Laurea triennale in Fisica
a.a. 2013 - 2014

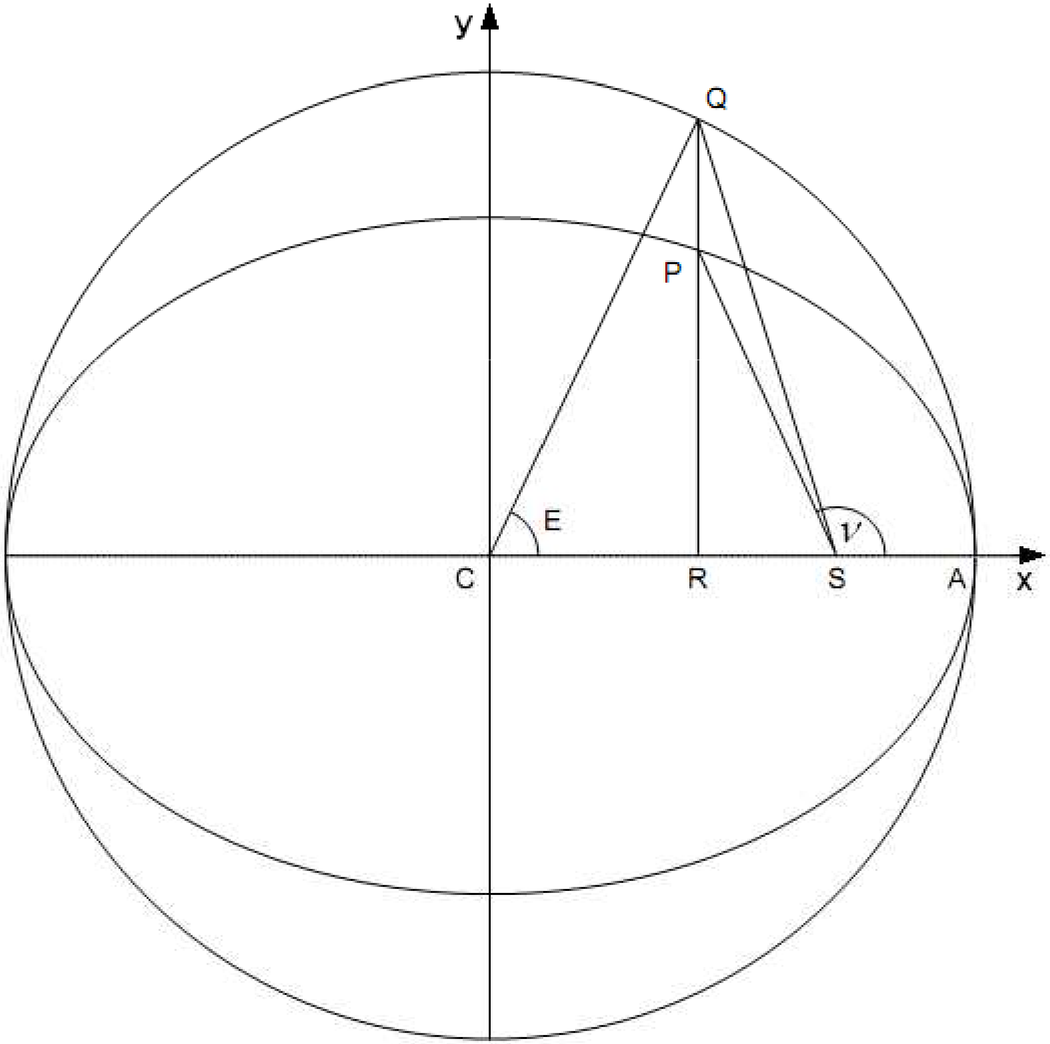
CORSO DI ASTRONOMIA

LEZIONE 5 – 8 aprile 2014

Prof. Angelo Angeletti

Equazione di Keplero

La determinazione della legge oraria del moto di un pianeta intorno al sole è detta **equazione di Keplero**.



$$E - e\,sen E = \frac{2\pi}{P}\left(t - T\right)$$

E = ***anomalia eccentrica***
e = eccentricità
P = periodo
T = passaggio al perielio

Equazione di Keplero

(I) $$M = n\left(t - T\right) \qquad \frac{2\pi}{P} = n$$

$n =$ **moto medio**; $M =$ **anomalia media**

(II) $$E - esenE = M$$

(III) $$tg\,\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{E}{2}$$

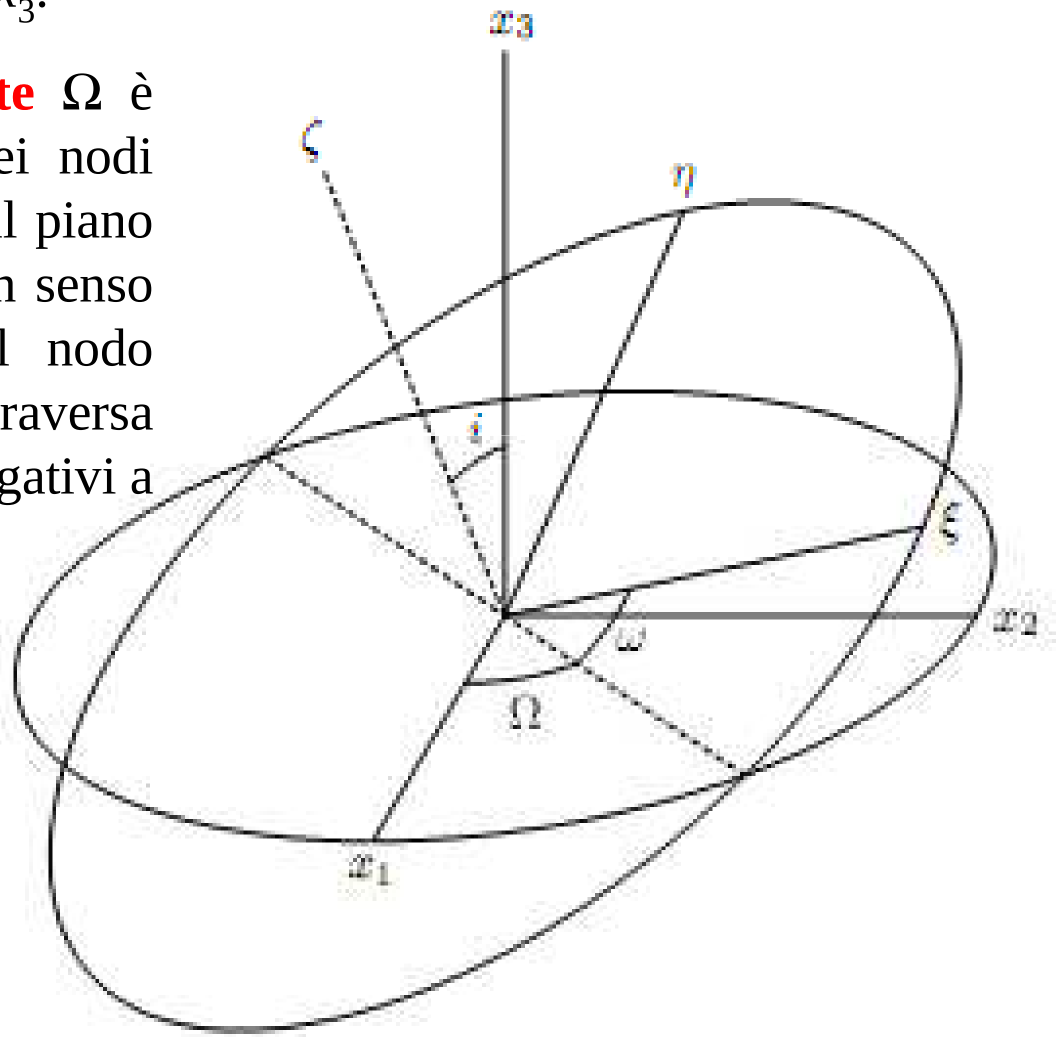
$\nu =$ **anomalia vera**

(IV) $$r = a\left(1 - e\cos E\right)$$

L'orbita nello spazio

inclinazione orbitale i è l'angolo tra il piano orbitale e il piano (x_1, x_2), cioè tra il vettore momento angolare **L** e l'asse x_3.

la **longitudine del nodo ascendente** Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2), misurato sul piano (x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);



l'**argomento del perielio** ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsidi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.

Al posto di ω a volte si usa la **longitudine del perielio** $\varpi = \Omega + \omega$.

L'orbita nello spazio

Nell'uso tradizionale:

- vengono chiamati anomalie gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea degli apsidi (direzione del perielio);

- vengono chiamati argomenti gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea dei nodi (nodo ascendente);

- vengono chiamati longitudini gli angoli misurati nel piano fondamentale (x_1, x_2) del sistema di riferimento inerziale a partire dall'asse x_1, anche quando (come nel caso della longitudine del perielio) l'angolo sia in realtà formato dalla somma di più termini, di cui solo il primo è misurato a partire dall'asse x_1.

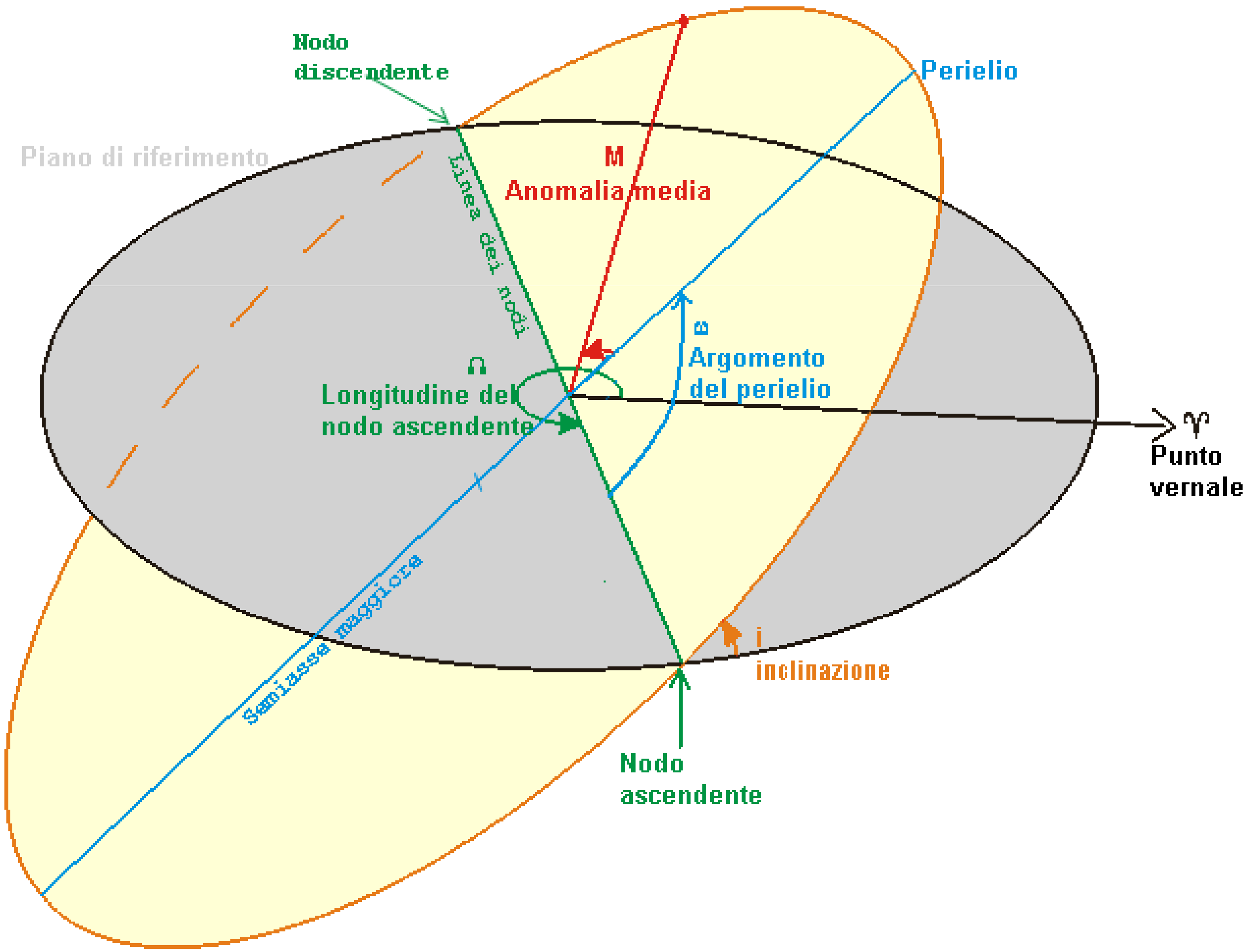
I parametri orbitali

L'orbita di un pianeta può essere specificata per mezzo dei sei elementi kepleriani
a, e, i, ω, Ω, M.

a ed e descrivono la forma e le dimensioni dell'orbita;

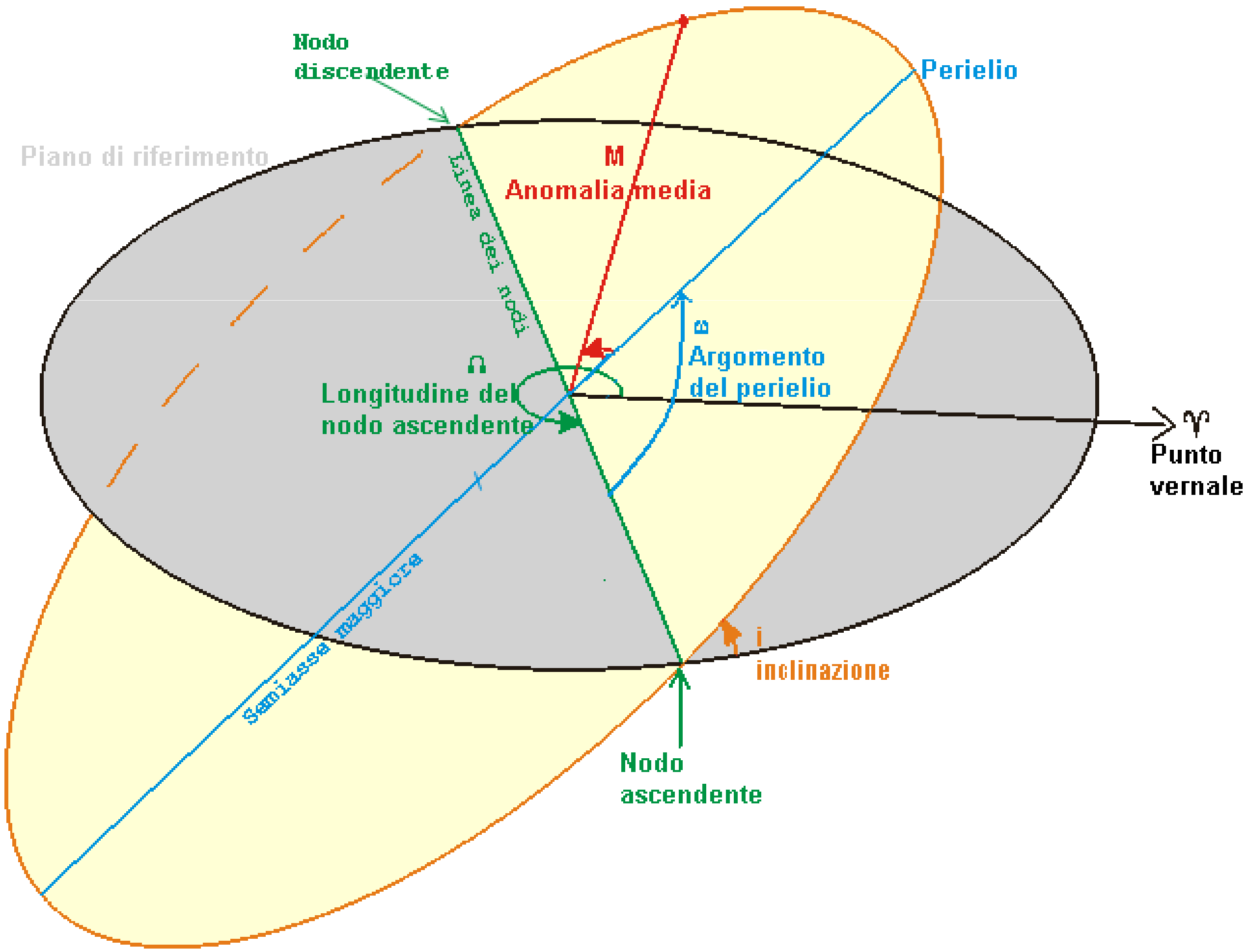
i, ω, e Ω danno l'orientazione del piano orbitale nel sistema di riferimento usato;

M indica la posizione del pianeta lungo l'orbita a un certo istante di tempo.



I parametri orbitali

È un altro modo di specificare le coordinate del pianeta, alternativo rispetto alle sei componenti dei vettori **r** e **v**, ma equivalente, tanto che tra le due rappresentazioni esiste una corrispondenza biunivoca.



I parametri orbitali

I sei elementi orbitali kepleriani non sono ben definiti per orbite di eccentricità e/o inclinazione prossime a zero.

la longitudine del nodo Ω e l'argomento del perielio ω risultano indeterminati per $i = 0$;

l'argomento del perielio ω e l'anomalia media M sono indeterminati per $e = 0$.

La trasformazione di coordinate da elementi kepleriani a vettori posizione e velocità è localmente non invertibile nell'intorno di $i = 0$, $e = 0$, cioè la matrice jacobiana della trasformazione è singolare.

I parametri orbitali

Per eliminare ciò:

poiché le direzioni della linea dei nodi e del perielio sono indeterminate per $i = 0$, $e = 0$, occorre evitare di usare angoli che siano definiti a partire da tali direzioni; in particolare, l'argomento del perielio ω e le anomalie (media M ed eccentrica E) vanno sostituiti dalle corrispondenti *longitudini*

longitudine al perielio	$\varpi = \Omega + \omega$
longitudine media	$L = M + \varpi$
longitudine eccentrica	$F = E + \varpi$

le coppie di variabili di tipo "polare" (e,ϖ) e (i,Ω) vanno sostituite con le corrispondenti variabili "cartesiane"

$$h = e\, sen\varpi \qquad k = e\cos\varpi$$

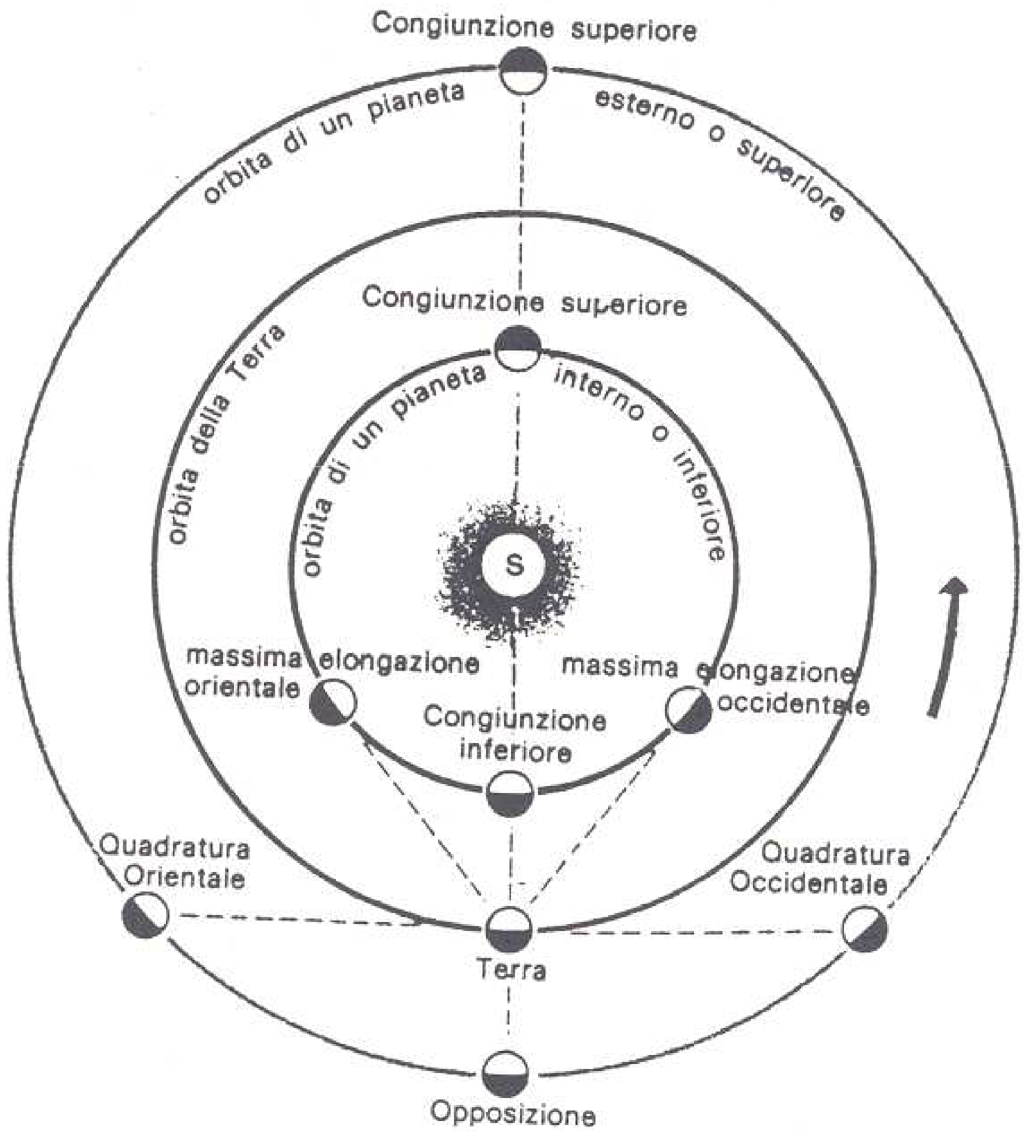
$$P = tan\frac{i}{2}\, sen\Omega \qquad Q = tan\frac{i}{2}\cos\Omega$$

I parametri orbitali

Con queste sostituzioni l'equazione di Keplero prende la forma

$$L = F + h\cos F - k\,sen F$$

Aspetto dei pianeti



Aspetto dei pianeti

L'osservatore terrestre deve poi distinguere tra periodo orbitale siderale e periodo apparente geocentrico (o sinodico), che è evidentemente influenzato dalla rivoluzione annua.

$$P_{sin} = \frac{2\pi}{n_T \pm n} \qquad\qquad n = n_T \pm \frac{2\pi}{P_{sin}}$$

il segno + vale per un pianeta interno, il segno – per uno esterno

Legge di Titius e Bode

Johann Daniel Titius
(1729 – 1796)

$$a_n = \frac{4+n}{10}$$

con n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 …

Johann Elert Bode
(1747 – 1826)

Matematicamente è equivalente a

$$a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$$

con $n = -\infty$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 …

La legge fu scoperta nel 1741 da Wolf e riscoperta da Titius nel 1772. E' nota per l'opera di divulgazione di Bode, che nel 1778 ne ha dato una formulazione matematica.

n	Distanza UA	Pianeta	Distanza UA
0	0,4	Mercurio	0,387
3	0,7	Venere	0,723
6	1	Terra	1
12	1,6	Marte	1,524
24	2,8		
48	5,2	Giove	5,203
96	10	Saturno	9,539
192	19,6	Urano	19,18
384	38,8	Nettuno	30,06

Legge di Titius e Bode

$$a_n = \frac{1}{3}\left(2^{2n-2} + 1\right)$$

Con *n* = 1 per Mercurio, *n* = 2 per Venere, *n* = 3 Terra, *n* = 5 la fascia degli Asteroidi, etc.

$$a_n = 1{,}53^n$$

n = –2 Mercurio, n = –1 Venere, n = 0 Terra, n = 1 Marte, per n = 2 e n = 3 si hanno due famiglie di asteroidi, n = 4 Giove, n = 5 Saturno, n = 6 Urano, manca n = 7, n = 8 Nettuno, n = 9 Plutone.

Una formulazione più generale è la seguente:

$$a_n = r_0 \cdot K^n$$

una progressione geometrica, con K e r_0 opportune costanti.