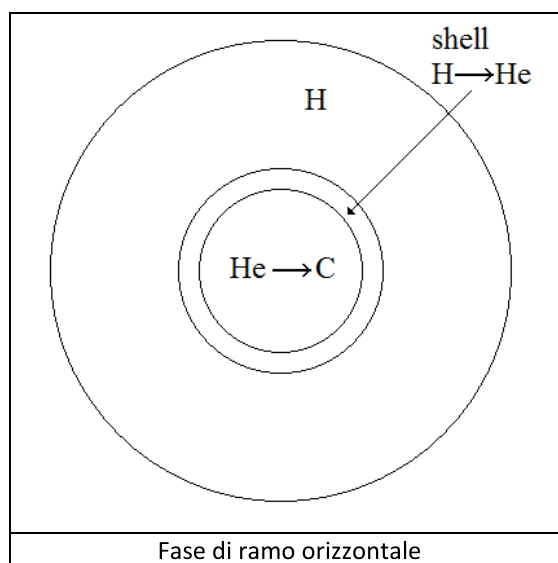
Per le strutture che innescano l’He in combustione centrale si può dire che col crescere della massa il nucleo è sempre meno governato da fenomeni di degenerazione elettronica: stelle con massa circa maggiore di 2,3 masse solari giungono a innescare l’He “pacificamente”, in un nucleo non degenere. Indipendentemente dalle modalità di innesco, le fasi di combustione di He sono per molti versi analoghe a quelle di combustione (centrale e a shell) dell’H: l’elevata dipendenza dell’efficienza della reazione 3α dalla temperatura induce la formazione di un nuovo nucleo convettivo (come per il CNO).

Le stelle, che avevano raggiunto la loro traccia di Hayashi, reagiscono alla nuova sorgente centrale di energia ritornando verso maggiori temperature superficiali, cioè verso sinistra nel diagramma HR.

Le stelle in questa fase combinano una combustione centrale (He) con una a shell (H). Ne risulta una diminuzione di luminosità, più marcata in stelle di piccola massa che subiscono il flash dell'elio. Da valori superiori a $1000 L_{\odot}$ (tipici del flash), esse discendono a meno di $100 L_{\odot}$, collocandosi nella fase di ramo orizzontale.

Si può dire che la presenza di una relazione (massa del nucleo degenere) – (luminosità) spinge la stella verso luminosità abnormi. Una volta rimossa la degenerazione, la struttura si riassetta su luminosità più “naturalì”.

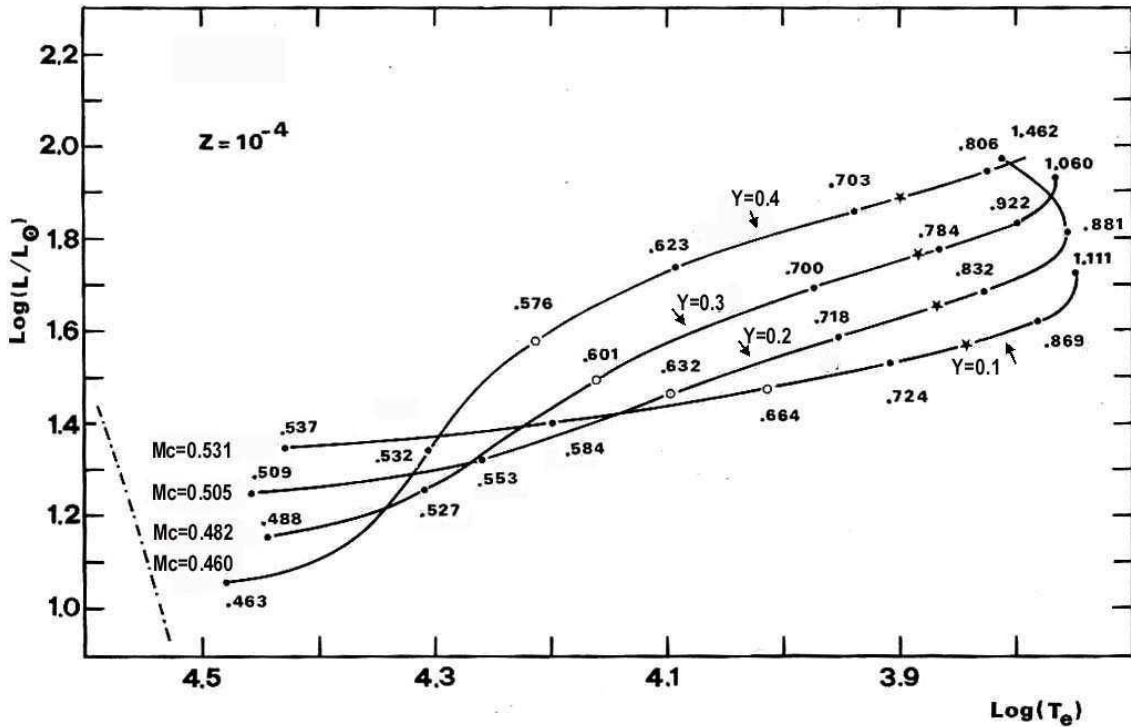
I punti del diagramma HR dove ci si attende che possano andare a collocarsi le stelle all'inizio della combustione quiescente di elio centrale prendono il nome di Rami Orizzontali di Età Zero ($ZAHB = \text{Zero Age Horizontal Branch}$).



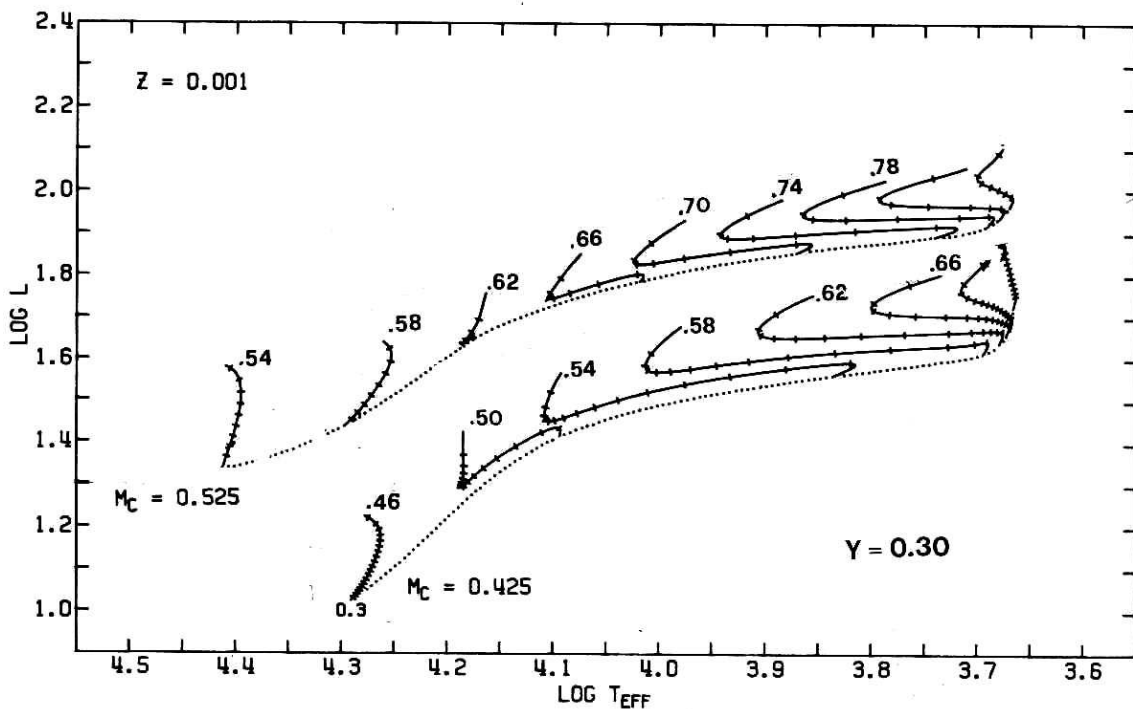
La figura della pagina successiva mostra una serie di ZAHB teoriche evolutive calcolate assumendo una metallicità $Z=10^{-4}$ per diversi valori dell'elio originario Y. Dai dati in figura si riscontra innanzitutto che la massa del nucleo di elio al flash diminuisce all'aumentare del contenuto originario di elio. Ciò è in buon accordo con la regola generale che vuole all'aumentare di Y (del peso molecolare) strutture più calde (e più luminose) che sfuggono quindi prima al controllo della degenerazione.

Alcuni ammassi globulari galattici hanno rami orizzontali con estensione in temperatura molto maggiore di quella ottenibile dalle tracce evolutive susseguenti al flash dell’He; esistono stelle

molto più blu (blue stragglers) di quelle previste dai modelli. L'evidenza osservativa dalle giganti rosse (dalle righe di emissione) mostra come in tale fase operino processi di perdita di massa: è questo il parametro che regola la distribuzione delle stelle lungo il ramo orizzontale. A parità di massa totale, più massiccio è l'involuppo e più rossa appare la stella.



Sequenze teoriche di età zero di ramo orizzontale (ZAHB), valutate per diverse abbondanze iniziali di He, assumendo $Z = 10^{-4}$ ed un'età di 10^{10} anni. Lungo le sequenze sono riportati le masse totali dei vari modelli e le masse evolutive dei nuclei di He (in masse solari).

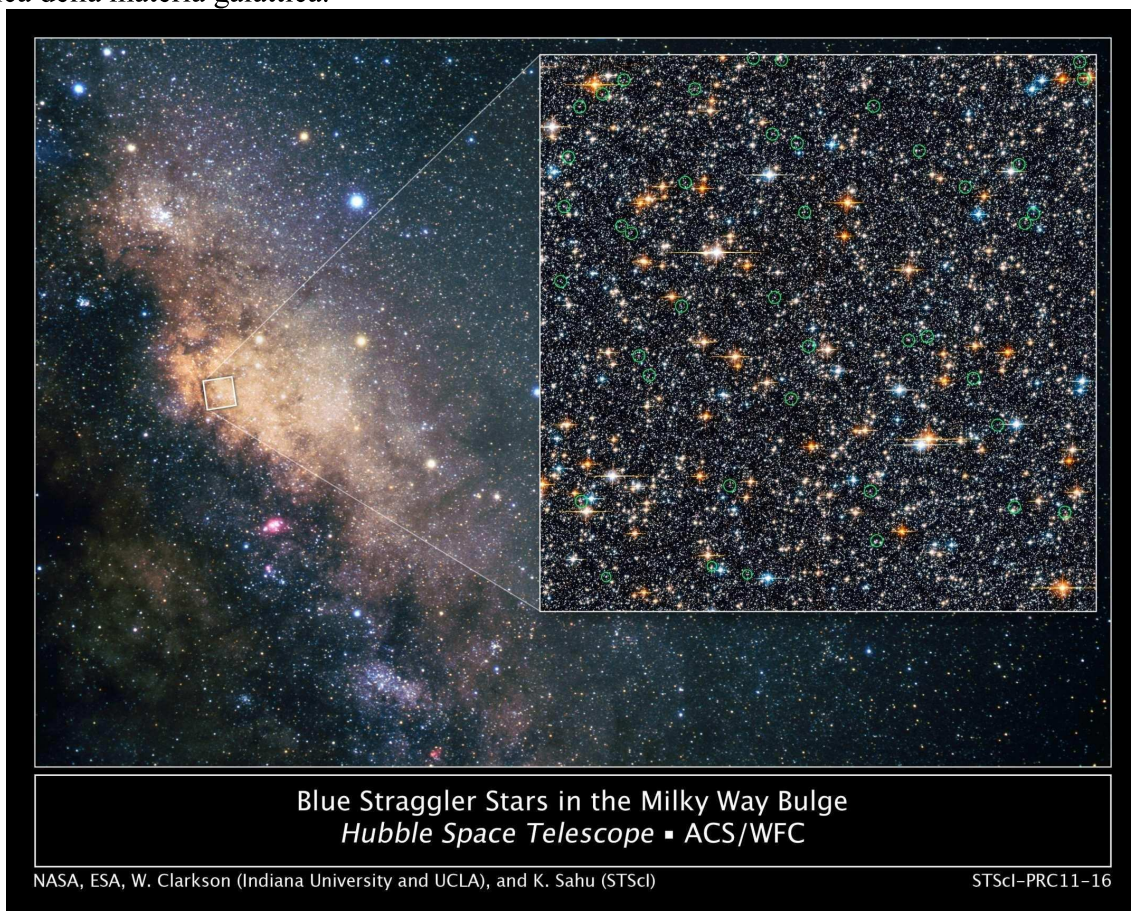


Tracce evolutive nel diagramma HR di strutture in fase di combustione di elio per due diverse assunzioni sulla massa del nucleo di He M_c e al variare della massa totale. Le linee a punti mostrano, per ogni M_c , la collocazione dei modelli iniziali

11.8.4 – Effetto della metallicità: la popolazione zero

Il quadro generale delle fasi di combustione dell'idrogeno finora visto cambia sensibilmente quando si considerano strutture stellari estremamente povere o del tutto prive di metalli.

Come detto nel paragrafo 10.3, la materia emersa dal Big-Bang era priva di elementi pesanti e la prima generazione stellare doveva necessariamente essere composta da stelle di puro idrogeno-elio. I processi di arricchimento hanno infine portato la stragrande maggioranza delle stelle della nostra galassia a possedere metallicità maggiore di circa $Z = 10^{-4}$, ma stelle prive o poverissime di metalli devono popolare ancora oggi l'alone galattico, dove si sono osservate sia pur rare stelle con metallicità sino a $Z = 10^{-7}$. Lo studio di queste strutture è di grande rilevanza se si vogliono ricostruire le caratteristiche evolutive delle popolazioni stellari che hanno dato inizio all'evoluzione chimica della materia galattica.



I metalli influiscono sulle strutture stellari soprattutto attraverso i coefficienti di opacità e di generazione di energia. Al diminuire di Z le variazioni di opacità possono essere sensibili ma non drammatiche, restando attivi tutti i meccanismi di opacità per H e He. L'efficienza del CNO decresce, ma le strutture reagiscono incrementando le temperatura centrali per soddisfare il fabbisogno energetico: un aumento del 5% raddoppia l'efficienza del CNO!

Il meccanismo però si inceppa quando $Z = 0$. La catena pp resta l'unica sorgente di energia e le stelle devono contrarsi fino a raggiungere temperature tali da soddisfare tutte le loro necessità energetiche. Le conseguenze possono essere drammatiche: al crescere della massa l'aumento delle temperature centrali non è più bilanciato dall'innesco del CNO e può raggiungere per $M \approx 15M_{\odot}$ i 10^8 K, soglia di innesco per l'He.

La combustione fornisce carbonio, che innesca il ciclo CNO, la cui efficienza riduce la temperatura; la produzione di carbonio cessa quando la temperatura ritorna sotto i 10^8 K. La conseguenza finale

è che, all'ulteriore crescere della massa, la temperatura tende a stabilizzarsi attorno ai 10^8 K mentre aumenta la quantità di carbonio messo a disposizione delle regioni centrali convettive. Il fenomeno è generale e caratterizza l'evoluzione in fase di combustione di H delle stelle con $Z = 0$: quando la temperatura tende a salire oltre la soglia di innesco della reazione 3α interviene la produzione di carbonio e stabilizza la temperatura. Comportamenti simili sono attesi anche in strutture in cui C, N ed O siano molto scarsi.

11.8.5 – L'esaurimento dell'Elio, secondo rimescolamento e ramo asintotico (AGB)

Ogni stella che sia riuscita ad attivare la reazione 3α innesca, all'esaurimento dell'Elio centrale, la stessa reazione nella shell ricca di Elio, esternamente a un nucleo ormai composto di Carbonio e Ossigeno: la stella tende nuovamente a ricollocarsi lungo la sua traccia di Hayashi.

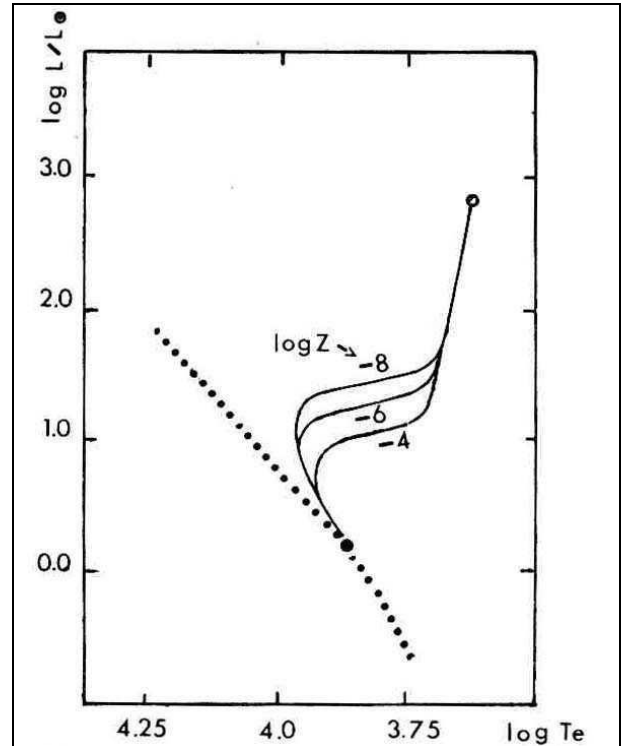
In questa fase si manifesta una ulteriore biforcazione nella storia evolutiva. Al termine della combustione dell'Elio tutte le stelle di piccola massa sviluppano un nucleo di Carbonio e Ossigeno fortemente degenere.

Strutture di massa maggiore, tra $2,5 M_{\odot}$ e $9 M_{\odot}$, hanno innescato l'Elio in modo quiescente al centro di un nucleo non degenere, ma al termine della combustione dell'Elio sviluppano anche esse nuclei di Carbonio e Ossigeno degeneri. Designate con il termine di masse intermedie, queste stelle per la maggior parte condividono con le piccole masse il destino comune di nana bianca.

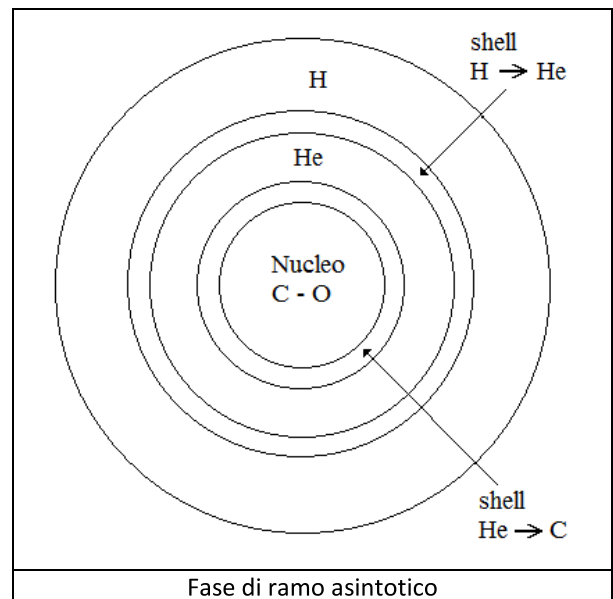
Caratteristico di queste masse è il secondo dredge up: la stella entra in una fase di combustione a doppia shell, la convezione esterna affonda e finisce col raggiungere, intaccandolo più o meno profondamente, il nucleo trasportando in superficie i prodotti delle precedenti combustioni.

Masse ancora superiori, le "grandi masse" (maggiori di circa $9 M_{\odot}$), innescheranno invece la combustione del carbonio in un nucleo di Carbonio e Ossigeno non degenere, giungendo a completare l'intera catena di reazioni sino alla fotodisintegrazione del Ferro.

Si giunge così ad una classificazione basata sulle caratteristiche evolutive delle strutture, che si sovrappone e sostituisce la suddivisione in strutture di alta/bassa sequenza, il cui valore resta limitato alla fase di sequenza principale e a quelle immediatamente successive.



Effetto di metallicità sull'evoluzione fuori sequenza di stelle di piccola massa ($M \approx M_{\odot}$). Si noti l'aumento della luminosità al diminuire di Z.



Fase di ramo asintotico

Esaurito l'Elío al centro della struttura, le stelle piccole/intermedie innescano nella zona contigua la shell che trasforma l'Elío in Carbonio e Ossigeno. Il nucleo di Carbonio e Ossigeno è inerte e degenerare, aumenta progressivamente di massa contraendosi, mentre la stella ritorna sulla traccia di Hayashi.

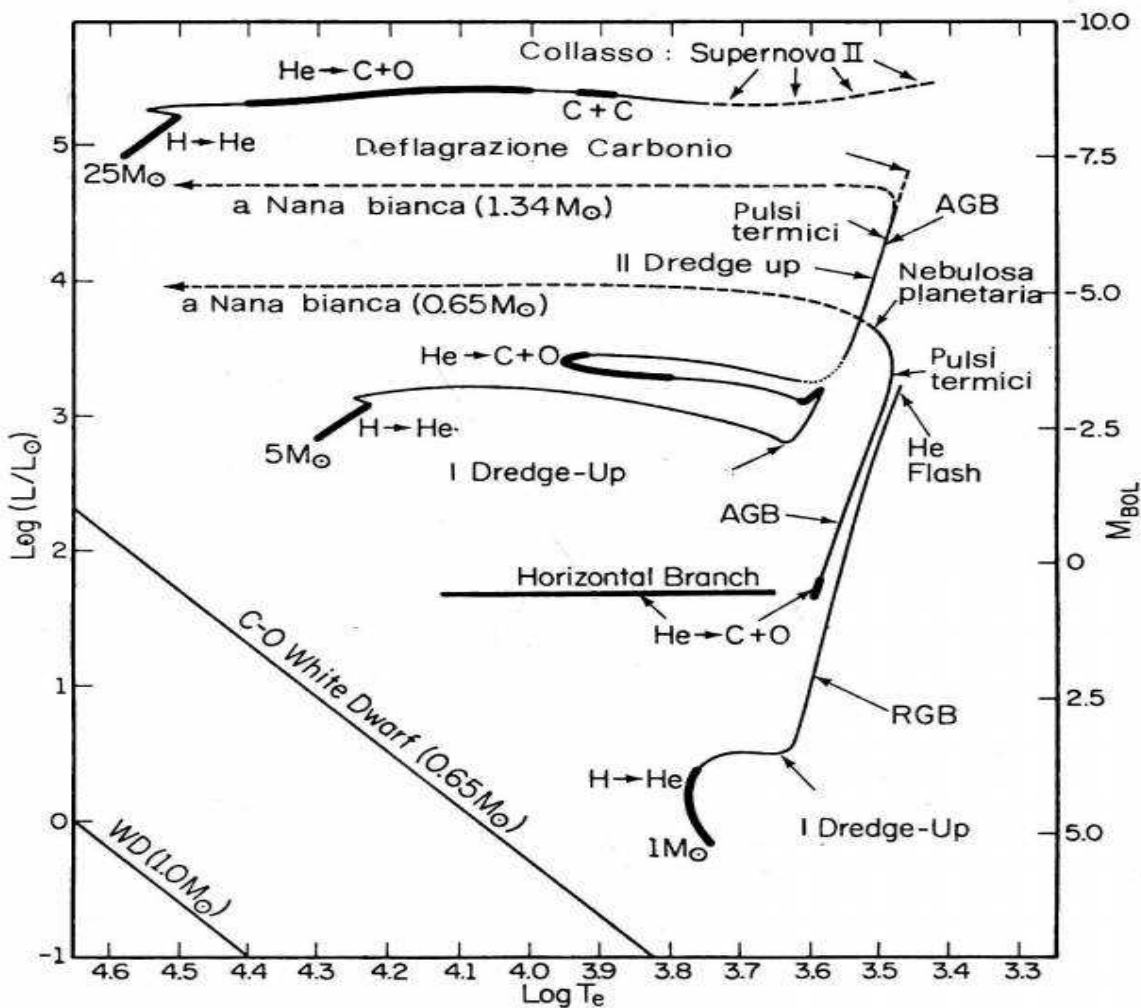
Questa seconda ascesa lungo il ramo delle giganti prende il nome di fase di **ramo asintotico** (AGB - Asymptotic Giant Branch). La stella cerca di innescare il Carbonio del nucleo, ma le perdite di energia attraverso i neutrini sono troppe e la degenerazione elettronica non consente al nucleo di raggiungere la temperatura necessaria all'accensione ($8 \cdot 10^8$ K).

La luminosità raggiunge il massimo assoluto nella vita della stella (per il Sole si pensa a più di 3000 volte il valore attuale).

Le perdite di massa diventano fortissime: la struttura si libera di gran parte dell'involuppo.

La stella diventa sempre più blu spostandosi a sinistra nel diagramma HR e il nucleo di Carbonio e Ossigeno appare brillantissimo in mezzo alla nube di materiale espulso dall'involuppo. Varie fasi espulsive possono susseguirsi nel tempo, creando forme sempre diverse: ai nostri occhi appare una **nebulosa planetaria**. Come spesso accade in astronomia, il nome non c'entra nulla con la vera natura dell'oggetto. È stato dato perché nei telescopi con cui sono stati osservati i primi di questi oggetti, essi assomigliavano ai pianeti.

Non essendo più attive le reazioni nucleari, la struttura stellare è costretta a irradiare per contrazione gravitazionale. Progressivamente la stella si sposta, con tempi scala sempre più lunghi, verso la zona delle nane bianche di Carbonio, Ossigeno, Neon (in basso a sinistra nel diagramma HR).

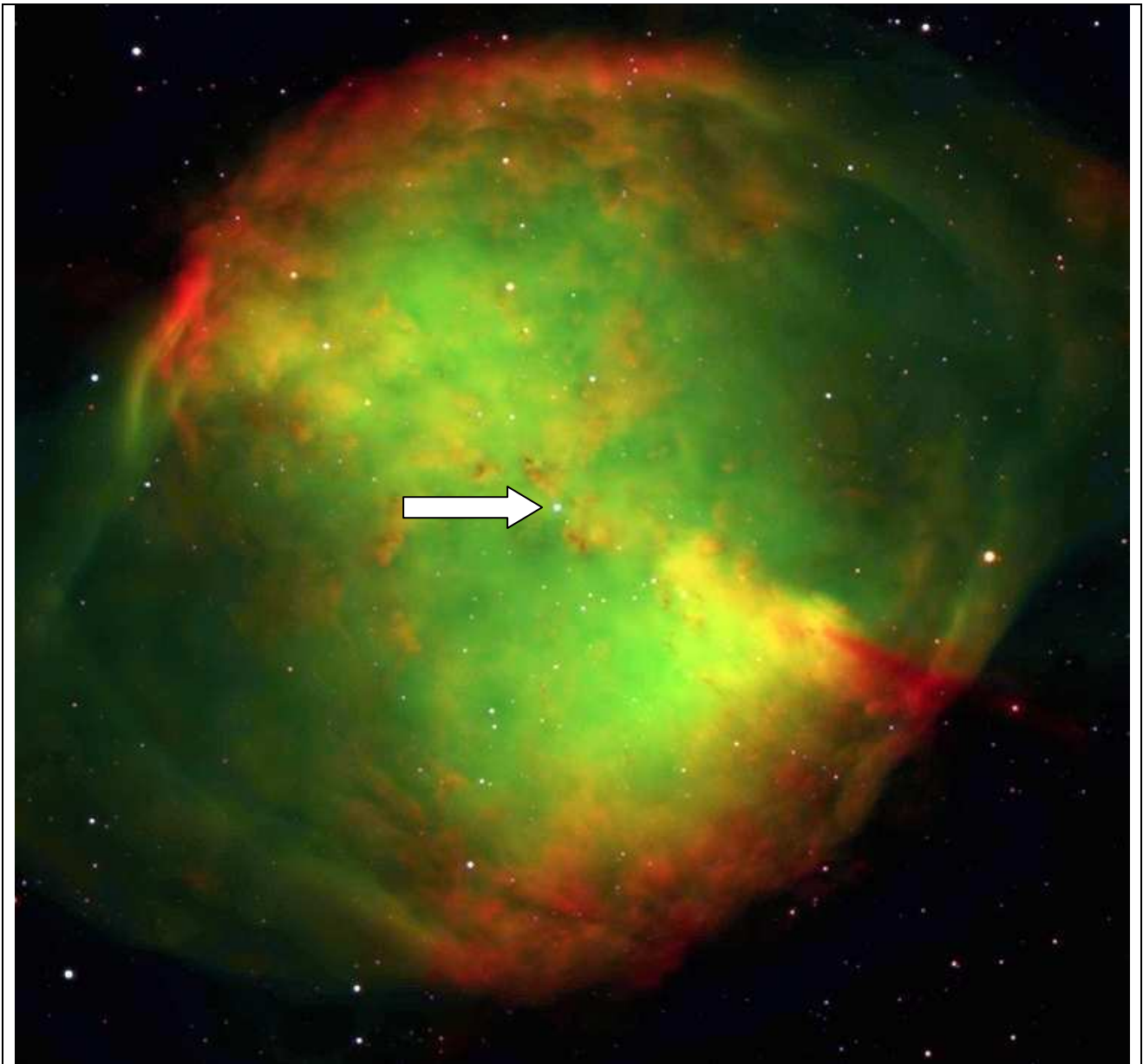


Il grafico riassume l'evoluzione di stelle di $1 M_{\odot}$, $5 M_{\odot}$ e $25 M_{\odot}$

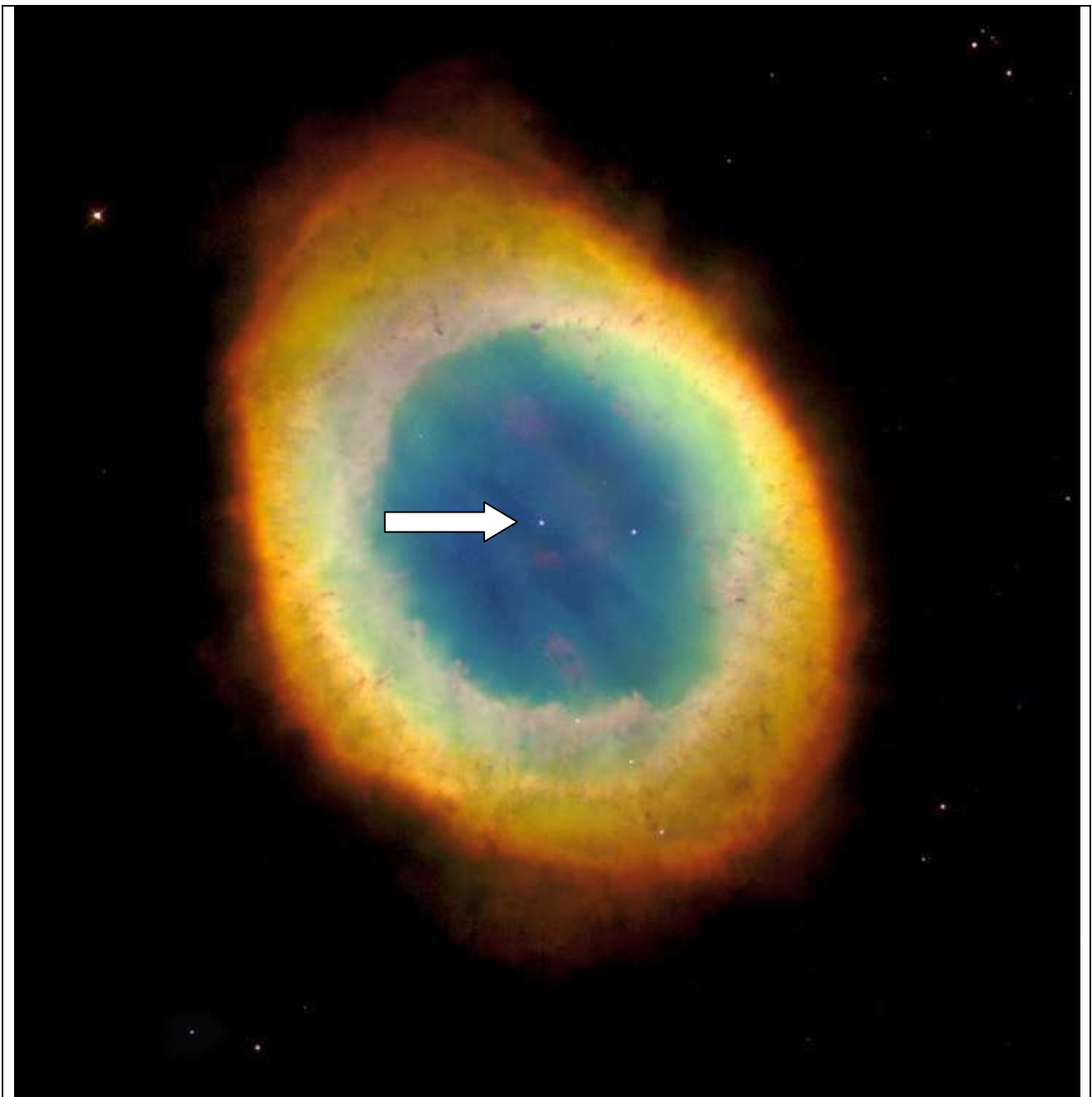
11.8.6 – Nane bianche

Le **nane bianche** costituiscono lo stadio finale per le stelle di massa piccola/intermedia, dopo che le perdite nelle fasi evolutive avanzate hanno portato la struttura sotto il limite teorico di circa $1,44 M_{\odot}$ (limite di Chandrasekhar).

Sono oggetti di enorme densità, anche un milione di volte quella dell'acqua; un cucchiaino peserebbe sulla Terra una tonnellata. Le dimensioni sono quelle di un pianeta di tipo terrestre: intorno ai 10000 km di diametro.



La nebulosa planetaria Manubrio (nota anche come Nebulosa Dumbbell o M27), dista circa 1360 anni luce ed ha dimensioni angolari $8' \times 5,6'$ (che alla distanza data corrisponde a circa $3,2 \times 2,2$ anni luce). Si stima un'età di 9800 anni. Nel 1992 è stato determinato che il tasso di espansione sul piano del cielo di questa nebulosa non è superiore ai $2,3'$ al secolo: in conseguenza a ciò, può essere determinato un limite di età massima che si aggira sui 14.600 anni. La stella centrale (indicata dalla freccia) è una nana bianca con un raggio di $0,055 \pm 0,02 R_{\odot}$, superiore dunque ad ogni altra nana bianca conosciuta; la massa della stella centrale è stata stimata come pari a $0,56 \pm 0,01 M_{\odot}$.



La nebulosa Anello (nota anche come M 57 o NGC 6720) è una nebulosa planetaria visibile nella costellazione della Lira; dista circa 2300 anni luce dalla Terra e ha un diametro di circa due anni luce. La forma ad anello è in realtà un effetto prospettico poiché dalla Terra possiamo osservarla da uno dei poli. Se potessimo osservarla dal piano equatoriale avrebbe l'aspetto della Nebulosa Manubrio (M27). Nella foto del Telescopio Spaziale Hubble, i diversi colori mostrano le differenti temperature dei gas espulsi dalla stella morente. Dal blu centrale dei gas caldi vicino alla nana bianca, ai più freddi gas rossi delle regioni periferiche. In un periodo di 50 anni, il tasso di espansione è stato di circa mezzo secondo d'arco, che corrisponde alle osservazioni spettroscopiche di 20–30 km/s. M57 è illuminata da una nana bianca centrale la cui massa è circa $1,2 M_{\odot}$. La stella centrale è formata soprattutto da carbonio e ossigeno, con un sottile involucro esterno composto da elementi più leggeri. La sua massa è di circa 0,61 - 0,62 masse solari, con una temperatura superficiale di circa 125.000 K. Attualmente la stella è 200 volte più luminosa del Sole, anche se la sua magnitudine apparente è di 15,75.

La temperatura superficiale delle nane bianche sinora scoperte è compresa entro un campo di valori che va dagli oltre 150000 K fino a poco meno di 4000 K; tuttavia, la maggior parte di questa possiede una temperatura superficiale compresa fra 8000 e 40000 K. Per la legge di Stefan-

Boltzmann, un simile intervallo di temperatura, corrisponde ad una luminosità che oscilla tra 10^2 e meno di $10^{-5} L_{\odot}$. In accordo con la legge di Wien, il picco di emissione radiativa di un dato oggetto dipende dalla sua temperatura superficiale.

A meno che la nana bianca non si trovi in condizioni particolari (come l'accrescimento di materia da una stella compagna o da un'altra sorgente), la grande quantità di energia termica irradiata dall'astro deriva dal calore accumulato nella stella originaria quando erano attivi i processi di fusione nucleare. Poiché questi oggetti hanno un'area superficiale estremamente piccola, il tempo necessario ad irradiare e disperdere il calore è molto lungo. Il processo di raffreddamento della nana bianca comporta, oltre ad una ovvia riduzione della temperatura superficiale, una diminuzione della quantità di radiazioni emesse e dunque della luminosità; dato che tali oggetti non hanno altri modi per disperdere l'energia al di fuori dell'irraggiamento, ne consegue che il raffreddamento sia un processo che rallenta col tempo.

Per fare un esempio, una nana C-O di 0,59 masse solari, con un'atmosfera di idrogeno, si raffredda fino a raggiungere una temperatura superficiale di 7140 K in un miliardo e mezzo di anni. Per perdere ulteriori 500 K e raggiungere i 6640 K occorrerebbero circa 0,3 miliardi di anni, mentre per perdere successivamente altri 500 K di temperatura sarebbe necessario un tempo variabile fra 0,4 e 1,1 miliardi di anni; quindi, quanto più la temperatura dell'oggetto è alta, tanto più è alta la velocità di dissipazione dell'energia termica. Questa tendenza sembra arrestarsi quando si raggiungono temperature piuttosto basse: infatti, sono note solo pochissime nane bianche con una temperatura superficiale al di sotto dei 4000 K. La ragione per cui non si osservano nane bianche a temperature inferiori risiede nell'età dell'universo, che è finita: infatti non c'è stato sinora tempo a sufficienza per far sì che le più antiche nane bianche si potessero raffreddare ulteriormente.

Un indice, noto come funzione di luminosità delle nane bianche, sfrutta il tasso di raffreddamento di questi oggetti, che può essere utilizzato per determinare il tempo in cui le stelle si iniziarono a formare in una determinata regione della Galassia; tale mezzo ha permesso di stimare l'età del disco della nostra galassia in circa 8 miliardi di anni.

Il processo di raffreddamento di una nana bianca prosegue, in ottemperanza al secondo principio della termodinamica, sino al raggiungimento dell'equilibrio termico con la radiazione cosmica di fondo, diventando quella che di fatto è nota come nana nera; tuttavia, dato il lungo tempo previsto perché una nana bianca giunga a questa fase, si pensa che non esistano ancora delle nane nere.



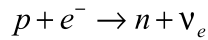
Confronto delle dimensioni di una nana bianca con il Sole e di una stella di neutroni con una nana bianca

11.8.7 – Evoluzione per stelle di grande massa $M > 9M_{\odot}$.

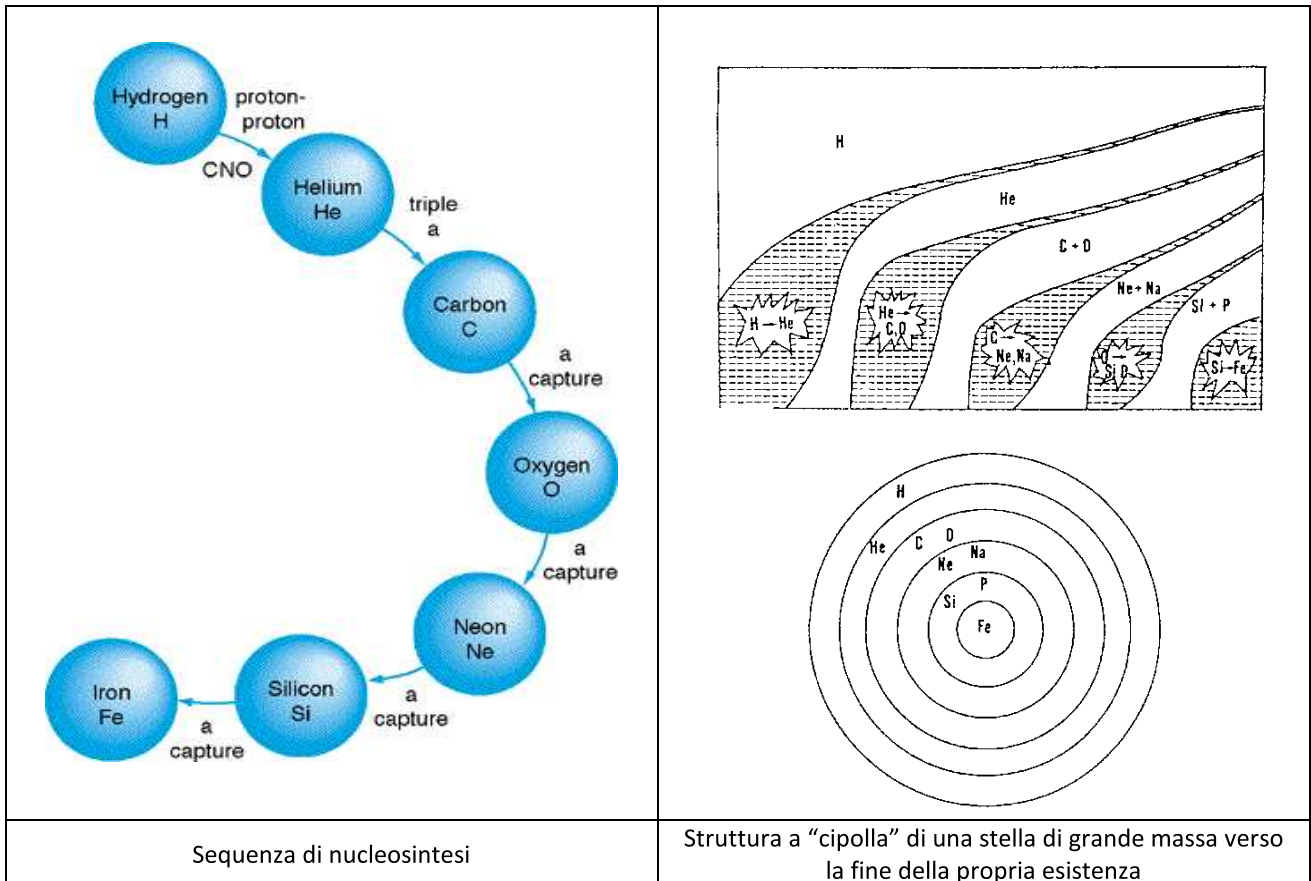
Le temperature centrali di queste stelle sono molto alte e il carbonio viene innescato senza problemi. L'evoluzione successiva è sempre più rapida: la stella arriva a formare una serie di strati chimicamente differenziati (struttura a cipolla). Vengono sintetizzati gli elementi fino al ferro (con la fusione nucleare) e oltre (attraverso processi nucleari più complicati come la neutronizzazione).

Le perdite di massa possono diventare enormi.

Quando la stella ha accumulato abbastanza ferro nel suo nucleo le reazioni termonucleari si interrompono e inizia il collasso. Dapprima la contrazione è lenta e innalza gradualmente la temperatura, finché diventa possibile la cattura elettronica



Ossia una coppia protone - elettrone si trasforma in una coppia neutrone - neutrino. I neutrini lasciano la stella portando via energia e ciò fa accelerare il collasso; la temperatura sale oltre il limite ($T \sim 5 \times 10^9$ K) per cui il ferro comincia a decomporsi (fotodisintegrazione). La reazione è endotermica e assorbe ulteriormente energia dal nucleo centrale della stella e quindi il collasso accelera in modo catastrofico.



L'effetto finale di questi processi è la trasformazione quasi totale degli elettroni e dei protoni in neutroni e neutrini e, tramite un meccanismo di "rimbalzo", l'esplosione del resto della stella.

Durante questa fase si formano molto rapidamente gli elementi più pesanti del ferro (fino all'uranio e oltre) che andranno ad arricchire il gas interstellare.

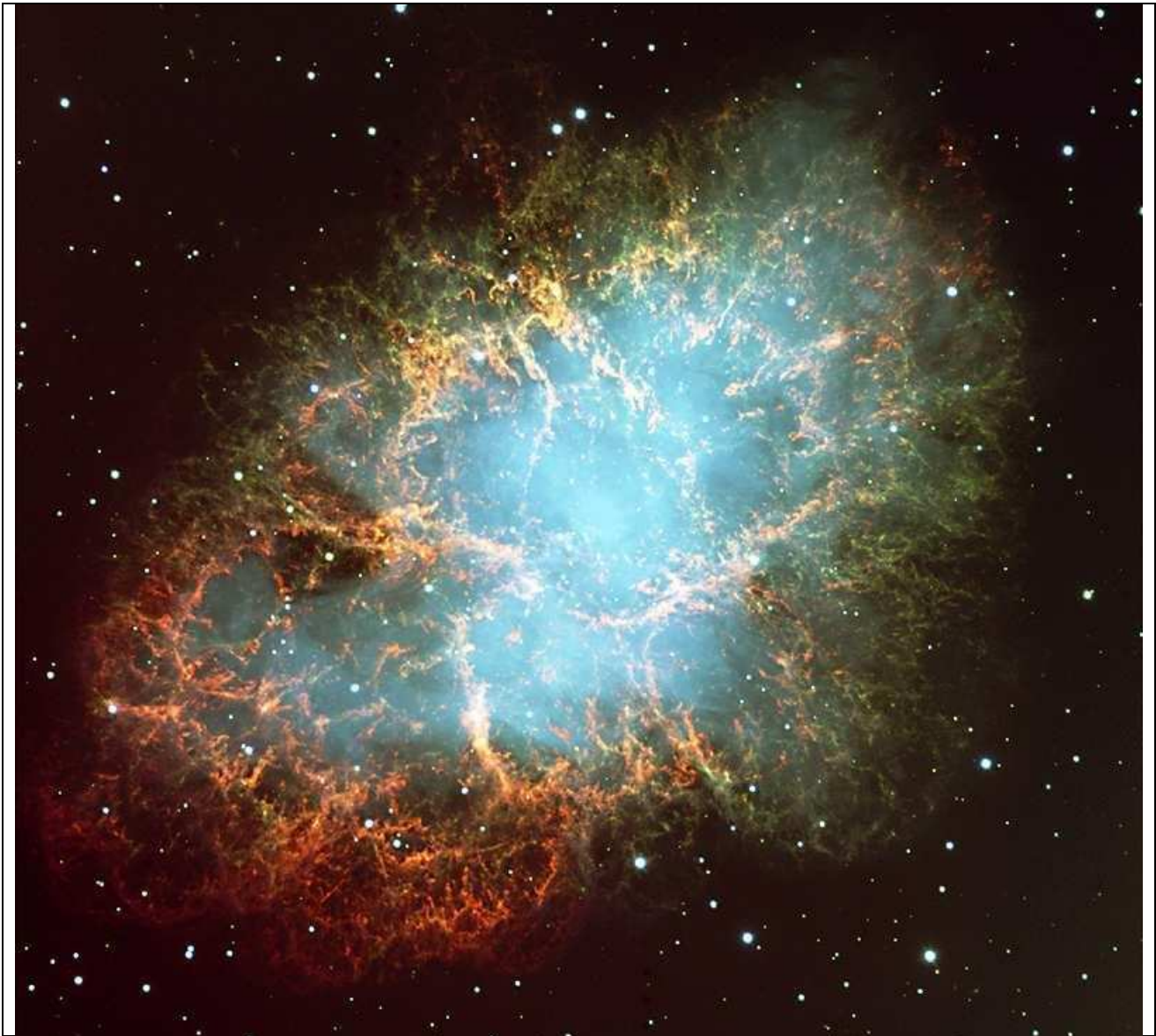
Questo tipo di esplosione viene chiamato supernova di tipo II.

Una supernova lascia dietro di sé una nebulosa in espansione: il nucleo collassato della stella, a seconda della massa che rimane, può essere una stella di neutroni o un buco nero.

Una delle nebulose, resto di esplosione di supernova, più nota è la Nebulosa del Granchio. La nebulosa, oggi vasta più di sei anni luce, è formata dai gas in espansione espulsi durante l'esplosione della Supernova 1054; i gas si stanno espandendo alla velocità di 1500 km/s e possiedono una massa totale di circa $(4,6 \pm 1,8) M_{\odot}$. La supernova che la produsse fu osservata per la prima volta il 4 luglio 1054 e venne registrata dagli astronomi cinesi e arabi dell'epoca; la sua

luminosità era tale che la magnitudine apparente dell'evento fu compresa tra -7 e $-4,5$, tale da renderla visibile ad occhio nudo durante il giorno, sorpassando la luminosità apparente di Venere. La Nebulosa Granchio si trova a circa 6500 al dal sistema solare.

Al centro della Nebulosa Granchio sono visibili due deboli stelle, la più meridionale delle quali è la responsabile dell'esistenza stessa della nebulosa; fu identificata come tale nel 1942. Successivamente si scoprì che l'oggetto è una forte sorgente di onde radio (1949) e raggi X (1963), nonché una delle fonti più potenti di raggi gamma del cielo (1967); infine, nel 1968 si scoprì che la stella emette la sua radiazione con rapide pulsazioni, il che la rende una delle prime pulsar ad essere scoperte.



La Nebulosa del Granchio (nota anche come M1) è un resto di supernova visibile nella costellazione del Toro.

Le pulsar sono infatti potenti sorgenti di radiazione elettromagnetica, emessa in pulsazioni brevi ed estremamente regolari molte volte al secondo; quando furono scoperte, nel 1967, erano uno dei più grandi misteri dell'astronomia e il gruppo di scienziati che per primo le scoprirono considerarono persino la possibilità che si trattasse di segnali provenienti da una civiltà avanzata. Tuttavia, la scoperta di un oggetto di questa classe all'interno della Nebulosa Granchio era una prova

consistente che questo tipo di oggetti esotici si formassero a seguito di un'esplosione di supernova. Oggi sappiamo che si tratta di stelle costituite da neutroni che ruotano sul proprio asse a grande velocità, il cui campo magnetico concentra le loro radiazioni in stretti fasci.

L'oggetto, denominato Pulsar del Granchio, possiede un diametro di circa 28-30 km ed emette le sue pulsazioni ogni 33 ms; le pulsazioni sono emesse a tutte le lunghezze d'onda dello spettro elettromagnetico, dalle onde radio ai raggi X. Come tutte le pulsar isolate, il suo periodo rallenta molto gradualmente. L'energia rilasciata man mano che la pulsar rallenta è notevolissima e potenzia le emissioni della radiazione di sincrotrone della nebulosa, che ha una luminosità totale di circa 75000 volte quella del Sole.

La forte emissione di energia della pulsar crea un'insolita regione dinamica al centro della nebulosa; mentre la gran parte degli oggetti astronomici evolvono talmente lentamente che i cambiamenti sono apprezzabili solo nella scala di diversi anni, le parti più interne della Nebulosa del Granchio mostrano dei cambiamenti nell'ordine di appena pochi giorni. La struttura più dinamica delle regioni centrali della nebulosa è il punto dove il vento equatoriale della pulsar colpisce la massa della nebulosa stessa, formando un fronte d'urto la cui forma e posizione si modifica rapidamente.

I modelli teorici sulle esplosioni delle supernovae suggeriscono che la stella progenitrice della Nebulosa Granchio doveva possedere una massa compresa fra 9-11 e 20-30 M_{\odot} .

Un notevole problema nello studio della Nebulosa del Granchio è che la massa combinata della nebulosa e della pulsar è molto inferiore a quella ipotizzata per la stella progenitrice, e la questione su quale sia stato il destino di questa "massa mancante" è ancora senza soluzione. Stime sulla massa della nebulosa sono state fatte misurando la quantità totale di luce emessa e calcolando quella richiesta, data la temperatura misurata e la densità della nebulosa; le stime vanno da un minimo di 1 ad un massimo di 5 masse solari, con un valore di 2-3 masse solari accettato dalla comunità scientifica. La massa della stella di neutroni è stimata fra 1,4 e 2 M_{\odot} .

La teoria predominante che spiega la massa mancante della nebulosa afferma che la gran parte della massa originaria della stella progenitrice sia stata spazzata via prima dell'esplosione di supernova da un forte vento stellare; tuttavia, questo vento avrebbe creato una struttura a guscio tutt'attorno alla nebulosa. Sebbene siano stati fatti dei tentativi di osservare questo guscio a diverse lunghezze d'onda, nulla è stato finora trovato.

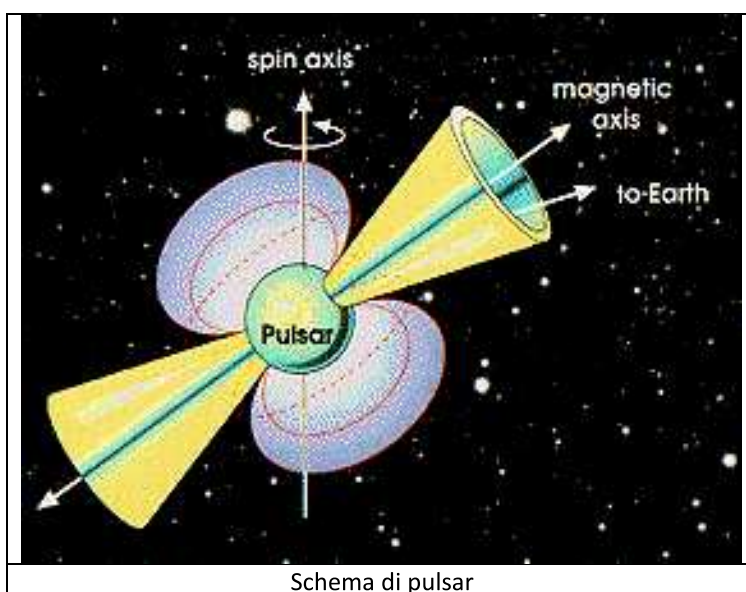
11.8.8 – Stelle di neutroni e pulsar.

Le stelle di neutroni sono il resto di una stella di grande massa la cui densità raggiunge anche valori pari a 10^{13} volte quella dell'acqua; un cucchiaino di questa materia ultradensa peserebbe sulla Terra 10 milioni di tonnellate.

Le dimensioni si riducono a una sfera di circa 20 km di diametro, che però racchiude fino a circa 3 masse solari.

Le stelle hanno una loro rotazione: per la conservazione del momento angolare la loro contrazione fa sì che la velocità di rotazione aumenti anche fino a oltre 1000 giri/s.

In genere il campo magnetico della stella non è allineato con l'asse di rotazione e ciò produce una intensa emissione di



onde radio. L'oggetto è diventato una pulsar.

11.8.9 – Buchi neri.

Per ogni corpo celeste esiste una velocità di fuga, valore necessario per sfuggire definitivamente all'attrazione gravitazionale di un pianeta, un satellite oppure una stella: $v_F = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$, dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa dell'oggetto e d la distanza dal centro (il raggio se consideriamo che si parta dalla superficie del corpo).

Se la massa del nucleo di una stella in collasso è abbastanza grande la velocità di fuga può raggiungere e superare la velocità della luce. Per questo è sufficiente che il raggio della stella si restringa fino al valore $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ detto raggio di Schwarzschild. Da un oggetto del genere non si

possono ricevere segnali elettromagnetici: unico indizio della sua esistenza è la gravità. Non ci sono ancora osservazioni dirette dei tali buchi neri, ma alcuni fenomeni di intense emissioni di raggi X provenienti da regioni dello spazio di dimensioni stellari, possono essere spiegati solo ipotizzando l'esistenza di un buco nero che sta risucchiando la materia circostante.

È invece molto recente la pubblicazione di un'immagine dei un buco nero presente al centro di una galassia, un cosiddetto buco nero supermassivo (si parla di oggetti che arrivano anche a miliardi di masse solari contenute in spazi molti ristretti).

11.8.10 – Supernovae tipo Ia.

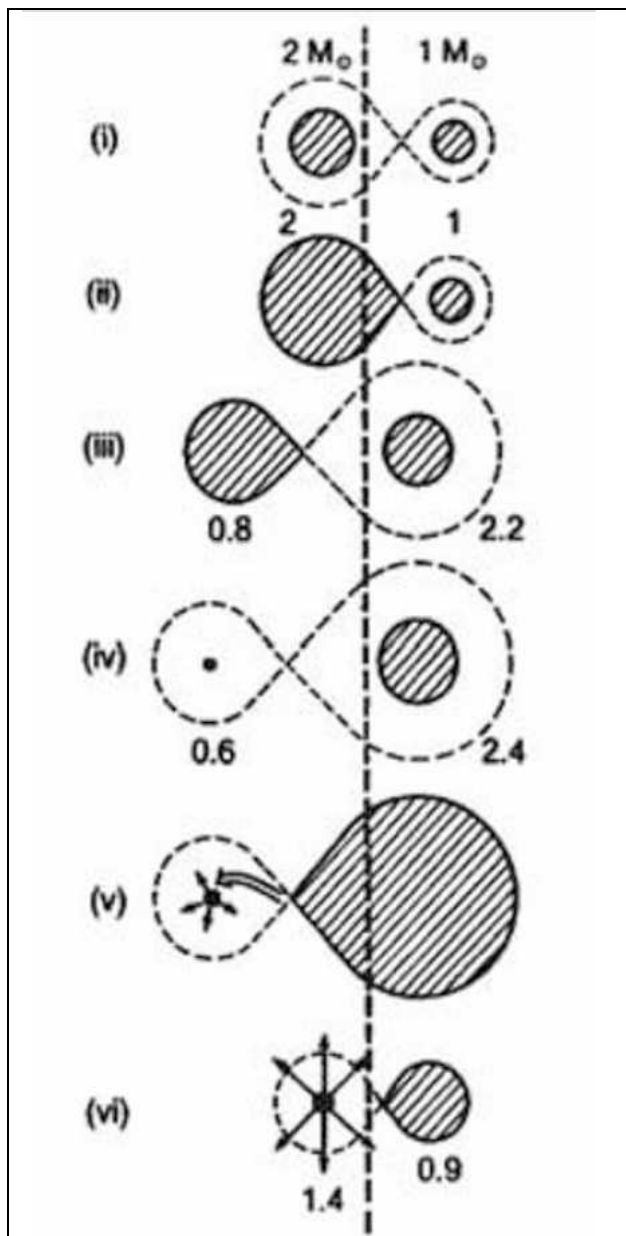
In Astrofisica hanno un ruolo molto importante le supernovae tipo Ia in quanto il meccanismo che le produce è ben noto e permette di conoscere la luminosità che si raggiunge durante l'esplosione. La supernova di tipo Ia è prodotta da un sistema binario stretto. Consideriamo ad esempio un sistema binario di componenti di 1 e $2 M_{\odot}$ periodo orbitale iniziale di 1.4 giorni (vedi figura alla pagina seguente). La stella più massiva lascia la sequenza principale e diventa gigante, riempiendo il proprio lobo di Roche^[5] e trasferendo massa alla compagna. Dopo alcuni milioni di anni i ruoli delle componenti saranno scambiati. Il trasferimento di massa è piuttosto rapido perché la massa della secondaria è diventata maggiore di quella della primaria e continua finché l'originaria stella di $2 M_{\odot}$ si contrae allo stadio di nana bianca di $0.6 M_{\odot}$ che si raffredda a raggio costante. Nel contempo la stella originariamente di $1 M_{\odot}$ è diventata una stella di $2.4 M_{\odot}$ che a sua volta evolve oltre lo stadio di sequenza principale e diventando gigante riempie il proprio lobo di Roche facendo cadere materiale sulla nana bianca. L'accrescimento di materiale sulla nana bianca dà origine a surriscaldamento della superficie con accensione di processi termonucleari dell'idrogeno: si tratta del fenomeno nova, che può anche comportare esplosioni superficiali con espulsione di massa.

La nana bianca cresce progressivamente di massa fino a raggiungere e superare il limite di Chandrasekhar di circa $1.4 M_{\odot}$: ne nasce quindi un collasso che porta la stella verso lo stadio di stella di neutroni con la liberazione di una grande quantità di energia gravitazionale in radiazione elettromagnetica e flusso di neutrini. Il fenomeno è quello della supernova di Tipo Ia, caratterizzato

[⁵] In astronomia, il lobo di Roche è una regione di spazio attorno ad una stella che fa parte di un sistema binario, all'interno del quale il materiale orbitante è gravitazionalmente legato a questa stella. Il materiale esterno al lobo può invece cadere sull'altra stella. Se la stella stessa si espande oltre il proprio lobo di Roche i suoi strati esterni finiscono per cadere sull'altra stella. Un lobo di Roche ha una forma somigliante a quella di una goccia, con la parte appuntita rivolta verso l'altra stella (il vertice è il punto Lagrangiano L1 del sistema). Ogni sistema binario contiene due lobi di Roche, uno per ogni stella. Questi volumi sono definiti da una particolare superficie di uguale energia potenziale.

appunto dal fatto che l'energia rilasciata ha un valore ben preciso, corrispondente alla differenza di energia di legame tra nana bianca e stella di neutroni. Le supernove di Tipo Ia possono essere usate candele standard nell'Universo: esse possono essere individuate per l'andamento delle curve di luminosità e per la luminosità massima raggiunta, ma anche dal punto di vista spettroscopico perché e hanno la caratteristica di non mostrare righe dell'idrogeno nel loro spettro in quanto il materiale espulso è quello dei nuclei di stelle evolute.

Un caso differente è quello in cui le componenti hanno grande massa. La componente più massiva evolve più rapidamente e lasciata la sequenza principale diventando una gigante, trasferendo rapidamente gran parte della sua massa alla compagna e contraendosi come stella di puro He del tipo Wolf-Rayet con forte vento. Il bruciamento dell'elio è rapido e successivamente il nucleo di carbonio può esplodere come supernova. Supponiamo che rimanga una stella di neutroni. In questa fase la massa viene espulsa dal sistema e solo una frazione trascurabile del vento viene catturata dalla compagna che è ora una stella di grande massa che produce un forte vento in parte catturato dalla stella compatta che accende una sorgente di raggi X. Il vento cessa soltanto quando, lasciata la sequenza principale, la stella compagna diventa gigante a sua volta, riempie il lobo di Roche e trasferisce massa alla stella di neutroni. Il sistema evolve verso una situazione con la stella di elio che in qualche milione di anni esplose come supernova, eventualmente espellendo la compagna. Per certi intervalli di massa si può anche mantenere il sistema legato con la formazione di due stelle di neutroni orbitanti.



Evoluzione di un sistema binario stretto di piccola massa (primaria a sinistra, secondaria a destra). (i) Due stelle sulla MS. (ii) La massa maggiore diventa gigante rossa e trasferisce materia alla compagna attraverso il lobo di Roche. (iii) La stella evoluta diventa subgigante, la stella di MS diventa massiva. (iv) La subgigante diventa nana bianca. (v) La stella massiva diventa gigante e trasferisce massa alla nana bianca. (vi) La nana bianca supera il limite di Chandrasekhar e esplose come supernova di Tipo Ia.

Le fasi dell'evoluzione stellare in funzione della massa

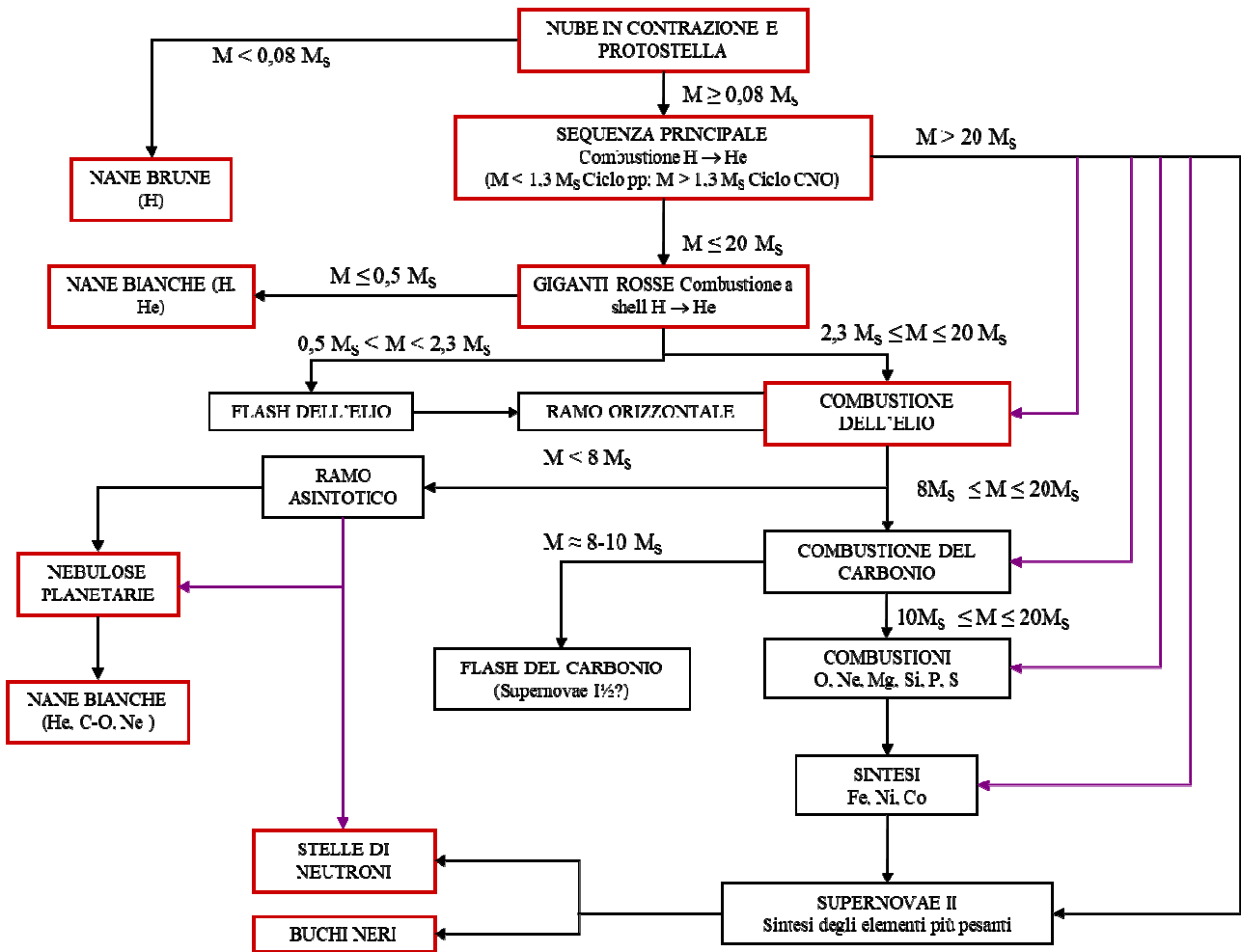
<i>MASSE</i>	<i>PRE-SEQUENZA</i>	<i>SEQUENZA PRINCIPALE</i>	<i>POST-SEQUENZA</i>	<i>ULTIME FASI</i>	<i>STADIO FINALE</i>
Grandi $>10 M_{\odot}$	Da 1000 a 10 000 anni	<15 milioni di anni Iper- o supergigante blu H \rightarrow He (ciclo CNO veloce), anche He \rightarrow C (ciclo 3α) per le stelle piú massicce	< 1 milione di anni Iper- o supergigante (vari colori) C \rightarrow Ne, Ne \rightarrow Mg+Si, O \rightarrow Si, Si \rightarrow Fe+Ni Forti perdite di massa Se $10 M_{\odot} < M < 20 M_{\odot}$ anche gigante rossa	< 1 secondo Processi r ^[6] : elementi pesanti Collasso del nucleo: Supernova II elementi transuranici	Stella di neutroni $M_{fin} \sim < 3 M_{\odot}$ Buco nero $M_{fin} > 3 M_{\odot}$
“Limite” $8 - 10 M_{\odot}$	Da 10 000 a 100 000 anni	15 – 30 milioni di anni Gigante azzurra H \rightarrow He (ciclo CNO veloce)	1 milione di anni Gigante rossa Shell H \rightarrow He, poi subito He \rightarrow C (ciclo 3α) Perdite di massa	100 000 anni Nucleo inerte (C,O,Ne)+shell He \rightarrow C +shell H \rightarrow He Innesco C \rightarrow Ne in nucleo <i>degenere</i> FLASH C (Supernova I_{1/2})	Distruzione completa?
Intermedie $2,3 - 8 M_{\odot}$	Da 100 000 a 1 milione di anni	30 milioni – 1 miliardo di anni Azzurra o bianca H \rightarrow He (ciclo CNO)	3 – 10 milioni di anni Gigante rossa Shell H \rightarrow He, poi He \rightarrow C (ciclo 3α) Perdite di massa	1 milione di anni Ramo asintotico Nucleo inerte (C,O,Ne)+shell He \rightarrow C +shell H \rightarrow He Processi s ^[7] : elementi pesanti Forti perdite di massa, espulsione involuppo, nebulosa planetaria. Pulsi termici. Shell in esaurimento	Nana bianca (H, He, C, O, Ne)

[⁶] Il processo r è un processo di nucleosintesi che solitamente si verifica all'interno del nucleo di una supernova, ed è responsabile della creazione di circa la metà dei nuclei atomici ricchi di neutroni che sono più pesanti del ferro. Il processo comporta una successione di catture neutroniche rapide (*rapid* da cui il nome processo r) mediante nuclei pesanti, tipicamente ^{56}Fe o altri isotopi pesanti più ricchi di neutroni.

[⁷] Il processo s , o processo di cattura lenta (*slow* da cui processo s) dei neutroni, è un processo di nucleosintesi che avviene nelle stelle in condizioni di bassa densità neutronica e di media temperatura. In tali condizioni il tasso di cattura neutronica da parte dei nuclei atomici è più lento di quello del decadimento radioattivo beta. Nel processo s un isotopo stabile cattura un neutrone, ma il nuclide instabile che viene così creato decade prima che un altro neutrone venga catturato. In tal modo viene creato un isotopo stabile dell'elemento di numero atomico immediatamente successivo. Tramite questo processo viene creata circa la metà degli isotopi degli elementi più pesanti del ferro dell'universo e pertanto esso gioca un ruolo importante nella determinazione della composizione chimica delle galassie.

<i>MASSE</i>	<i>PRE-SEQUENZA</i>	<i>SEQUENZA PRINCIPALE</i>	<i>POST-SEQUENZA</i>	<i>ULTIME FASI</i>	<i>STADIO FINALE</i>
Piccole (I) $1,3 - 2,3 M_{\odot}$	Da 1 milione a 10 milioni di anni	1 - 3 miliardi di anni Bianca o gialla $H \rightarrow He$ (ciclo CNO)	100 - 300 milioni di anni Gigante rossa Nucleo inerte (He) + shell $H \rightarrow He$ Perdite di massa. Innesco He: Ramo orizzontale $He \rightarrow C$ (ciclo 3α)	10 milioni di anni Ramo asintotico Nucleo inerte (C,O) + shell $He \rightarrow C$ + shell $H \rightarrow He$ Processi s: elementi pesanti Perdite di massa, espulsione involuppo, nebulosa planetaria. Pulsi termici. Tutte le shell in esaurimento	Nana bianca (H, He, C, O)
Piccole (II) $0,5 - 1,3 M_{\odot}$	Da 10 a 100 milioni di anni	3 - 20 miliardi di anni Gialla o arancione $H \rightarrow He$ (ciclo <i>pp</i>)	300 milioni - 2 miliardi di anni Gigante rossa Nucleo inerte (He) + shell $H \rightarrow He$ Perdite di massa. <i>FLASH</i> He: Ramo orizzontale $He \rightarrow C$ (ciclo 3α)	10 milioni di anni Ramo asintotico Nucleo inerte (C,O) + shell $He \rightarrow C$ + shell $H \rightarrow He$ Processi s: elementi pesanti Perdite di massa, espulsione strato esterno, nebulosa planetaria. Pulsi termici. Tutte le shell in esaurimento	Nana bianca (H, He, C, O)
Molto piccole $0,08 - 0,5 M_{\odot}$	>100 milioni di anni	> 20 miliardi di anni rossa $H \rightarrow He$ (ciclo <i>pp</i>)	<i>non ancora accaduto nella storia dell'Universo</i> Nucleo inerte (He) + shell $H \rightarrow He$	Pulsu termici. Shell H in esaurimento	Nana bianca (H, He)
$< 0,08 M_{\odot}$	<i>Massa insufficiente per innescare la combustione dell'H. Nana bruna</i>				

SCHEMA SINTETICO DELL'EVOLUZIONE STELLARE



Capitolo 12

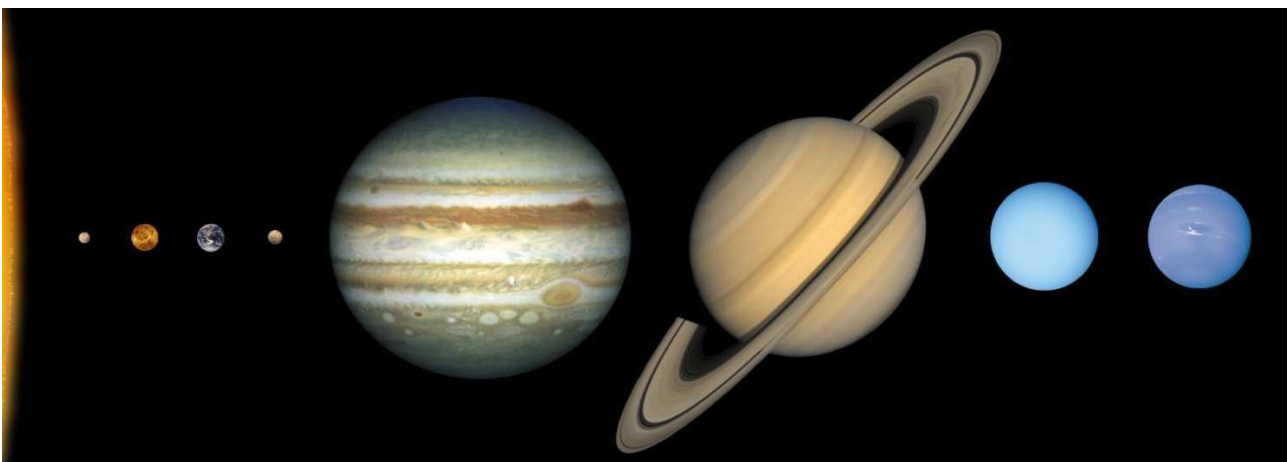
I pianeti extrasolari

12.1 – Il Sistema Solare

Pianeta viene dal greco e significa vagabondo; con questo termine venivano indicati quegli astri che si spostavano nel cielo rispetto alle stelle fisse, ovvero la Luna, il Sole, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno. Gli unici visibili a occhio nudo.

Il 24 agosto 2006 l'Assemblea Generale di Praga dell'International Astronomical Union (IAU) ha stabilito che un pianeta è un corpo celeste che:

- è in orbita intorno al Sole;
- ha una massa sufficiente affinché possa assumere una forma quasi sferica;
- ha “ripulito” le vicinanze intorno alla sua orbita.



I pianeti del Sistema Solare; le dimensioni sono in scala

Il Sistema Solare non è però costituito da soli pianeti, ci sono miliardi e miliardi di altri corpi in orbita attorno al Sole. Per primi vanno considerati i pianeti nani, ossia corpi celesti che hanno le stesse caratteristiche dei pianeti, ma che non hanno ripulito la loro orbita ossia non rispettano la regola 3 della definizione di pianeta. Al momento attuale sono classificati tali Cerere, Plutone, Haumea, Makemake e Eris. (vedi figura sotto). Cerere, scoperto a Palermo da Padre Piazzi nel 1801, si trova nella fascia principale degli asteroidi, una zona tra Marte e Giove ricca di corpi minori. Gli altri si trovano oltre l'orbita di Nettuno (solo Plutone ha un'orbita ellittica che interseca quella di Nettuno). Nella tabella alcune caratteristiche dei pianeti nani.

Nome	Semiasse maggiore		eccentricità	Diametro medio [km]	Massa [10 ²⁰ kg]	Fascia asteroidale
	[10 ⁹ km]	[UA]				
Cerere	0,41369	2,765	0,079	975×909	9,43 ± 0,07	Fascia principale
Plutone	5,901	39,445	0,2448	2370 ± 20	130,5 ± 0,7	Fascia di Kuiper
Haumea	6,428	42,968	0,1894	1500	42 ± 1	Fascia di Kuiper
Makemake	6,790	45,386	0,159	1600-2000	~40	Fascia di Kuiper
Eris	10,183	68,071	0,4417	2326 ± 12	167 ± 2	Disco diffuso



I pianeti nani, dimensioni a confronto con la Terra

Esistono poi miliardi di miliardi di corpi minori del Sistema Solare le cui dimensioni vanno dai grani di polvere ad oggetti di qualche centinaio di chilometri distribuiti nello spazio che circonda il sole. Sono distribuiti principalmente in diverse zone: la *fascia principale*, la *fascia di Kuiper*, il *disco diffuso*, la *nube di Oort*.

La fascia principale degli asteroidi è la regione del sistema solare situata grossomodo tra le orbite di Marte e di Giove. È occupata da numerosi corpi di forma irregolare chiamati asteroidi o pianeti minori. Circa metà della massa della fascia è contenuta nei quattro asteroidi più grandi, Cerere, Vesta, Pallade, e Igea. Questi hanno diametri medi di oltre 400 km.

Pur essendo molto diradati, tra gli asteroidi più grandi possono verificarsi collisioni che possono formare una famiglia di asteroidi i cui membri hanno caratteristiche orbitali e composizioni simili. La maggior parte rientra in tre gruppi fondamentali: a base di carbonio (tipo C), a base di silicati (tipo S), a base di metalli (tipo M).

Secondo l'ipotesi planetesimale della formazione del Sistema Solare, la fascia degli asteroidi si è formata dalla nebulosa solare primordiale come aggregazione di planetesimi, che a loro volta hanno formato i protopianeti. Tra Marte e Giove, tuttavia, le perturbazioni gravitazionali causate da Giove avevano dotato i protopianeti di troppa energia orbitale perché potessero accrescersi in pianeti. Le collisioni divennero troppo violente, così, invece di aggregarsi, i planetesimi e la maggior parte dei protopianeti si frantumarono.

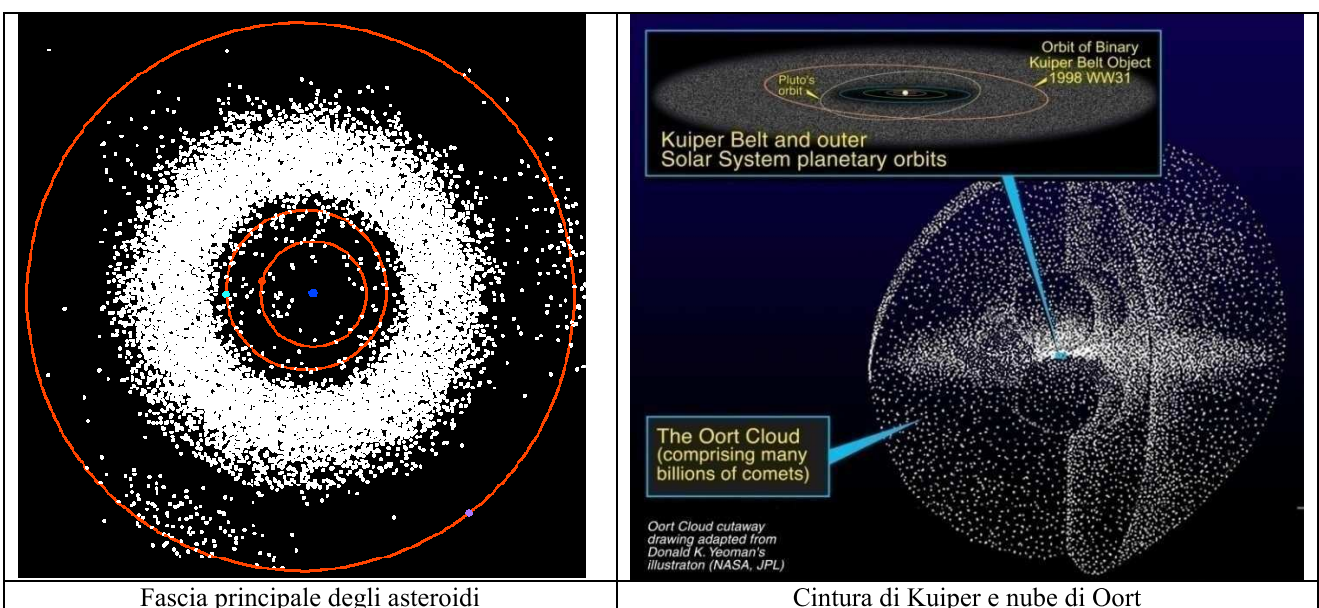
La fascia di Kuiper o fascia di Edgeworth-Kuiper (dal nome dei due astronomi Kenneth Edgeworth e Gerard Peter Kuiper). È una regione del Sistema Solare che si estende dall'orbita di Nettuno (30 UA) fino a 50 UA dal Sole. È simile alla fascia principale degli asteroidi, ma 20 volte più estesa e da 20 a 200 volte più massiccia, inoltre, mentre la fascia principale è costituita in gran parte da asteroidi di natura rocciosa, gli oggetti della fascia di Kuiper sono composti principalmente da sostanze volatili congelate, come ammoniaca, metano e acqua. Nella fascia sono stati scoperti oltre 1000 oggetti (Kuiper belt objects, o KBO), e si pensa che ne possano esistere oltre 100000 con diametro superiore ai 100 km. Il più grande è Plutone.

Il disco diffuso è una regione scarsamente popolata, la cui parte più interna si sovrappone alla Fascia di Kuiper, ma che si estende fino a 100 UA dal Sole e oltre. Gli oggetti percorrono orbite molto ellittiche e spesso molto inclinate rispetto all'eclittica. La maggior parte dei modelli sulla formazione del sistema solare mostrano che sia i KBO sia gli oggetti del disco facevano parte di una cintura di comete primordiali, e che le successive interazioni gravitazionali, in particolare con Nettuno, spedirono questi oggetti verso l'esterno, alcuni in orbite stabili (i KBO) e altri in orbite instabili, andando a costituire il disco diffuso. A causa dell'instabilità delle orbite, il disco diffuso si pensa che sia il punto di origine di molte comete di corto periodo. Le loro orbite instabili di tanto in tanto portano oggetti ghiacciati nel sistema solare interno che col tempo diventano comete di corto periodo. Secondo il Minor Planet Center, che cataloga ufficialmente tutti gli oggetti transnettuniani, un KBO è un oggetto che orbita esclusivamente all'interno della Fascia di Kuiper, indipendentemente dalla sua origine e composizione. Oggetti trovati al di fuori della fascia sono classificati come oggetti del disco diffuso (SDO).

Infine, agli estremi limiti del Sistema Solare c'è la nube di Oort, è una nube sferica di comete posta tra 20000 e 100000 UA ovvero tra 0,3 e 1,5 anni luce dal Sole. Questa nube non è mai stata osservata direttamente perché troppo lontana e buia per i telescopi attuali, ma si ritiene che sia il luogo da cui provengono le comete di lungo periodo (come la Hale-Bopp e la Hyakutake, avvistate alla fine del XX secolo) che attraversano la parte interna del sistema solare.

Nel 1950 l'astronomo olandese Jan Oort stava cercando di spiegare un'apparente contraddizione: le comete vengono periodicamente distrutte dopo numerosi passaggi nel sistema solare interno, perciò se le comete si fossero originate all'inizio del sistema oggi non dovrebbero esistere più. Il fatto che le vediamo ancora implica che abbiano un'origine diversa. Riprese quindi un'ipotesi fatta nel 1932 dell'astronomo estone Ernst Öpik ed ipotizzò l'esistenza di una nube che conterebbe milioni di nuclei di comete, che sarebbero stabili perché la radiazione solare è troppo debole per avere un effetto a quelle distanze. La teoria sembrerebbe essere confermata dalle osservazioni successive, che ci mostrano come le comete provengano da ogni direzione, con simmetria sferica.

La nube di Oort sarebbe un residuo della nebulosa originale da cui si formarono il Sole e i pianeti circa 4,6 miliardi di anni fa e sarebbe debolmente legata al sistema solare. Si pensa che anche le altre stelle abbiano una nube di Oort e che i bordi esterni delle nubi di due stelle vicine possano a volte sovrapporsi, causando un'occasionale "intrusione" cometaria.



Fascia principale degli asteroidi

Cintura di Kuiper e nube di Oort

12.2 – Formazione del Sistema Solare

I primi modelli di formazione del Sistema Solare cercarono innanzitutto di rendere conto, in modo qualitativo, dei principali dati osservativi riguardanti le orbite dei pianeti, le cui caratteristiche principali si possono così riassumere:

- si trovano approssimativamente nello stesso piano;
- sono praticamente circolari;
- i pianeti ruotano nello stesso senso, che è pure quello di rotazione del Sole;
- le distanze eliocentriche obbediscono alla legge empirica di Titius-Bode.

Verso la fine del XIX secolo, inoltre, assunse molta rilevanza il problema del momento angolare: il Sole infatti contiene il 99% della massa del Sistema Solare, ma possiede solo il 3% del momento angolare totale.

Dalla metà del XX secolo le nuove teorie riguardanti la formazione stellare, insieme alla determinazione delle età dei vari corpi minori (come le meteoriti), fornirono nuovi elementi di riflessione per le nuove e più moderne teorie cosmogoniche. Questo insieme di conoscenze portò a costruire diversi modelli, riassumibili in quattro teorie principali:

- quella della formazione turbolenta,
- quella mareale,
- quella di cattura
- quella della teoria nebulare.

12.2.1 – I modelli basati sulla turbolenza

René Descartes (1596-1650) fu il primo che cercò di dare una spiegazione scientifica dell'esistenza del Sistema Solare e che introdusse l'idea di evoluzione. Nella sua opera *Teoria dei vortici* (1644), avanza l'ipotesi che l'Universo sia costituito da materia ed etere e sia pieno di vortici di diverse dimensioni. Non è però chiaro il meccanismo fisico tramite il quale dai "vortici" si siano poi prodotti i pianeti. Il modello è soltanto qualitativo ed uno dei suoi maggiori difetti è che non spiega la complanarità delle orbite planetarie: esso venne abbandonato dopo la scoperta delle leggi della gravità di Newton.

Il concetto di turbolenza fu però ripreso e riconsiderato da numerosi autori nel XX secolo (von Weizsäcker, ter Haar, Kuiper, Whipple e McCrea).

12.2.2 – Le teorie mareali

La prima versione della teoria si deve al naturalista Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon, (1707-1788). Egli ipotizzò che il materiale che ha formato i pianeti fosse stato "strappato" al Sole da una cometa entrata in collisione o passata molto vicino ad esso, circa 70000 anni fa. La credibilità di questa teoria era legata al fatto che, a quei tempi, la natura delle comete era completamente sconosciuta e che non si avevano criteri attendibili per una stima delle età dei corpi celesti.

Bickerton (1880) e Chamberlain (1901) sostituirono la cometa con una stella massiccia, rendendo l'ipotesi fisicamente verosimile; avvicinandosi al Sole la stella gli avrebbe strappato parte del materiale producendo filamenti con elevato momento angolare, che poi si sarebbero condensati sul piano dell'eclittica.

Rimane però difficile spiegare la formazione dei pianeti giganti esterni, anche se vengono risolte due delle maggiori obiezioni che hanno a lungo reso la vita difficile al modello originale di Kant e Laplace: il problema del momento angolare e la diversa composizione chimica dei pianeti rispetto al Sole.

12.2.3 – Le teorie di cattura

Nel 1964 M. Woolfson presentò una variante dell'ipotesi mareale, detta teoria della cattura. Il materiale che ha formato i pianeti sarebbe il risultato dell'interazione mareale tra il Sole e una protostella, di massa ridotta e ancora in contrazione, che passò vicino ad esso. Neppure questa teoria gode di largo credito. Le obiezioni più importanti (che mettono in difficoltà anche le teorie mareali) sono:

- il materiale caldo strappato al Sole si disperderebbe con grande facilità nello spazio anziché formare pianeti;
- incontri ravvicinati con stelle massicce sono rarissimi (e i sistemi planetari, a quanto pare, no);
- non si riesce a spiegare la presenza della nube di Oort e della fascia di Edgeworth-Kuiper;
- il fatto che Sole e pianeti abbiano la stessa età ($4,55 \pm 0,05$ miliardi di anni) costituirebbe una coincidenza troppo speciale.

12.2.4 – L'ipotesi nebulare di Kant-Laplace

Nel 1755 il filosofo Immanuel Kant (1724 – 1804) suggerì che il Sistema Solare si fosse formato dal collasso di una nube di gas. Nel 1796 il matematico Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) riprese l'idea dal punto di vista matematico, includendo anche l'effetto della rotazione. Nel 1854 Édouard Albert Roche (1820 – 1883) discusse il problema del momento angolare (non ancora del tutto risolto). La rotazione fa appiattire la nube e si forma un disco, nel quale poi condensano i futuri pianeti.

La teoria spiegava tutti i dati osservativi conosciuti al suo tempo, e per questo ebbe da subito successo: nell'Ottocento conobbe un periodo di crisi, perché non riusciva (nella sua forma originale) a spiegare la distribuzione di momento angolare e le differenze di composizione chimica tra il Sole e i pianeti. Quest'ultima obiezione è ormai pienamente superata. Invece i precisi meccanismi che consentono alla materia in accrescimento sulla protostella di perdere il suo eccesso di momento angolare, non sono ancora ben compresi. Inoltre è ancora poco noto il processo o i processi che conducono alla scomparsa del disco.

L'ipotesi nebulare però è quella che attualmente riscuote i maggiori successi.

Vediamo i dettagli più significativi ipotizzati per il processo di formazione del Sistema Solare secondo tale teoria.

Nel centro del disco, circa 4,6 miliardi di anni fa, si è formato il Sole, con quasi tutta la massa della nube. I pianeti nascono attraverso un processo molto complicato, in un'area estesa a gran parte del disco e su un periodo di tempo piuttosto lungo (da migliaia a milioni di anni, a seconda del pianeta). Dapprima grani solidi di "polvere" si condensano dal gas nebulare, con un meccanismo chimico complesso: poi i grani si accrescono progressivamente dando vita ai planetesimi attraverso un processo ugualmente complicato, ma di tipo dinamico-collisionale.

Infine anche i planetesimi si urtano in modo catastrofico e si fondono: nascono i protopianeti, che inglobando il materiale residuo formano i pianeti.

Il parametro fondamentale per la condensazione è la temperatura: essa è naturalmente più alta verso il centro del disco, dove la protostella si sta formando, mentre diminuisce progressivamente andando verso l'esterno. Dalla temperatura dipende il tipo di composti chimici che possono condensare dal gas.

Sotto i 2000 K circa condensano silicati e ossidi metallici: per la condensazione di composti organici e di ghiacci di vario tipo – di acqua, di metano, di ammoniaca, di azoto – bisogna scendere sotto i 270 K, fino verso lo zero assoluto. Questa differenziazione chimica è alla base della

dicotomia esistente tra i pianeti interni, detti anche terrestri (Mercurio, Venere, Terra e Marte)) e pianeti esterni o gassosi (Giove, Saturno, Urano e Nettuno).

I primi sono caratterizzati da: dimensioni ridotte (la Terra è il più grande), nuclei ferrosi, mantelli rocciosi, grande densità, crosta rocciosa solida e atmosfere sottili: i secondi hanno invece nucleo misto (roccia e ghiaccio), grandi dimensioni, densità bassa e atmosfere molto estese. Il secondo gruppo si può ulteriormente suddividere: da una parte Giove e Saturno (più massicci), dall'altra Urano e Nettuno.

Composto o Minerale	Temperatura (K)
Al ₂ O ₃	1743
Fe - Si	1458
FeS (troilite)	703
Composti di carbonio	373 - 473
Ghiacci di vario tipo	< 273

Temperatura di condensazione di alcuni composti nella nebulosa protostellare

Si può scrivere un'equazione approssimata per l'andamento della temperatura, al variare della distanza, nella nebulosa protosolare:

$$[12.1] \quad T \approx \frac{631}{d^{0.77}}$$

la temperatura è in kelvin e d , la distanza dal Sole, in Unità Astronomiche.

La zona della nebulosa dove il vapore acqueo può solidificare ($T \leq 273$ K, cioè 0 °C) si trova a circa 3 UA dal Sole (**linea del ghiaccio**), nella regione oggi occupata dalla fascia degli asteroidi. A distanze maggiori i nuclei planetari si accrescono rapidamente (perché aumenta il materiale disponibile) e possono catturare anche il gas della nebulosa; ciò spiega le atmosfere di idrogeno ed elio dei pianeti gassosi – infatti il gas nebulare è composto quasi al 98% di questi gas.

Il processo di condensazione accresce la propria efficacia grazie ai grani di polvere presenti nella nube primordiale. La “polvere” doveva probabilmente essere un insieme di silicati molto refrattari: grafite, composti metallici e forse altri composti organici complessi.

Pianeta	Distanza (UA)	Temperatura (K)
Mercurio	0.387	1400
Venere	0.723	900
Terra	1.000	600
Marte	1.524	400
Giove	5.203	200

Temperature presumibili della nebulosa protosolare alle distanze cui si formarono in seguito i pianeti interni e Giove.

La fase successiva alla condensazione, detta accrescimento, è caratterizzata dalle collisioni tra grani, che aderiscono l'uno all'altro ingrandendosi progressivamente. I meccanismi fisici sono due:

collisione geometrica e collisione gravitazionale.

Nella prima l'accrescimento riguarda soltanto i grani che possono scontrarsi direttamente (il concetto portante è quello di sezione d'urto, cioè la superficie disponibile per un impatto: per un grano sferico di raggio r essa è l'area del cerchio massimo, πr^2), mentre nella seconda l'influenza gravitazionale esercitata dalla particella è in grado di attirare anche del materiale che non le sarebbe finito direttamente addosso direttamente.

Poiché la gravità di un oggetto dipende dalla sua massa, la collisione gravitazionale è all'inizio trascurabile, ma non appena la massa dei grani cresce fino ad un certo valore critico di soglia, il meccanismo di cattura gravitazionale diventa dominante.

Una discussione matematica del modello mostra che, se abbiamo a che fare con particelle di raggio r , l'efficienza della collisione geometrica dipende da r^2 , mentre quella della collisione gravitazionale dipende da r^4 .

Il processo, di crescita esponenziale, porta in brevissimo tempo le dimensioni degli oggetti all'interno della nebulosa protosolare da un metro ad alcuni km: i cosiddetti **planetesimi**. I planetesimi continuano ad accrescersi, sia per mutue collisioni sia per cattura di particelle più piccole e raggiungono dimensioni paragonabili a quelle della Luna o a anche di Marte: a questo punto sono diventati **protopianeti**. Il processo dovrebbe essere durato fino a circa un milione di anni dopo la formazione del Sole.

I pianeti di tipo terrestre dovrebbero essersi formati tra 10 e 100 milioni di anni dopo la formazione del Sole e per essi gli stadi finali dell'accrescimento dovrebbero essere stati violenti e drammatici. I protopianeti hanno collisioni più rare rispetto agli stadi precedenti, ma catastrofiche: è solo attraverso tale processo che si possono formare pianeti come Venere o la Terra. Si ritiene che esistano alcune testimonianze residue di questa fase.

- La formazione della Luna a causa dell'impatto di un protopianeta grande come Marte contro la Terra.
- La rotazione retrograda di Venere; l'asse di rotazione di questo pianeta è inclinato di $177,4^\circ$ sul piano orbitale, e il periodo di rotazione (243 giorni!) è più lungo del periodo di rivoluzione attorno al Sole (225 giorni). L'ipotesi più attendibile è che un impatto abbia rallentato la rotazione iniziale di Venere.
- Le anomalie di Urano; l'asse di rotazione è inclinato di $97,9^\circ$ sul piano orbitale e questo potrebbe essere spiegato da un altro impatto.
- La "sottigliezza" del mantello di Mercurio. Le misure di densità e del campo magnetico indicano che il nucleo di questo pianeta è sproporzionatamente grande e ciò potrebbe essere stato prodotto da un impatto che ha strappato via parte del mantello.

La fascia degli asteroidi comprende un enorme numero di corpi le cui dimensioni sono tipiche dei planetesimi: la loro evoluzione si è infatti arrestata allo stadio dell'accrescimento, perché Giove si è formato con grande rapidità (le grandi masse hanno un'evoluzione molto accelerata, perché catturano con maggiore efficacia) e ha perturbato le traiettorie dei planetesimi vicini ad esso, accelerandoli e innescando un meccanismo distruttivo di collisioni che ha frantumato gli asteroidi anziché aggregarli insieme. Il processo continua ancora oggi: la massa totale della fascia è stimata in circa 5×10^{21} kg, ovvero circa un quindicesimo della massa della Luna (rispetto all'inizio la fascia ha perso una parte notevole della sua massa).

I pianeti esterni devono essersi formati in maniera più semplice rispetto a quelli interni e in un'epoca compresa tra un milione e 10 milioni di anni dopo la formazione del Sole. Le massicce quantità di ghiaccio disponibili oltre le 3 UA di distanza dal Sole si sono unite ai grani preesistenti in grandi nuclei misti (roccia + ghiaccio), capaci di catturare e trattenere grandi involucri di gas della nebulosa protosolare.

Per Giove sono stati stimati i seguenti dati: massa del nucleo di roccia/ghiaccio: ~ 35 masse terrestri, massa totale del pianeta ~ 318 masse terrestri. Dunque la maggior parte della massa di Giove è nell'involucro di idrogeno ed elio, e lo stesso vale per Saturno, Urano e Nettuno. Va comunque detto che questo resta un punto debole del modello, perché il Sole all'inizio della sua vita ha attraversato una fase detta fase T-Tauri^[8] e in tale fase il materiale non ancora aggregato nei pianeti doveva essere spazzato via dal Sistema Solare.

[⁸] Una stella T-Tauri (così chiamata dal nome del prototipo di questa classe, T-Tauri) è una stella pre-sequenza principale. Questo genere di stelle si trova nei pressi di molte delle nubi molecolari della nostra galassia. Le prime vennero scoperte nel 1945, nella costellazione del toro, da cui il nome, quando furono notate per la loro variabilità ottica e le forti linee spettrali che si originano nella loro cromosfera. Le stelle T-Tauri hanno masse e temperature simili a quelle del Sole, ma alcune volte sono più grandi in termini di diametro e decisamente più luminose. Ruotano velocemente su sé stesse, tipicamente in pochi giorni e sono molto attive. Hanno campi magnetici estremamente intensi, che attraggono i gas vicini risucchiandoli lungo le linee di campo, provocando massicci brillamenti ed estese macchie sulla loro superficie. Le stelle T-Tauri hanno anche emissioni di raggi X e radio intense e variabili, circa 1000 volte superiori a quelle del Sole e molte hanno venti stellari estremamente potenti. Le stelle T-Tauri contengono molto litio rispetto alla nostra stella. Tale elemento è facilmente distrutto già a un milione di kelvin, una temperatura relativamente bassa per un nucleo stellare, e le stelle più evolute ne contengono pochissimo. Prendendo in considerazione tutti questi indizi, si pensa che le T-Tauri siano molto giovani e che la maggior parte della loro energia derivi dal collasso

Il problema è che i modelli di evoluzione stellare prevedono che per il Sole la fase T-Tauri non sia compatibile con l'epoca della formazione di Urano e Nettuno. Ancora non si ha una risposta convincente a tale problema.

Abbiamo così visto, sia pure in modo molto sommario, come potrebbero essere andate le cose all'inizio della formazione del Sistema Solare. Una cosa che colpisce è questa: il processo di formazione dei pianeti è davvero inefficiente. La massa del Sistema Solare attuale (Sole escluso) è circa 0,0013 masse solari, mentre lo studio dei dischi attorno a giovani stelle in formazione indicano che la massa "tipica" per un disco varia tra 0,01 e 0,1 masse solari. Quindi il rapporto tra la massa iniziale e quella finale varia tra 8 e 80 circa: tutto il resto viene disperso nello spazio. Questa non vuole essere una considerazione di carattere economico, ma piuttosto segnala un fatto importante: se il processo di formazione dovesse essere ripetuto molte volte, è molto probabile che salterebbero fuori pianeti molto diversi da quelli che abbiamo. Per esempio, diversi sistemi planetari scoperti di recente (per esempio, Upsilon Andromedae) hanno molti pianeti come Giove, tutti molto vicini alla stella "madre".

Chiudiamo con alcune considerazioni sul sistema Terra-Luna. Esso è davvero particolare nell'ambito del Sistema Solare, perché il rapporto di massa satellite/pianeta è eccezionalmente elevato (unico altro esempio: Plutone e il suo satellite Caronte). Nella tabella vengono riportati alcuni esempi.

Ganimede / Giove	$8 \cdot 10^{-5}$
Titano / Saturno	$2 \cdot 10^{-4}$
Titania / Urano	$8 \cdot 10^{-5}$
Tritone / Nettuno	$4 \cdot 10^{-5}$
Luna / Terra	0,01
Caronte / Plutone	0,08

Rapporto di massa satellite/pianeta

Dunque la Luna è un satellite molto massiccio, troppo "di lusso" per il nostro pianeta! Ma non basta: ha anche una composizione chimica inusuale. La superficie è basaltica e molto povera di ferro, e la densità media è più bassa rispetto a un tipico pianeta terrestre.

La teoria nebulare suggerisce che i satelliti dei pianeti esterni si formino con un processo simile a quello che ha dato origine ai pianeti: attorno al pianeta gigante si poteva formare un disco, ripetendo il meccanismo "in miniatura". La Terra, però, era troppo vicina al Sole e troppo piccola per avere il suo disco. Come si è formata allora la Luna? Tra le teorie che si sono succedute

Oggetto	Densità (kg/m ³)
Mercurio	5420
Venere	5250
Terra	5520
Luna	3340
Marte	3960

Densità medie dei pianeti interni

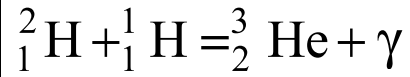
(fissione, cattura, impatto gigante) ha ultimamente ricevuto grande impulso la teoria dell'impatto gigante. Infatti la fissione richiede che la Terra all'inizio dovesse ruotare troppo rapidamente (circa 6 ore!), né spiega la scarsità di ferro della Luna. La cattura è improbabile dal punto di vista dinamico e non spiega le particolarità chimiche della composizione del nostro satellite. Se la teoria dell'impatto è vera, allora un corpo delle dimensioni di Marte deve aver colpito la Terra subito dopo la sua formazione: l'impatto, laterale, dovette essere violentissimo, vaporizzando sia il proiettile sia il mantello esterno terrestre. Il materiale vaporizzato era impoverito in ferro rispetto alla Terra (il cui ferro è quasi tutto nel nucleo) e si è posto in un disco orbitante attorno al nostro pianeta; simulazioni numeriche mostrano che la Luna si accresce molto rapidamente all'interno del disco. L'ipotesi dell'impatto non spiega solo l'origine della Luna, ma potrebbe anche render conto di due cose: la rotazione piuttosto rapida (24 h) della Terra e l'inclinazione dell'asse terrestre. Infatti le simulazioni mostrano che, in assenza della Luna, l'angolo dell'asse varierebbe in modo caotico, oscillando abbastanza da riflettersi inevitabilmente sulla stabilità del clima terrestre. La Luna è dunque davvero importante per la nostra vita!

gravitazionale, non dalle reazioni di fusione nucleare, perché il loro nucleo è ancora troppo freddo. Circa la metà delle stelle T-Tauri conosciute hanno dei dischi circumstellari, che potrebbero essere il residuo della nebulosa da cui si sono formate, e che potrebbe dare origine a dei pianeti.

12.3 – Qualche definizione e un po' di storia sui pianeti extrasolari

Il Working Group on Extrasolar Planets (WGESP) dell'IAU dà la seguente definizione di pianeta extrasolare (è una definizione di lavoro, quindi suscettibile a revisioni) :

Oggetto con massa inferiore alla massa limite per la fusione termonucleare del deuterio che orbiti intorno a stelle o resti di stelle (non importa come si siano formati) e superiore al minimo di massa che si usa nel Sistema Solare (necessaria perché possa assumere una forma quasi sferica).



Reazione di produzione di ${}^3_2\text{He}$

Attualmente il limite per la fusione del deuterio è stimata pari a 13 volte la massa di Giove, $M_J = 1,89819 \times 10^{27}$ kg, per gli oggetti di metallicità solare.

Oggetti con massa minore di $70 M_J$ ($\sim 7\% M_\odot$), ma superiore a $13 M_J$ sono “nane brune”, non importa come si siano formate, nè dove si trovino. Oggetti liberi in ammassi di stelle giovani con massa inferiore a $13 M_J$ non sono pianeti, ma “sotto-nane brune”.

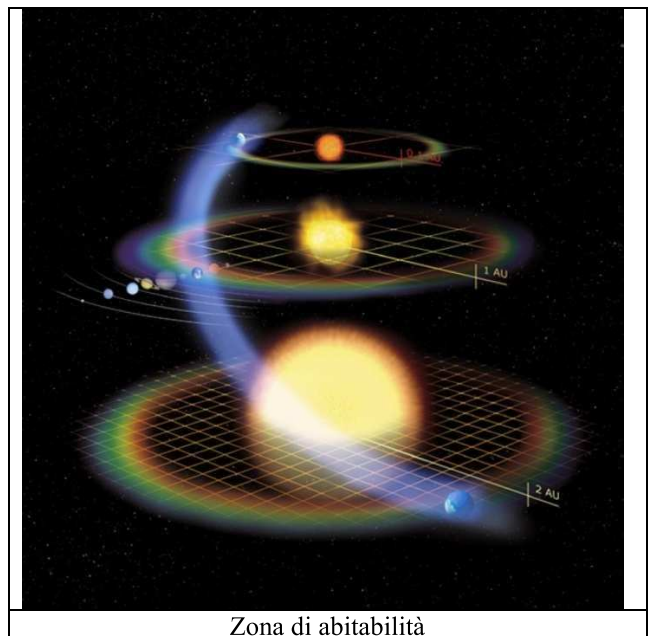
Nella ricerca di pianeti extrasolari riveste un particolare interesse quelli che si trovano nella cosiddetta zona di abitabilità di un sistema planetario, ossia nell'intervallo di distanze dalla stella in cui, su di un pianeta roccioso, è possibile trovare acqua allo stato liquido.

A partire dagli anni '50 del secolo scorso ci sono state diverse definizioni, nella tabella qui sotto ne vengono riportate alcune.

Oggi definiamo:

Zona Abitabile (HZ) – è la regione intorno ad una stella in cui un pianeta di tipo terrestre può mantenere, in qualche istante di tempo, l'acqua allo stato liquido.

Zona continuamente abitabile (CHZ) – la regione in cui un pianeta può rimanere abitabile per uno specifico periodo di tempo (per esempio 4.6 Gy)



Zona di abitabilità

1959 – 1960	Huang	Zona abitabile: la zona intorno ad una stella in cui può esistere un pianeta abitabile
1974	Dole	Ecosfera: la zona intorno ad una stella entro cui su un pianeta almeno il 10% della superficie ha una Temperatura compresa tra i -10 e 30 °C
1966	Skhlovski & Sagan	
1970	Rasool & DeBergh	Zona abitabile: la zona intorno ad una stella in cui può esistere un pianeta sulla cui superficie si abbia acqua liquida
1978	Hart	
1988	Kasting	
1991	Whitmire	Zona Biocompatibile: la zona intorno ad una stella in cui può esistere un pianeta sulla cui superficie si abbia acqua liquida
1992	Fogg	

Si può adottare la definizione di Tom E. Morris della Division of Natural Sciences Fullerton College di Fullerton, CA, USA secondo il quale il limiti della zona di abitabilità di una stella sono dati da

$$[12.2] \quad \sqrt{\frac{L_{\text{stella}}}{1,1}} < d < \sqrt{\frac{L_{\text{stella}}}{0,53}}$$

d è espresso in Unità Astronomiche.

La ricerca dei pianeti extrasolari è una recentissima branca dell'astronomia che sta assumendo un ruolo sempre più fondamentale per le sue rilevanti implicazioni in ambito sia culturale sia filosofico. È da lì che potrebbe giungere una risposta, forse in un futuro neppure troppo lontano, ad una delle domande cruciali per l'umanità: nell'Universo esistono altre forme di vita, altri mondi abitati?

Durante la storia dell'umanità ci sono stati molti personaggi di spicco che hanno detto la loro a tal proposito. Nel passato se ne è occupata la filosofia e le affermazioni erano basate su posizioni di principio senza alcun fondamento scientifico. Ricordiamo alcuni personaggi.

Democrito (460 – 370 a.C.) scriveva *“In alcuni mondi non ci sono né Sole né Luna, in altri essi sono più grandi che nel nostro, in altri più numerosi. [...] Vi sono alcuni mondi privi di creature viventi o piante e di qualsiasi umidità.”*

Epicuro (341 – 270 a.C.) *Vi sono infiniti mondi, sia simili che differenti dal nostro. Poiché gli atomi sono infiniti in numero [...], non vi è ostacolo all'esistenza di infiniti mondi.*

Aristotele (384 – 322 a.C.) *Non possono esserci altri mondi oltre al nostro.*

Avvicinandoci ai nostri tempi, Giordano Bruno (1548 – 1600) è finito al rogo perché te le varie sue affermazioni ritenute blasfeme affermava anche che: *[...] Universo è sinonimo di verità, unità e bontà; per questo l'infinito viene chiamato universo. Dio è glorificato non in uno ma in innumerevoli Soli, non in un'unica Terra, ma in un'infinità di mondi.*

Anche Giacomo Leopardi (1798 – 1837) nella sua opera “Il Copernico”, delle Operette morali scriveva: *[...] quante saranno le stelle e i loro mondi.*

Lo stesso Newton ipotizzava l'esistenza di esopianeti e la sua statura scientifica fu senz'altro uno stimolo per la loro ricerca. Per tutto il XIX secolo vi furono solo falsi annunci di scoperte.

La ricerca scientifica dei pianeti extrasolari inizia nel XX secolo e porta a dei risultati solo verso la fine di questo secolo.

L'inizio della ricerca scientifica dei pianeti extrasolari può essere datata nel 1952, quando l'astronomo russo naturalizzato USA Otto Ljudvigovič Struve (1897 – 1963) accenna a due metodi per l'osservabilità dei pianeti extrasolari: il metodo dei transiti che delle velocità radiali nel suo articolo (riportato nelle pagine seguenti), pubblicato nel The Observatory, 72, 199-200 (1952). Nel secondo e terzo paragrafo della seconda pagina accenna al metodo delle velocità radiali, nel successivo a quello del transito.



Otto Struve

there is a good chance that by using somewhat larger equipment at the next eclipse, definite and accurate measurements of line width will become available.

I should like to say here how indebted we are to Professor Redman who at very short notice acquired a site for us at Khartoum and without whose assistance we should hardly have been able to set up our instruments in the short time available to us.

Mr. Sadler. I ask you to return your thanks to Prof. Brück and to all those who have taken part in this Colloquium. It is my task to predict eclipses, not to observe them but we have all found these preliminary accounts of the results expected, with varying degrees of optimism, most interesting. The meeting is now adjourned at 12^h 40^m.

PROPOSAL FOR A PROJECT OF HIGH-PRECISION STELLAR RADIAL VELOCITY WORK

By Otto Struve

With the completion of the great radial-velocity programmes of the major observatories, the impression seems to have gained ground that the measurement of Doppler displacements in stellar spectra is less important at the present time than it was prior to the completion of R. E. Wilson's new radial-velocity catalogue.

I believe that this impression is incorrect, and I should like to support my contention by presenting a proposal for the solution of a characteristic astrophysical problem.

One of the burning questions of astronomy deals with the frequency of planet-like bodies in the galaxy which belong to stars other than the Sun. K. A. Strand's¹ discovery of a planet-like companion in the system of 61 Cygni, which was recently confirmed by A. N. Deitch² at Pulkovo, and similar results announced for other stars by P. Van de Kamp³ and D. Reuyl and E. Holmberg⁴ have stimulated interest in this problem. I have suggested elsewhere that the absence of rapid axial rotation in all normal solar-type stars (the only rapidly-rotating G and K stars are either W Ursae Majoris binaries or T Tauri nebular variables,⁵ or they possess peculiar spectra⁶) suggests that these stars have somehow converted their angular momentum of axial rotation into angular momentum of orbital motions of planets. Hence, there may be many objects of planet-like character in the galaxy.

But how should we proceed to detect them? The method of direct photography used by Strand is, of course, excellent for nearby binary systems, but it is quite limited in scope. There seems to be at present no way to discover objects of the mass and size of Jupiter; nor is there much hope that we could discover objects ten times as large in mass as Jupiter, if they are at distances of one or more astronomical units from their parent stars.

But there seems to be no compelling reason why the hypothetical stellar planets should not, in some instances, be much closer to their parent stars than is the case in the solar system. It would be of interest to test whether there are any such objects.

We know that *stellar* companions can exist at very small distances. It is not unreasonable that a planet might exist at a distance of 1/50 astronomical unit, or about 3,000,000 km. Its period around a star of solar mass would then be about 1 day.

We can write Kepler's third law in the form $V^3 \sim \frac{1}{P}$. Since the orbital velocity of the Earth is 30 km/sec, our hypothetical planet would have a velocity of roughly 200 km/sec. If the mass of this planet were equal to that of Jupiter, it would cause the observed radial velocity of the parent star to oscillate with a range of ± 0.2 km/sec—a quantity that might be just detectable with the most powerful Coudé spectrographs in existence. A planet ten times the mass of Jupiter would be very easy to detect, since it would cause the observed radial velocity of the star to oscillate with ± 2 km/sec. This is correct only for those orbits whose inclinations are 90° . But even for more moderate inclinations it should be possible, without much difficulty, to discover planets of 10 times the mass of Jupiter by the Doppler effect.

There would, of course, also be eclipses. Assuming that the mean density of the planet is five times that of the star (which may be optimistic for such a large planet) the projected eclipsed area is about 1/50th of that of the star, and the loss of light in stellar magnitudes is about 0.02. This, too, should be ascertainable by modern photoelectric methods, though the spectrographic test would probably be more accurate. The advantage of the photometric procedure would be its fainter limiting magnitude compared to that of the high-dispersion spectrographic technique.

Perhaps one way to attack the problem would be to start the spectrographic search among members of relatively wide visual binary systems, where the radial velocity of the companion can be used as a convenient and reliable standard of velocity, and should help in establishing at once whether one (or both) members are spectroscopic binaries of the type here considered.

Berkeley Astronomical Department,
University of California.

1952 July 24.

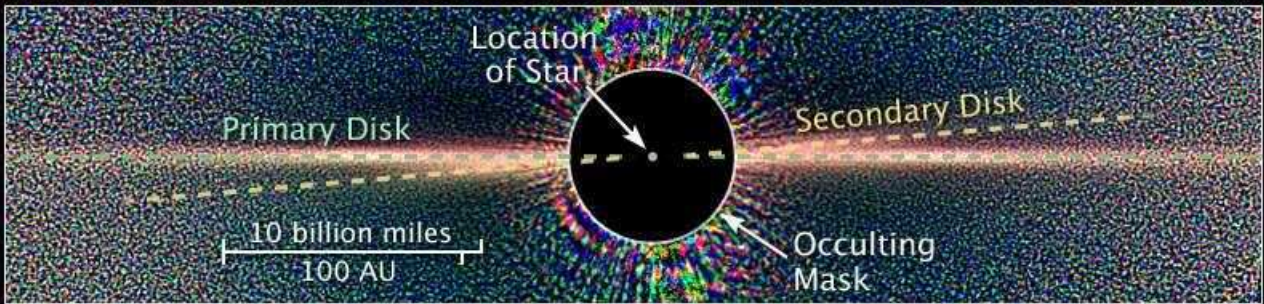
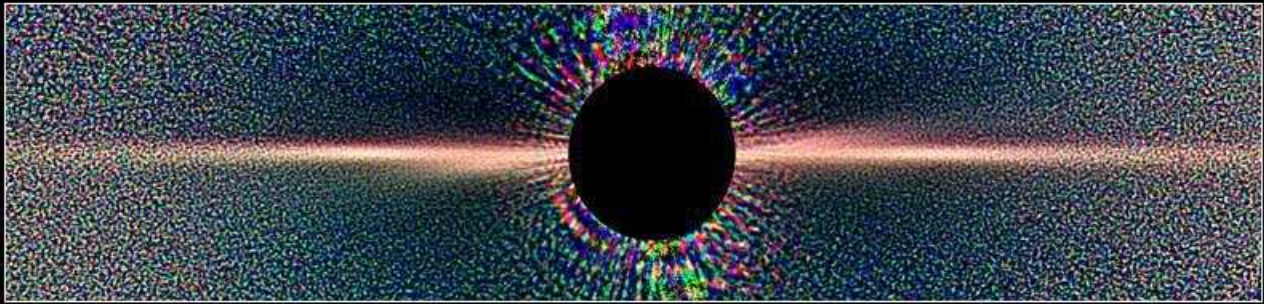
References

1. *A.J.*, **51**, 12, 1944; *Pub. A.S.P.*, **55**, 29, 1952.
2. *Izvestia Gl. Astr. Obs., Poulkovo*, **18**, No. 146, 1951.
3. *A.J.*, **51**, 7, 1944.
4. *Ap. J.*, **97**, 41, 1943.
5. See G. Herbig's paper presented at the Victoria 1952 meeting of the A.A.S. and A.S.P.
6. See P. W. Merrill's note on HD 117555 in *Pub. A.S.P.*, **60**, 382, 1948.

Nel 1984 avviene la scoperta che inizia ad aprire un nuovo orizzonte: attorno alla stella β Pictoris c'è un disco di materia ... e un pianeta!

Beta Pictoris

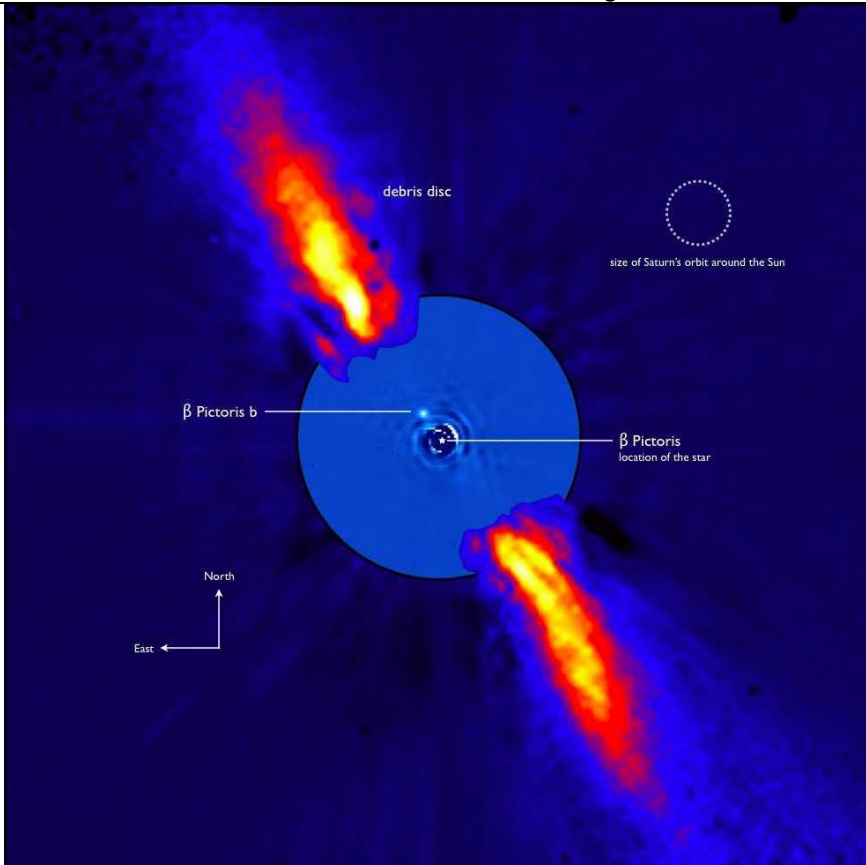
Hubble Space Telescope ■ ACS/HRC



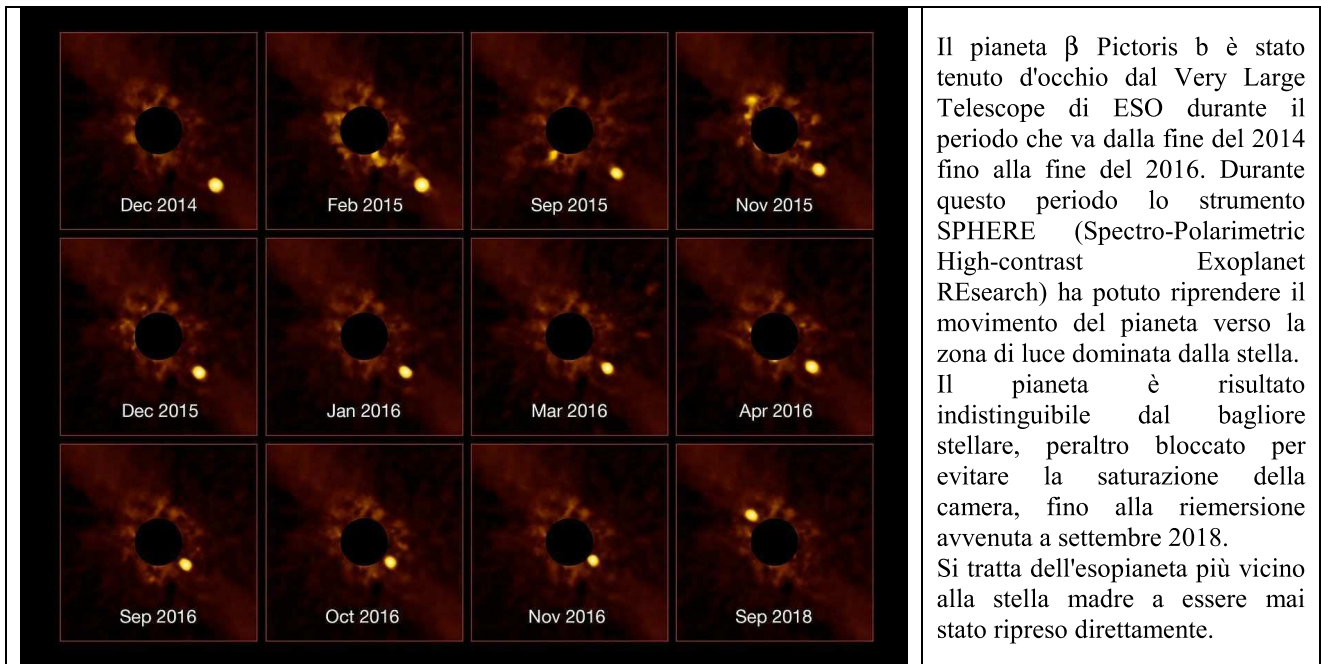
NASA, ESA, and D. Golimowski (Johns Hopkins University)

STScI-PRC06-25

Immagine Hubble



Questa immagine composta rappresenta l'ambiente vicino di β Pictoris visto nel vicino infrarosso. L'ambiente viene rivelato dopo la sottrazione dell'alone stellare molto più luminoso. La parte esterna dell'immagine mostra la luce riflessa sul disco di polvere, come osservato nel 1996 (immagine sopra); la parte interna è stata rivelata a 3,6 micron con NACO sul Very Large Telescope. Il pianeta è 1000 volte più debole della stella, allineata con il disco, ad una distanza proiettata di 8 volte la distanza Terra-Sole. Entrambe le parti dell'immagine sono state ottenute su telescopi ESO dotati di ottica adattiva.



Il pianeta β Pictoris b è stato tenuto d'occhio dal Very Large Telescope di ESO durante il periodo che va dalla fine del 2014 fino alla fine del 2016. Durante questo periodo lo strumento SPHERE (Spectro-Polarimetric High-contrast Exoplanet REsearch) ha potuto riprendere il movimento del pianeta verso la zona di luce dominata dalla stella. Il pianeta è risultato indistinguibile dal bagliore stellare, peraltro bloccato per evitare la saturazione della camera, fino alla riemersione avvenuta a settembre 2018. Si tratta dell'esopianeta più vicino alla stella madre a essere mai stato ripreso direttamente.

Negli anni successivi vengono fatti diversi annunci di scoperte.

Nel 1989 Latham scopre un corpo di massa non inferiore a $11 M_J$ in orbita attorno alla stella HD 114762.

Nel 1991 Alexander Wolszczan e Dale Frail identificano due pianeti di massa paragonabile alla massa terrestre, ma in orbita attorno ad una pulsar (PSR 1257+12).

Nel 1993 Gordon Walker sostiene l'ipotesi che le oscillazioni della velocità radiale della stella γ Cephei potrebbero essere dovute alla presenza un pianeta di circa $2 M_J$.

Sono rilevamenti troppo "strani" e le tecniche ancora non sufficientemente precise; la comunità scientifica non prende troppo sul serio questi eventi.

Il 6 ottobre 1995, a Firenze, venne annunciata la scoperta di un pianeta attorno alla stella 51 Pegasi, molto simile al Sole, distante 50 anni luce. Il pianeta è circa 160 volte più massiccio della Terra e orbita attorno alla sua stella in poco più di 4 giorni a 7,5 milioni di km. Gli scopritori sono: Michel Mayor e Didier Queloz dell'Osservatorio di Ginevra.

Il 6 ottobre 1995 può essere considerata la data che ha segnato l'inizio della ricerca sistematica e convinta di pianeti extrasolari.

Al 4 giugno 2019, sono confermati 4072 pianeti extrasolari intorno a 3043 stelle. 660 sono sistemi multipli. Ci sono anche 2473 candidati da confermare intorno a 2292 stelle. [fonte: exoplanet.eu].

Oggi si usa classificare i pianeti extrasolari in funzione del loro raggio R in:

Pianeti di taglia terrestre se $R < 1,25R_T$ (R_T è il raggio della Terra)

Superterre se $1,25R_T < R < 2R_T$

Pianeti di taglia nettuniana se $2R_T < R < 6R_T$

Pianeti taglia gioviana se $6R_T < R < 15R_T$

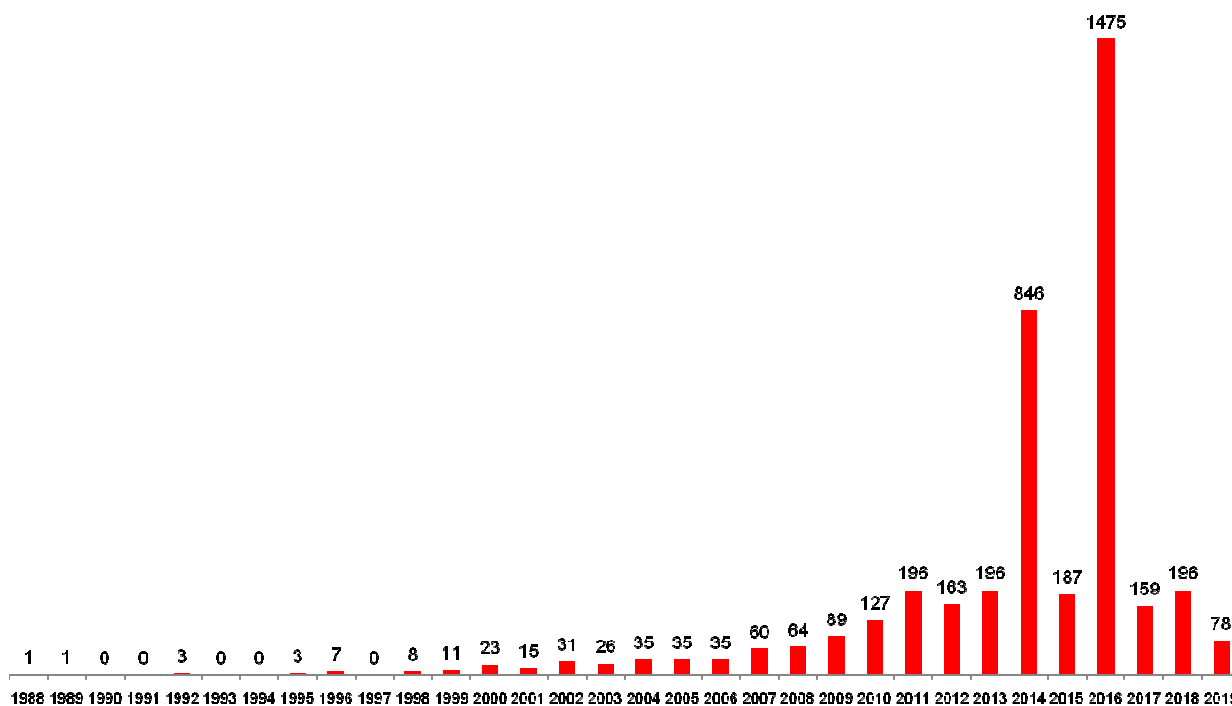
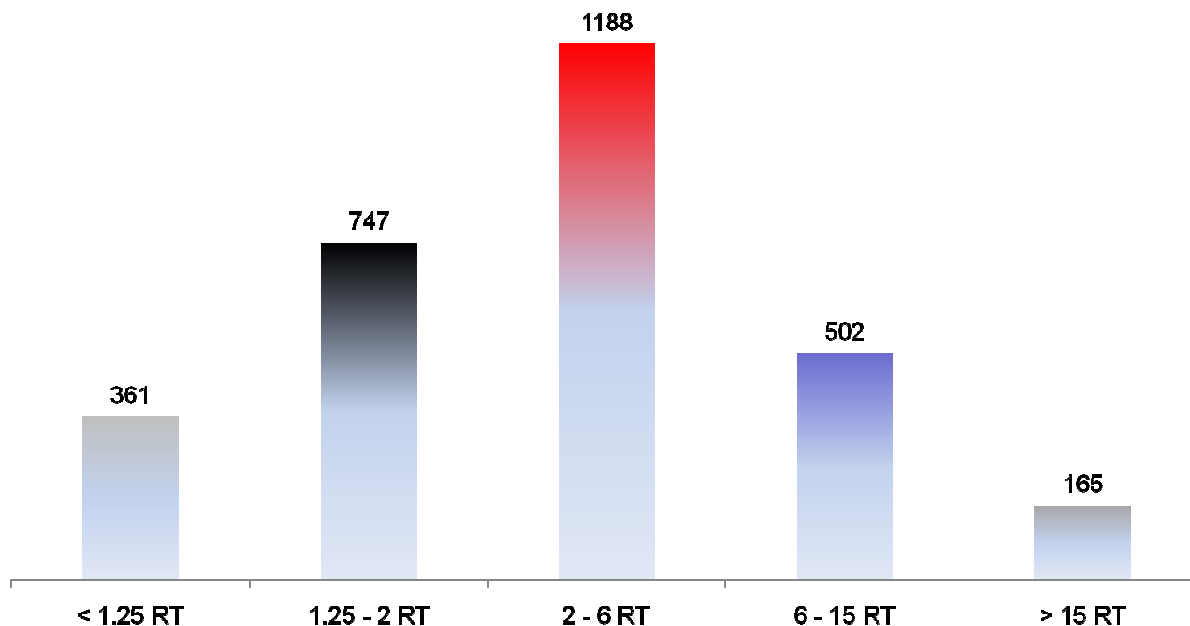
Supergiovi se $R > 15R_T$

Nella figura sotto la situazione attuale.



Mayor a sinistra a Queloz a destra

Attualmente l'IAU ha stabilito di indicare il nome del pianeta extrasolare facendo seguire al nome della stella una lettera dell'alfabeto a partire dalla b. Per esempio il primo pianeta si chiama 51Pegasi-b



Andamento delle scoperte dei pianeti extrasolari (numero di scoperte per anno)

12.4 – I metodi per la rivelazione dei pianeti extrasolari

I metodi per la rivelazione dei pianeti extrasolari sono sostanzialmente 2: metodi diretti e metodi indiretti. Nell'immagine successiva i vari metodi e

DIRETTI(127)

OSSERVAZIONE DIRETTA(127)

INDIRETTI(3945)

- METODI DINAMICI:** – Metodo astrometrico (8)
– Metodo della velocità radiale (839)
– Metodo del Pulsar Timing (42)

- METODI FOTOMETRICI:** – Metodo di microlensing (96)
– Metodo del transito (2946)
– Metodo TTV (10)

- METODI ALTERNATIVI:** (4) – Tracce di dischi di polveri
– Emissione radio
– Emissione di onde gravitazionali

I metodi per la rivelazione dei pianeti extrasolari con indicati i numeri delle scoperte

12.4.1 – Metodi diretti

Un pianeta che orbita intorno ad una stella di luminosità L^* , avrà una luminosità L_p che dipende dalla lunghezza d'onda λ , dal raggio planetario R_p e dal semiasse maggiore dell'orbita:

$$[12.3] \quad \frac{L_p}{L^*} = p(\lambda, \alpha) \left(\frac{R_p}{a} \right)^2$$

dove $p(\lambda, \alpha)$ è una funzione che tiene conto dell'inclinazione dell'orbita e delle proprietà dell'atmosfera del pianeta, a è il semiasse maggiore dell'orbita e α è la distanza angolare del pianeta dalla stella.

È estremamente difficile con i telescopi attuali riuscire a vedere direttamente un pianeta intorno ad una stella perché questa è molto più luminosa del pianeta. A circa 16 anni luce di distanza, il Sole è un miliardo di volte più luminoso di Giove. A causa delle diverse temperature della stella e del pianeta, nell'infrarosso, il rapporto migliora di un fattore 10^5 . Per il sistema Sole-Giove ciò accade per $\lambda = 20 \mu\text{m}$. Problemi come la diffrazione dello strumento e il seeing atmosferico, nei moderni telescopi, vengono superati con tecniche molto sofisticate^{[9][10]}.



2M1207-b, uno dei pianeti extrasolari scoperti per osservazione diretta

^[9] Una di queste tecniche è la cosiddetta ottica adattiva (AO, Adaptive Optics). La luce, descritta tramite la teoria ondulatoria, si rappresenta tramite il suo fronte d'onda e la relativa ampiezza (intensità della luce). Una sorgente puntiforme (una stella) emette un fronte d'onda sferico che, data la distanza, giunge ai rivelatori (occhi o telescopi) come piano. La turbolenza atmosferica distorce in maniera il fronte d'onda facendole perdere la forma piana. Maggiore è la turbolenza peggiore sarà il potere risolutivo di un sistema ottico, è il problema del seeing. La conoscenza della forma effettiva del fronte d'onda permette, tramite un sistema di uno o più specchi a deformazione controllabile, di

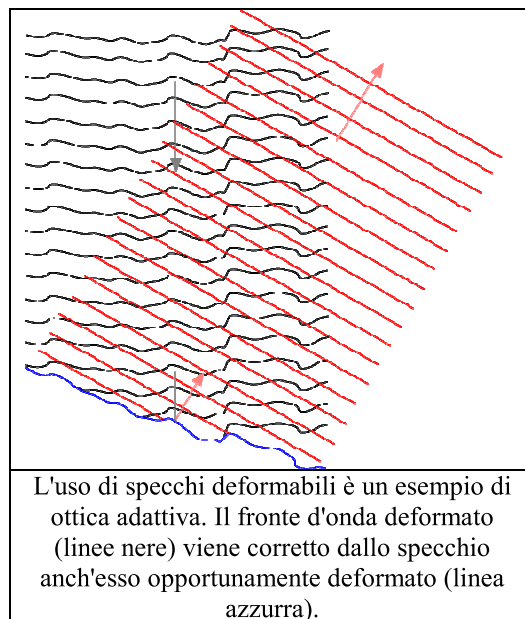
La stragrande maggioranza dei pianeti extrasolari viene scoperta con metodi indiretti.

12.4.2 – Metodo astrometrico

Il metodo astro metrico consiste nella misurazione dello spostamento di una stella sulla sfera celeste dovuto alla presenza di un pianeta. A causa della presenza di uno o più pianeti, una stella ha un moto attorno al centro di massa del sistema; la proiezione di tale moto su un piano perpendicolare alla linea di vista, a seconda dell'inclinazione dell'orbita è un'ellisse con l'asse minore più o meno accentuato.

Giove, visto alla distanza di 10 anni luce, provoca al Sole un'oscillazione di circa 3,2 millesimi di secondo d'arco in circa 12 anni. La Terra, alla stessa distanza, solo 2 milionesimi di secondo d'arco. Con questo metodo, al momento e da Terra, si possono rilevare solo pianeti tipo Giove, ossia pianeti molto massicci e molto vicini alla propria stella: i cosiddetti pianeti gioviani caldi (hot Jupiter). Un pianeta gioviano caldo ha una massa confrontabile con quella di Giove, ma orbita a meno di 0,05 UA (7,5 milioni di chilometri) dalla propria stella, ovvero è otto volte più vicino ad essa rispetto a quanto Mercurio dista dal Sole. La temperatura tipica di questi oggetti, nella parte rivolta verso il loro sole, raggiunge facilmente migliaia di gradi.

Grande interesse viene riposto nei dati della missione Gaia che è in grado di rilevare tali spostamenti.



12.4.3 – Metodo delle velocità radiali

La presenza di un pianeta intorno ad una stella produce in essa una variazione della componente radiale della velocità. Analizzando gli spostamenti delle sue righe spettrali, dovuti all'effetto Doppler^[11], si possono dedurre alcune caratteristiche fisiche del pianeta.

recuperare una forma più simile a quella piana, precedente all'ingresso in atmosfera (vedi figura). Una correzione perfetta corrisponde ad un fronte d'onda piano che una volta focalizzato restituisce l'immagine di diffrazione del telescopio. Questa è l'idea che sta alla base del principio di funzionamento delle ottiche adattive, la cui reale implementazione richiede tuttavia accorgimenti tecnici complessi e una o più sorgenti guida (una stella artificiale creata nell'alta atmosfera con un laser). La tecnologia delle ottiche adattive si sta diffondendo e perfezionando sempre più, permettendo di ottenere risultati di notevole qualità.

^[10] Una delle possibili tecniche di osservazione diretta fa uso dei cosiddetti vortici ottici (detti anche dislocazione a vite, o singolarità di fase). La luce può essere fatta ruotare come un cavatappi lungo l'asse di propagazione; a causa di questa rotazione, le onde luminose sull'asse si annullano reciprocamente. Quando è proiettato su una superficie piana, un vortice ottico appare come un anello di luce, con al centro una regione circolare scura. Questa figura di propagazione, a forma elicoidale con un'area buia al centro, è chiamato "vortice ottico". Nel 2010, un team del Jet Propulsion Laboratory della NASA ha dimostrato che un coronografo a vortice potrebbe permettere piccole ampiezze di osservazione per osservare direttamente i pianeti. La fattibilità è stata dimostrata non scoprendo corpi celesti sconosciuti ma osservando alcuni pianeti extrasolari già oggetto di rilevazione diretta, orbitanti attorno alla stella HR 8799: l'osservazione diretta è stata portata a termine usando solo una piccola limitata porzione (1,5 metri di diametro) del telescopio Hale. Nel 2016, L'utilizzo combinato di un coronografo Vortice con la NIRC-2 del telescopio Keck hanno consentito lo studio di un disco protoplanetario e di una nana bruna in orbita a circa 23 UA dalla stella compagna.

^[11] In astronomia per misurare lo spostamento delle righe spettrali di un corpo celeste si utilizza la quantità: $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$

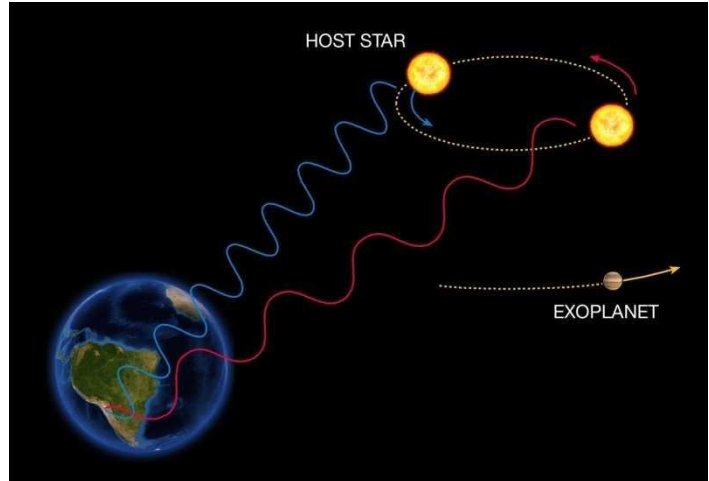
Si nota facilmente che se $z > 0$, $\lambda' > \lambda$ e si ha uno spostamento verso il rosso, al contrario, se $z < 0$, $\lambda' < \lambda$ e si ha

Ricordiamo che l'effetto Doppler si esprime mediante la relazione:

$$[12.4] \quad \lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v_r}{c} \right)$$

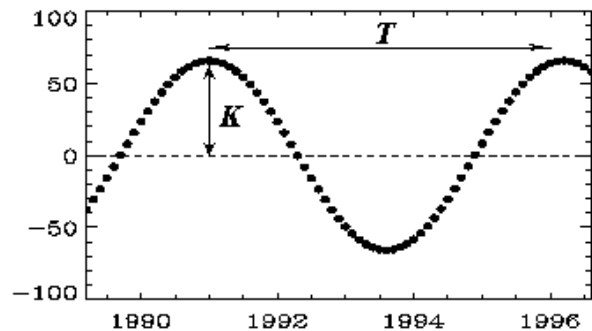
dove λ' e λ sono rispettivamente la lunghezza d'onda osservata e quella emessa dalla sorgente, v_r la velocità radiale della sorgente e c la velocità della luce nel vuoto.

Se la geometria del sistema stella-pianeta-osservatore è adeguata, l'osservatore vedrà la stella (che orbita attorno al centro di massa del sistema stella-pianeta, avvicinarsi ed allontanarsi e quindi, per effetto Doppler le righe spettrali si sposteranno, alternativamente, verso il blu e verso il rosso. Gli spostamenti dello spettro sono molto piccoli! Giove produce sul Sole uno spostamento delle righe di $\sim 10^{-5}$ nm.



Nel caso più semplice in cui l'orbita del pianeta intorno alla stella sia circolare e che il piano che la contiene, contenga anche l'osservatore, il grafico della velocità radiale in funzione del tempo è una sinusoide.

Il modulo K dell'ampiezza dell'oscillazione della velocità radiale di una stella avente massa M_* , dovuta all'interazione con un oggetto di massa M_p , è dato da



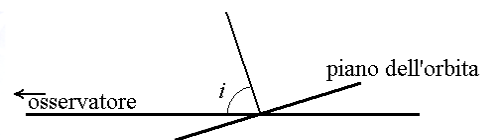
$$[12.5] \quad K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_*)^{2/3}} (1 - e^2)^{-1/2}$$

Dove P ed e sono il periodo e l'eccentricità dell'orbita e i è l'angolo che il piano orbitale forma con il piano perpendicolare alla linea di vista (osservatore - stella).

Dalla misurazione della variazione della velocità radiale si deduce il periodo P e l'eccentricità; essendo $M_p \ll M_*$, dalla terza legge di Keplero si ricava il semiasse maggiore dell'orbita.

Si ottiene quindi una stima dalla massa del pianeta:

$$[12.6] \quad M_p \sin i \cong \left(\frac{P}{2\pi G} \right)^{1/3} \cdot K \cdot M_*^{2/3} \sqrt{1 - e^2}$$



uno spostamento verso il blu. Si vede facilmente che utilizzando la [12.4] si ha $z = v_r/c$. La [12.4] deve essere però corretta nel caso di velocità relativistiche della sorgente (per molte galassie conosciute si ha $z > 1$ e ciò implicherebbe

$v_r > c$). L'espressione corretta in questo caso è $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1$.

Nella maggior parte dei casi non si conosce l'angolo di inclinazione dell'orbita i e quindi si può determinare solo un limite inferiore per la massa in quanto $M_p \sin i \leq M_p$.

Oltre alla stima della massa del pianeta, la conoscenza dell'intera curva della velocità radiale porta alla determinazione dei parametri di un'orbita kepleriana.

Il metodo delle velocità radiali è quello che per primo ha dato dei risultati significativi.

12.4.4 – Pulsar Timing

Il metodo consiste nella misurazione delle variazioni degli intervalli di emissioni di una pulsar. Una pulsar, ruotando, emette onde radio a intervalli estremamente regolari. Esistono due tipi di pulsar:

- Normal Pulsar, con periodi di rotazione dell'ordine del secondo
- Millisecond Pulsar, con periodi dell'ordine del millisecondo

Le Millisecond Pulsar hanno un periodo di rotazione oltre che molto breve anche molto stabile nel tempo. L'ordine di variazione è di un secondo in 10^{19} s, contro i 10^{15} delle Normal Pulsar. Piccole anomalie negli intervalli delle emissioni possono essere usate per tracciare cambiamenti nel moto della pulsar causati dalla presenza di uno o più pianeti. Grazie alla precisione delle attuali misure nelle radiofrequenze si può apprezzare una variazione della frequenza d'arrivo dell'ordine $\frac{\Delta v}{v} \approx 10^{-11}$ che equivale ad una velocità radiale di 1 cm/s. Ciò permette di rilevare pianeti con masse inferiori a quelle della Terra.

12.4.5 – Metodo del microlensing

Quando la luce proveniente da una stella lontana passa in prossimità di una stella più vicina viene incurvata producendo un aumento di luminosità per l'effetto relativistico di lente gravitazionale.

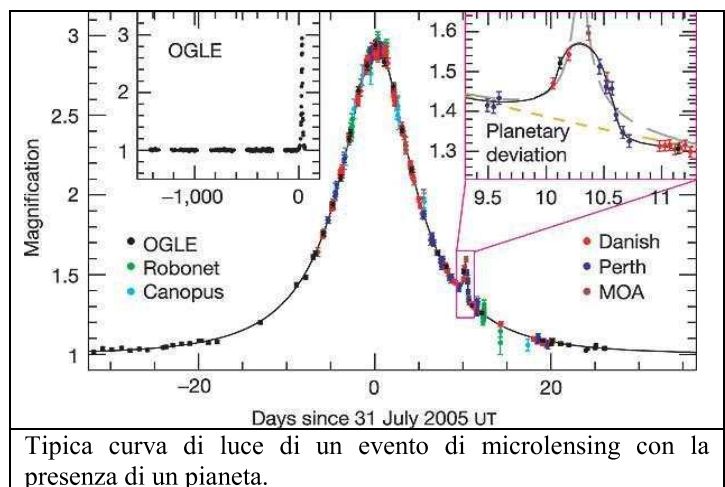
La geometria della lente porta ad un aumento di magnitudine della stella misurabile. Quando si scopre un evento di microlensing si analizza la curva di luce della stella alla ricerca di difetti della lente dovuti alla presenza di un pianeta. Infatti se la stella vicina ha un pianeta si produce un secondo picco di luminosità.

L'effetto fu proposto nel 1991

dall'astronomo polacco-americano Bohdan Paczyński della Princeton University. I primi successi si ebbero nel 2002 quando un gruppo di astronomi polacchi (Andrzej Udalski, Marcin Kubiak e Michal Szymanski da Varsavia e lo stesso Paczynski) perfezionarono un metodo che poteva essere utilizzato nell'ambito del progetto OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment), finanziato da NASA e NSF. In un mese di lavoro scoprirono 46 oggetti, molti dei quali potevano essere pianeti.

Gli eventi-lente sono brevi, solo alcuni giorni o settimane, perché i corpi osservati e la Terra si muovono l'una rispetto all'altra. Comunque sono stati misurati più di 1000 eventi-lente negli ultimi dieci anni.

Questo metodo permette di scoprire pianeti di massa equiparabile a quella terrestre usando le tecnologie oggi disponibili, l'osservazione non può essere ripetuta poiché l'allineamento necessario capita raramente. La maggior parte di stelle osservate con questo metodo dista migliaia di anni luce



il che rende problematica la scoperta di tali pianeti con mezzi più tradizionali, però osservando con continuità un sufficiente numero di stelle si può avanzare una stima della loro frequenza nella nostra galassia.

12.4.6 – Tracce di dischi a polveri

Un approccio recente consiste nello studio delle nubi di polveri.

Molti sistemi solari contengono una quantità notevole di polvere, la cui presenza è dovuta a passaggi di comete e di collisioni tra asteroidi e pianeti. Questa polvere forma un disco attorno alla stella, assorbe una parte della sua radiazione e la riemette come radiazione infrarossa.

Poiché la pressione di radiazione esercitata dalla stella spingerebbe le particelle di polvere nello spazio interstellare, in un tempo scala relativamente breve questi dischi dovrebbero esaurirsi. La loro rilevazione indica quindi una continua formazione di tale materiale dovuto a nuove collisioni, e fornisce una evidenza indiretta della presenza di piccoli oggetti quali comete ed asteroidi che orbitano attorno alla stella madre. Il rilevamento di una eventuale cavità centrale nel disco è compatibile con l'ipotesi dell'esistenza di un pianeta che sta spazzando la polvere presente nella propria orbita, mentre la presenza di "grumi" potrebbe essere determinata dall'influenza gravitazionale di un pianeta. Entrambe queste caratteristiche sono presenti nel disco di polvere che circonda ϵ Eridani e suggeriscono la presenza di un pianeta con un raggio orbitale di circa 40 UA.

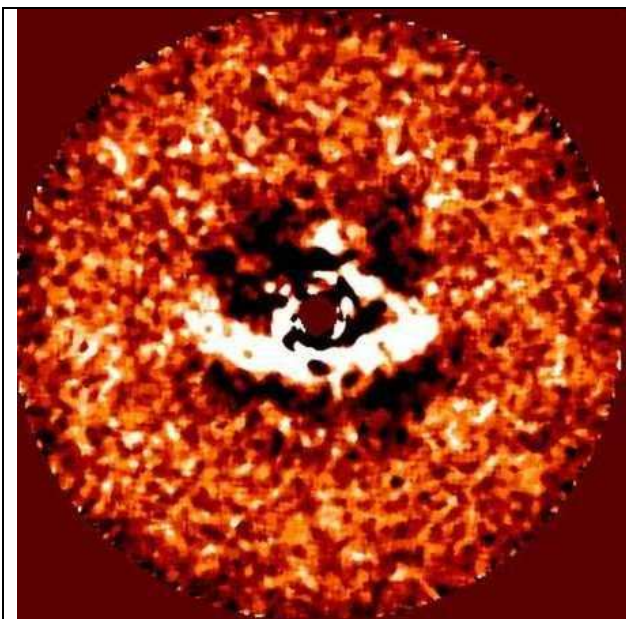
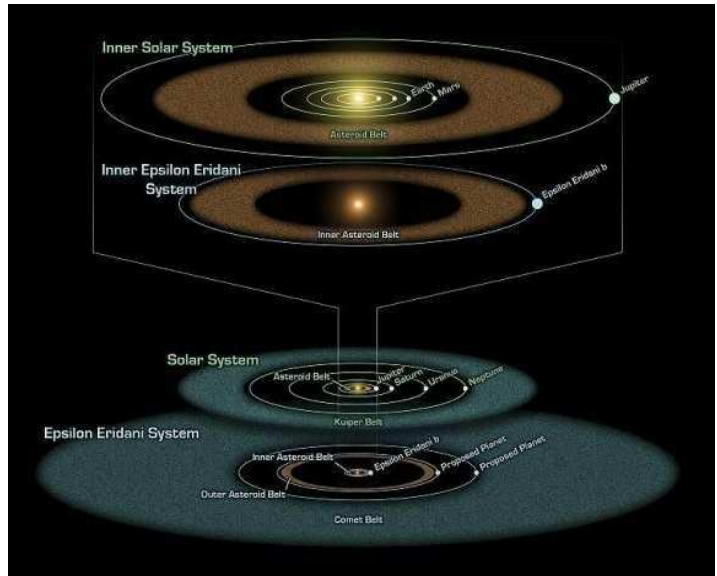


Immagine del Telescopio Subaru del disco protoplanetario intorno alla stella LkCa 15, una stella di pochi milioni di anni, situata a circa 450 a.l.

Precedenti osservazioni avevano rilevato la presenza di un vuoto al centro del disco; le nuove immagini mostrano una forte luce brillante dalla superficie del disco che evidenzia il bordo di tale vuoto, così grande che potrebbe contenere il sistema solare.

Ha una forma ellittica, ma non è centrato nella stella; ciò fa ipotizzare la presenza di uno o più pianeti.

Il nostro Sistema Solare contiene una quantità di polvere pari ad un decimo della massa della Luna; questa quantità è insignificante nel totale della massa, ma il volume è così elevato che, da grandi

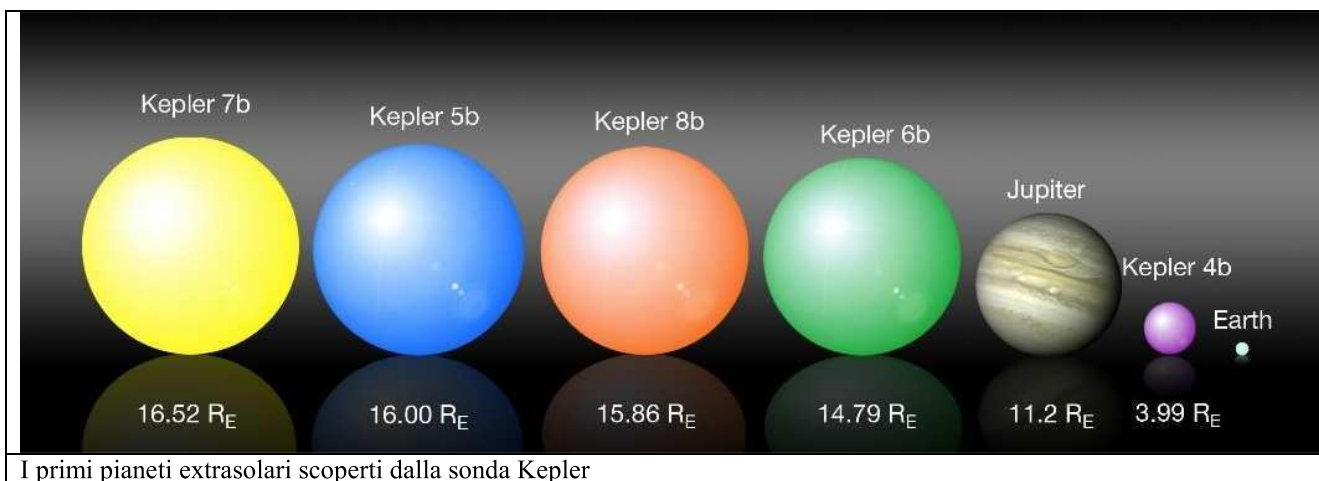
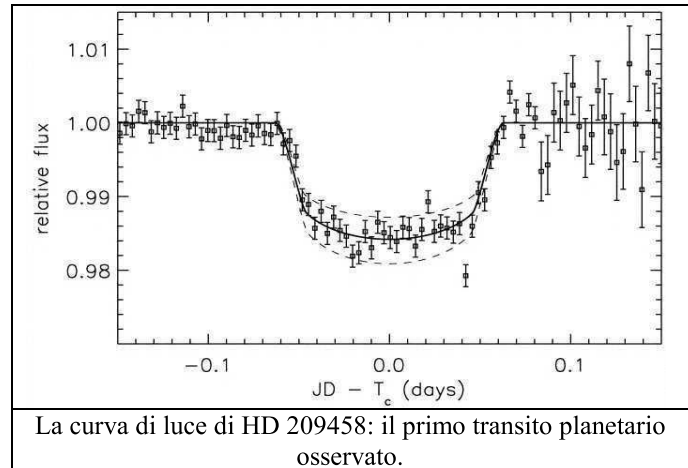
distanze, l'emissione infrarossa della polvere sarebbe 100 volte più intensa di quella di tutti i pianeti. Questo metodo può oggi essere utilizzato anche da Terra, ma le osservazioni migliori vengono dallo spazio.

12.4.7 – Metodo del transito

Se un pianeta passa davanti alla sua stella provoca una piccola eclisse e la luminosità della stella diminuisce leggermente.

Nel 1971 F. Rosenblatt propone una prima discussione approfondita dei requisiti necessari per individuare pianeti mediante fotometria di transito. Nel 1984 Borucki & Summers discutono sulla necessità di avere a disposizione rilevatori di alta precisione per effettuare osservazioni fuori dell'atmosfera e monitorare migliaia di stelle per rilevare transiti. Nel 1985 sempre Borucki, con Scargle Hudson discutono delle limitazioni fotometriche a causa della variabilità stellare.

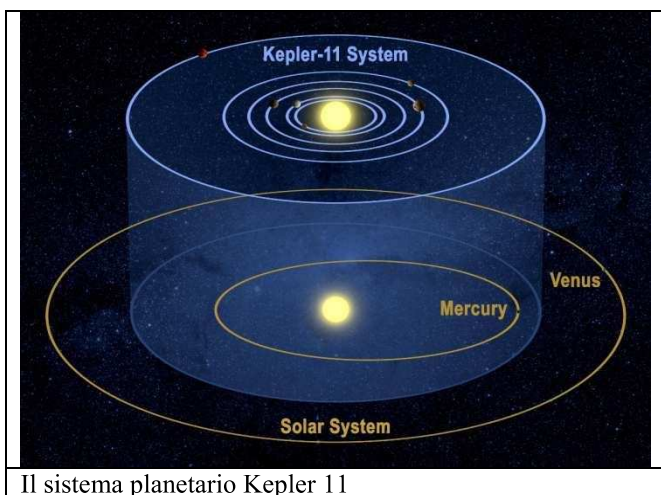
Ancora Borucki e altri, tra il 1987 e il 1988, effettuano test di rivelatori a semiconduttore di silicio per fotometria di transito e provano un fotometro multicanale basato su fibre ottiche. Nel 1995 Robinson e altri verificano i limiti dei CCD per la fotometria differenziale ed effettuano la prima dimostrazione di rivelatori di precisione per rilevare pianeti simili alla Terra. Solo nel 2000 Charbonneau e altri pubblicano della prima osservazione del transito di un pianeta extrasolare e ancora nel 2002 Charbonneau e altri utilizzano la spettroscopia durante un transito per analizzare l'atmosfera di un pianeta extrasolare.



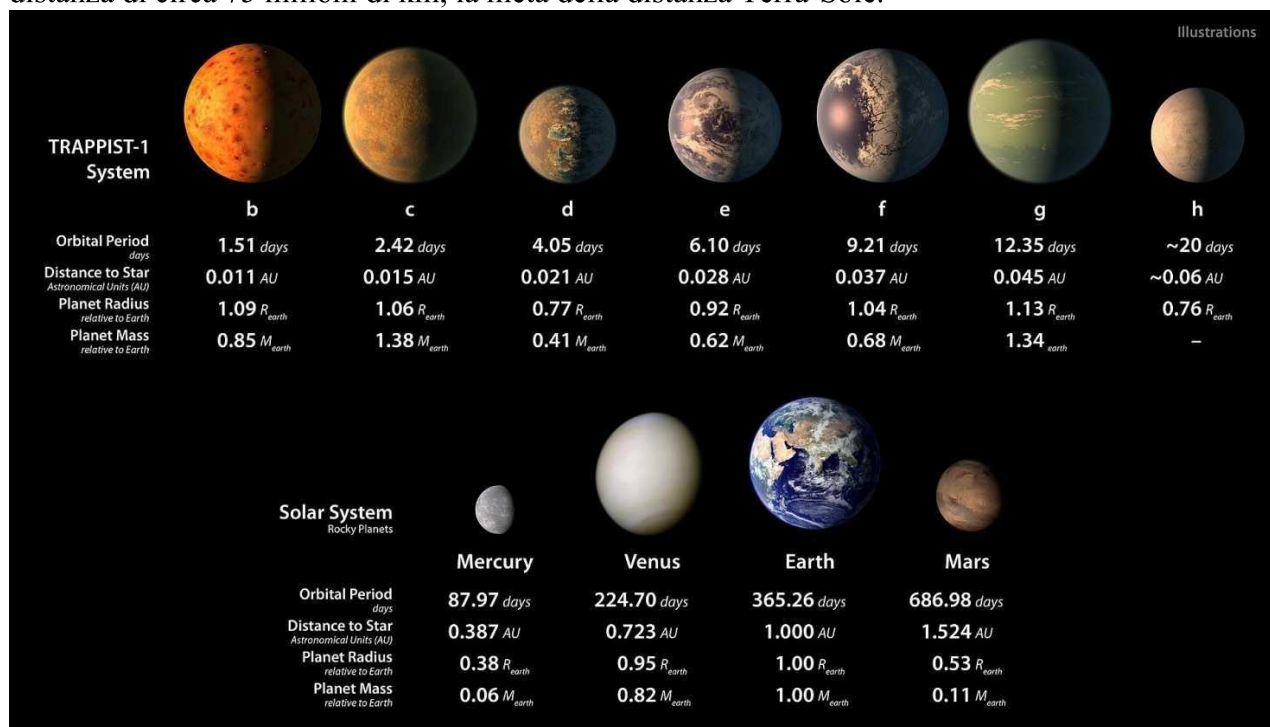
Nel 2006 viene lanciato il satellite CoRoT (CONvection ROTation and planetary Transits, una missione dell'agenzia spaziale francese (CNES) in cooperazione con Agenzia Spaziale Europea. Gli obiettivi principali della missione sono: l'esecuzione di misure di astrosismologia, utili per ricavare informazioni sulla struttura interna delle stelle e la ricerca di pianeti extrasolari, in particolare di pianeti di tipo terrestre, con il metodo dei transiti. Entrambi gli studi sono condotti valutando minime variazioni nella luminosità della stella oggetto di osservazione. Per eseguire tali misurazioni la sonda monta un telescopio da 27 cm di diametro con quattro CCD. Il satellite, piazzato su un'orbita ad un'altezza di 869 km. Il 5 maggio 2007 viene annunciata la prima scoperta di un pianeta in transito da parte di CoRoT.

Il 7 marzo 2009 ha inizio la missione della NASA Kepler, con il lancio di un telescopio spaziale da Cape Canaveral. Gli strumenti sono in grado di cercare pianeti extrasolari della dimensione della Terra e anche più piccoli. Possono rilevare la luminosità di oltre 100.000 stelle per più di quattro anni e secondo i ricercatori potranno portare alla scoperta di molte centinaia di pianeti extrasolari. Il 4 gennaio 2010 la NASA ha annunciato la scoperta di 5 esopianeti, Kepler-4b, 5b, 6b, 7b e 8b. Sono pianeti delle dimensioni che vanno da quelle di Nettuno ad addirittura più grandi di Giove. Sono caratterizzati da temperature molto elevate (dai 2200 ai 3000 gradi) e le stelle attorno a cui ciascun pianeta ruota sono molto più grandi e calde del nostro Sole.

L'11 gennaio 2011 la NASA ha annunciato la scoperta del pianeta roccioso di tipo terrestre Kepler-10b, con diametro 1,4 volte quello della Terra. Orbita attorno al suo sole (molto simile al Sole e distante 560 anni luce), ad una distanza di 1/20 quella di Mercurio dal Sole, per cui è del tutto improbabile che possa ospitare acqua allo stato liquido e quindi forme di vita. Il 2 febbraio 2011 è stata annunciata la scoperta di un intero sistema costituito da sei pianeti di roccia e gas in orbita intorno ad una stella nana gialla distante circa 2.000 anni luce. I cinque pianeti più interni del sistema hanno una massa che va da 2,3 a 13,5 volte quella della Terra, con un periodo di rivoluzione che varia da 10 a 47 giorni, mentre il pianeta più esterno, Kepler 11g la cui massa non è stata ancora determinata, ruota intorno alla stella in 118 giorni, ad una distanza di circa 75 milioni di km, la metà della distanza Terra-Sole.



Il sistema planetario Kepler 11



Caratteristiche dei pianeti del sistema Trappist-1

Un altro risultato che ha suscitato molto scalpore negli ambienti scientifici e non è stata la scoperta del sistema di TRAPPIST-1, nota anche come 2MASS J23062928-0502285. Si tratta di una stella nana rossa ultrafredda di classe spettrale M8, distante 39,5 anni luce dal sistema solare, osservabile

nella costellazione dell'Aquario. Attraverso studi resi noti nel maggio 2016 e nel febbraio 2017 è stata annunciata la scoperta, tramite il metodo del transito, di sette esopianeti di dimensioni terrestri orbitanti attorno ad essa. Nella figura sopra le caratteristiche dei sette pianeti

La ricerca di pianeti extrasolari con il metodo del transito può essere effettuata sia da terra, sia dallo spazio. In ogni caso si fa uso di sistemi robotici.

A terra ci sono sia sistemi a campo stretto sia sistemi a largo campo. I sistemi a campo stretto sono costituiti da grandi telescopi che effettuano il monitoraggio di ammassi stellari, o di singole stelle spesso a seguito di scoperte fatte con il metodo della velocità radiale. Il Survey for Transiting Extrasolar Planets in Stellar Systems (STEPSS) ad esempio operava con con telescopi di 1,3 m e 2,4 m coprendo campi di 46×46 e 25×25 arcmin.

I sistemi a largo campo, costituiti da piccoli telescopi, se non da obiettivi fotografici, effettuano invece il monitoraggio di un gran numero di stelle. Ne è un esempio il Vulcan photometer del Lick Observatory, un telescopio di 10 cm di diametro e 30 cm di lunghezza focale. Abbraccia un campo di $7^\circ \times 7^\circ$ con CCD il cui sensore ha 4096×4096 pixel di $9 \mu\text{m}$ di lato. Gli obiettivi sono il monitoraggio continuo di 10000 stelle per periodi di almeno 6 settimane.

I sistemi roborici che hanno funzionato nel recente passato o che sono attualmente in funzione sono: ASP, BEST, GITPO, HATnetwork, MONET, OGLE III, PASS, PISCES, STARE, STELLA, Super WASP, STEPSS, TennAuto Photo Tel, Transitsearch.org, TrES, USTAPS, UNSWEPS, Vulcan, WHAT, XO project, Next-Generation Transit Survey (NGTS), TRAPPIST.

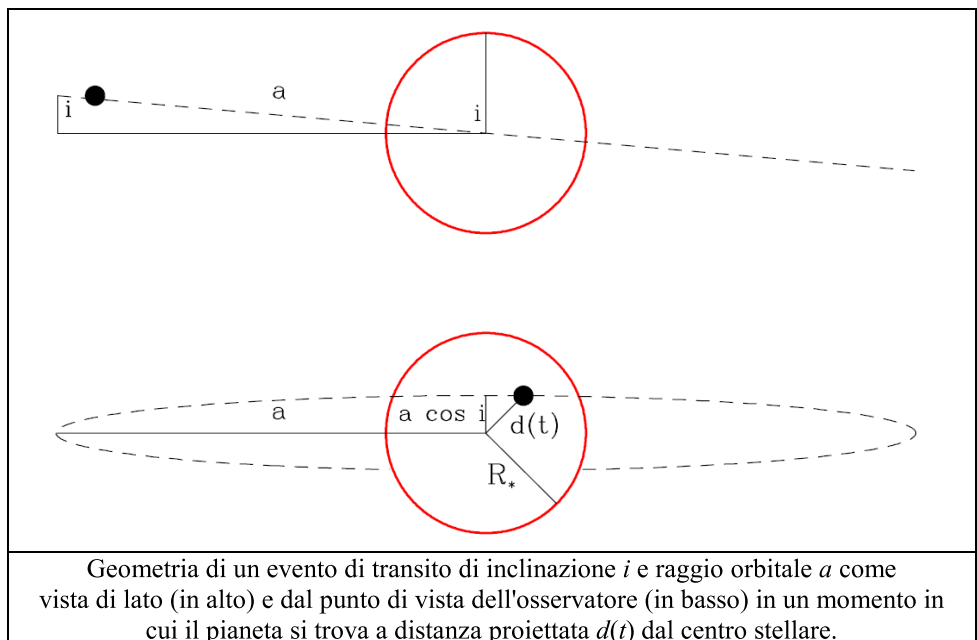
12.4.7.1 – Caratteristiche del transito

I parametri principali che caratterizzano il transito di un pianeta sul disco della propria stella sono: la **durata del transito** e la **profondità**.

Per profondità si intende la diminuzione della luce della stella e può essere espressa in termini di diminuzione di magnitudine, oppure di flusso luminoso, o, molto più spesso in termini percentuali sempre di una delle due grandezze.

Si consideri un pianeta di raggio R_p orbita attorno ad una stella di raggio R_* , massa M^* e si a il semiasse maggiore della sua orbita.

Il transito di un pianeta sul disco stellare sarà visto da un osservatore esterno solo se il piano orbitale è sufficientemente inclinato rispetto al piano del cielo. In particolare, l'inclinazione i deve soddisfare la relazione:



$$[12.7] \quad a \cos i \leq R_* + R_p .$$

Si dimostra che, per un insieme di sistemi planetari con orientamento arbitrario rispetto all'osservatore, la probabilità che l'inclinazione soddisfi il criterio geometrico per un transito è:

$$[12.8] \quad p_{transito} = \frac{\int_0^{(R_p+R^*)/a} d(\cos i)}{\int_0^1 d(\cos i)} = \frac{R_p + R^*}{a} \approx \frac{R^*}{a}$$

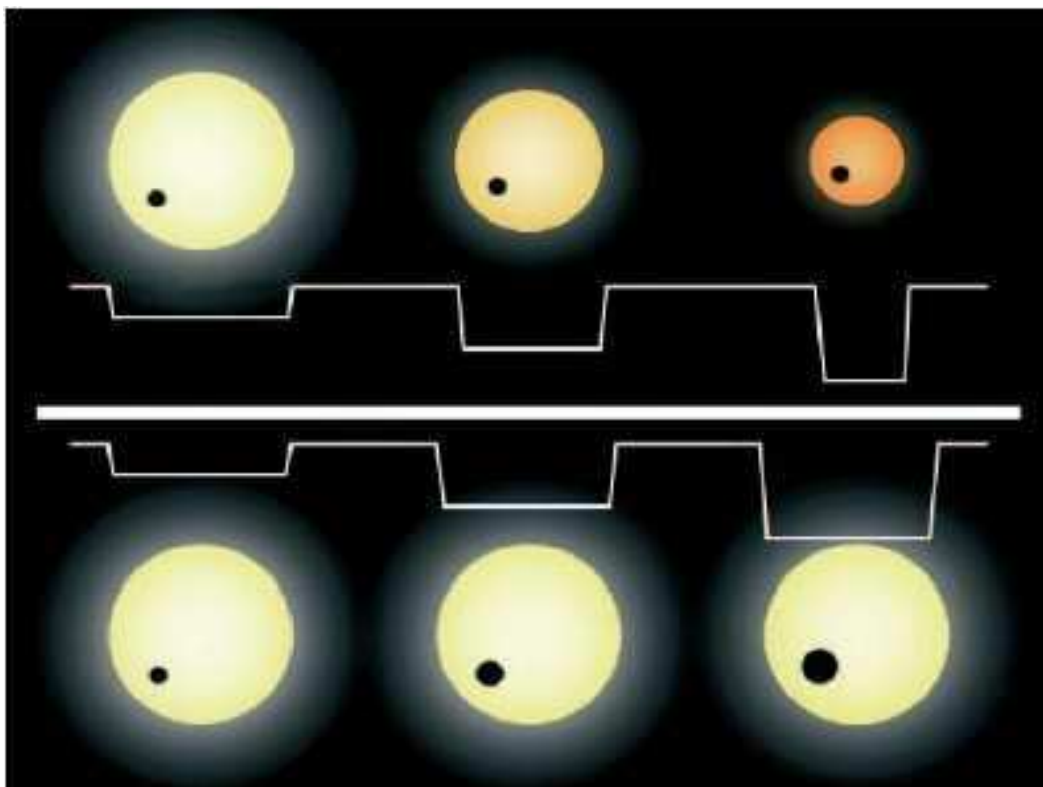
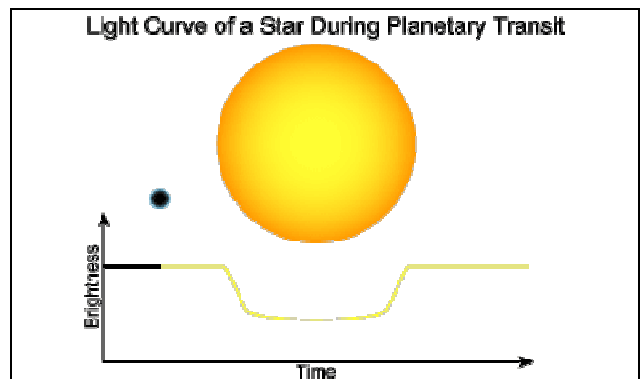
Nella [12.8] si è tenuto conto che in genere $R_p \ll R^*$.

Se F_λ^* è il flusso della stella alla lunghezza d'onda λ , ΔF_λ^* la variazione del flusso durante il transito, la massima variazione frazionale nel flusso osservato è dato da:

$$[12.9] \quad \max \frac{\Delta F_\lambda^*}{F_\lambda^*} = \frac{\pi F_\lambda^* R_p^2}{\pi F_\lambda^* R^{*2} + \pi F_{\lambda,p} R_p^2} \approx \left(\frac{R_p}{R^*} \right)^2$$

La forma della profondità del transito dipenderà l'angolo di inclinazione, il rapporto tra il raggio del pianeta e quello della stella e il grado di oscuramento al bordo nella banda di osservazione. Il fenomeno dell'oscuramento al bordo (anche noto come limb darkening, dalla lingua inglese) è responsabile della diminuzione dell'intensità luminosa proveniente da una stella o da un altro corpo celeste in prossimità del perimetro del disco visibile. È il risultato di due concause:

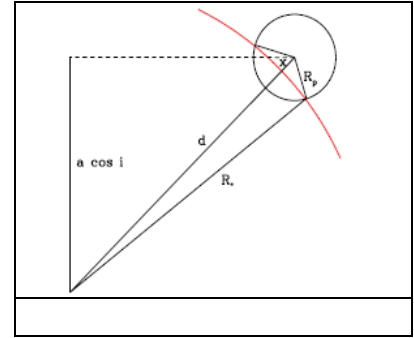
- La densità della stella decresce al crescere della distanza dal centro;
- La temperatura della stella decresce al crescere della distanza dal centro.



Se consideriamo una stella di luminosità uniforme (senza oscuramento al bordo) sulla quale transita un piccolo pianeta, in ogni istante, il bordo stellare può essere approssimato con una corda attraverso il pianeta. Integrando rispetto ad un sistema di coordinate fissato sul centro del pianeta, si può determinare l'area della stella eclissata:

$$[12.10] \quad A_e \approx \int_x^{R_p} r_p dr_p \int_{-\arccos(x/r_p)}^{+\arccos(x/r_p)} d\phi_p =$$

$$= 2 \int_x^{R_p} r_p \arccos\left(\frac{x}{r_p}\right) dr_p$$



Dove $x = d - R^*$, d è la proiezione della distanza tra i centri della stella e del pianeta e $-R_p < x < R_p$.

$$[12.11] \quad A_e \approx R_p^2 \arccos\left(\frac{x}{R_p}\right) - R_p x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R_p}\right)^2}$$

Per pianeti grandi conviene integrare rispetto ad un sistema di coordinate fissato sul centro della stella

$$[12.12] \quad A_e(t) \approx 2 \int_{\max(0, d(t) - R_p)}^{\min(R^*, d(t) + R_p)} r^* \arccos[\Theta(t)] dr^*$$

dove

$$[12.13] \quad \Theta(t) = \begin{cases} \frac{d^2(t) + r^{*2} - R_p^2}{2r^* d(t)} & r^* > R_p + d(t) \\ \pi & \text{altrove} \end{cases}$$

La curva di luce risultante dalla occultazione di una sorgente luminosità uniforme da parte di un pianeta di dimensioni arbitrarie, raggio orbitale e inclinazione orbitale, può essere costruita sostituendo nella equazione [12.12]

$$[12.13] \quad d(t) = a \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 i \cos^2 \omega t}$$

dove $\omega = 2\pi/P$ e P è il periodo. La curva di luce del transito, in forma differenziale, è data da:

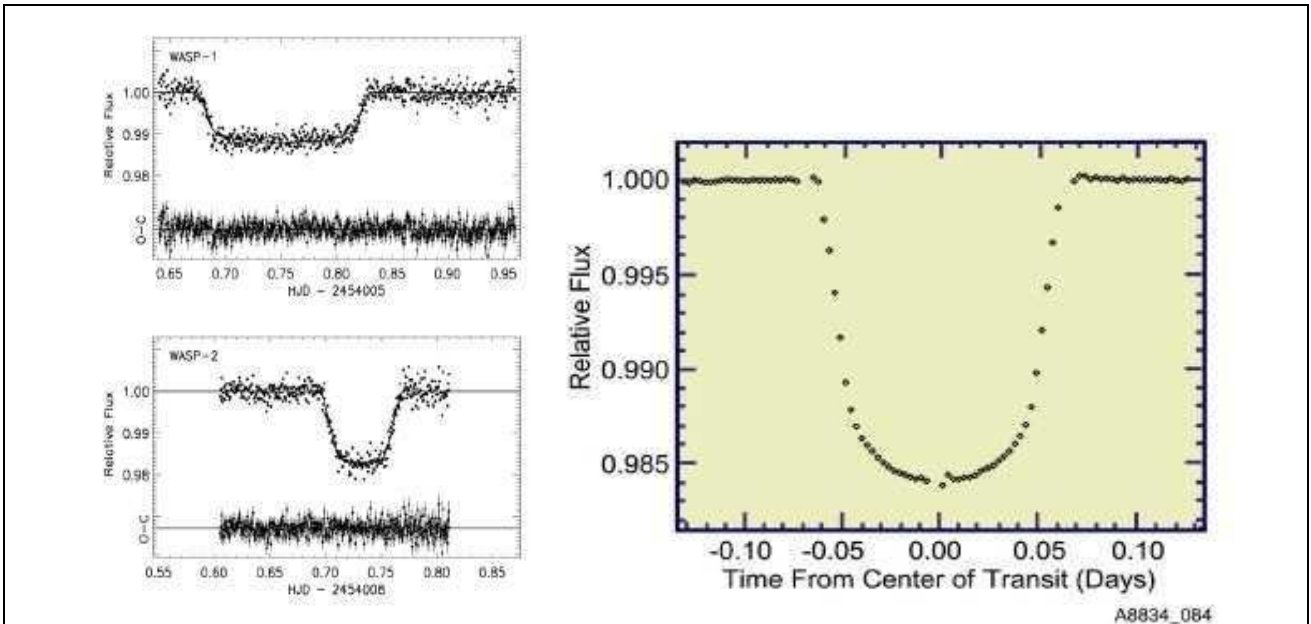
$$[12.14] \quad \frac{F(t)}{F_0} = 1 - \frac{A_e(t)}{\pi R_*^2}$$

La variazione di luminosità per il transito di un pianeta delle dimensioni della Terra è $\frac{\Delta F_{\lambda}^*}{F_{\lambda}^*} = 8,4 \times 10^{-5}$, per uno delle dimensioni di Giove $\frac{\Delta F_{\lambda}^*}{F_{\lambda}^*} = 1,1 \times 10^{-2}$. Il Sole, nei tempi scala

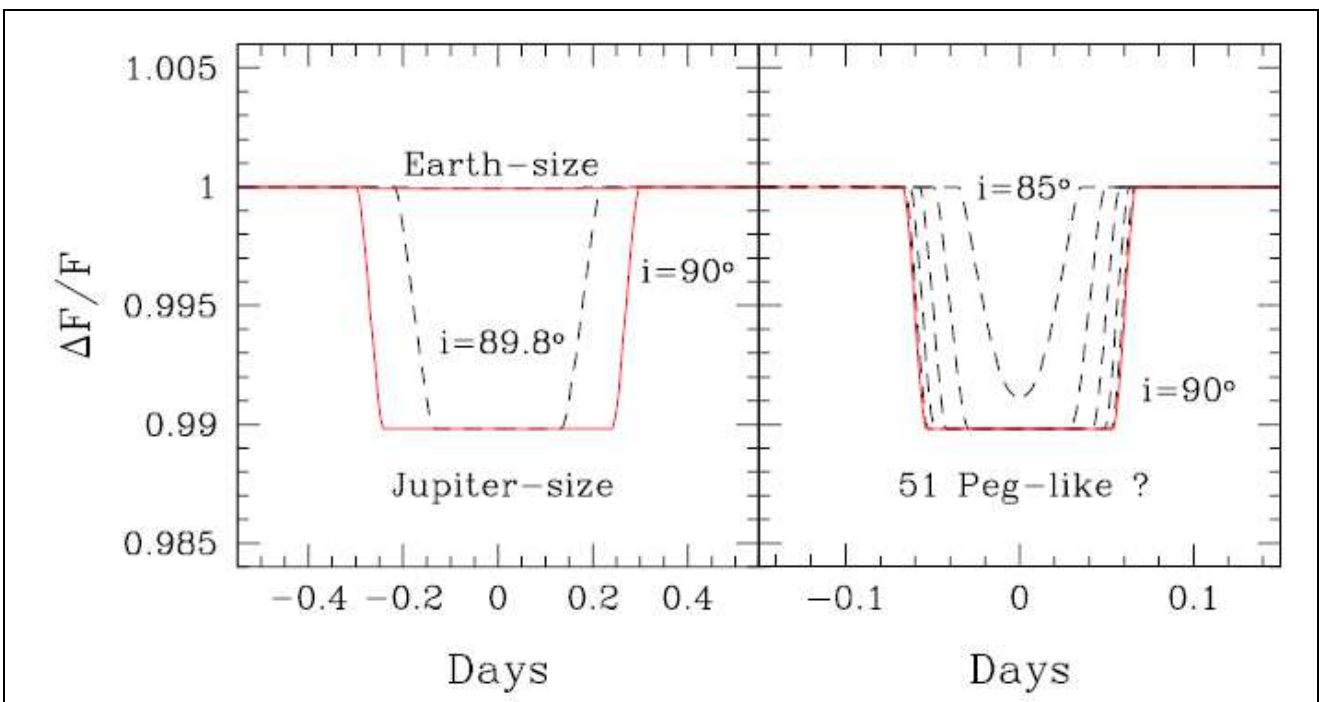
tipici di un transito (che va da poche ore a un giorno), ha variazioni di luminosità $\frac{\Delta F_{\lambda}^*}{F_{\lambda}^*} \approx 10^{-5}$.

Calcoli più precisi (Gilliland, 1993) dimostrano che il limite per l'osservazione di pianeti di tipo terrestre è $\frac{\Delta F_{\lambda}^*}{F_{\lambda}^*} \approx 8 \times 10^{-4}$. Questo dimostra che, all'inizio degli anni 2000, con sistemi basati a

Terra era impossibile rilevare transiti di pianeti di taglia terrestre, mentre i transiti di pianeti di taglia gioviana erano rilevabili anche con strumentazione amatoriale.



A sinistra curve di luce ricavate con sistemi basati a Terra, a destra una curva effettuata con strumentazione posta nello spazio. È evidente la diversa sensibilità.

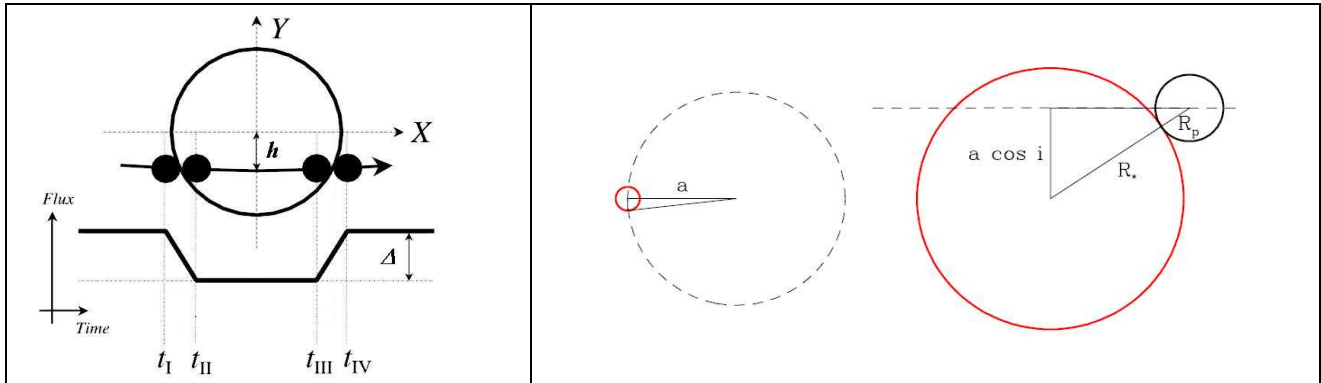


A sinistra, curve di luce per pianeti delle dimensioni della Terra e di Giove, in orbita intorno ad una stella di tipo solare a 1 UA. A destra, un pianeta delle dimensioni di Giove in orbita attorno ad una stella di tipo solare ad una distanza orbitale di 0,05 AU (ad esempio, 51 Peg), con inclinazioni che vanno da 85° a 90°. Si assume che la luminosità della stella sia uniforme. Notare il cambiamento nella scala dei tempi tra le due figure.

12.4.7.2 – Determinazione dei parametri fisici del pianeta

Dalla [12.9], $\max \frac{\Delta F_{\lambda}^*}{F_{\lambda}^*} \approx \left(\frac{R_P}{R^*} \right)^2$, se conosciamo il raggio della stella, possiamo determinare il raggio del pianeta.

La durata e la frequenza dei transiti previsti determinerà la strategia osservativa di un programma di occultazione. La frequenza è semplicemente uguale al reciproco del periodo orbitale P . Se per un dato sistema possono essere misurati due o più transiti e può essere confermato che siano dovuti allo stesso pianeta, allora si può stimare il periodo P e dalla terza legge di Keplero ricavare il semiasse maggiore dell'orbita planetaria.



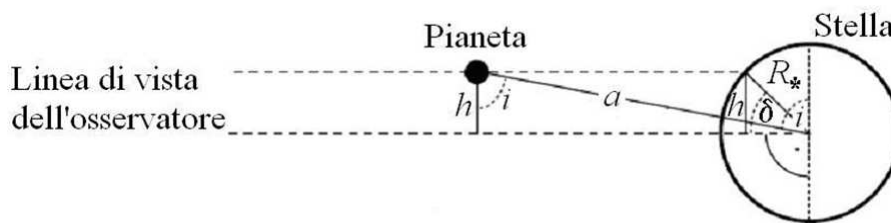
La durata del transito, $t_T = t_{IV} - t_I$, è la frazione del periodo orbitale durante la quale la distanza d della proiezione della distanza tra i centri della stella e del pianeta è minore della somma dei loro raggi $R^* + R_p$. Tenendo conto che si conosce la velocità angolare (come visto sopra ricavabile dal periodo di rivoluzione del pianeta), riferendosi alla figura a destra, abbiamo

$$[12.15] \quad (R^* + R_p)^2 = (a \cos i)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{P} t_T \right)^2$$

in cui l'unica incognita è l'inclinazione i .

La [12.15], per $a \gg R^* \gg R_p$ dà

$$[12.16] \quad t_T = \frac{P}{\pi} \sqrt{\left(\frac{R^*}{a} \right)^2 - \cos^2 i} \leq \frac{PR^*}{\pi a}$$



Se indichiamo con δ è la latitudine del transito attraverso la stella centrale si ha:

$$[12.17] \quad \text{sen} \delta = \frac{h}{R^*}$$

che combinata con $h = a \text{sen} i$ dà $\text{cos} i = \frac{R^* \text{sen} \delta}{a}$.

Se nella determinazione del semiasse maggiore dell'orbita del pianeta si utilizza la formula di

Keplero estesa, $\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M^* + M_p)}$, e non si trascura la massa del pianeta, con dei criteri di

approssimazioni successive si può arrivare ad una buona stima sia la massa del pianeta sia il semiasse maggiore.

Il modo migliore per determinare la massa del pianeta è però quello di avere anche una curva della velocità radiale che, come abbiamo visto nella [12.6], ci consente di ricavare $M_p \sin i$ e quindi, ricavando i dalla [12.15] la massa del pianeta.

Noti quindi raggio e massa del pianeta si può determinare la densità e stabilire se si ha a che fare con un pianeta di tipo terrestre (sia per taglia che per densità). Infine, dai parametri della stella, noti per altre vie si può stabilire se il pianeta è nella fascia di abitabilità.

Nel caso il pianeta abbia un antitransito (passi cioè dietro la sua stella), la spettroscopia ci permette di individuare una eventuale atmosfera e i gas che la compongono; basta confrontare gli spettri della stella durante il transito e durante l'antitransito.

12.5 – Migrazioni planetarie

I pianeti gioviani caldi hanno reso necessaria una revisione del modello di formazione dei sistemi planetari che non può più basarsi sul modello del Sistema Solare.

Si definisce **migrazione orbitale** un'alterazione significativa dei parametri orbitali di un pianeta o di un satellite naturale (tipicamente il semiasse maggiore) rispetto ai valori che aveva inizialmente al momento della sua formazione.

Numerosi processi possono essere alla base di un simile evento. La teoria attualmente più accettata sulla formazione ed evoluzione del Sistema Solare prevede che i pianeti non possano formarsi troppo vicino alla loro stella madre in quanto non c'è sufficiente massa a disposizione nel disco e la temperatura è troppo alta per consentire la formazione di planetesimi ghiacciati o rocciosi.

Pianeti di massa simile alla Terra possono subire una migrazione centripeta se si formano quando il disco di gas è ancora presente. Questo fenomeno può influenzare la formazione del nucleo dei pianeti giganti (cioè con massa di circa dieci masse terrestri).

La migrazione orbitale appare la spiegazione più probabile per i periodi orbitali di pochi giorni dei pianeti gioviani caldi.

Attualmente i principali modelli proposti per spiegare la migrazione orbitale sono tre.

- **Migrazione di tipo I** – I pianeti di massa terrestre inducono onde spiraleggianti di densità nel gas che li circonda o nel disco dei planetesimi. Tra le spirali interne ed esterne all'orbita del pianeta si instaura uno sbilanciamento delle forze; molto spesso le onde esterne possiedono un momento maggiore di quelle interne, cosicché il pianeta perde momento angolare e tende a spostarsi verso orbite più interne.
- **Migrazione di tipo II** – I pianeti con più di dieci masse terrestri riescono a ripulire la fascia del disco che li circonda, creando così una discontinuità che pone fine alla migrazione di tipo I. Tuttavia nel corso del tempo, nuovo materiale continua ad entrare nella lacuna spostando così il pianeta e la sua fascia di separazione verso orbite più interne. Questa è una delle ipotesi più accreditate per la formazione della maggior parte dei pianeti gioviani caldi.
- **Scattering gravitazionale** – Un altro possibile meccanismo è lo scattering gravitazionale provocato dai pianeti più massicci. Urano e Nettuno potrebbero aver subito un simile fenomeno a causa di Giove o Saturno. I planetesimi che si erano già formati nella nebulosa solare hanno subito una dispersione molto accentuata che li ha spostati fino alla fascia di Kuiper e la nube di Oort. Sedna è un esempio, assieme agli altri oggetti più piccoli che sono stati inizialmente dispersi per poi raggrupparsi nella nube di Oort. Questo meccanismo è

un'altra possibile spiegazione delle orbite dei pianeti gioviani caldi, soprattutto di quelli eccentrici. Tre o più giganti gassosi neoformati vengono a costituire un sistema di n -corpi che sul lungo periodo comporta l'espulsione su orbite iperboliche di uno o più pianeti, a scapito dell'energia orbitale di quelli rimanenti che così si stabilizzano su orbite più strette ed eccentriche. Questo modello viene detto *Jumping Jupiters model*.

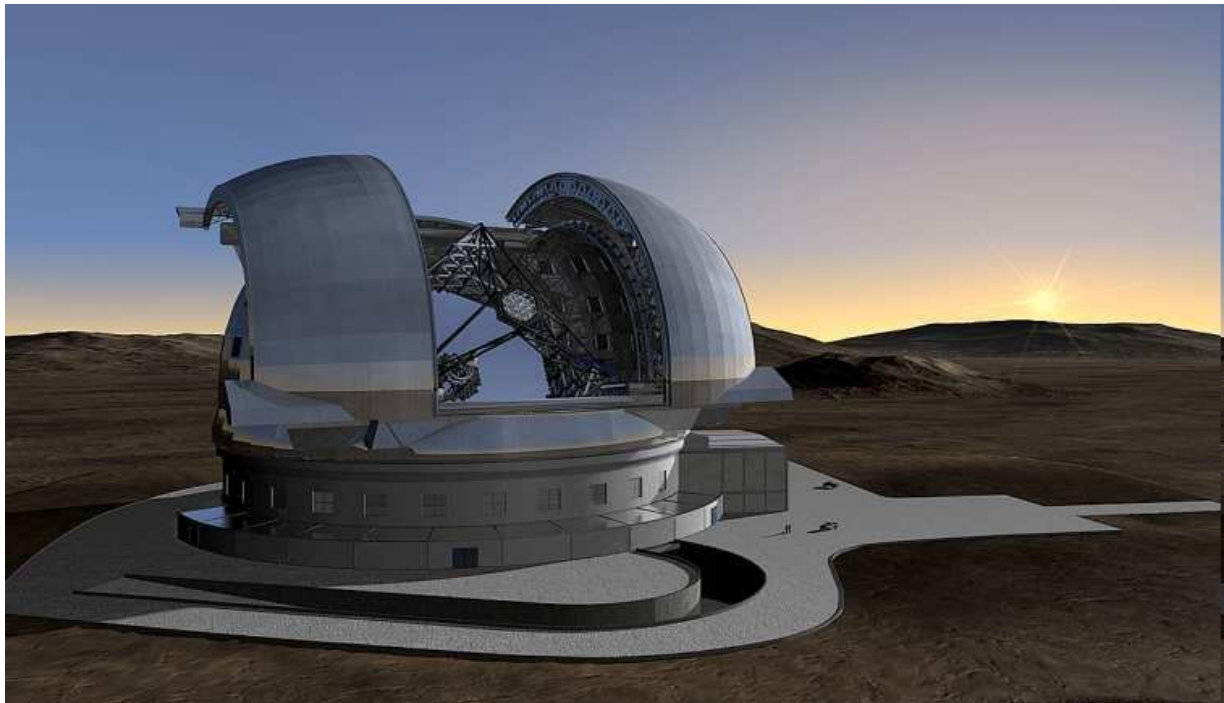
12.6 – Programmi futuri

Tutti i programmi futuri mirano ad un unico obiettivo: rivelare sempre più “terre”, ossia pianeti di taglia terrestre, nella zona di abitabilità di un sistema planetario.

L'ESO, nel 2008, ha concretizzato il progetto per la ricerca da Terra di pianeti giganti intorno a un centinaio di stelle; tale programma ha avuto inizio con l'installazione dello strumento PRIMA sul grande interferometro di 120 metri VLTI (Very Large Telescope Interferometer) in Cile.

La missione GAIA dell'ESA è uno strumento che misura le variazioni di posizione di una stella rispetto a tutte le altre (più brillanti della 20esima magnitudine). Questo processo permette di misurare le variazioni di posizione di 1,5 miliardi di stelle. La precisione è sufficiente per cercare pianeti delle dimensioni terrestri. La missione è nella fase di analisi dati.

Il metodo diretto è di gran lunga il più promettente. Permette una dettagliata caratterizzazione delle proprietà fisiche e chimiche dei pianeti: atmosfera (densità, composizione, ...), superficie (colore, morfologia degli oceani/continenti ...), rotazione del pianeta (durata del “giorno”), satelliti e anelli. Molti progetti sono in corso, sia Terra sia nello spazio. È il campo ove sono concentrate la maggior parte delle attività ed è in rapida espansione.



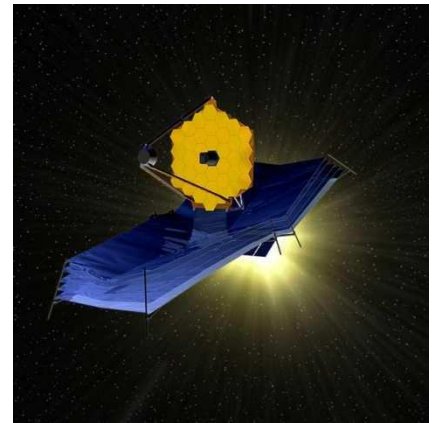
E-ELT (*European-Extremely Large Telescope*) è un telescopio da 39 m dell'ESO in fase di realizzazione in Cile.

Dal 2014 l'ESO ha reso operativo lo Spectro-Polarimetric High-contrast Exoplanet REsearch (VLT-SPHERE) su uno dei telescopi di 8,2 m. Il telescopio Keck di 10 metri ha uno strumento analogo.

A lungo termine, gli Stati Uniti e l'Europa hanno progetti di grandi telescopi con diametri superiori a 30 metri che saranno attrezzati con strumenti per immagini destinati a scoprire pianeti di taglia terrestre.

Per il 2021 è previsto il lancio del James Web Space Telescope (JWST). Il JWST è un telescopio di 7 metri di diametro ottimizzato per l'infrarosso capace di "vedere" pianeti in stelle vicine al Sole.

Diversi altri progetti sono in fase di studio.



Capitolo 13

Esercizi e Problemi svolti

NOTA: Gli esercizi e i problemi segnati con [*] sono tratti dalle Olimpiadi Italiane di Astronomia

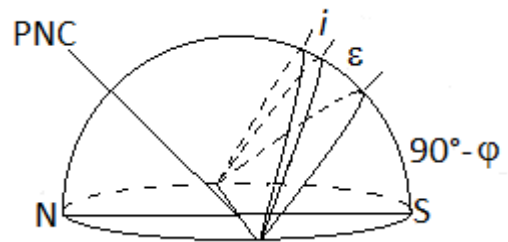
1) I corpi del Sistema Solare costituiscono un insieme quasi complanare, nel senso che i pianeti e i satelliti orbitano su piani generalmente poco inclinati rispetto al piano fondamentale dell'orbita terrestre. La stessa Luna orbita su un piano inclinato di $5^{\circ}8'$ rispetto al piano dell'eclittica. Qual è la massima altezza h_{MAX} raggiungibile dalla luna sull'orizzonte di Camerino (che ha latitudine $\varphi = 43^{\circ}8' N$)?

SOLUZIONE

Dato che Camerino si trova nell'emisfero boreale, dobbiamo individuare il punto in cui la luna raggiunge il valore più settentrionale della sua declinazione. Questo si verificherà nel momento della sua culminazione superiore, cioè in meridiano. La culminazione è il punto in cui i corpi celesti raggiungono la massima altezza sull'orizzonte.

Per totalizzare l'angolo massimo, sommiamo l'altezza dell'equatore celeste, pari a $90^{\circ} - \varphi$, l'elevazione ε dell'eclittica sull'equatore e infine l'inclinazione i dell'orbita lunare sull'eclittica. In totale:

$$h_{MAX} = (90^{\circ} - \varphi) + \varepsilon + i = 90^{\circ} - 43^{\circ}8' + 23^{\circ}27' + 5^{\circ}8' = 75^{\circ}27'$$



2) [*] Una notte, un astronomo osserva pazientemente il corso apparente delle stelle. Nota che tutte le stelle con la stessa ascensione retta sorgono contemporaneamente. Dove si trova l'astronomo?

SOLUZIONE

Stelle che hanno la stessa ascensione retta si trovano sul medesimo cerchio orario. Se sorgono contemporaneamente, vuol dire che in quel momento il loro cerchio orario coincide con l'orizzonte. Qualsiasi cerchio orario passa per i poli celesti, allora anch'essi devono trovarsi entrambi sull'orizzonte. L'altezza dei poli è la latitudine φ : se la l'altezza è nulla, siamo a latitudine 0° . Cioè, all'equatore.

3) [*] Un osservatore si trova alla latitudine $\varphi = 75^{\circ}$ Nord e vuole sapere se una cometa che ha declinazione $\delta = 30^{\circ}$ Sud risulta visibile da quel luogo.

SOLUZIONE

Un astro sorge e tramonta sull'orizzonte di un osservatore se, in valore assoluto, la somma della sua declinazione con la latitudine è minore di 90° ; se tale somma è maggiore o uguale a 90° l'astro è circumpolare o anticircumpolare, a seconda del segno di queste due quantità. Infatti, se la latitudine φ e la declinazione δ hanno lo stesso segno (tutte e due + oppure -), l'astro risulta essere in tal caso circumpolare, perciò sempre visibile, anche se non sorge né tramonta; se invece φ e δ hanno segno opposto (+ e -), l'astro è in tal caso anticircumpolare e quindi sempre invisibile da quel luogo.

Nel nostro caso si ha

$$|\varphi| + |\delta| = 75^{\circ} + 30^{\circ} = 105^{\circ} > 90^{\circ}$$

e la cometa risulta essere anticircumpolare per quel luogo, quindi non osservabile.

4) [*] Marco e Gianna sono due giovani appassionati di astronomia romani. Gianna, in viaggio in un'importante capitale estera, telefona a Marco per salutarlo. Ad un certo punto Gianna esclama:

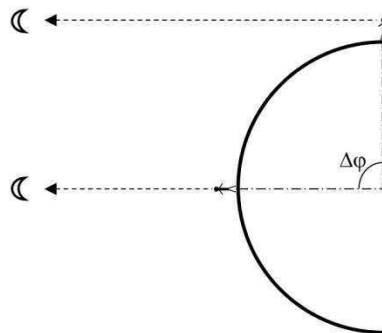
“Qui è una bellissima serata, la Luna sta sorgendo proprio in questo istante!”. Marco allora risponde: “Fantastico! Qui la Luna sta passando esattamente al meridiano, quindi so con precisione a che longitudine ti trovi!”. Se la longitudine di Marco, in Italia, è $12^{\circ} 30' E$, a quale longitudine si trova Gianna? Sapreste dire in che città si trova? Si trascuri l'effetto dovuto alla distanza della Luna dalla Terra (parallasse lunare) e si consideri nulla la declinazione della Luna.

SOLUZIONE

Se la declinazione è nulla il centro della Luna si trova sull'equatore celeste. Poiché Gianna vede la Luna sorgere, cioè a Est, mentre Marco la vede già al meridiano, è evidente che Gianna deve trovarsi ad Ovest di Marco. Poiché inoltre, come si vede nel disegno a lato, le direzioni di osservazione di Marco e Gianna sono, nell'ipotesi del problema, parallele (entrambe rivolte verso la Luna) ma Gianna vede la Luna al meridiano mentre Marco la vede sull'orizzonte, la differenza di longitudine $\Delta\phi$ deve essere di 90° . Gianna si trova dunque 90° a Ovest di Marco e la sua longitudine quindi è

$$\text{Long} = 12^{\circ} 30' E + 90^{\circ} W = -12^{\circ} 30' W + 90^{\circ} W = 77^{\circ} 30' W.$$

Gianna si trova negli Stati Uniti. Dai dati del problema non sappiamo esattamente a quale latitudine si trovi: tuttavia il problema ci dice che Gianna si trova in una “importante capitale estera”, quindi non può che trovarsi a Washington.



5) [*] Alle 17:30 del 21 Dicembre, poco prima di salire in treno in una stazione posta a una latitudine $\lambda = +42^{\circ}$, Ciro e Anna notano che una stella di declinazione $\delta = +37^{\circ}$ sta passando al meridiano. Dieci minuti dopo, il treno parte e, con 20 minuti di ritardo sul viaggio previsto di 11 ore e mezza, giunge in una località avente la stessa longitudine della località di partenza, ma situata 18° di latitudine più a Nord. Appena scesi dal treno, con il cielo ancora buio, i due amici guardano in cielo la stessa stella che avevano osservato all'inizio del viaggio. A quali altezze sull'orizzonte i due amici avranno osservato la stella in questione nella stazione di partenza e in quella di arrivo?

SOLUZIONE

L'intervallo di tempo totale tra le due osservazioni è:

$$\Delta t = 10m + 11h 30m + 20m = 12 \text{ ore}$$

dunque i due amici osservano la stessa stella che transita al meridiano al momento della prima osservazione, e all'antimeridiano al momento della seconda osservazione.

L'altezza della stella osservata nella stazione di partenza è pari a:

$$h_{\text{part}} = 90^{\circ} - \lambda + \delta = 90^{\circ} - 42^{\circ} + 37^{\circ} = 85^{\circ}$$

Nella stazione di arrivo, la stella transita all'antimeridiano. Per determinare la sua altezza sull'orizzonte dobbiamo calcolarne prima di tutto l'altezza del Polo Nord celeste sull'orizzonte, che è uguale alla latitudine della stazione di arrivo:

$$h_{\text{Nord}} = \lambda_{\text{arrivo}} = 42^{\circ} + 18^{\circ} = 60^{\circ}$$

Del resto, la distanza angolare dal Polo Nord celeste della stella in questione è $\theta = 90^{\circ} - \delta = 53^{\circ}$ per cui, in definitiva, l'altezza sull'orizzonte della stella osservata nella stazione di arrivo sarà:

$$h_{\text{arrivo}} = h_{\text{Nord}} - \theta = 60^{\circ} - 53^{\circ} = 7^{\circ}$$

6) Consideriamo una stella di magnitudine m posta ad una distanza d , qual è la sua magnitudine m' se la stella potesse essere spostata ad una distanza d' ?

SOLUZIONE

Dalla formula di Pogson possiamo scrivere

$$m' = m - 2,5 \log \frac{F'}{F} = m - 2,5 \log \frac{\frac{L}{4\pi d'^2}}{\frac{L}{4\pi d^2}} = m - 2,5 \log \frac{d^2}{d'^2} = m - 5 \log \frac{d}{d'}$$

7) [*] Qual è la magnitudine visuale apparente totale di un sistema di stelle doppie le cui componenti hanno magnitudine apparente m_1 e m_2 ? Si generalizzi al caso di n stelle e si risolva il caso particolare $m_1 = 3,2$ e $m_2 = 4,1$.

SOLUZIONE

Dalla formula di Pogson si ha:

$$m_1 = m_0 - 2,5 \log \frac{F_1}{F_0} \quad \text{e} \quad m_2 = m_0 - 2,5 \log \frac{F_2}{F_0}$$

da cui si ricavano i flussi

$$F_1 = F_0 \cdot 10^{-0,4(m_1 - m_0)} \quad \text{e} \quad F_2 = F_0 \cdot 10^{-0,4(m_2 - m_0)}.$$

La magnitudine apparente totale è $m = m_0 - 2,5 \log \frac{F_1 + F_2}{F_0}$.

Semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} m &= m_0 - 2,5 \log \left(10^{-0,4(m_1 - m_0)} + 10^{-0,4(m_2 - m_0)} \right) = m_0 - 2,5 \log \left[10^{0,4m_0} \left(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} \right) \right] = \\ &= m_0 - 2,5 \log 10^{0,4m_0} - 2,5 \log \left(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} \right) = -2,5 \log \left(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} \right) \end{aligned}$$

Se il sistema è formato da n stelle di magnitudine $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, la magnitudine totale è

$$m = -2,5 \log \left(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} + 10^{-0,4m_3} + \dots + 10^{-0,4m_n} \right) = -2,5 \log \left(\sum_{i=1}^n 10^{-0,4m_i} \right)$$

Se le componenti di una stella doppia hanno magnitudine apparente $m_1 = 3,2$ e $m_2 = 4,1$, allora la magnitudine apparente totale è:

$$m = -2,5 \log \left(10^{-0,4 \cdot 3,2} + 10^{-0,4 \cdot 4,1} \right) = -2,5 \log (0,05248 + 0,02291) = 2,8$$

8) [*] Calcolare la variazione di flusso luminoso di una stella variabile che passa da una magnitudine apparente iniziale m_i ad una finale m_f , subendo una variazione Δm . Si determini la variazione percentuale del flusso nel caso della stella δ Cephei, prototipo di questo tipo di stelle, che passa dalla magnitudine apparente iniziale 3,6 alla magnitudine apparente finale 4,3 in un periodo di 5,36634 giorni.

SOLUZIONE

La variazione del flusso è data da

$$\Delta F = F_f - F_i = F_0 \left(10^{-0,4(m_f - m_0)} - 10^{-0,4(m_i - m_0)} \right) = F_0 10^{0,4m_0} \left(10^{-0,4m_f} - 10^{-0,4m_i} \right).$$

Ma dalla formula di Pogson $m_0 + 2,5 \log F_0 = m_f + 2,5 \log F_f = m_i + 2,5 \log F_i$ e da queste segue;

$F_0 10^{0,4m_0} = F_f 10^{0,4m_f} = F_i 10^{0,4m_i}$, per cui

$$\Delta F = F_f - F_i = F_i 10^{0,4m_i} \left(10^{-0,4m_f} - 10^{-0,4m_i} \right) = F_i \left(10^{-0,4(m_f - m_i)} - 1 \right)$$

Nel periodo considerato il suo flusso varia di

$$\Delta F = F_i \left(10^{-0,4(m_f - m_i)} - 1 \right) = F_i \left(10^{-0,4(4,3 - 3,6)} - 1 \right) = -0,475 F_i,$$

quindi $F_f = 0,525 F_i$, cioè il flusso diminuisce del 47,5% rispetto al flusso massimo.

9) [*] Arturo (α Boo, distanza dal Sole $d = 37$ anni luce), Aldebaran (α Tau, $d = 65$ a.l.), Spica (α Vir, $d = 260$ a.l.) e Regolo (α Leo, $d = 77$ a.l.) sono alcune tra le stelle più luminose del cielo. Da quali di queste stelle il Sole sarebbe ancora visibile ad occhio nudo (limite di visibilità $m = 6,00$)? La magnitudine assoluta del Sole $M = 4,85$.

SOLUZIONE

Inserendo nella formula $M = m + 5 - 5 \log_{10} d$ la magnitudine assoluta del Sole, la distanza per cui la sua magnitudine apparente è 6,00 è di 16,98 pc, che corrisponde a circa 55,4 anni-luce. Il sole sarebbe visibile ad occhio nudo solo da Arturo.

10) [*] Una supergigante rossa si trova alla distanza di 13000 a.l. dal Sole ed ha una magnitudine visuale apparente $m = 8$. Si calcolino: a) la sua magnitudine visuale assoluta; b) a quale distanza massima dal Sole dovrebbe trovarsi per essere la stella più luminosa del cielo; esprimete il risultato in anni luce ed in parsec.

SOLUZIONE

a) Dalla relazione $M = m + 5 - 5 \log d$ ricaviamo la magnitudine assoluta della stella (13000 anni luce = 13000/3.26 = 3988 pc) che risulta $M = 8 + 5 - 5 \log 3988 = 13 - 18,00 = -5$.

b) Utilizziamo ora la stessa relazione ponendo $m = -1,46$ (magnitudine visuale di Sirio). Otteniamo $-5 = -1,46 + 5 - 5 \log d$ da cui $\log d = (5 - 1,46 + 5) / 5 = 8,54 / 5 = 1,708$ e quindi, in definitiva, $d^{(rif. Sirio)} = 10^{1,708} = 51,1 \text{ pc} = 167 \text{ a.l.}$

Possiamo tuttavia considerare il Sole come stella più luminosa del cielo. In tal caso occorre utilizzare la magnitudine apparente del Sole, $m = -26,8$, per ottenere:

$$-5 = -26,8 + 5 - 5 \log d$$

da cui

$$\log d = (5 - 26,8 + 5) / 5 = -16,8 / 5 = -3,36$$

e quindi, in definitiva,

$$d^{(rif. Sole)} = 10^{-3,36} = 4,365 \times 10^{-4} \text{ pc} = 90,04 \text{ u.a.}$$

In conclusione, affinché questa stella risulti la più luminosa del cielo notturno (riferimento: Sirio), la sua distanza dovrebbe essere inferiore a 167 anni luce, mentre per essere la più luminosa di tutto il cielo (riferimento: Sole), la sua distanza dovrebbe essere inferiore a circa 90 unità astronomiche.

11) [*] La magnitudine apparente di Sirio è $m = -1,46$. Se la sua distanza fosse 1000 volte più grande, Sirio sarebbe ancora visibile ad occhio nudo?

SOLUZIONE

La relazione da usare è

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

Se la distanza aumentasse di 1000 volte avremmo quindi

$$-1,46 - m_2 = -2,5 \log 10^6$$

da cui $m_2 = -1,46 + 15 = 13,54$.

Quindi Sirio non sarebbe più visibile ad occhio nudo in quanto non si riesce a vedere stelle di magnitudine maggiore alla sesta.

12) [*] La magnitudine assoluta di una stella nella galassia di Andromeda, la cui distanza è di $2,25 \cdot 10^6$ anni luce, è $M = -5$. Se questa stella esplodesse come supernova diventando 10^5 volte più luminosa, quanto varrebbe la sua magnitudine apparente?

SOLUZIONE

Indicando con M_S la magnitudine assoluta della Supernova si avrà: $M_S - M - 2,5 \log 10^5 = -12,5$, per cui la magnitudine assoluta della Supernova varrebbe $M = -17,5$. Dalla relazione $M = m + 5 - 5 \log d$, tenendo conto che $2,25 \times 10^6$ anni luce = 690000 pc, ricaviamo $m = 6,69$.

13) *La stella Virgil è di tipo F7, un po' più grande di Sol, più luminosa d'un buon cinquanta per cento, con una proporzione d'ultravioletto, nella sua emissione complessiva, più elevata. Aeneas è il quarto dei suoi pianeti, completa un'orbita intorno a Virgil in 1,73 anni standard^[1] ad una distanza media di 1,5 unità astronomiche, ricevendo quindi un'irradiazione che ammonta ai due terzi di quella della Terra. Il suo diametro medio è di 10700 km, la sua massa 0,45 rispetto a quella della terrestre e perciò la gravità di superficie è 0,635g.*

Così si legge nel romanzo di fantascienza di Poul Anderson *The Rebel Worlds* del 1969. Più avanti, nello stesso romanzo, si parla di Dido, il terzo pianeta del sistema e si legge:

“Il Manuale del Pilota con Effemeridi del sistema virgiliano indicava che Dido percorreva un'orbita moderatamente eccentrica il cui raggio vettore era mediamente di una unità astronomica; la massa, il diametro e di conseguenza la gravità di superficie erano un po' inferiori di quelli della Terra. Dido ruotava il 8 ore e 47 minuti intorno al proprio asse dall'inclinazione davvero insolita di 38 gradi.”

Sulla base dei dati riportati nel romanzo si risponda ai seguenti quesiti:

- Qual è la massa di Virgil in rapporto alla massa del Sole?
- I dati riportati sull'irradiazione che riceve Aeneas e sulla sua gravità superficiale sono corretti?
- Qual è la velocità di fuga da Aeneas?
- Qual è il periodo di rivoluzione di Dido in anni standard? e in giorni di Dido?
- Qual è il periodo sinodico^[2] di Aeneas visto da Dido?
- La frase *“la massa, il diametro e di conseguenza la gravità di superficie erano un po' inferiori di quelli della Terra”* è sempre vera? In caso negativo si dia un esempio numerico.
- Qual è il diametro angolare di Aeneas visto da Dido quando i due pianeti sono alla minima distanza?
- Supponendo per Aeneas un'albedo^[3] media di 0,38, all'opposizione, quale sarebbe la magnitudine relativa di questo pianeta visto da Dido? Si tenga presente che Marte ha un'albedo di 0,15, un diametro medio di 6780 km e che quando è in opposizione a 0,5 UA dalla Terra la sua magnitudine relativa è circa -2,0?

SOLUZIONE

[¹] Nel romanzo non ci sono indicazioni, ma poniamo che un anno standard sia uguale a 365 giorni terrestri.

[²] Ricordiamo che il periodo sinodico è il tempo che impiega un oggetto per ritornare nella stessa posizione nel cielo, rispetto al Sole e osservato dalla Terra. Nel nostro caso è il tempo che passa tra due allineamenti Virgil, Dido, Aeneas.

[³] L'albedo (dal latino albēdo, "bianchezza", che a sua volta deriva da album, "bianco") di una superficie è la frazione di luce o, più in generale, di radiazione incidente che viene riflessa indietro in tutte le direzioni. Essa indica quindi il potere riflettente di una superficie. L'esatto valore della frazione dipende, per lo stesso materiale, dalla lunghezza d'onda della radiazione considerata. L'albedo massima è 1, quando tutta la luce incidente viene riflessa, l'albedo minima è 0, quando nessuna frazione della luce viene riflessa. In termini di luce visibile, il primo caso è quello di un oggetto perfettamente bianco, l'altro di un oggetto perfettamente nero. La Terra ha un'albedo media di 0,37 – 0,39.

a) La massa di Virgil (M_V) può essere ricavata dalla terza legge di Keplero: $\frac{T_A^2}{a_A^3} = \frac{4\pi^2}{GM_V}$ dove T_A e a_A sono rispettivamente il periodo di rivoluzione e il semiasse maggiore di Aeneas. Si può usare la relazione $\frac{T_A^2}{a_A^3} M_V = \frac{T_T^2}{a_T^3} M_S$ dove il termine di destra si riferisce alla Terra e al Sole. Misurando il periodo in anni e il semiasse maggiore in unità astronomiche e intendendo per anno standard l'anno terrestre, essendo $T_T = 1$ anno e $a_T = 1$ UA si ricava: $M_V = \frac{a_A^3}{T_A^2} M_S = \frac{1,5^3}{1,73^2} M_S = 1,13 M_S$.

b) Se indichiamo con L_S la luminosità del Sole, la luminosità di Virgil è: $L_V = 1,5 L_S$. Il flusso luminoso di Virgil alla distanza di Aeneas (F_{VA}) è dato da:

$$F_{VA} = \frac{L_V}{4\pi a_V^2} = \frac{1,5 L_S}{4\pi (1,5 a_T)^2} = \frac{1}{1,5} \frac{L_S}{4\pi a_T^2} = \frac{2}{3} F_{ST}$$

Nell'equazione sopra F_{ST} è il flusso del Sole alla distanza della Terra.

Per la determinazione dell'accelerazione di gravità sulla superficie di Aeneas, osserviamo che il suo raggio è $R_A = 0,841 R_T$ (si è utilizzato $R_T = 6370$ km); l'accelerazione è quindi:

$$g_A = G \frac{M_A}{R_A^2} = G \frac{0,45 M_T}{(0,841 R_T)^2} = \frac{0,45}{0,841^2} \frac{GM_T}{R_T^2} = 0,636 g.$$

c) La velocità di fuga, v_f , dalla superficie di un pianeta di massa M e raggio R è la velocità che deve avere un corpo per allontanarsi dalla superficie del pianeta senza ricadervi sopra. Per determinare tale velocità bisogna porre l'energia totale del corpo uguale a zero. L'energia totale è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale:

$$E = \frac{1}{2} m v_f^2 - G \frac{Mm}{R} = 0, \text{ da cui, per Aeneas, si ricava:}$$

$$v_{fA} = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} = \sqrt{2 \cdot R_A g_A} = \sqrt{2 \cdot (0,841 R_T)(0,636 g)} = \sqrt{0,841 \cdot 0,636} v_{fT} = 0,731 v_{fT} = 7,46 \text{ km/s.}$$

Si è utilizzato il valore $v_{fT} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2R_T g} = 10,2 \text{ km/s.}$

d) Per determinare il periodo di rivoluzione di Dido utilizziamo ancora la terza legge di Keplero; si

ha: $\frac{T_A^2}{a_A^3} = \frac{T_D^2}{a_D^3}$ da cui segue $T_D = T_A \sqrt{\frac{a_D^3}{a_A^3}} = 1,73 \sqrt{\frac{1}{1,5^3}} = 0,942$ anni standard = 343,7 giorni terrestri.

Poiché un giorno terrestre è uguale a 2,732 giorni di Dido, il periodo di rivoluzione di Dido è di circa 939 suoi giorni.

e) Essendo le orbite pressoché circolari, i moti dei pianeti possono essere considerati circolari e uniformi. Se θ_D e θ_A sono gli angoli descritti da Dido e Aeneas nel tempo t intercorso tra due allineamenti, allora deve quindi essere:

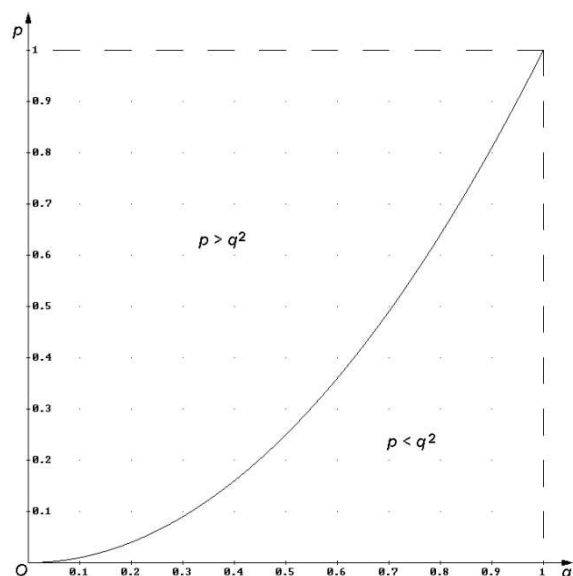
$$\theta_D = \theta_A + 360^\circ, \text{ ossia, per riavere l'allineamento}$$

Dido deve fare un giro in più di Aeneas, quindi:

$$\frac{360^\circ}{T_D} t = \frac{360^\circ}{T_A} t + 360^\circ \text{ da cui si ricava:}$$

$$t = \frac{T_A T_D}{T_A - T_D} = \frac{1,73 \cdot 0,942}{1,73 - 0,942} = 2,068 \text{ anni standard.}$$

f) Siano p e q due numeri positivi minori di 1 e indichiamo con M_D e R_D la massa e il raggio di



Dido. Allora dalle indicazioni del romanzo possiamo scrivere che $M_D = pM_T$ e $R_D = qR_T$.

La gravità superficiale di Dido è quindi

$$g_D = G \frac{M_D}{R_D^2} = G \frac{pM_T}{q^2 R_T^2} = \frac{p}{q^2} G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{p}{q^2} g$$

e affinché sia minore di g deve essere $\frac{p}{q^2} < 1$, ossia $p < q^2$. Se, ad esempio, sia la massa che il

raggio di Dido fossero dell'1% inferiori a quelli della Terra risulterebbe $M_D = 0,99M_T$ e $R_D = 0,99R_T$ si avrebbe $g_D = 1,01g$, quindi l'affermazione sarebbe falsa.

Si può vedere meglio la situazione rappresentando in un sistema di assi cartesiani qOp la parabola $p = q^2$. La regione al di sotto della parabola è quella che corrisponde ai valori di p e q per cui l'affermazione è vera ($g_D < g$), mentre quella sopra corrisponde ai valori per cui è falsa ($g_D > g$), per i valori che definiscono la parabola le due accelerazioni sono uguali; come si può facilmente osservare i casi in cui è falsa (l'area della regione è 2/3 in unità arbitrarie) sono di più di quelli in cui è vera (l'area della regione è 1/3 in unità arbitrarie).

g) Alla minima distanza i due pianeti distano $d_{AD} = 0,5$ UA. Il diametro angolare di Aeneas visto da Dido, all'opposizione, è quindi:

$$\delta_{AD} = 2 \arctg \frac{R_A}{d_{AD}} = 2 \arctg \frac{5350}{0,5 \cdot 1,5 \cdot 10^8} = 29,4'' \text{ dove } R_A \text{ è il raggio di Aeneas.}$$

Oppure, osservando che il raggio del pianeta è molto minore dalla distanza,

$$\delta_{AD} = 2 \arctg \frac{R_A}{d_{AD}} = 2 \frac{R_A}{d_{AD}} = 2 \left(\frac{5350}{0,5 \cdot 1,5 \cdot 10^8} \text{ rad} \right) \left(206265 \frac{''}{\text{rad}} \right) = 29,4''.$$

h) Per calcolare la magnitudine apparente (m_A) di Aeneas utilizziamo la relazione di Pogson nella forma:

$$m_A = m_M - 2,5 \log \frac{F_A}{F_M}$$

dove $m_M = -2,0$ è la magnitudine apparente di Marte visto dalla Terra quando si trova in opposizione a 0,5 UA da questa^[4], F_A e F_M sono i flussi dei due pianeti. Poiché a noi serve il rapporto tra i flussi e la distanza da cui vengono osservati Aeneas e Marte è la stessa (in entrambi i casi 0,5 UA), il flusso luminoso dei due pianeti sarà dato da $F = S \cdot b \cdot L$ dove S è la superficie illuminata, b l'albedo e L la quantità di luce che ricevono dal proprio sole.

Le superfici si calcolano facilmente tenendo conto che all'opposizione l'osservatore vede metà del globo planetario ($S = 2\pi R^2$); le albedo sono note; la quantità di luce che Aeneas riceve dalla propria stella è stata data in relazione a quella che la Terra riceve dal Sole (L_{ST}), possiamo quindi esprimere anche la quantità di luce che riceve Marte da Sole (L_{SM}) in funzione di tale valore.

Ricordando che $L_{ST} = \frac{L_S}{4\pi d_{ST}^2}$ e che $L_{SM} = \frac{L_S}{4\pi d_{SM}^2}$ si ha: $L_{ST} d_{ST}^2 = L_{SM} d_{SM}^2$ da cui segue

$$L_{SM} = L_{ST} \frac{d_{ST}^2}{d_{SM}^2} = \left(\frac{1}{1,5} \right)^2 L_{ST} = \frac{4}{9} L_{ST}.$$

[4] L'orbita di Marte è molto eccentrica ($e = 0,09341233$) e ciò lo porta ad una minima distanza dal Sole a 206 644 545 km = 1,38133346 UA e ad una massima distanza 249 228 730 km = 1,66599116 UA. Quando avvengono le opposizioni perieliche (Marte vicino al perielio e la Terra vicino all'afelio), ogni circa 15-17 anni, i due pianeti raggiungono la minima distanza (teoricamente 54 546 844 km = 0,364623127 UA) e ciò comporta delle ottime condizioni per l'osservazione di Marte. In questa circostanza il pianeta rosso può raggiungere anche una magnitudine apparente di circa -3.0 e il suo disco planetario una dimensione angolare di 25,10". La più stretta degli ultimi e dei prossimi millenni si è verificata 27 agosto 2003 (55 758 006 km).

Si ha quindi:

$$m_A = m_M - 2,5 \log \frac{F_A}{F_M} = m_M - 2,5 \log \frac{S_A \cdot b_A \cdot L_A}{S_M \cdot b_M \cdot L_M} = m_M - 2,5 \log \frac{2\pi R_A^2 \cdot b_A \cdot \frac{2}{3} L_{ST}}{2\pi R_M^2 \cdot b_M \cdot \frac{4}{9} L_{ST}} =$$

$$= m_M - 2,5 \log \frac{3R_A^2 \cdot b_A}{2R_M^2 \cdot b_M} = -2,0 - 2,5 \log \frac{3 \cdot 5350^2 \cdot 0,38}{2 \cdot 3390^2 \cdot 0,15} = -4,4.$$

All'incirca la magnitudine media di Venere vista dalla Terra.

14) Nel romanzo di fantascienza di Poul Anderson, *Circus of Hell* (Scacchiera fra le stelle) del 1970, si parla del pianeta Talwin che orbita intorno alla stella Siekh con un'orbita molto eccentrica "E' il pianeta più eccentrico di cui abbia mai sentito parlare. Uhm ... circa una metà, no?" dice il protagonista. In un'altra parte del romanzo si dice che la durata dell'anno di Talwin è di circa 2 anni terrestri, che praticamente l'asse di rotazione è perpendicolare al piano orbitale ("l'inclinazione è di soli tre gradi") e che al periastro si trova a 0,87 UA, mentre all'apoaastro a 2 UA. Il periodo di rotazione del pianeta è di 18 ore. Questa eccentricità fa sì che le stagioni siano dovute alla posizione del pianeta lungo l'orbita; così scrive l'autore: "Talwin girava intorno a Siekh in un'ellisse eccentrica che, naturalmente, aveva il sole in uno dei fuochi. Si poteva definire l'estate arbitrariamente in questo modo: bisogna tirare una linea attraverso quel fuoco, normale all'asse maggiore, intersecante la curva in due punti. L'estate era il periodo di sei mesi durante il quale Talwin passava da uno di questi punti, attraverso il periastro, fino all'altra estremità del segmento. L'autunno era costituito dalle sei settimane o giù di lì che il pianeta impiegava per passare da questo punto alla più vicina intersecazione dell'asse minore con l'ellisse. L'inverno occupava i quindici mesi in cui Talwin raggiungeva la distanza massima e ritornava all'intersecazione opposta con l'asse minore. Poi la primavera occupava altre sei settimane, fino a quando il pianeta raggiungeva il punto che definiva l'inizio dell'estate."

1. Determinare
 - a. la massa di Siekh in masse solari
 - b. la durata dell'anno di Talwin in giorni di Talwin
 - c. il rapporto delle dimensioni angolari massime e minime del disco di Siekh.
2. Verificare se le durate delle stagioni sono corrette.

Soluzione

1.a) Il semiasse maggiore dell'ellisse, a , è dato da $a = \frac{a_P + a_A}{2}$ e dai dati si ricava $a = 1.435$ UA.

Dalla terza legge di Keplero $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$, si ha: $\frac{T_{Talwin}^2}{a_{Talwin}^3} M_{Siekh} = \frac{T_{Terra}^2}{a_{Terra}^3} M_{Sole}$.

Misurando il tempo in anni e il semiasse maggiore in unità astronomiche si ha:

$$\frac{2^2}{1.435^3} M_{Siekh} = M_{Sole} \text{ da cui segue che } M_{Siekh} = 0.739 M_{Sole}.$$

1.b) L'anno di Talwin (a_{Talwin}) è pari a 2 anni terrestri (a_{Terra}) e un giorno di Talwin (g_{Talwin}) è pari a 18 ore (h). Si ha:

$$a_{Talwin} = 2a_{Terra} = 730g_{Terra} = 17520h$$

$$g_{Talwin} = 18h$$

per cui

$$a_{\text{Talwin}} = 2a_{\text{Terra}} = 730g_{\text{Terra}} = \frac{17520}{18}g_{\text{talwin}} = 973,3g_{\text{talwin}}$$

1.c) Le dimensioni angolari di Siekh saranno massime quando Talwin è al periastro e minime quanto sarà all'apoaastro.

Se indichiamo con d il diametro di Siekh e con r la distanza generica di Talwin, il diametro angolare δ di Siekh visto da Talwin è dato da: $\delta = 2\arctg \frac{d}{2r}$. Essendo ragionevole supporre che la distanza del pianeta sia molto maggiore del diametro della stella, si ha:

$$\frac{\delta_P}{\delta_A} = \frac{2\arctg \frac{d}{2a_P}}{2\arctg \frac{d}{2a_A}} \approx \frac{\frac{d}{a_P}}{\frac{d}{a_A}} = \frac{a_A}{a_P} = 2,3.$$

2) L'orbita di Talwin è data nella figura dove, come indicato nel romanzo, sono stati segnati i punti in cui iniziano le stagioni: in C inizia l'estate, in D l'autunno, in E l'inverno e in B la primavera.

Per il calcolo delle loro durate utilizziamo la seconda legge di Keplero: poiché il raggio vettore del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali allora il rapporto tra area spazzata e tempo impiegato a spazzarla è una costante. Indichiamo con A_E, A_A, A_I, A_P e T_E, T_A, T_I, T_P rispettivamente le aree e i tempi impiegati in estate, autunno, inverno e primavera, si ha:

$$\frac{A_E}{T_E} = \frac{A_A}{T_A} = \frac{A_I}{T_I} = \frac{A_P}{T_P} = \frac{A}{T} = k$$

Dove A e T sono rispettivamente l'area dell'ellisse e il periodo di rivoluzione di Talwin.

Dal testo non si capisce bene qual è il valore dell'eccentricità in quanto la frase: *circa una metà,*

no? Potrebbe intendersi come dire che l'eccentricità è $e = 0,5$ e quindi, dalla sua definizione, $e = \frac{c}{a}$

da cui si ricava che $c = e \cdot a = 0,5a$ dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse e c è la distanza dei fuochi dell'ellisse dal centro (SO; $c = 0,7175 \text{ UA}$).

D'altra parte però vengono date anche le distanze di Talwin all'apoaastro e al periaastro da cui si

ricava che $c = \frac{a_P - a_A}{2} = \frac{2 - 0,87}{2} = 0,565 \text{ UA}$ e quindi $e = \frac{0,565}{1,435} = 0,394$, ossia $c = 0,394a$.

Si ha quindi una contraddizione, infatti le informazioni sull'eccentricità ($e = 0,5$) e sulle distanze al periaastro e all'apoaastro sono contraddittorie. Poiché il dato sull'eccentricità non è attribuito in maniera chiara, supporremo $e = 0,394$.

Per evitare inutili calcoli algebrici, nella risoluzione del problema faremo i calcoli in funzione del semiasse maggiore.

Dalle definizioni generali sull'ellisse si ricava che il semiasse minore (OB) b è dato da:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - (0,394a)^2} = 0,919a.$$

L'area dell'ellisse è quindi $A = \pi ab = 0,919\pi a^2$.

La costante k è: $k = \frac{A}{T} = 0,460\pi a^2$. Dove T è espresso in anni.

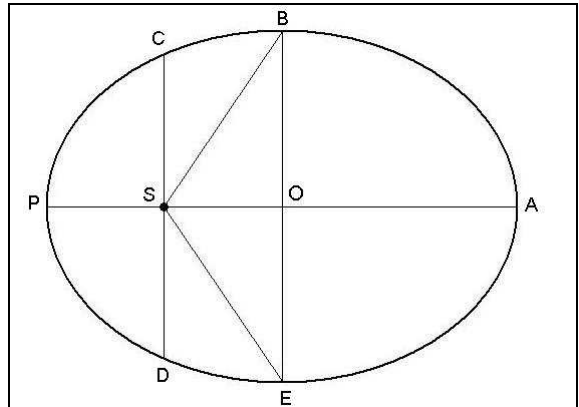


Figura 1 – Orbita di Talwin con indicati i punti in cui, secondo il romanzo, iniziano le stagioni.

Il calcolo più semplice è quello relativo alla durata dell'inverno. Infatti l'area spazzata dal raggio vettore nel tratto EAB dell'ellisse è data da metà ellisse più l'area del triangolo isoscele BSE:

$$A_I = \frac{1}{2} A + b \cdot c = 0,460\pi a^2 + (0,919a)(0,394a) = 1,807a^2 .$$

La durata dell'inverno è quindi $T_I = \frac{A_I}{k} = \frac{1,807a^2}{0,460\pi a^2} = 1,250$ anni, che corrisponde a circa 456 giorni ossia circa 15 mesi, proprio come dice il romanzo.

Per il calcolo della durata dell'estate, esplicitando rispetto a y l'equazione canonica dell'ellisse, si deve calcolare

$$A_E = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^{-c} \sqrt{a^2 - x^2} dx = ab \left(\arcsen\left(-\frac{c}{a}\right) - \arcsen\left(-\frac{a}{a}\right) \right) + \frac{b}{a} \left(-c\sqrt{a^2 - c^2} - a\sqrt{a^2 - a^2} \right) =$$

$$= \left[0,919a^2 \left(\arcsen(-0,394) - \arcsen(-1) \right) + 0,919 \left(-0,394a\sqrt{a^2 - (0,394a)^2} + a\sqrt{a^2 - a^2} \right) \right] = 0,738a^2$$

si utilizzano i valori di b e c trovati sopra.

La durata dell'estate è: $T_E = \frac{A_E}{k} = \frac{0,738a^2}{0,460\pi a^2} = 0,511$ anni, che corrisponde a circa 186,5 giorni, ossia un po' più di 6 mesi.

Il calcolo della durata della primavera e dell'autunno può essere fatto semplicemente come differenza

$T_P = T_A = \frac{T - (T_I + T_E)}{2} = \frac{2 - (1.318 + 0.511)}{2} = 0,120$ anni, che corrisponde circa 44 giorni, ossia circa sei settimane.

Questi risultati fanno pensare che Poul Anderson avesse fatto i calcoli, cosa di cui era capace essendo laureato in fisica.

15) [*] Nello studio dell'evoluzione stellare si confrontano spesso dati osservativi e dati teorici mediante l'utilizzo del diagramma di Hertzsprung–Russell. Nella tabella a sinistra sono riportate le magnitudini apparenti nelle bande fotometriche "B" (m_B) e "V" (m_V) di undici stelle (indicate con lettere dalla A alla M) selezionate e osservate in un ammasso globulare.

- 1) Utilizzando il grigliato fornito (fig. 1) posiziona opportunamente le stelle in un grafico indice di colore ($m_B - m_V$) – magnitudine in banda V (m_V);
- 2) confrontando la posizione delle stelle sul grafico con le isocrone teoriche (stelle della stessa età ma di massa differente fig.2) stima la fase evolutiva delle stelle A, B, C e G;
- 3) stima dalla fig. 2, utilizzando i valori osservati e assumendo come magnitudine assoluta media delle stelle del braccio orizzontale $M_V = 0.50$, il modulo di distanza e l'età dell'ammasso (ricorda che l'età si ricava dal "punto di turn off", cioè dall'ultima stella ancora in sequenza principale).

Stella	m_B	m_V
A	15.18	14.27
B	20.63	20.06
C	18.71	18.32
D	21.34	20.65
E	22.12	21.29
F	18.27	17.74
G	15.39	14.84
H	15.68	14.83
I	17.44	16.73
L	20.29	19.77
M	16.10	15.30

ID	$\frac{M}{M_\odot}$	$\log \frac{L}{L_\odot}$	$\log T_e$	M_B	M_V
1	0.634	-0.556	3.732	7.012	6.317

2	0.680	-0.354	3.759	6.351	5.776
3	0.701	-0.257	3.771	6.051	5.524
4	0.755	0.015	3.796	5.269	4.829
5	0.794	0.293	3.810	4.514	4.120
6	0.807	0.432	3.805	4.175	3.773
7	0.816	0.565	3.777	3.946	3.461
8	0.821	0.739	3.732	3.745	3.086
9	0.823	0.904	3.725	3.380	2.690
10	0.825	1.243	3.715	2.597	1.864
11	0.826	1.504	3.706	2.013	1.236
12	0.827	1.739	3.697	1.506	0.679
13	0.827	1.847	3.692	1.343	0.487
14	0.828	1.944	3.688	1.082	0.201
15	0.828	2.558	3.654	-0.054	-1.157
16	0.829	1.751	3.751	1.053	0.502
17	0.829	1.752	3.739	1.139	0.528
18	0.829	1.754	3.750	1.059	0.500
19	0.830	1.780	3.743	1.035	0.447

La tabella a sinistra contiene i dati di 19 stelle “teoriche”, calcolati con un modello di struttura stellare. Per ogni stella sono indicati: il rapporto della sua massa con la massa del Sole (colonna 2), il logaritmo del rapporto della sua luminosità con la luminosità del Sole (colonna 3), il logaritmo della sua temperatura efficace (temperatura della fotosfera, colonna 4) e le magnitudini assolute nella banda “B” (colonna 5) e “V” (colonna 6).

- 4) Utilizzando i dati della tabella identifica le due stelle teoriche che meglio riproducono i dati osservativi

- delle stelle G e H dell’ammasso;
- 5) stima il rapporto dei raggi delle stelle G e H;
- 6) discuti, con l’aiuto di un disegno, il valore massimo e i due valori minimi del flusso osservabile nella curva di luce di un’ipotetica binaria a eclisse formata da queste due stelle, considerando i raggi ottenuti al punto 5 e il piano dell’orbita parallelo alla linea di vista.

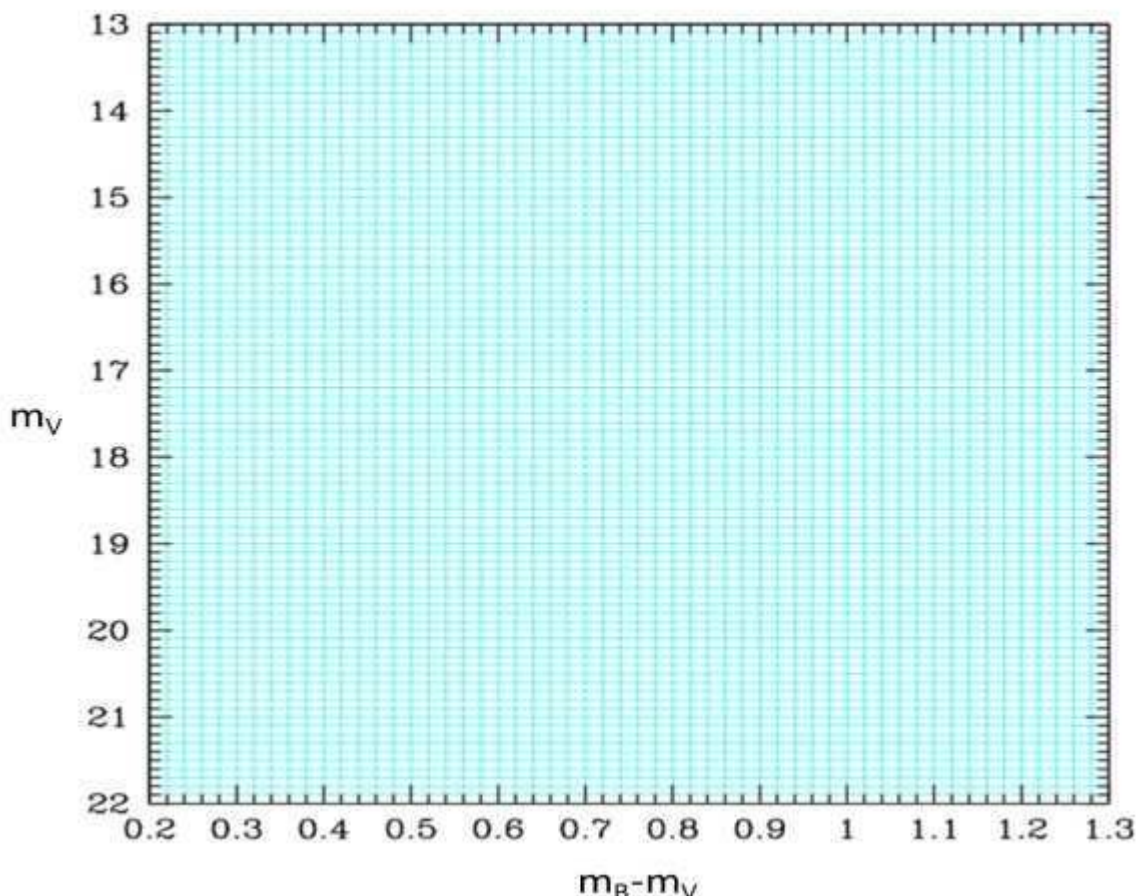


Fig. 1 – Grigliato per posizionare le stelle osservate

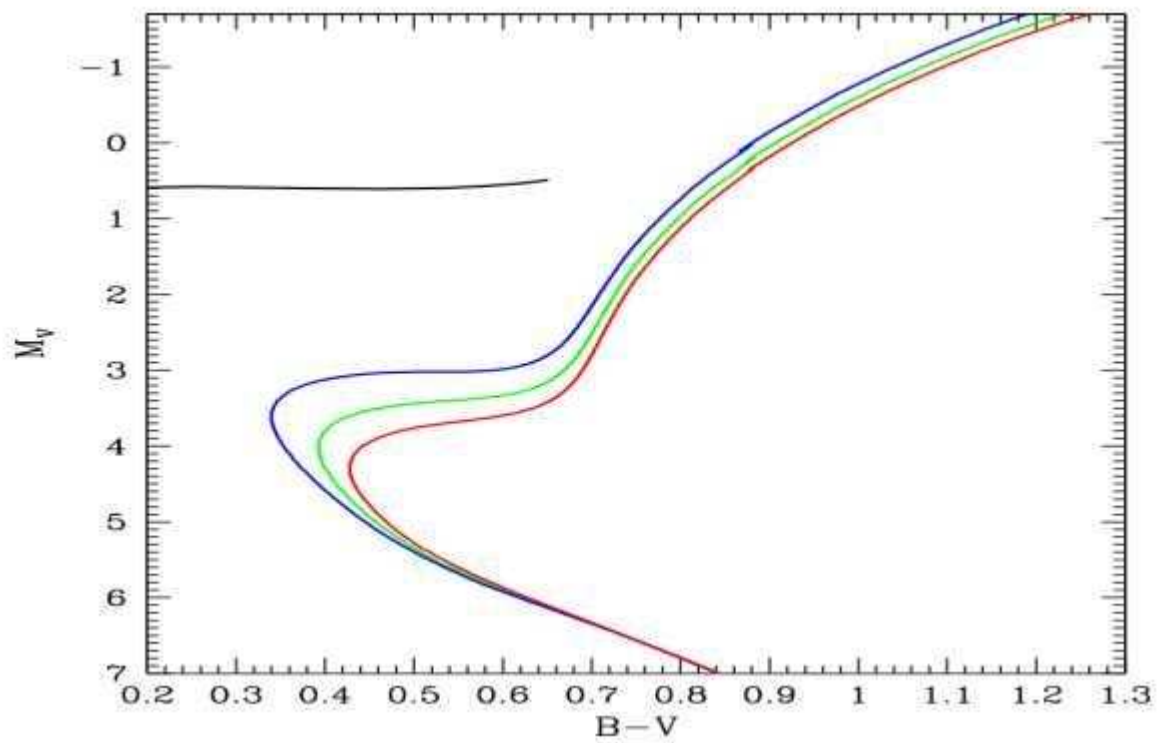
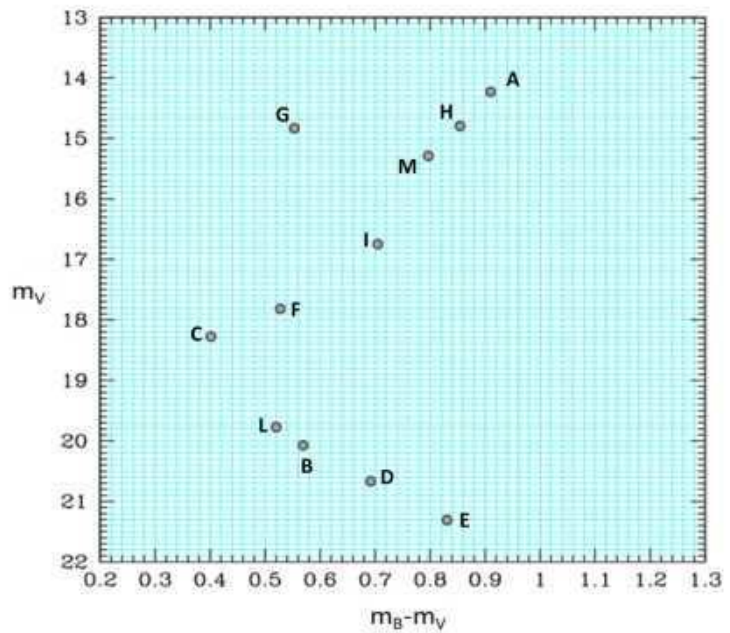


Fig. 2 – Isochrone teoriche per tre diverse età: 8 Gyr (blu), 12 Gyr (verde) e 16 Gyr (rosso); la linea nera rappresenta il braccio orizzontale

SOLUZIONE

1)

Stella	m_B	m_V	$m_B - m_V$
A	15.18	14.27	0.91
B	20.63	20.06	0.57
C	18.71	18.32	0.39
D	21.34	20.65	0.69
E	22.12	21.29	0.83
F	18.27	17.74	0.53
G	15.39	14.84	0.55
H	15.68	14.83	0.85
I	17.44	16.73	0.71
L	20.29	19.77	0.52
M	16.10	15.30	0.80



2) A = gigante rossa, B = sequenza principale, C = turn-off, G = braccio orizzontale

3) Utilizzando la stella “G” del braccio orizzontale, la cui magnitudine assoluta è $M_V \cong 0.50$, si ottiene il modulo di distanza “DM”:

$$DM = m - M = 14.84 - 0.50 = 14.34$$

Per calcolare l’età dell’ammasso bisogna confrontare il valore del B–V della stella C, che si trova in prossimità del turn-off, con quello del grafico delle isocrone.

Il valore di B–V della stella C è di circa 0.4 e fa stimare una età dell’ammasso di 12 Gyr (traccia verde sul grafico). Questo metodo viene detto “verticale”.

In alternativa, si calcola la magnitudine assoluta della stella di turn-off:

$$M_{V(\text{turn off})} = 18.32 - 14.34 = 3.98 \cong 4,$$

coincidente con la magnitudine assoluta di turn-off della isocrona a 12 Gyr. Questo metodo viene detto “orizzontale”.

4) Dal modulo di distanza si ottengono le magnitudini assolute delle stelle G e H:

$$G (M_B = 1.05, M_V = 0.50) \quad \text{e} \quad H (M_B = 1.34, M_V = 0.490)$$

Dalla tabella delle stelle teoriche, confrontando i valori con quelli delle magnitudini assolute ottenute per le due stelle, si ottiene che le stelle teoriche che meglio rappresentano le stelle G e H sono rispettivamente la stella 16 e la stella 13.

5) Dai dati delle stelle teoriche 16 e 13 si ricavano i valori di $\log \frac{L}{L_\odot}$ e $\log T_e$ per le stelle G e H:

$$\log \frac{L_G}{L_\odot} = 1.751 \quad \text{e} \quad \log T_{eG} = 3.751 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_G}{L_\odot} = 56.36 \quad \text{e} \quad T_{eG} = 5636 \text{ K}$$

$$\log \frac{L_H}{L_\odot} = 1.847 \quad \text{e} \quad \log T_{eH} = 3.692 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_H}{L_\odot} = 70.31 \quad \text{e} \quad T_{eH} = 4920 \text{ K}$$

da cui:

$$\frac{L_G}{L_H} = 0.8016 \quad \text{e} \quad \frac{T_{eG}}{T_{eH}} = 1.146$$

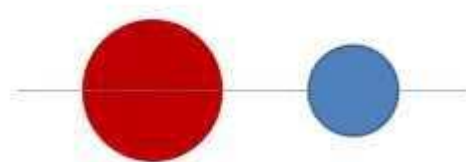
Sapendo che la luminosità di una stella è data da: $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ si ottiene:

$$\frac{L_G}{L_H} = \left(\frac{R_G}{R_H} \right)^2 \left(\frac{T_{eG}}{T_{eH}} \right)^4$$

da cui si ricava

$$\frac{R_G}{R_H} = \sqrt{\frac{L_G}{L_H} \left(\frac{T_{eH}}{T_{eG}} \right)^4} = \sqrt{0.8016 \cdot \left(\frac{1}{1.146} \right)^4} = 0.68$$

5) Considerando il piano dell'orbita parallelo alla linea di vista, la magnitudine massima è la somma delle luminosità della gigante rossa H e della stella G (più piccola, ma con temperatura della fotosfera maggiore) del braccio orizzontale:



$$L_{MAX} = L_H + L_G$$

Nel primo minimo (minimo principale), in cui la gigante rossa copre completamente la stella del braccio orizzontale, la luminosità totale del sistema è data da:



$$L_{MIN1} = L_H$$

Nel secondo minimo (minimo secondario) la stella del braccio orizzontale sta davanti alla gigante rossa, quindi la luminosità totale è data dalla somma della luminosità proveniente dalla stella del braccio orizzontale e da quella della porzione di superficie della gigante rossa rimasta scoperta:



Poiché $R_G = 0.68R_H$, la differenza delle due superfici è data da:

$$\Delta S = S_H - S_G = \pi(R_H^2 - R_G^2) = \pi(R_H^2 - 0.46R_H^2) = 0.54\pi R_H^2$$

e quindi:

$$L_{MIN,2} = L_G + 0.54L_H$$

16) Al 10 giugno 2019 sono stati confermati 4076 pianeti che orbitano intorno a 3044 stelle della nostra galassia (fonte: <http://exoplanets.org>). Di altri 2474 si è in attesa di conferma. Alcuni sono di taglia terrestre.

Per il rilevamento di questi pianeti vengono utilizzati diversi metodi che permettono di determinarne caratteristiche fisiche diverse.

Il metodo che inizialmente ha dato i migliori risultati è il cosiddetto metodo della velocità radiale (VR).

Nella sua formulazione generale il problema della determinazione di alcune caratteristiche fisiche dei pianeti extrasolari è abbastanza complesso, effettuiamo alcune semplificazioni:

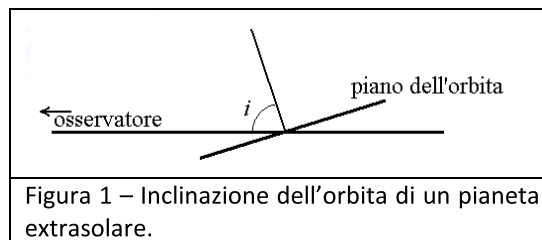


Figura 1 – Inclinazione dell'orbita di un pianeta extrasolare.

1. il piano dell'orbita della stella e quindi del pianeta contenga l'osservatore, in questo caso l'inclinazione dell'orbita del pianeta extrasolare $i = 90^\circ$, vedi figura 1, più avanti abbandoneremo questa ipotesi,
2. nel sistema ci sia un solo pianeta in orbita intorno alla stella,
3. le orbite siano circolari (vedi figura 2).

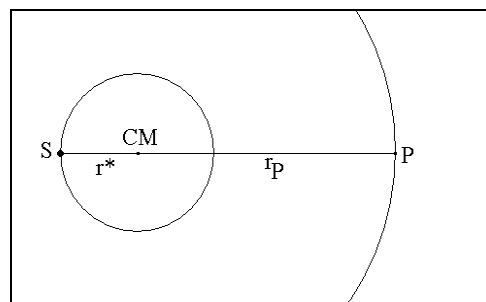


Figura 2 – Rappresentazione del sistema

Indichiamo con M^* e con M_P rispettivamente la massa della stella e del pianeta; con r^* e con r_P rispettivamente la distanza della stella e del pianeta dal CM del sistema; con ω la velocità angolare dell'asse SP attorno al centro di massa (CM); con v^* e v_P le velocità periferiche della stella e del pianeta; con P il periodo di rotazione della stella e del pianeta. Evidentemente risulta che la distanza tra la stella e il pianeta (SP) è $a = r^* + r_P$.

Nella meccanica newtoniana, quando si affronta un problema con due masse interagenti, si utilizza spesso la massa ridotta μ .

Quesito 1 – Si determinino i valori delle distanze r^* e r_P in funzione di M^* , M_P , a e della massa ridotta.

Quesito 2 – Nelle ipotesi fatte ricavare la terza legge di Keplero.

Nel suo moto di rivoluzione attorno al CM la stella, per metà del periodo di si avvicina all'osservatore e per l'altra metà se ne allontana questo produce, sulle righe spettrali della stella uno spostamento Doppler verso il blu quando si avvicina e verso il rosso quando si allontana^[6]. Si dimostra che per la luce l'espressione per l'effetto Doppler per velocità non relativistiche^[7] è data da

Tabella 1	
data (MJD ^[5])	velocità radiale (m/s)
54186,99525	261,0
54187,11354	145,7
54187,96220	240,0
54188,04216	340,0
54188,96503	-263,4
54189,04672	-165,9
54189,09622	-110,0

^[5] La data giuliana viene utilizzata dagli astronomi per semplificare i calcoli; lo zero corrisponde alle ore 12:00:00 del 4 novembre 4713 a.C. del calendario gregoriano (il nostro). Nella tabella 1, a rigore, il tempo viene dato in MJD (giorno giuliano modificato) in cui lo zero corrisponde alle 0:00:00 del 17 novembre 1858. Per aiutare nei calcoli si ricordi che le 0:00:00 del 1° marzo 2007 corrispondono a 54160 MJD

^[6] In astronomia per misurare lo spostamento delle righe spettrali di un corpo celeste si utilizza spesso la quantità:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$$

dove λ' e λ sono rispettivamente la lunghezza d'onda osservata e quella emessa dalla sorgente. Se $z > 0$,

$\lambda' > \lambda$ e si ha uno spostamento verso il rosso, al contrario, se $z < 0$, $\lambda' < \lambda$ e si ha uno spostamento verso il blu.

^[7] La [1] deve essere però corretta nel caso di velocità relativistiche, perché, sviluppando, si ha $z = v_r/c$ (molte galassie conosciute hanno $z > 1$ e ciò implicherebbe $v_r > c$!?!). L'espressione corretta in questo caso è $v_r > c$

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1$$

, con la convenzione data sopra sul segno di v_r . Si vede facilmente che utilizzando la [1] si ha $z = v_r/c$. La [1] deve essere però corretta nel caso di velocità relativistiche della sorgente (molte galassie conosciute

$$[1] \quad \lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v_r}{c} \right)$$

dove v_r è la componente radiale della velocità della sorgente: positiva se la sorgente si allontana, negativa se si avvicina, c è la velocità della luce nel vuoto.

Quesito 3 – Si consideri il sistema Sole-Giove e un osservatore posto a 10 pc nelle ipotesi poste sopra, si calcoli:

- lo spostamento angolare che subisce il Sole a causa della presenza di Giove;
- la variazione, $\Delta\lambda$, massima che si osserverebbe per la riga $H\alpha$ dell'idrogeno ($\lambda_{H\alpha} = 656,281$ nm) emessa dal Sole.

Valori numerici:

$$1 \text{ pc} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

$$\text{Massa del Sole } M_S = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1000 M_J$$

$$\text{Raggio del Sole } R_S = 6,9548 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\text{Massa di Giove } M_J = 1,8986 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

$$\text{Raggio di Giove } R_J = 7,1472 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$\text{Periodo di Giove } P_J = 11,8619 \text{ anni} = 3,7434 \cdot 10^8 \text{ s}$$

$$\text{Distanza Sole-Giove } d_{SJ} = 7,7841 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Lo spostamento Doppler in un sistema planetario è estremamente piccolo e solo a partire dal 1995 è stato possibile misurarlo con adeguata precisione.

Quesito 4 – Con le sole ipotesi 2 e 3 fatte sopra, si determini l'espressione per la velocità orbitale di una stella in funzione del periodo e delle masse e quindi il valore massimo della componente radiale della velocità.

Nel 2007 O'Donovan ed altri comunicavano l'esistenza di un pianeta intorno alla stella GSC 03089-00929, da allora noto con la sigla TrES-3b (e la stella ha preso il nome TrES-3) ricavata con il metodo dei transiti.

La misurazione dello spostamento Doppler delle righe spettrali della stella, effettuata con diversi telescopi, indicava una rotazione intorno al centro di massa di un sistema planetario; nella tabella 1 sono riportati alcuni valori.

Nel grafico allegato "Andamento velocità radiale TrES-3" viene riportata, insieme ai dati con il relativo errore, la curva teorica che meglio approssima i dati di tabella 1 (vedi O'Donovan et al.: *TrES-3: a nearby, massive, transiting hot Jupiter in a 31 hour orbit*, 2007, *ApJ*, 663, L37–L40).

Analizzando la curva della velocità radiale si possono stimare alcuni parametri del pianeta e fare alcune considerazioni:

Tabella 2 – Alcuni parametri fisici della stella GSC 03089-00929	
Massa	0,924 ($\pm 0,026$) M_S
Temperatura Effettiva	5720 (± 150) K
Raggio	0,813 ($\pm 0,020$) R_S

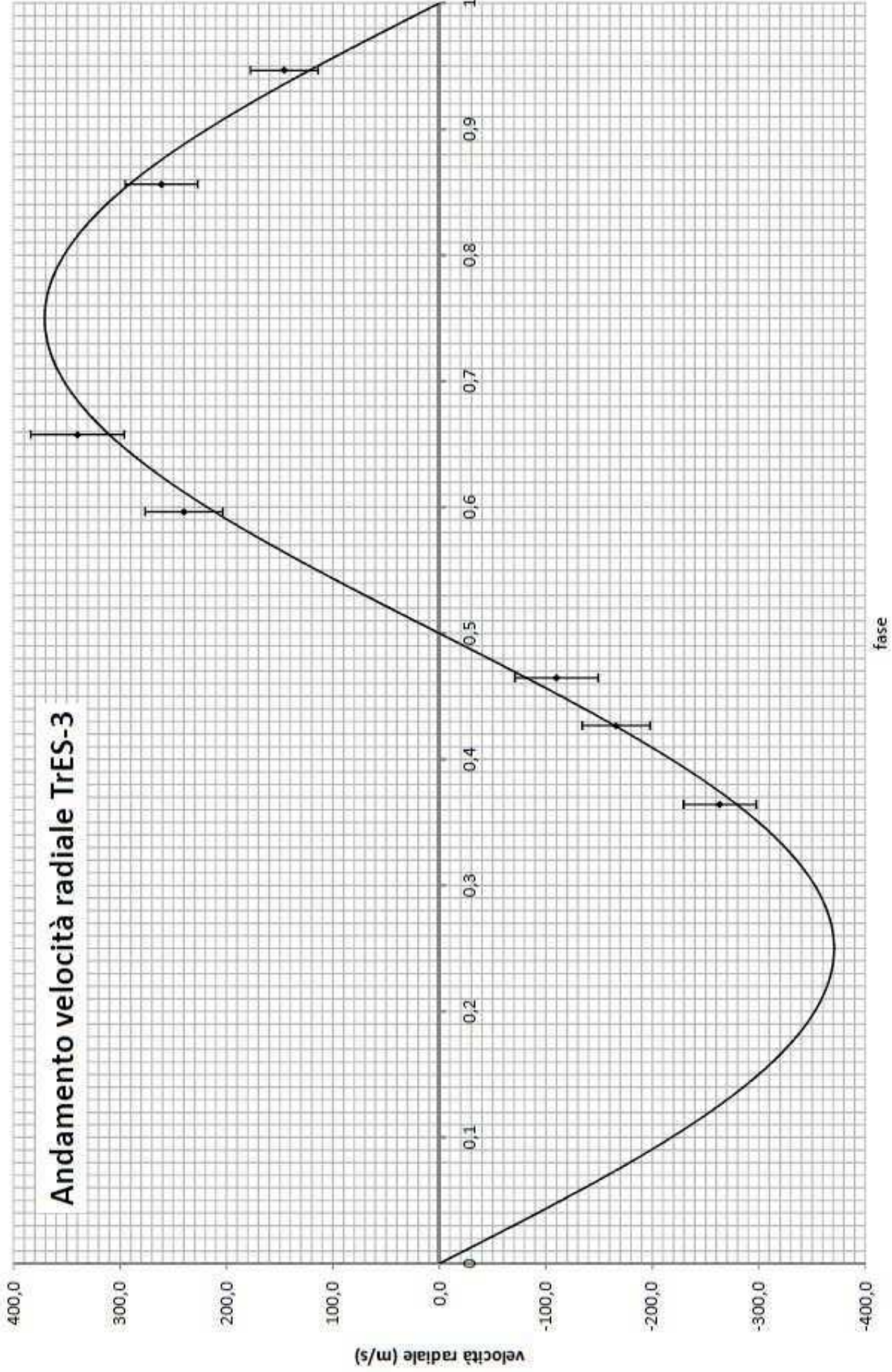
Quesito 5

Stimare:

- il periodo del pianeta TrES-3b?
- la distanza stella-pianeta?
- la quantità MP_{seni} ?

hanno $z > 1$ e ciò implicherebbe $v_r > c$ (!?!). L'espressione corretta in questo caso è $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} - 1$, con

la convenzione data sopra sul segno di v_r .



SOLUZIONE

Quesito 1

Dalla definizione di centro di massa e di a si ha:

$$\begin{cases} r^* M^* = r_p M_p \\ r^* + r_p = a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema e tenendo conto della definizione di massa ridotta, otteniamo:

$$\begin{cases} r^* = a \frac{\mu}{M^*} \\ r_p = a \frac{\mu}{M_p} \end{cases}$$

[2]

Quesito 2

Il CM è sempre contenuto nella congiungente stella-pianeta che ruota attorno ad esso con velocità angolare ω costante. Uguagliando l'accelerazione centripeta della stella e del pianeta alla forza di gravità si ha il sistema:

$$\begin{cases} M^* \omega^2 r^* = G \frac{M^* M_p}{a^2} \\ M_p \omega^2 r_p = G \frac{M^* M_p}{a^2} \end{cases}$$

[3]

Sommando

$$\omega^2 (r^* + r_p) = G \frac{(M^* + M_p)}{a^2} \Rightarrow \omega^2 = G \frac{(M^* + M_p)}{a^3}$$

[4]

Sostituendo $\omega = \frac{2\pi}{P}$ ed aggiustando i termini si arriva all'equazione $\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M^* + M_p)}{4\pi^2}$.

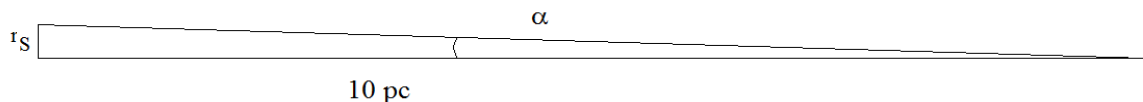
Quesito 3

a) utilizzando le [2] per il sistema Sole-Giove, si ha che le distanze del Sole e di Giove dal baricentro del sistema è:

$$r_s = d_{SJ} \frac{M_J}{M_S + M_J} = 7,4229 \cdot 10^8 m \text{ (circa 50.000 km dalla superficie del Sole)}$$

$$r_J = d_{SJ} \frac{M_S}{M_S + M_J} = 7,7767 \cdot 10^{11} m$$

Indichiamo con α l'angolo sotto cui vediamo il raggio dell'orbita del sole da 10 pc.



Dalla figura si ricava che $tg\alpha = \frac{r_s}{10pc}$ da cui segue che lo spostamento angolare che subisce il sole è

$\theta = 2\alpha = 2arctg\left(\frac{r_s}{10pc}\right) = 2,756 \cdot 10^{-7} \approx 1$ millesimo di secondo d'arco. Al limite della risoluzione dei migliori telescopi attuali basati a terra.

b) Per prima cosa è necessario ricavare la velocità orbitale del sole

$$v_s = \omega r_s = \frac{2\pi r_s}{P} = 12,459 \text{ m/s} \text{ e quindi } \Delta\lambda = 2(\lambda' - \lambda) = 2\lambda \frac{v_s}{c} = 5,46 \cdot 10^{-14} \text{ m}.$$

Quesito 4

Dalla definizione di velocità orbitale e dalle espressioni ricavate sopra ([2] e [4]) si ha

$$v^* = \frac{2\pi}{P} r^* = \frac{2\pi}{P} \frac{\mu}{M^*} a = \frac{2\pi}{P} \frac{M_P}{M^* + M_P} \left(\frac{G(M_P + M^*) P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_P}{(M_P + M^*)^{2/3}}.$$

Il valore massimo della componente radiale della velocità, nel caso di un'orbita inclinata di un angolo i , è quindi $v_{r,MAX} = v^* \sin i$.

Quesito 5

a) Dalla tabella 1 possiamo ricavare gli intervalli Δt tra le misurazioni delle velocità radiali. Sul grafico, dove le misure vengono riportate in un'unica fase, si possono misurare le distanze Δx in mm tra coppie di punti e il periodo della variazione della velocità radiale.

Alcuni valori sono riportati nella tabella a lato; il periodo della sinusoide corrisponde a 230 mm.

punti	Δt (giorni)	Δx (mm)	P (giorni)
5-6	0,08169	15	1,25258
5-7	0,13119	23	1,3119
3-4	0,07996	14	1,313629
1-2	0,11829	21	1,295557
1-5	1,96978	343	1,320844

Quindi dalla proporzione $\Delta t : \Delta x = P : 230$ si ricava il periodo della stella e quindi del pianeta.

Nella tabella, la distanza 1-5, è maggiore del periodo in quanto dai dati si nota facilmente che i valori si riferiscono a fasi diverse.

Mediando i valori ottenuti si ha: $P = 1,30 \pm 0,03$ giorni.

b) In prima approssimazione possiamo ragionevolmente ipotizzare che la massa del pianeta sia trascurabile rispetto alla massa della stella (tra l'altro, dall'astrofisica, si ha che una stella deve avere una massa di almeno 0,08 masse solari e poiché TrES-3 è di circa una massa solare, l'approssimazione è accettabile) dalla terza legge di Keplero si ricava una stima della distanza a stella-pianeta.

$$a = \left[\frac{GM^*}{4\pi^2} P^2 \right]^{1/3} = (3,40 \pm 0,09) \cdot 10^9 \text{ m} = (0,0226 \pm 0,0006) \text{ UA}.$$

c) Tenendo conto dell'inclinazione dell'orbita, nel grafico "Andamento velocità radiale TrES-3" si può misurare: $K = v_{r,MAX} = v^* \sin i$. Si ricava:

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_P}{(M_P + M^*)^{2/3}} \sin i = (370 \pm 10) \text{ m/s}$$

Utilizzando ancora una volta il fatto che la massa del pianeta è piccola rispetto alla massa della stella, si ha:

$$M_P \sin i \cong \left(\frac{P}{2\pi G} \right)^{1/3} \cdot K \cdot M^{*2/3} = (3,58 \pm 0,20) \cdot 10^{27} \text{ kg} = (1,89 \pm 0,11) M_J$$

17) Il grafico "Curva di luce del transito di TrES-3b del 19/06/2011", riporta l'andamento della luminosità della stella nel tempo e la curva teorica che meglio approssima questi dati. I punti del grafico scaturiscono da misure di luminosità della stella fatte su immagini riprese con il telescopio da 41 cm dell'Osservatorio "P. Francesco De Vico" di Serrapetrona (MC) da un gruppo di studenti di fisica dell'Università di Camerino e dai tecnici dell'Osservatorio.

La linea teorica è stata generata inviando i dati al EXOPLANET TRANSIT DATABASE (<http://var2.astro.cz/ETD/index.php>) che fa uso di opportuni algoritmi di calcolo.

QUESITO – Dall’analisi della curva di luce del transito, utilizzando anche i risultati ottenuti dall’analisi della curva della velocità radiale (problema 1), i parametri della stella dati anch’essi nel problema 1 e trascurando l’estinzione al bordo, determinare:

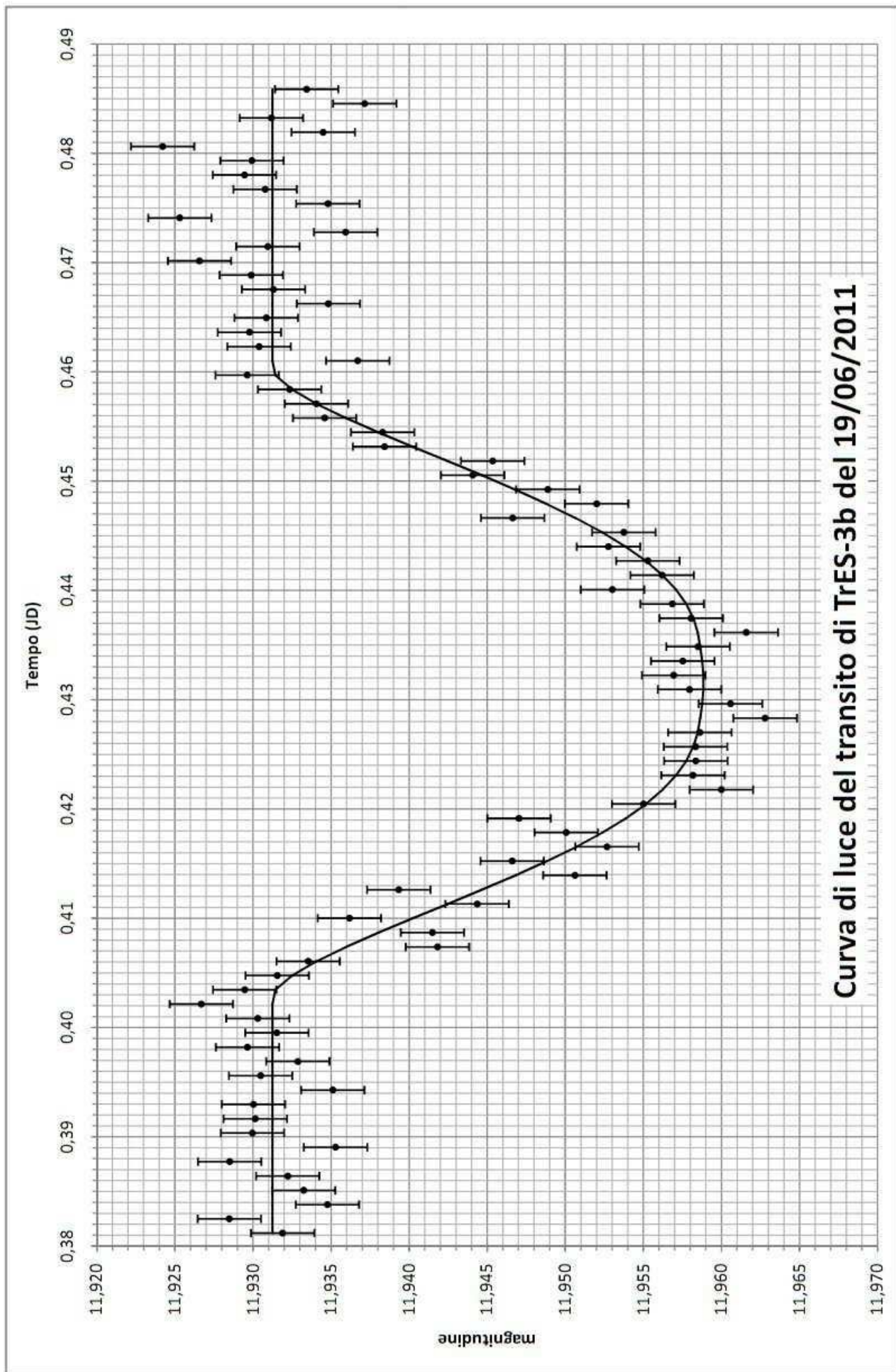
- 1 – Il raggio del pianeta (esprimere il risultato in R_J).
- 2 – L’inclinazione i dell’orbita.
- 3 – La massa del pianeta (esprimere il risultato in M_J) e la sua densità.

Tabella 3
Valori della magnitudine apparente di TrES-3 durante il transito del 19/06/2011

JD ^[8]	mag	JD	mag	JD	mag
0,38118	11,932	0,41654	11,953	0,45184	11,945
0,38248	11,928	0,41784	11,950	0,45316	11,938
0,38378	11,935	0,41914	11,947	0,45447	11,938
0,38509	11,933	0,42045	11,955	0,45578	11,935
0,38640	11,932	0,42176	11,960	0,45708	11,934
0,38772	11,929	0,42308	11,958	0,45839	11,932
0,38903	11,935	0,42439	11,958	0,45970	11,930
0,39034	11,930	0,42569	11,958	0,46101	11,937
0,39164	11,930	0,42700	11,959	0,46231	11,930
0,39296	11,930	0,42831	11,963	0,46362	11,930
0,39427	11,935	0,42962	11,961	0,46494	11,931
0,39558	11,930	0,43093	11,958	0,46624	11,935
0,39689	11,933	0,43223	11,957	0,46755	11,931
0,39819	11,930	0,43353	11,958	0,46885	11,930
0,39951	11,932	0,43485	11,959	0,47016	11,927
0,40082	11,930	0,43615	11,962	0,47147	11,931
0,40214	11,927	0,43745	11,958	0,47278	11,936
0,40345	11,929	0,43876	11,957	0,47409	11,925
0,40475	11,932	0,44007	11,953	0,47539	11,935
0,40605	11,934	0,44139	11,956	0,47670	11,931
0,40737	11,942	0,44270	11,955	0,47802	11,930
0,40868	11,942	0,44400	11,953	0,47933	11,930
0,41000	11,936	0,44531	11,954	0,48063	11,924
0,41130	11,944	0,44663	11,947	0,48193	11,935
0,41260	11,939	0,44793	11,952	0,48324	11,932
0,41392	11,951	0,44924	11,949	0,48455	11,937
0,41523	11,947	0,45054	11,944	0,48586	11,933

Si stima un errore di 0.002 magnitudini.

[⁸] La prima immagine è stata ripresa alla data giuliana 2455732,38118 ovvero alle 21:08:54 del 19 giugno 2011 (UT) ovvero alla 23:08:54 del 19 giugno 2011 tempo locale.



Curva di luce del transito di TrES-3b del 19/06/2011

SOLUZIONE

1) Se si indica con F^* il flusso luminoso della stella in assenza di transito, con F il flusso luminoso della stella durante il transito e con ΔF la profondità del transito, $\Delta F = F^* - F$.

Per definizione il flusso luminoso si lega alla magnitudine mediante la legge di Pogson:

$m = m_0 - 2,5 \text{Log} \frac{F}{F_0}$. Se indichiamo con m^* la magnitudine della stella in assenza di transito, con m

la magnitudine minima durante il transito e con Δm la variazione di magnitudine ($\Delta m = m - m^*$) [9]

si dimostra che $\Delta F = F^* (1 - 10^{-0,4|\Delta m|})$

Consideriamo il disco della stella uniformemente illuminato (trascurando quindi l'estinzione al bordo), durante il transito approssimativamente si ha:

$$\frac{\Delta F}{F^*} = \left(\frac{R_p}{R^*} \right)^2 = 1 - 10^{-0,4|\Delta m|}$$

Dal grafico del transito si ricava:

Profondità del transito: $\Delta m = (0,028 \pm 0,004)$ magn.

Durata del transito: $T = (0,059 \pm 0,002)$ giorni = (5100 ± 170) s.

Per il raggio del pianeta si ricava quindi:

$$R_p = R^* \cdot \sqrt{1 - 10^{-0,4|\Delta m|}} = (9,0 \pm 1,1) \cdot 10^7 \text{ m} = (1,30 \pm 0,15) R_J$$

2) Dalla figura a lato è facile determinare la distanza (OH) tra il centro O della stella e la linea ideale (AB), disegnata sul disco della stella dal transito del pianeta. A rigore la linea non è un segmento, ma una curva, le dimensioni della stella e dell'orbita sono tali da poter accettare tale approssimazione. Per il teorema di

Pitagora $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2}$,

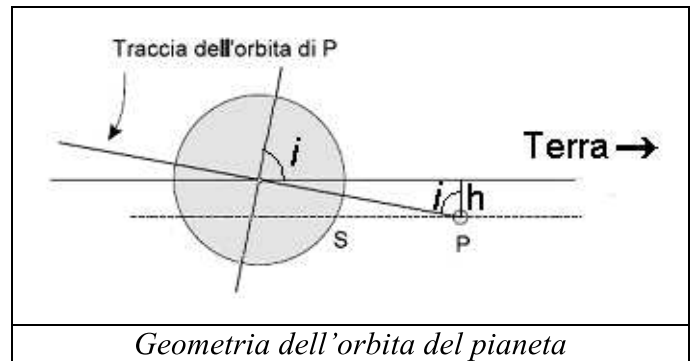
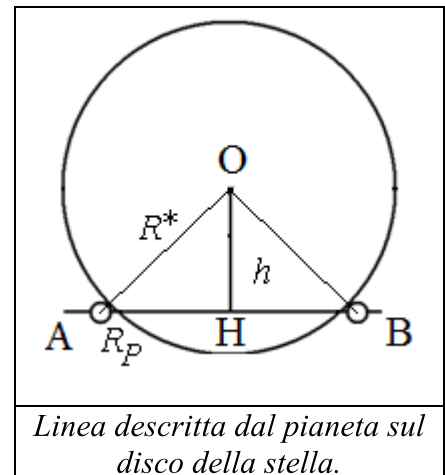
$OA = R^* + R_p$. Se esprimiamo il risultato in termini del raggio della stella (in prima approssimazione possiamo trascurare il

raggio del pianeta), otteniamo: $h = R^* \sqrt{1 - \left(\frac{AH}{R^*} \right)^2}$.

Se T è la durata del transito, ricordando che approssimativamente è $AH = v \cdot \frac{T}{2}$, dove v è la velocità orbitale del pianeta che possiamo

scrivere $v = \frac{2\pi a}{P}$. Si ha: $h = R^* \sqrt{1 - \left(\frac{vT}{2R^*} \right)^2}$.

A questo punto è facile determinare l'inclinazione dell'orbita del pianeta, infatti dalla geometria dell'orbita del pianeta visto



[9] Si ricordi che la magnitudine è una grandezza decrescente, una stella più luminosa di un'altra ha magnitudine inferiore.

dalla Terra si ricava che $\cos i = \frac{h}{a}$ da cui, ricordando le unità di misura utilizzate per h e per a , segue:

$$i = \arccos\left(\frac{h}{a}\right) = \arccos\left(\frac{R^*}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi a T}{P \cdot R^*}\right)^2}\right).$$

3) La massa del pianeta si ottiene da $M_P = \frac{M_P \text{seni}}{\text{seni}}$ e la densità da $\delta_P = \frac{M_P}{V_P} = \frac{3M_P}{4\pi R_P^3}$.

	Risultati numerici dei calcoli indicati	Valori nella letteratura scientifica
P (giorni)	$1,30 \pm 0,03$	1,30618608
$M_P \text{seni}$ (M_J)	$1,89 \pm 0,11$	1,91
R_P (R_J)	$1,30 \pm 0,15$	1,305
a (UA)	$0,0226 \pm 0,006$	0,0226
i ($^\circ$)	$85,1 \pm 1,4$	82,15
M_P (M_J)	$1,89 \pm 0,11$	1,928
δ_P (kg/m^3)	1200 ± 500	1190

18) [*] Nella tabella a destra sono riportate le osservazioni fotometriche della supernova di “tipo Ia” SN 2003du, esplosa nella galassia UGC 9391 nel 2003. Le supernovae di tipo Ia possono essere utilizzate come “candele standard” per determinare le distanze delle galassie che le ospitano, in quanto esiste una relazione che lega la loro magnitudine assoluta (M_{SN}) alla variazione della magnitudine apparente dopo 15 giorni dal massimo:

$$M_{SN} = -21.73 + 2.7\Delta m_{15}$$

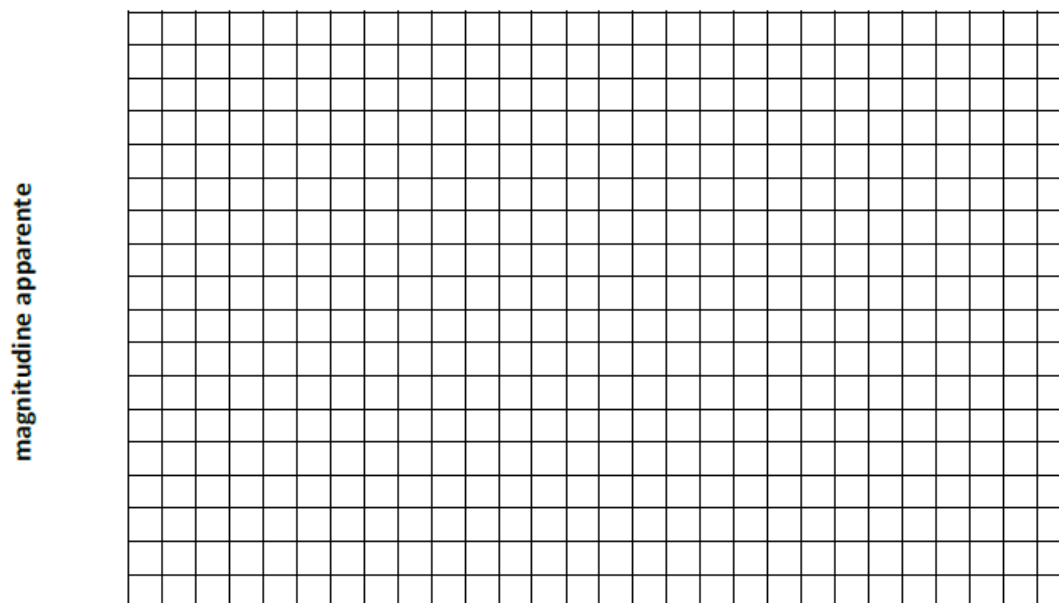
dove $\Delta m_{15} = m_{15} - m_{MAX}$ è la differenza tra la magnitudine apparente 15 giorni dopo il massimo di luminosità e la magnitudine apparente al massimo di luminosità.

1. Si costruisca la curva di luce della supernova utilizzando la griglia allegata in fondo al testo;
2. Si determini la luminosità della supernova in unità di luminosità solari (L_\odot);
3. Si calcoli la distanza della galassia in parsec e in anni luce;

Giorno Giuliano (2452000.0 +)	m
752.80	15.90
753.64	15.30
756.05	14.60
757.01	13.72
762.48	13.40
763.44	13.30
769.12	13.60
771.03	13.70
775.05	13.87
777.40	14.00
778.50	14.20
781.50	14.30
788.48	14.60
790.48	14.70
794.53	14.90
802.03	15.15
813.02	15.52
820.42	15.70
831.49	16.00
836.40	16.10
851.42	16.40

4. Sapendo che la luminosità totale integrata della galassia UGC 9391 è $m_{galassia} = 14.6$, si confronti la luminosità della SN con la luminosità della galassia e si dica se la supernova al massimo è più luminosa dell'intera

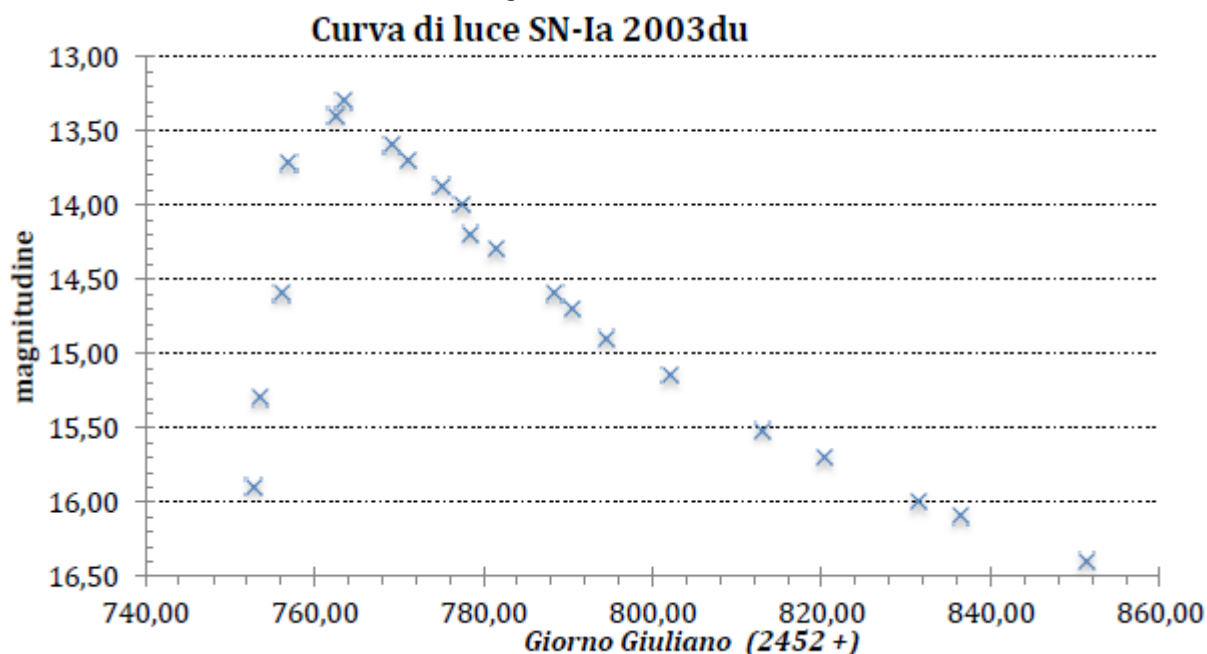
Curva di luce della supernova SN 2003du



Giorno Giuliano (2452000.0 +)

SOLUZIONE

1. Dai dati della tabella si costruisce la seguente curva di luce:



2. Per ricavare la luminosità della SN è necessario ricavare per prima cosa la sua magnitudine assoluta, che otteniamo utilizzando la relazione:

$$M_{SN} = -21.73 + 2.7\Delta m_{15}$$

Calcoliamo il valore Δm_{15} dalla curva di luce. Il valore m_{15} si ottiene dall'interpolazione della curva di luce 15 giorni dopo il massimo. Poiché il massimo di luminosità ($m_{MAX} = 13.30$) è stato osservato al Giorno Giuliano (JD) = 2452763.44, il valore cercato è in corrispondenza del JD = 2452778.44.

Con ottima approssimazione possiamo assumere il valore misurato al JD = 2452778.50, ovvero

assumiamo $m_{15} = 14.20$: sarà quindi: $\Delta m_{15} = 0.90$ da cui ricaviamo:

$$M_{SN} = -21.73 + 2.7\Delta m_{15} = -19.30$$

Dalla relazione: $M_{SN} = M_{\odot} - 2.5 \log \frac{L_{SN}}{L_{\odot}}$ ricaviamo:

$$L_{SN} = L_{\odot} 10^{\frac{M_{SN}-M_{\odot}}{2.5}} = L_{\odot} 10^{\frac{-19.30-4.83}{2.5}} = 4.49 \times 10^9 L_{\odot}$$

3. Per ricavare la distanza d della supernova in parsec, e quindi della galassia che la ospita, utilizziamo la relazione che lega la magnitudine assoluta della supernova con la sua magnitudine apparente al massimo di luminosità:

$$M = m + 5 - 5 \log d$$

Da cui si ricava

$$d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{13.30+19.30+5}{5}} = 33.1 \text{ Mpc} = 107.9 \times 10^6 \text{ anni luce}$$

4. Nota la distanza ricaviamo la magnitudine assoluta della galassia:

$$M_{gal} = m_{gal} + 5 - 5 \log d = 14.6 + 5 - 5 \log 33.1 \times 10^6 = -18.0$$

Possiamo adesso ricavare la luminosità della galassia in unità della luminosità del Sole:

$$M_{gal} = M_{\odot} - 2.5 \log \frac{L_{gal}}{L_{\odot}} \text{ da cui: } L_{gal} = 1.26 \times 10^9 L_{\odot}.$$

Confrontando le luminosità della supernova e della galassia si ottiene: $\frac{L_{Sn}}{L_{gal}} = 3.56$. La supernova

al massimo di luminosità diventa circa 3.56 volte più luminosa della galassia che la ospita.

19) [*]La stella più vicina alla Terra è Proxima Centauri la cui parallasse è $p = (0,7687 \pm 0,0003)''$.

Se ne calcoli la distanza in UA, parsec e anni luce.

Sapendo che la sua magnitudine apparente è 11,05 se ne determini la magnitudine assoluta e quindi la luminosità in rapporto a quella del Sole ($m_s = -26,8$).

Soluzione

Per determinare la distanza di Proxima Centauri, conoscendone la parallasse, si può utilizzare la relazione

$$[1] \quad d = \frac{r}{\text{tg}(p)}.$$

L'angolo di paralasse in radianti è $p = 3,7268 \cdot 10^{-6}$ rad che è molto piccolo per cui si può approssimare $\text{tg}(p) \approx p$. La [1] può essere scritta nella forma: $d = \frac{r}{p}$. Si ricava quindi:

$$d = 268\,300 \text{ UA} = 1,3009 \text{ pc} = 4,243 \text{ a.l.}$$

Per determinare la magnitudine assoluta di Proxima Centauri si utilizza la relazione di Pogson

$$[2] \quad M = m + 5 - 5 \log_{10}(d)$$

dove d è la distanza in parsec; si ottiene: $M = 15,48$.

Per confrontare la luminosità del Sole e di Proxima Centauri è necessario determinare la magnitudine assoluta di entrambe le stelle; la distanza del Sole dalla Terra è $4,848 \cdot 10^{-6}$ pc, di conseguenza la sua magnitudine assoluta è $M_s = 4,77$ e la differenza di magnitudini assolute tra il Sole e Proxima Centauri è 10,71.

Dalla relazione di Pogson si ricava che $L_{Proxima} = 5.22 \times 10^5 L_{\odot}$.

20) Si consideri due insiemi di stelle: il primo è costituito da stelle note di cui si conoscono le principali caratteristiche fisiche, in particolare la temperatura superficiale e la magnitudine assoluta; il secondo è costituito da dieci stelle dell'ammasso delle Pleiadi di cui si è misurata la temperatura e la magnitudine apparente.

Stella	Tipo spettrale	Temperatura (K)	Magnitudine assoluta (M)
Achernar	B5	15500	-1,2
Vega	A0	9900	0,5
22 Leonis	A5	8500	3,4
DM+1°3215	F0	7400	2,9
DM-21°4712	F5	6580	4,0
HR 3862	G0	6030	4,8
HR 4523	G5	5520	5,4
Alpha Cen B	K0	4900	6,6
40 Eridani A	K0	4900	6,9
Epsilon Eridani	K2	4590	7,0
Epsilon Indi	K5	4130	8,2
61 Cygni A	K5	4130	8,8
70 Ophiuchi B	K5	4130	8,7
CD-39°14192	M0	3480	10,2

Stella	Tipo spettrale	Temperatura (K)	Magnitudine apparente (m)
1	B5	15500	3,2
2	A0	9900	4,9
3	A3	9000	8,0
4	F0	7400	8,5
5	F5	6580	9,0
6	G1	5900	10,2
7	G8	5150	12,1
8	K2	4440	12,8
9	K7	3870	13,5
10	M2	3200	16,6

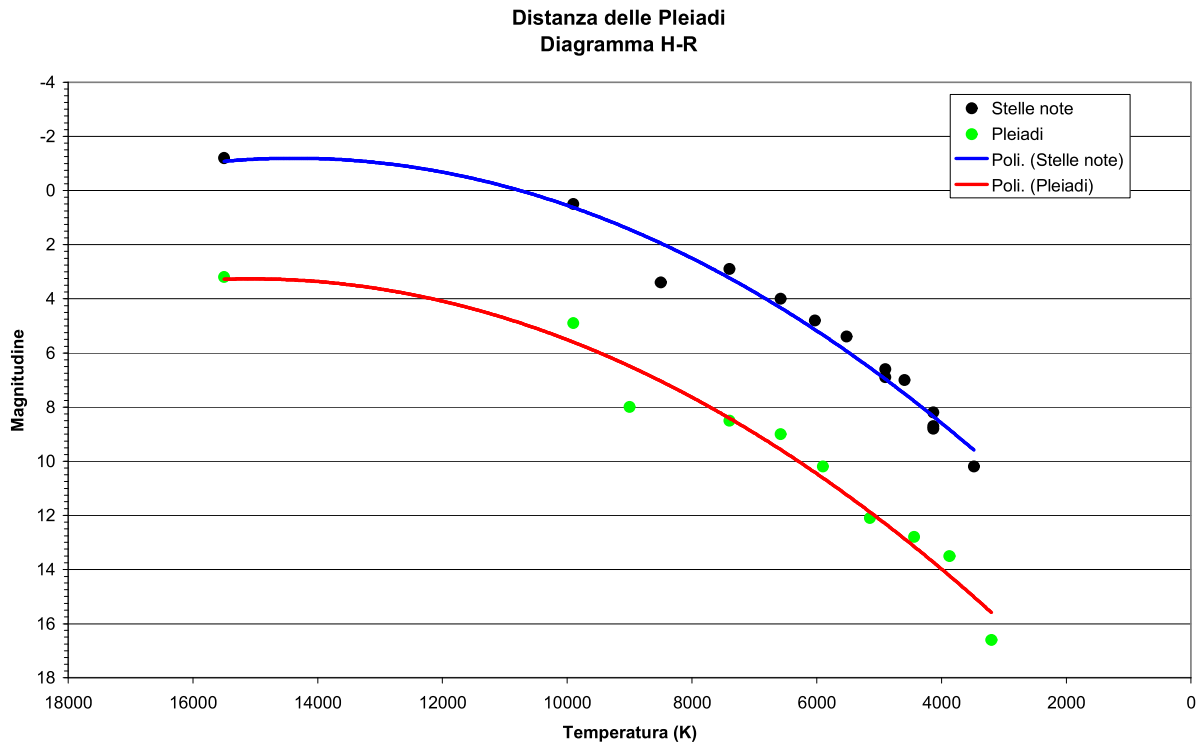
Si realizzi il diagramma H-R per le stelle note e per le Pleiadi e analogamente si tracci una curva liscia che meglio approssima i punti del grafico.

Utilizzando le due curve si ricavi una stima per la distanza delle Pleiadi.

Soluzione

Il diagramma H-R dei due insiemi di stelle è riportato nella figura della pagina seguente.

Per poter stimare la distanza dell'ammasso delle Pleiadi si deve fare l'ipotesi che stelle che hanno la stessa temperatura superficiale hanno anche la stessa luminosità (o comunque vari di poco). La distanza dell'ammasso si può quindi calcolare mediante la determinazione del modulo della distanza $\mu = m - M$ per diverse temperature (si osservi che in genere non si ottiene lo stesso valore, per cui è consigliabile calcolare diversi valori e fare poi la media aritmetica).



Misure fatte sul grafico conducono ad un valore medio del modulo della distanza pari a 5,5 magnitudini. Si può utilizzare ancora l'equazione [2] dell'esercizio 5, ricavando la distanza. Si ottiene:

$$d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{\mu+5}{5}} = 10^{\frac{5,5+5}{5}} = 10^{2,1} = 126 \text{ pc} = 410 \text{ a.l.}$$

Questo metodo viene detto “adattamento alla sequenza principale” perché confronta la sequenza principale di ammasso di stelle a distanza incognita con la sequenza principale di stelle di cui è nota la distanza (e quindi è nota la magnitudine assoluta) dando modo di ricavare il modulo della distanza dell'ammasso.

Il valore effettivo della distanza delle Pleiadi è controverso; la stima fatta con le misure del telescopio spaziale Hubble, che fa uso di una versione più sofisticata del metodo visto sopra, è di 135 pc, la stima fatta con le misure del satellite Hipparcos, che utilizza il metodo della parallasse, è di 122 pc. Nell'agosto del 2014, astronomi del National Radio Astronomy Observatory hanno misurato la distanza delle Pleiadi tramite una rete mondiale di radiotelescopi, risultata pari a 443 anni luce ($136,2 \pm 1,2$ pc). Questa stima è stata giudicata la più precisa in assoluto sulla distanza dell'ammasso stellare.

21) Calcolare i valori delle abbondanze dell'idrogeno e dell'elio previsti per il Sole, per il quale è $Z_{\odot} = 0,02$, in base alla correlazione $Y(Z)$. Si assuma $Y_p = 0,23$.

SOLUZIONE

Per la [10.7] è $X = 1 - Y - Z = 1 - \left(Y_p + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} Z \right) - Z = 1 - Y_p - Z \left(1 + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} \right)$. Con il valore corrente di

$\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 2,5$ si ha quindi $X_{\odot} = 0,70$ e $Y_{\odot} = 0,28$. valori assai vicini a quelle ricavati dalle osservazioni (rispettivamente uguali a 0,71 e 0,27).

22) Calcolare gli intervalli dei valori delle abbondanze dell'idrogeno e dell'elio previsti per gli ammassi globulari, per i quali è $10^{-4} \leq Z \leq 10^{-2}$, e per gli ammassi aperti, per i quali è $0,01 \leq Z \leq 0,02$, in base alla correlazione $Y(Z)$. Sia $Y_p = 0,23$.

SOLUZIONE

Procedendo come nell'Esercizio 21) si ottengono gli intervalli seguenti: per gli ammassi globulari $0,735 \leq X \leq 0,770$ e $0,230 \leq Y \leq 0,255$ e per gli ammassi aperti $0,630 \leq X \leq 0,735$ e $0,255 \leq Y \leq 0,330$.

23) Ci sarebbero indicazioni (secondo qualche autore) che per i nuclei di alcune galassie ellittiche sia $Z = 0,1$. Valutare i valori delle abbondanze dell'idrogeno e dell'elio previsti in base alla correlazione $Y(Z)$. Si assuma $Y_p = 0,23$.

SOLUZIONE.

Dalle espressioni utilizzate nell'Esercizio 21 risulta $X = 0,42$ e $Y = 0,48$. Si noti l'inversione della disuguaglianza tra le abbondanze dell'idrogeno e dell'elio rispetto ai risultati degli esercizi precedenti, nei quali le metallicità coinvolte erano sensibilmente inferiori.

24) Determinare le abbondanze di carbonio, azoto, ossigeno e ferro nel Sole, assumendo la partizione solare di Ross-Aller (Tabella 1 pag. 141) e $Z_\odot = 0,02$.

SOLUZIONE

Dalla definizione di abbondanza del generico elemento chimico e dai valori in tabella si hanno nell'ordine:

$$Z_C = \frac{M_C}{M} = \frac{M_C}{M_Z} \frac{M_Z}{M} = q_C Z_\odot = 4,36 \times 10^{-3}$$

$$Z_N = \frac{M_N}{M} = \frac{M_N}{M_Z} \frac{M_Z}{M} = q_N Z_\odot = 1,06 \times 10^{-3}$$

$$Z_O = \frac{M_O}{M} = \frac{M_O}{M_Z} \frac{M_Z}{M} = q_O Z_\odot = 9,63 \times 10^{-3}$$

$$Z_{Fe} = \frac{M_{Fe}}{M} = \frac{M_{Fe}}{M_Z} \frac{M_Z}{M} = q_{Fe} Z_\odot = 1,54 \times 10^{-3}$$

25) Calcolare il rapporto N_{Fe}/N_H nella partizione solare di Ross-Aller sapendo che $X_\odot = 0,70$.

SOLUZIONE

Dalla [10.6], dai valori in Tabella 1 di pag. 141 e dai risultati dell'Esercizio 24 si ha

$$\frac{N_{Fe}}{N_H} = \frac{A_H}{A_{Fe}} \frac{M_{Fe}}{M_H} = \frac{A_H}{A_{Fe}} \frac{M_{Fe}}{M} \frac{M}{M_H} = \frac{1,0078}{55,8470} Z_{Fe} \frac{1}{X} = 3,970 \times 10^{-5}.$$

26) Calcolare la massa di titanio nel Sole e confrontarla con la massa $M_T = 5,974 \times 10^{24}$ kg della Terra, assumendo la partizione solare di Ross-Aller e $Z_\odot = 0,02$.

SOLUZIONE

Dalla [10.8] e dalla Tabella 1 di pag. 141 segue

$$M_{Ti} = q_{Ti} M_Z = q_{Ti} \frac{M_Z}{M_\odot} M_\odot = 0,0002 \cdot 0,02 \cdot 1,989 \times 10^{30} \text{ kg} = 1,33 M_T.$$

27) La metallicità Z delle stelle di popolazione II è compresa tra $10^{-4} \leq Z \leq 10^{-2}$, calcolare il corrispondente intervallo dei valori delle metallicità espresse dal rapporto ferro su idrogeno, assumendo $X_{\odot} = 0,70$ e $Z_{\odot} = 0,02$.

SOLUZIONE

Dalla [10.10] si ottengono i due valori estremi $\log 10^{-4} + 1,70 \leq [Fe/H] \leq \log 10^{-2} + 1,70$ e quindi $-2,30 \leq [Fe/H] \leq -0,30$.

28) Valutare le abbondanze dell'idrogeno, dell'elio e dei metalli di una stella che abbia $[Fe/H] = 0,5$ e partizione solare di Ross-Aller dei metalli. Assumere $X_{\odot} = 0,70$ e $Z_{\odot} = 0,02$.

Soluzione

La [10.9] equivale alla

$$Z = 10^{[Fe/H]} \left(\frac{Z}{X} \right)_{\odot} X$$

Utilizzando anche la [10.7] e agli sviluppi dell'Esercizio 21 e ponendo, per comodità

$a = 10^{[Fe/H]} \left(\frac{Z}{X} \right)_{\odot} = 0,09035$, si ricava

$$Z = aX = a \left(1 - Y_p - Z \left(1 + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} \right) \right) = a(1 - Y_p) - aZ \left(1 + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} \right)$$

ricordando anche che $1 - Y_p = X_p$, si ricava

$$[+] \quad Z = \frac{aX_p}{1 + a \left(1 + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} \right)}$$

Con i valori precedentemente dati per le varie quantità coinvolte ($X_{\odot} = 0,70$, $Z_{\odot} = 0,02$,

$X_p = 0,77$, $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 2,5$) e in forza delle [10.7] e [+] si ottiene

$$Z = \frac{aX_p}{1 + a \left(1 + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} \right)} = 0,053, \quad Y = Y_p + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} Z = 0,362, \quad X = 1 - Y - Z = 0,585.$$

L'esercizio poteva essere risolto utilizzando direttamente la [10.10] ottenendo $Z = 10^{[Fe/H]-1,70} = 0,063$. Lo scarto è dovuto alla differenza tra i valori di X e di X_{\odot} .