Laurea triennale in Fisica
a.a. 2014 - 2015

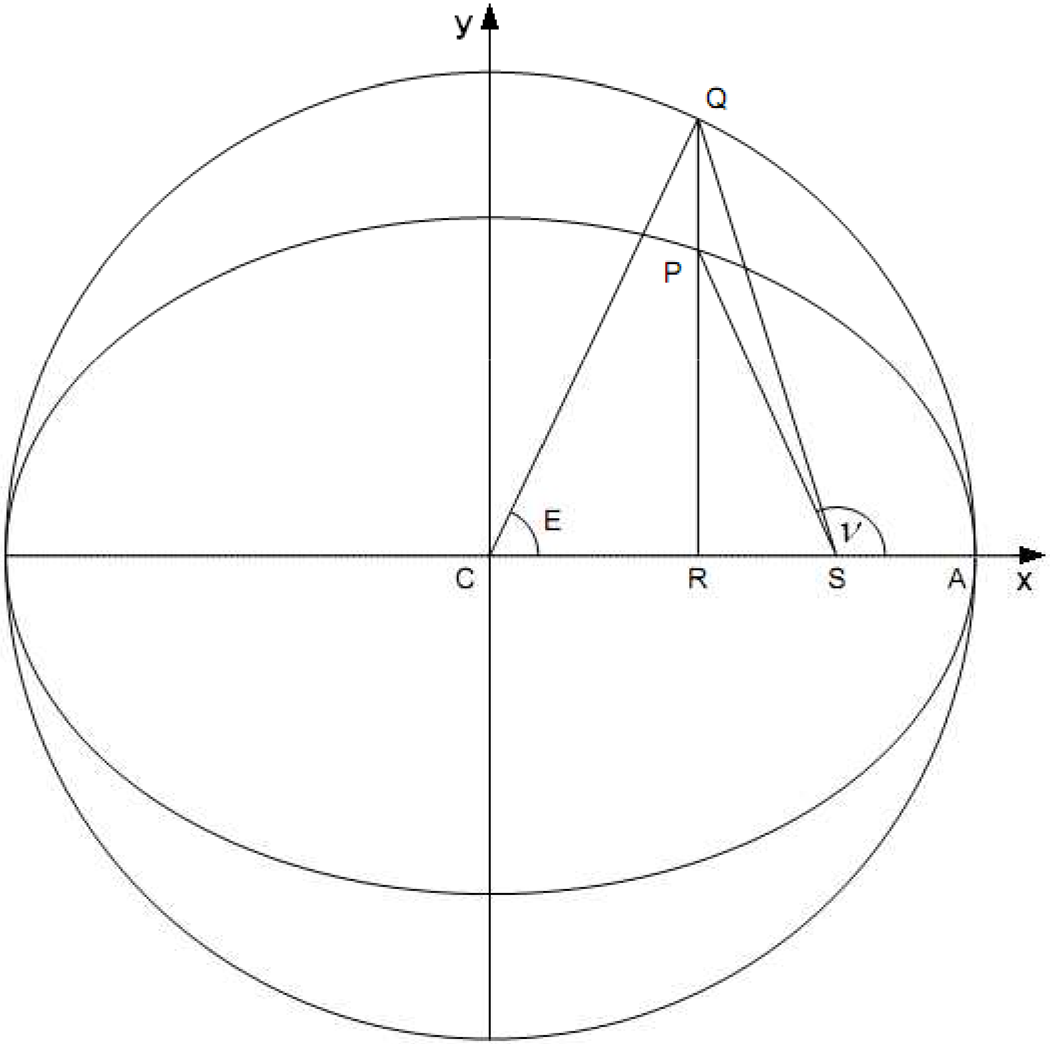
CORSO DI ASTRONOMIA

LEZIONE 5

Prof. Angelo Angeletti

Equazione di Keplero

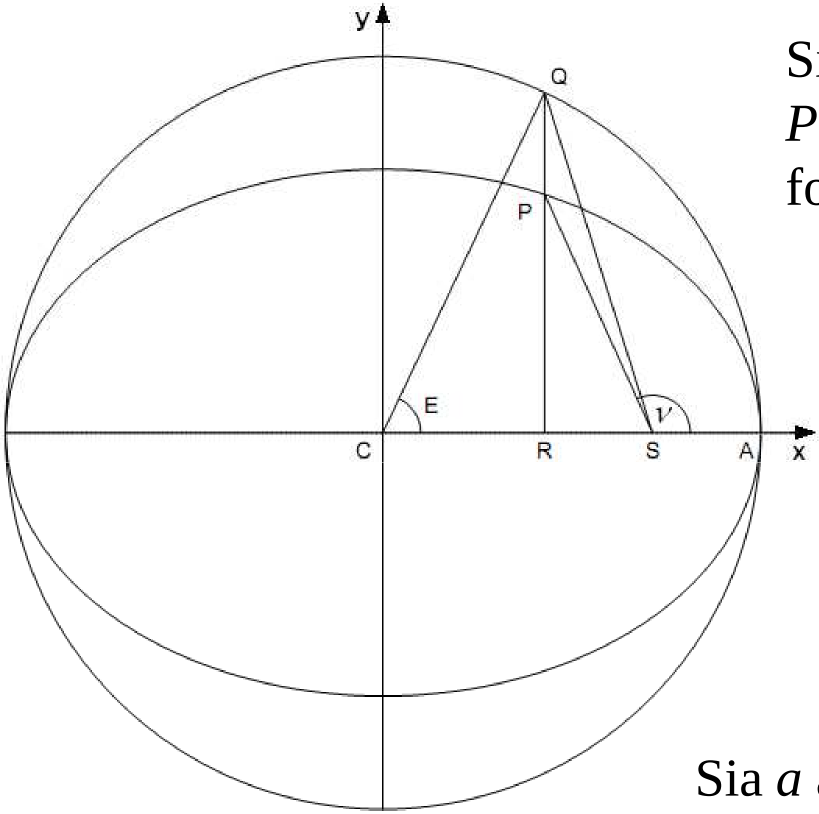
La determinazione della legge oraria del moto di un pianeta intorno al sole è detta **equazione di Keplero**.



$$E - e\,sen E = \frac{2\pi}{P}(t - T)$$

E = ***anomalia eccentrica***
e = *eccentricità*
P = *periodo*
T = *passaggio al perielio*

Equazione di Keplero



Sia t l'istante in cui un pianeta si trova nel punto $P(x,y)$ della sua orbita ellittica che scriviamo in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

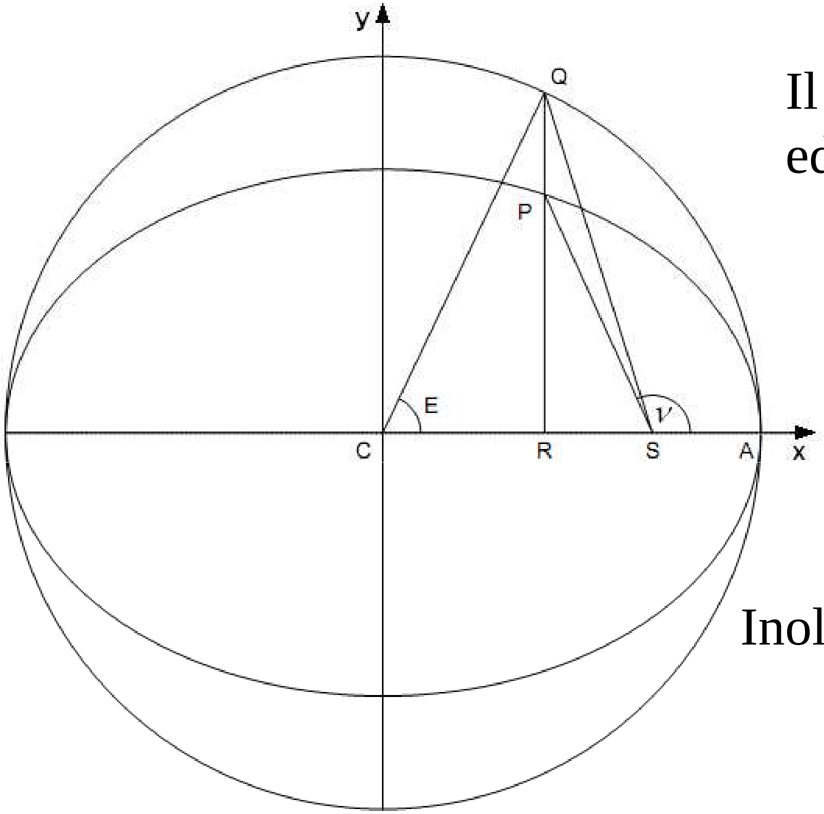
e T l'istante in cui il pianeta è passato al perielio A. $t - T$ è l'intervallo di tempo che impiega a percorrere l'arco AP.

Sia a anche il raggio di una circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 = a^2$$

avente lo stesso centro dell'ellisse e E l'angolo ACQ detto ***anomalia eccentrica***.

Equazione di Keplero



Il punto *P* ha coordinate in quanto è evidente che ed essendo un punto dell'ellisse si ha:

$$\frac{a^2 \cos^2 E}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

da cui segue $\quad y^2 = b^2 \cos^2 E$

Inoltre il punto P è tale che $\quad \frac{PR}{QR} = \frac{y_P}{y_Q} = \frac{bsenE}{asenE} = \frac{b}{a}$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

avente lo stesso centro dell'ellisse e *E* l'angolo *ACQ* detto ***anomalia eccentrica***.

Equazione di Keplero

(I) $$M = n(t - T) \qquad \frac{2\pi}{P} = n$$

$n =$ **_moto medio_**; $M =$ **_anomalia media_**

(II) $$E - e\,sen E = M$$

(III) $$tg\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\frac{E}{2}$$

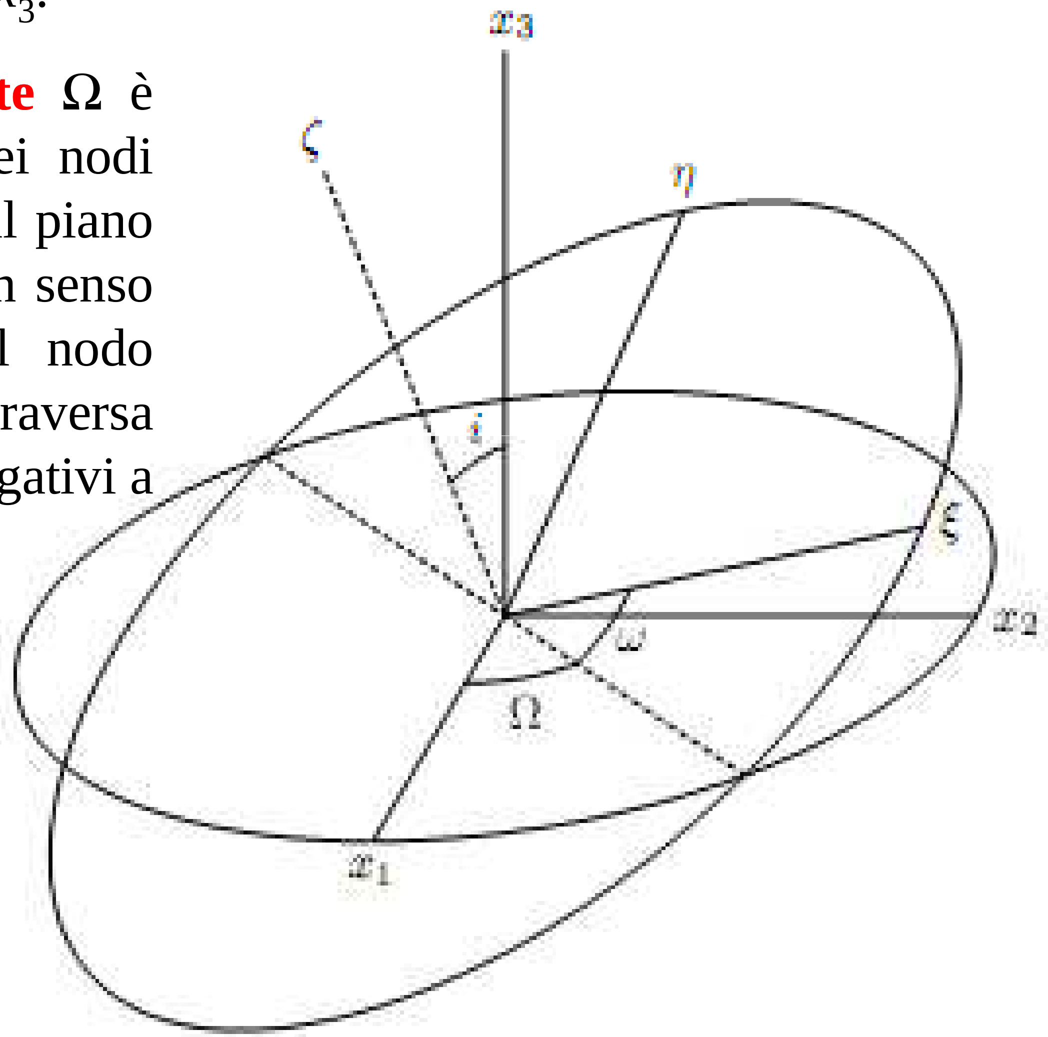
$\nu =$ **_anomalia vera_**

(IV) $$r = a(1 - e\cos E)$$

L'orbita nello spazio

inclinazione orbitale i è l'angolo tra il piano orbitale e il piano (x_1, x_2), cioè tra il vettore momento angolare **L** e l'asse x_3.

la **longitudine del nodo ascendente** Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2), misurato sul piano (x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);



l'**argomento del perielio** ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsidi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.

Al posto di ω a volte si usa la **longitudine del perielio** $\varpi = \Omega + \omega$.

L’orbita nello spazio

Nell’uso tradizionale:

- vengono chiamati anomalie gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea degli apsidi (direzione del perielio);

- vengono chiamati argomenti gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea dei nodi (nodo ascendente);

- vengono chiamati longitudini gli angoli misurati nel piano fondamentale (x_1, x_2) del sistema di riferimento inerziale a partire dall’asse x_1, anche quando (come nel caso della longitudine del perielio) l’angolo sia in realtà formato dalla somma di più termini, di cui solo il primo è misurato a partire dall’asse x_1.

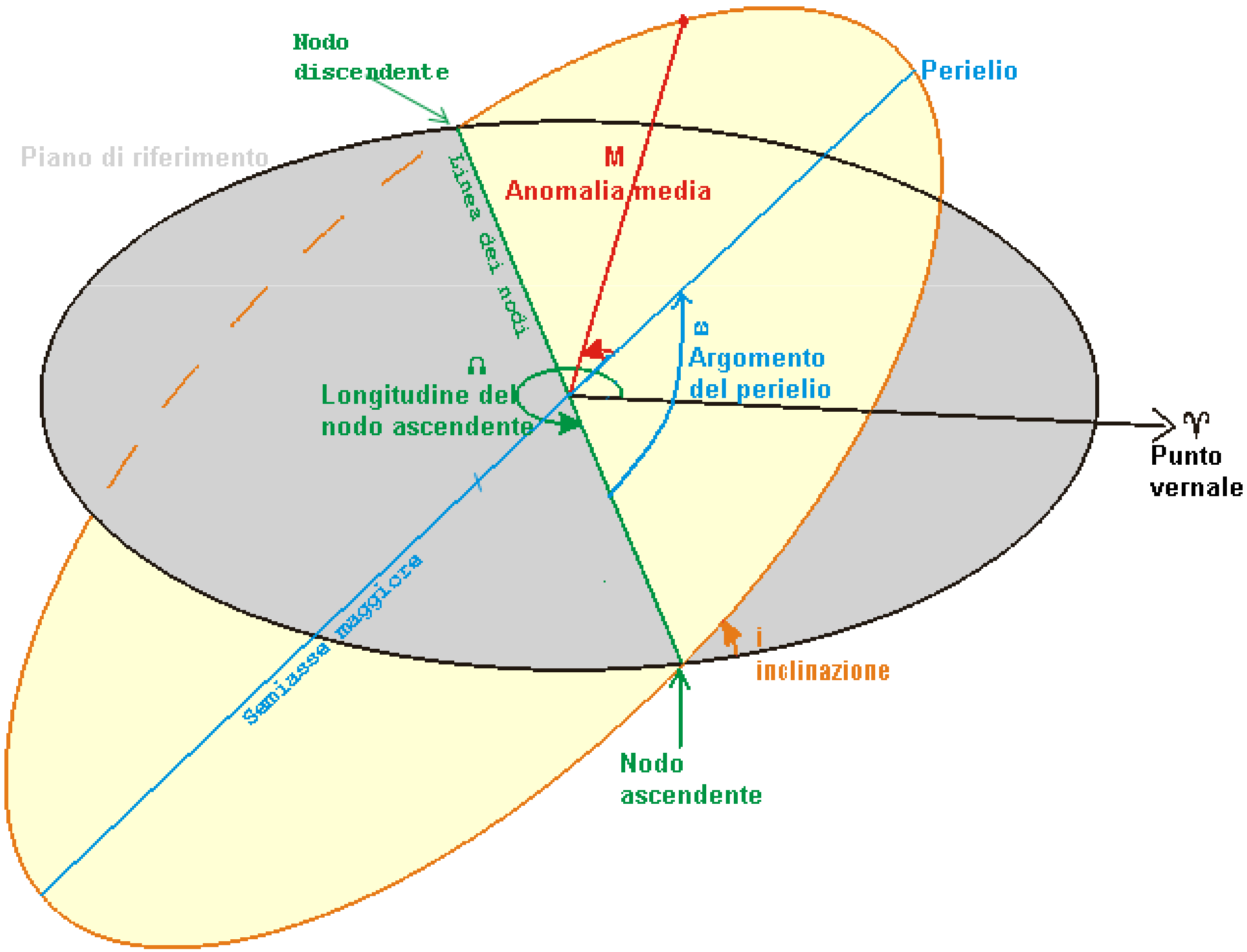
I parametri orbitali

L'orbita di un pianeta può essere specificata per mezzo dei sei elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω, M.

a ed e descrivono la forma e le dimensioni dell'orbita;

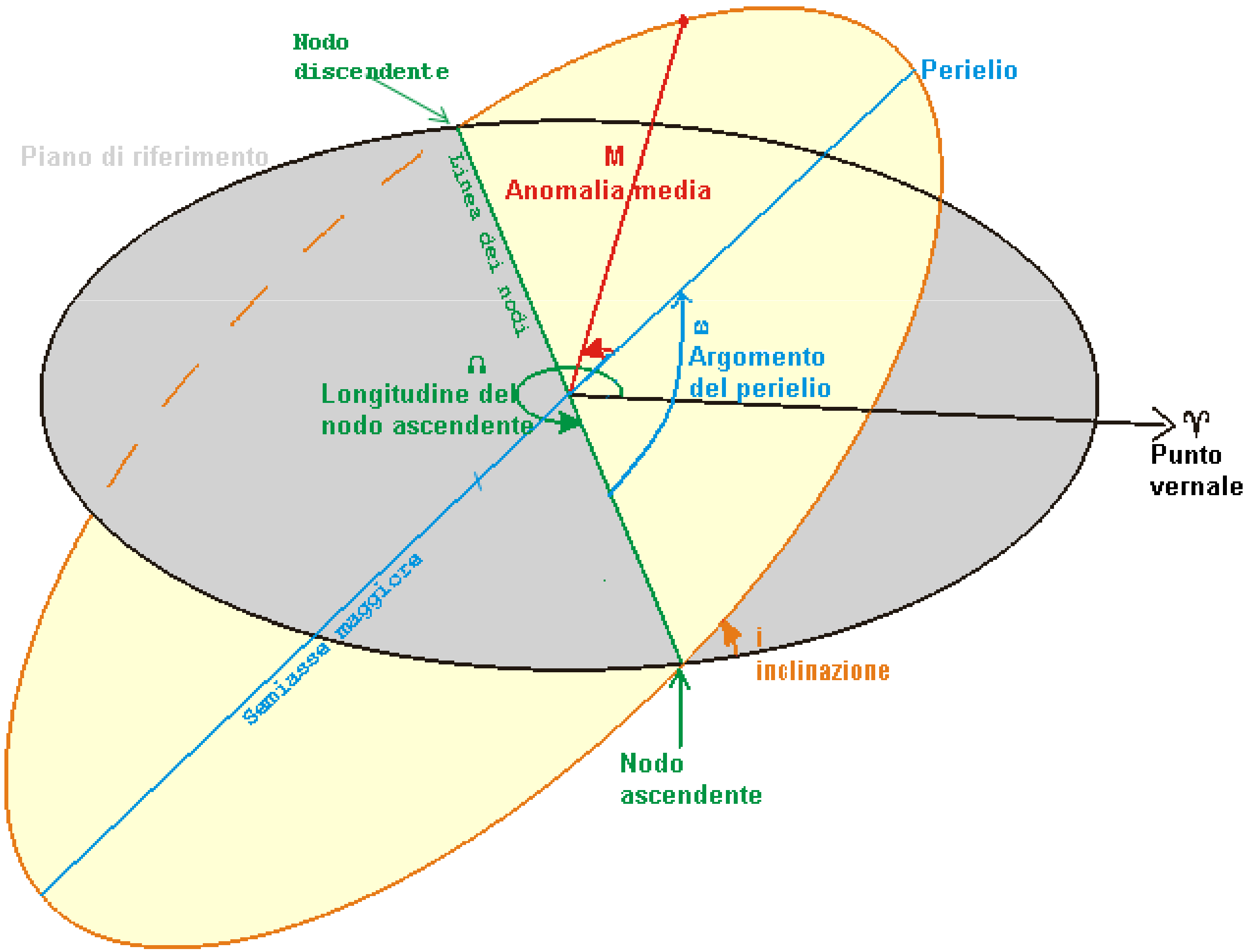
i, ω, e Ω danno l'orientazione del piano orbitale nel sistema di riferimento usato;

M indica la posizione del pianeta lungo l'orbita a un certo istante di tempo.



I parametri orbitali

È un altro modo di specificare le coordinate del pianeta, alternativo rispetto alle sei componenti dei vettori **r** e **v**, ma equivalente, tanto che tra le due rappresentazioni esiste una corrispondenza biunivoca.



I parametri orbitali

I sei elementi orbitali kepleriani non sono ben definiti per orbite di eccentricità e/o inclinazione prossime a zero.

la longitudine del nodo Ω e l'argomento del perielio ω risultano indeterminati per $i = 0$;

l'argomento del perielio ω e l'anomalia media M sono indeterminati per $e = 0$.

⇓

La trasformazione di coordinate da elementi kepleriani a vettori posizione e velocità è localmente non invertibile nell'intorno di $i = 0$, $e = 0$, cioè la matrice jacobiana della trasformazione è singolare.

I parametri orbitali

Per eliminare ciò:

poiché le direzioni della linea dei nodi e del perielio sono indeterminate per i = 0, e = 0, occorre evitare di usare angoli che siano definiti a partire da tali direzioni; in particolare, l'argomento del perielio ω e le anomalie (media M ed eccentrica E) vanno sostituiti dalle corrispondenti *longitudini*

longitudine al perielio	$\varpi = \Omega + \omega$
longitudine media	$L = M + \varpi$
longitudine eccentrica	$F = E + \varpi$

le coppie di variabili di tipo "polare" (e,ϖ) e (i,Ω) vanno sostituite con le corrispondenti variabili "cartesiane"

$$h = e\,sen\,\varpi \qquad k = e\cos\varpi$$

$$P = \tan\frac{i}{2}\,sen\,\Omega \qquad Q = \tan\frac{i}{2}\cos\Omega$$

I parametri orbitali

Con queste sostituzioni l'equazione di Keplero prende la forma

$$L = F + h\cos F - k\,sen F$$

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

Vedremo come determinare i parametri orbitali di un corpo celeste, e quindi una effemeride, da tre osservazioni.
Ci riferiremo ad un pianeta in orbita intorno al sole.
Il problema è complicato per due ragioni:
1) le osservazioni sono fatte dalla Terra (geocentriche)
2) può essere determinata facilmente solo la posizione del corpo sulla sfera celeste (due angoli), mentre la sua distanza è sconosciuta.

Poiché gli elementi orbitali sono 6, sono necessarie 6 equazioni indipendenti e quindi tre osservazioni effettuate in tre tempi diversi t_1, t_2, t_3, che daranno, in genere, ascensione retta α e declinazione δ del corpo.

Si è vista qual è la forma delle orbite nel problema dei due corpi, ora vedremo come collegare l’orbita alle osservazioni.

Dapprima dalla conoscenza degli elementi orbitali determineremo la posizione del corpo celeste (effemeridi) e quindi determineremo gli elementi orbitali dalle osservazioni.

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

Supponiamo di conoscere:

[1]

$$\alpha_1 = \alpha(t_1) \qquad \delta_1 = \delta(t_1)$$
$$\alpha_2 = \alpha(t_2) \qquad \delta_2 = \delta(t_2)$$
$$\alpha_3 = \alpha(t_3) \qquad \delta_3 = \delta(t_3)$$

Esse definiranno un sistema di 6 equazioni difficile da risolvere anche per la presenza dell’equazione di Keplero.

Si ricorre a un procedimento numerico.

Questo problema ebbe grande importanza tra la fine del XVIII secolo e gli inizi del XIX: anni in cui si passò dalla scoperta di Urano (1781) a quella del primo asteroide (Cerere, 1801) poi via via a molti altri. Il problema occupò pertanto i maggiori astronomi e matematici del tempo, e la soluzione più completa e generale fu data da Gauss e pubblicata nel 1809 nel classico libro *Theoria motus corporum coelestium* …

Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Sebbene oggi la soluzione di questo problema è enormemente facilitata dall'uso del computer, i metodi sviluppati allora ne costituiscono la base, ed è perciò utile conoscerne almeno le linee generali.

Un metodo frequentemente usato in questi casi è quello per approssimazioni successive, in cui la conoscenza di una soluzione approssimata consente di ottenerne una più corretta.

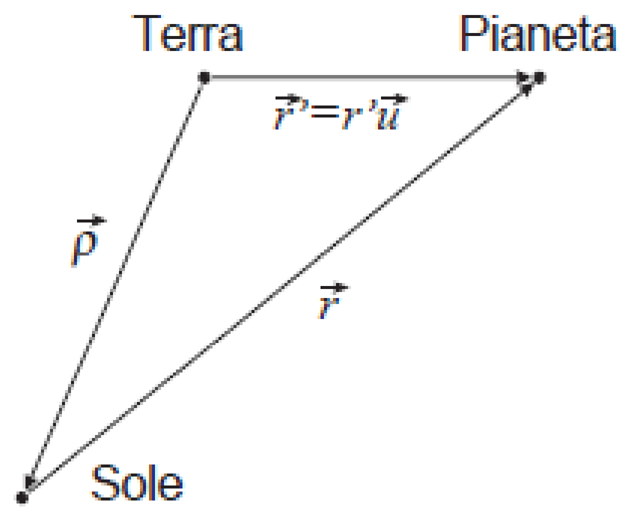
Presentiamo il procedimento di Laplace, che è più semplice, ma è applicabile solo nei casi in cui i tre istanti t_1, t_2, t_3 siano vicini ed equidistanti.

Il metodo di Gauss è decisamente più complesso, ma di applicazione generale e convergenza assai rapida ed è quello più utilizzato.

Illustreremo solo il caso di orbite ellittiche.

Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

$\boldsymbol{\rho}_i$ indicano le posizioni geocentriche del Sole nei tre istanti di osservazione (*i* = 1, 2, 3); questi vettori si suppongono noti in quanto ricavabili dalle effemeridi del Sole (che danno anche le coordinate cartesiane);



$\mathbf{u}_i$ indicano le direzioni geocentriche dell'oggetto in esame, ricavabili immediatamente dalle coordinate (angolari) osservate;

$r'_i = \left|\mathbf{r}'_i\right|$ sono le distanze geocentriche, che non si ottengono direttamente dalle osservazioni, ma si troveranno come risultato secondario del calcolo;

$\mathbf{r}_i$ (posizioni eliocentriche) sono le incognite principali del problema.

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

Supponiamo che le tre osservazioni siano state fatte in tempi abbastanza vicini: ciò permetterà di ottenere senza troppo errore i valori della velocità e dell'accelerazione, trascurando infinitesimi di ordine superiore al secondo nel tempo. Per la stessa ragione, invece di $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}_3$ consideriamo noti $\boldsymbol{\rho}$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ (posizione, velocità e accelerazione, del Sole, e quindi della Terra, ad un istante t), anch'essi ricavabili dalle effemeridi.
Poniamo $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$, essendo gli istanti vicini possiamo effettuare uno sviluppo in serie di Taylor di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_3$ intorno a $\mathbf{u}_2$ avremo:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \dot{\mathbf{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \Delta t^2 + o\left(\Delta t^3\right)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 + \dot{\mathbf{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \Delta t^2 + o\left(\Delta t^3\right)$$

dalle quali, sommando e sottraendo membro a membro si ricava

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1}{2\Delta t}, \qquad \ddot{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3}{\Delta t^2}$$

Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Da ciò si ricava che possiamo supporre noti $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$. Il problema sarà risolto non appena avremo trovato $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$.

In relazione alla figura procediamo come segue: derivando due volte rispetto al tempo la relazione

[2] $$r'\mathbf{u} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}$$

dapprima otteniamo

$$\dot{r}'\mathbf{u} + r'\dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{r}}$$

e infine

$$\ddot{r}'\mathbf{u} + 2\dot{r}'\dot{\mathbf{u}} + r'\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\mathbf{r}}\,.$$

Da quest'ultima, utilizzando l'equazione del moto nella forma $\ddot{\mathbf{r}} = -k^2\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, dove $k^2 = G\left(M+m\right)$ è la costante di Gauss, si ha:

[3] $$\ddot{r}'\mathbf{u} + 2\dot{r}'\dot{\mathbf{u}} + r'\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} - k^2\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

ponendo ancora $\mathbf{r} = r'\mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}$ nella [3] rimangono come incognite r', $\dot{r}'$ e $\ddot{r}'$.

La costante di Gauss

La costante di Gauss è il valore assunto dalla costante di gravitazione universale in unità riferite al sistema solare piuttosto che in unità del sistema internazionale.

Tale costante consente il calcolo del moto planetario pur essendo ignote le dimensioni del sistema solare o la massa dei pianeti in unità del Sistema Internazionale.

Gauss utilizzò le seguenti unità:
lunghezza *A*: unità astronomica,
tempo *D*: giorno solare medio,
massa *S*: massa solare.

Dalla terza legge di Keplero applicata al moto della terra, Gauss determinò per la costante il valore

$$k = 0{,}01720209895\ A^{3/2}\ S^{-1/2}\ D^{-1}.$$

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

Per eliminare due di queste si moltiplica scalarmente la [3] per il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}$ che, essendo perpendicolare sia a $\mathbf{u}$ che a $\dot{\mathbf{u}}$ riduce la [3] a

[4] $$r'\left(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}\right) = \ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{v} - \frac{k^2}{r^3}\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right)$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ anche la [2], si ha:

$$r'\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Sostituendo nella [4] si ricava ha

[5] $$r' = \frac{\ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{v}}{\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}} - \frac{k^2}{\left(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}\right) r^3}\left(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}\right)$$

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

A questo punto potremmo sostituire la [5] nella [2], ma l’equazione che si ottiene non si risolve con metodi elementari. Conviene allora procedere per iterazione. Se il pianeta è abbastanza lontano dal Sole, r è grande e nella [5] il termine proporzionale a $\frac{1}{r^3}$ è trascurabile rispetto al resto. Si ricava così un valore r'_1 di r' e anche $\mathbf{r}'_1$. Dalla [2] si troverà il corrispondente valore $\mathbf{r}_1 = r'_1\mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}$ che posto nella [5] al posto di r, ci dà una seconda approssimazione r'_2 di r'. Iterando il procedimento questo converge (se r è grande) e fornisce $\mathbf{r}$ (e anche $\mathbf{r}'$) all’istante t_2.

Per trovare $\dot{\mathbf{r}}$ partiamo dalla [3], moltiplicando scalarmente per $\dot{\mathbf{u}}$ abbiamo

$$\ddot{r}'(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}) + 2\dot{r}'(\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}) + r'(\ddot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}) = (\ddot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\dot{\mathbf{u}}) - \frac{k^2}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{u}})$$

$$2\dot{r}'|\dot{\mathbf{u}}|^2 + r'(\ddot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}) = (\ddot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\dot{\mathbf{u}}) + \frac{k^2}{r^3}(\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\mathbf{u}})$$

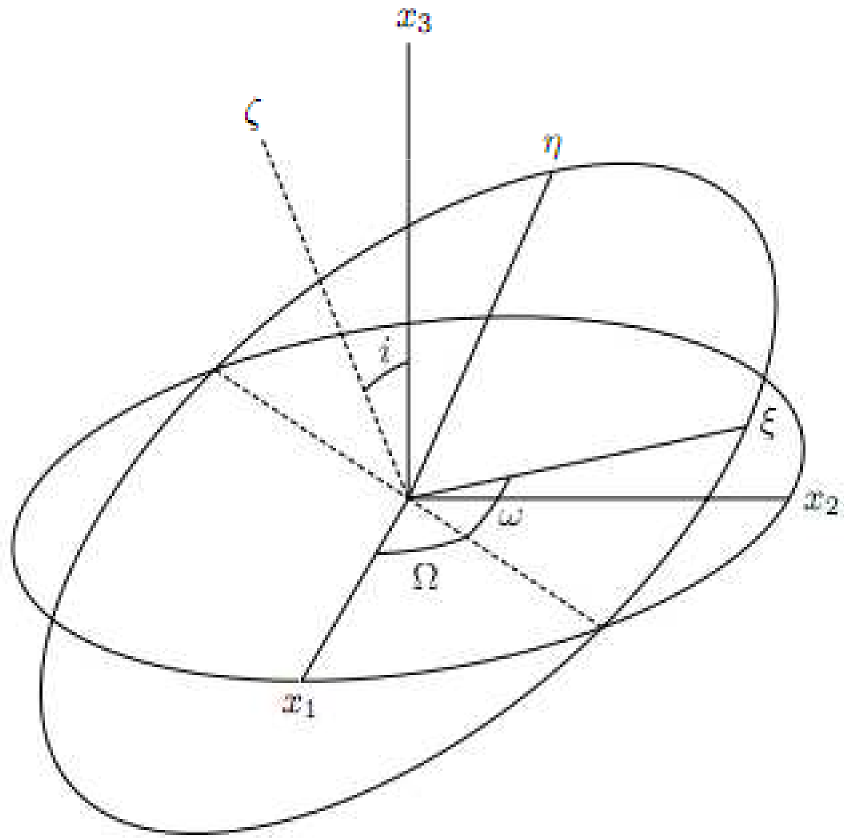
essendo $(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}) = 0$ in quanto $\mathbf{u}$ è un versore.

Da questa si ricava $\dot{r}'$. Infine, dalla derivata prima della [2], ricaviamo $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}'\mathbf{u} + r'\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}$ e quindi resta determinato $\dot{\mathbf{r}}$.

Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Come abbiamo detto i vettori r e $\dot{\mathrm{r}}$ sono equivalenti ai sei parametri kepleriani.

Vediamo come passare dalla coordinate cartesiane ora ottenute agli elementi kepleriani a, e, i, ω, Ω, e M.



Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Calcoliamo il vettore $\mathbf{h} = \mathbf{L}/\mu$ (proporzionale al momento angolare $\mathbf{L}$)

[6] $$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{L}}{\mu} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

le cui componenti nel sistema di riferimento inerziale sono:

$$\begin{cases} h_1 = h\,sen\Omega\,sen i \\ h_2 = -h\cos\Omega\,sen i \\ h_3 = h\cos i \end{cases}$$

l'inclinazione orbitale i e la longitudine del nodo Ω possono essere calcolate da:

[7] $$\begin{cases} \cos i = \dfrac{h_3}{h} \\ sen i = \dfrac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h} \end{cases}$$

e |

Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

[8]
$$\begin{cases} \cos\Omega = -\dfrac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ \operatorname{sen} i = \dfrac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{cases}$$

Il semiasse maggiore a **si ricava da:**

[9]
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{\mu}$$

Si può dimostrare che il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz, definito da

[10]
$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

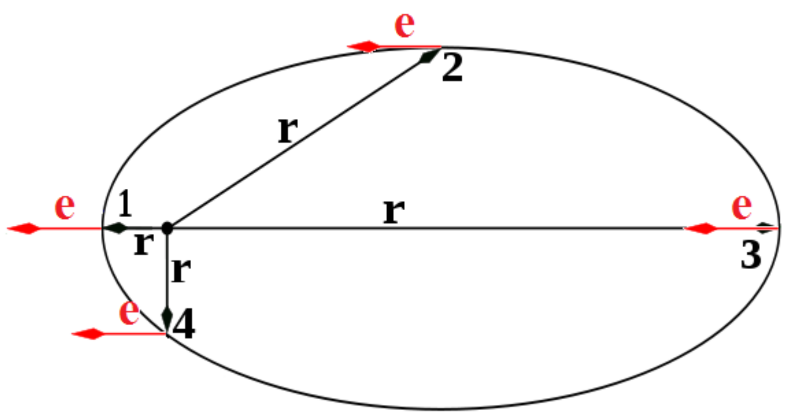
altro non è che l'eccentricità e **dell'orbita.**

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

In meccanica classica, il vettore di Laplace-Runge-Lenz è un vettore utilizzato per descrivere la forma e l'orientazione dell'orbita di un corpo celeste attorno ad un altro, come nel caso della rivoluzione di un pianeta attorno al sole.
Per due corpi interagenti secondo la gravità Newtoniana, il vettore di Lenz è una costante del moto, nel senso che esso, per una data orbita, conserva il suo aspetto indipendentemente dal punto o dal momento in cui esso venga calcolato; si può anche dire che il vettore si conserva durante il moto.

Più in generale, il vettore risulta conservato in tutti i problemi in cui due corpi interagiscono mediante una forza centrale che varia secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanza.

Il vettore di Lenz, giace sul piano dell’orbita ed è diretto parallelamente alla linea degli apsidi dall’afelio verso il perielio.



Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Moltiplicando scalarmente la [10] per $\mathbf{r}$ si ha: $\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} = er\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{h}}{\mu}\cdot\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r}$, ma $(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h})\cdot\mathbf{r} = \mathbf{r}\cdot(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2$ e $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2$, per cui : $er\cos\theta = \frac{h^2}{\mu} - r$; da ciò segue $r(1+e\cos\theta) = \frac{h^2}{\mu}$ e quindi l'equazione dell'orbita $r = \frac{h^2/\mu}{(1+e\cos\theta)}$.

Il semiasse maggiore è quindi dato da:

[11] $$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{h^2/\mu}{1-e^2}.$$

Inoltre il versore della linea dei nodi

[12] $$\mathbf{k} = \mathbf{x}_3 \times \frac{\mathbf{h}}{h} = \begin{pmatrix} \cos\Omega \\ sen\Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\mathbf{x}_3$ è il versore dell'asse x_3); l'argomento del perielio ω è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{e}$, quindi il suo coseno è uguale al prodotto scalare dei due versori, mentre il suo seno è uguale alla proiezione del loro prodotto vettoriale lungo la direzione del momento angolare:

Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

[12] $$\cos\omega = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}{e} \qquad sen\omega = \left(\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{e}}{e}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{h}}{h}\right)$$

Per l’anomalia vera ν, essendo l’angolo compreso tra la linea degli apsidi **e** e il vettore posizione **r** , quindi

[12] $$\cos\nu = \frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}}{er} \qquad sen\nu = \left(\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{r}}{er}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{h}}{h}\right)$$

infine dall’anomalia vera si ricava l’anomalia eccentrica E

[13] $$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\nu}{2}$$

e da questa l’anomalia media M utilizzando l’equazione di Keplero:

[14] $$M = E - e\,sen E\,.$$

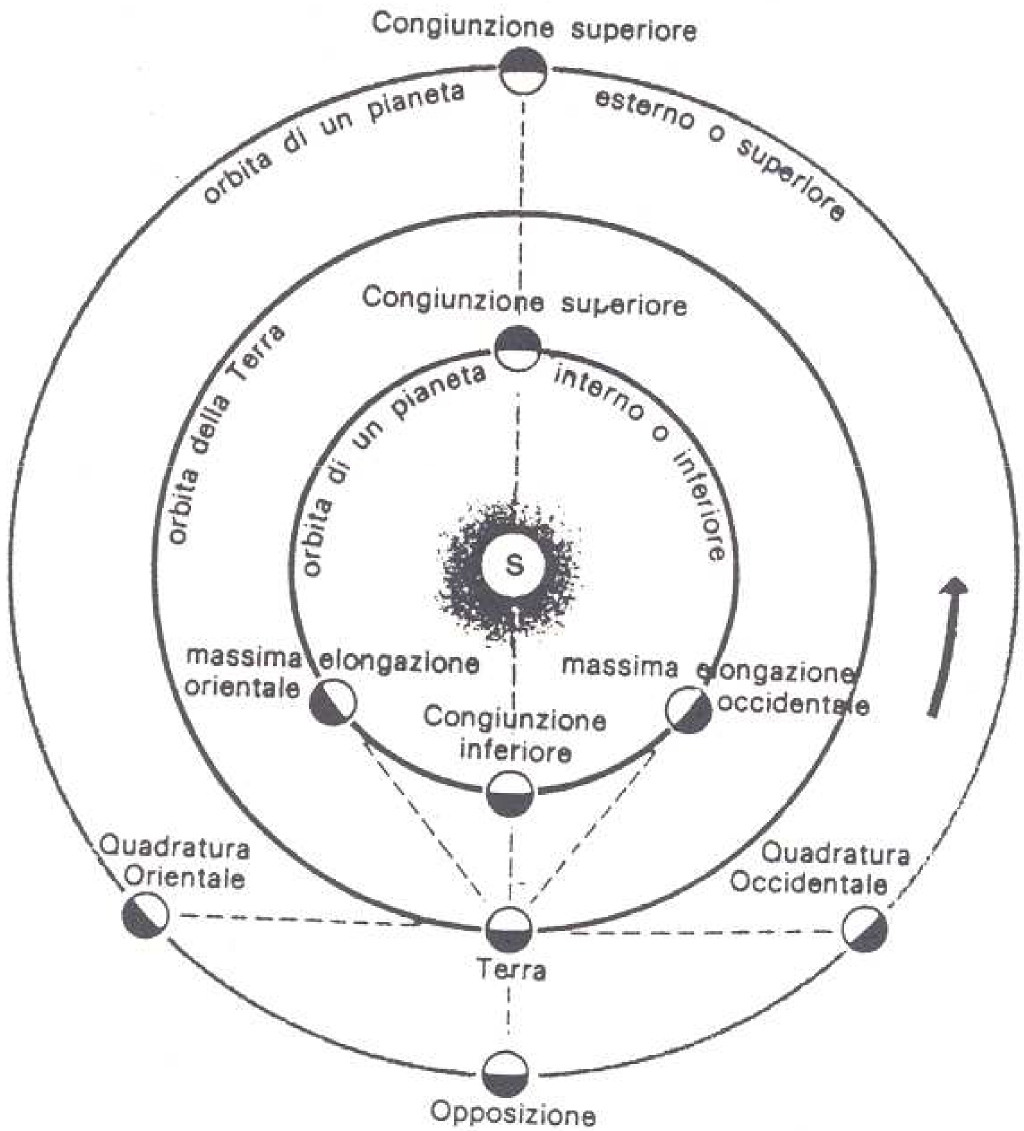
Determinazione di un’orbita ellittica da tre osservazioni

Per applicare questo metodo occorrerà sempre controllare a posteriori la validità delle ipotesi semplificative che si sono fatte.

Questo procedimento o altri simili sono utili quando avviene la scoperta di un oggetto celeste (generalmente un nuovo asteroide o cometa) e, non avendo altre informazioni, con tre misure di posizione si riesce a stimare i parametri orbitali.

Quando l’oggetto continua ad essere osservato e si accumulano un gran numero di osservazioni, un modo molto comune di affrontare il problema è quello dei minimi quadrati.

Aspetto dei pianeti



Aspetto dei pianeti

L'osservatore terrestre deve poi distinguere tra periodo orbitale siderale e periodo apparente geocentrico (o sinodico), che è evidentemente influenzato dalla rivoluzione annua.

$$P_{sin} = \frac{2\pi}{n_T \pm n} \qquad\qquad n = n_T \pm \frac{2\pi}{P_{sin}}$$

il segno + vale per un pianeta interno, il segno – per uno esterno

Legge di Titius e Bode

Johann Daniel Titius
(1729 – 1796)

$$a_n = \frac{4+n}{10}$$

con n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 …

Johann Elert Bode
(1747 – 1826)

Matematicamente è equivalente a

$$a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$$

con $n = -\infty$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 …

La legge fu scoperta nel 1741 da Wolf e riscoperta da Titius nel 1772. E' nota per l'opera di divulgazione di Bode, che nel 1778 ne ha dato una formulazione matematica.

n	Distanza UA	Pianeta	Distanza UA
0	0,4	Mercurio	0,387
3	0,7	Venere	0,723
6	1	Terra	1
12	1,6	Marte	1,524
24	2,8		
48	5,2	Giove	5,203
96	10	Saturno	9,539
192	19,6	Urano	19,18
384	38,8	Nettuno	30,06

Legge di Titius e Bode

$$a_n = \frac{1}{3}\left(2^{2n-2} + 1\right)$$

Con *n* = 1 per Mercurio, *n* = 2 per Venere, *n* = 3 Terra, *n* = 5 la fascia degli Asteroidi, etc.

$$a_n = 1{,}53^n$$

n = –2 Mercurio, n = –1 Venere, n = 0 Terra, n = 1 Marte, per n = 2 e n = 3 si hanno due famiglie di asteroidi, n = 4 Giove, n = 5 Saturno, n = 6 Urano, manca n = 7, n = 8 Nettuno, n = 9 Plutone.

Una formulazione più generale è la seguente:

$$a_n = r_0 \cdot K^n$$

una progressione geometrica, con K e r_0 opportune costanti.