



Laurea triennale in Fisica
a.a. 2013 - 2014

CORSO DI ASTRONOMIA

LEZIONE 4 – 26 marzo 2014

Prof. Angelo Angeletti

Parallassi e Magnitudini

Parallassi

Le stelle, Sole escluso, sono tutte a così grandi distanze da apparirci puntiformi anche se osservate con i più potenti telescopi.

Il problema delle distanze è fondamentale per la descrizione della struttura della Galassia, e più in generale dell'Universo, e della determinazione delle proprietà intrinseche degli oggetti celesti.

Definiamo *angolo di parallasse* come l'angolo sotto il quale un oggetto «vede» due punti distinti.

Le diverse posizioni dell'osservatore, e quindi la lunghezza della «base» dai cui estremi vengono fatte le osservazioni per la misura dell'angolo di parallasse, sono collegate al moto di rotazione terrestre (*parallasse diurna*), o di rivoluzione della Terra attorno al Sole (*parallasse annua*), o di traslazione del Sole e del sistema planetario rispetto a gruppi di stelle vicine (*parallassi secolare e statistica*).

Il passaggio dalla parallasse alla distanza è poi immediato se è nota la lunghezza della base; ciò consente anche l'introduzione di un'appropriata unità di misura per le distanze, oltre a quelle già note.

Parallassi

La grande distanza delle stelle, anche di quelle più vicine al Sole, comporta che a velocità spaziali (eliocentriche) anche cospicue corrispondano velocità angolari (moti propri) piccole. A ciò è essenzialmente dovuta l'apparente immobilità relativa delle stelle sulla sfera celeste; solo dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo gli spostamenti delle stelle diventano apprezzabili. La velocità spaziale può essere decomposta nella *velocità radiale* (lungo la visuale dell'osservatore) e nella *velocità trasversa* (tangenzialmente alla sfera celeste).

Le velocità radiali possono essere ottenute dallo spostamento delle righe spettrali causato dal moto relativo della sorgente rispetto all'osservatore (effetto Doppler).

Il passaggio dai moti propri alle velocità trasverse non è in genere fattibile per molte stelle risultando possibile solo per quelle per le quali sono note le parallassi quindi la distanza. Si tratta delle stelle più vicine per le quali possono essere determinate anche le velocità peculiari, che sono riferite all'insieme di stelle considerato, e rispetto al quale può essere individuato lo stesso moto del Sole.

Per effetto del moto solare le velocità osservate delle stelle contengono una componente dovuta alla velocità di trascinamento del Sole.

Parallassi

Nell'approssimazione che i moti peculiari delle stelle di un gruppo siano distribuiti completamente a caso si ha che il moto apparente delle stelle avviene mediamente nella direzione esattamente opposta a quella del moto solare.

Risulta possibile introdurre la parallasse secolare di gruppi di stelle basandosi soltanto sulle componenti tangenziali della velocità di trascinamento del Sole e, con sviluppi simili, definire la parallasse statistica.

Esistono gruppi (ammassi) con stelle che rimangono a distanze reciproche piccole e sono quindi fisicamente legate dalla mutua attrazione gravitazionale. Se, in particolare, le velocità (vettoriali) sono le stesse per tutte le stelle del gruppo si parla di ammassi in moto o di correnti stellari; per essi si può introdurre la parallasse di gruppo sfruttando il fatto che le stelle appaiono muoversi tutte verso uno stesso punto della sfera celeste (determinato dalla comune direzione delle velocità).

Lo studio della distribuzione spaziale e della cinematica delle stelle vicine al Sole permette di avviare a soluzione il problema della determinazione della costituzione delle regioni dello spazio a noi più prossime.

Parallasse trigonometrica

La parallasse diurna di un oggetto celeste viene determinata effettuando l'osservazione dell'oggetto ad uno stesso istante da parte di due osservatori terrestri distanti, o da parte di uno stesso osservatore in tempi successivi, quando per effetto della rotazione terrestre la direzione della visuale sia variata sufficientemente.

Operativamente si fa ricorso a varie tecniche osservative dipendenti anche dall'oggetto interessato.

La parallasse diurna è diversa da zero solo per oggetti nell'ambito del sistema solare ed è massima per la Luna (circa 1°). Per la sua determinazione occorre tener conto anche della forma non sferica della Terra.

Per distanze maggiori la direzione di osservazione è praticamente la stessa qualunque sia la posizione dell'osservatore sulla superficie terrestre; per avere direzioni diverse si deve ricorrere al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

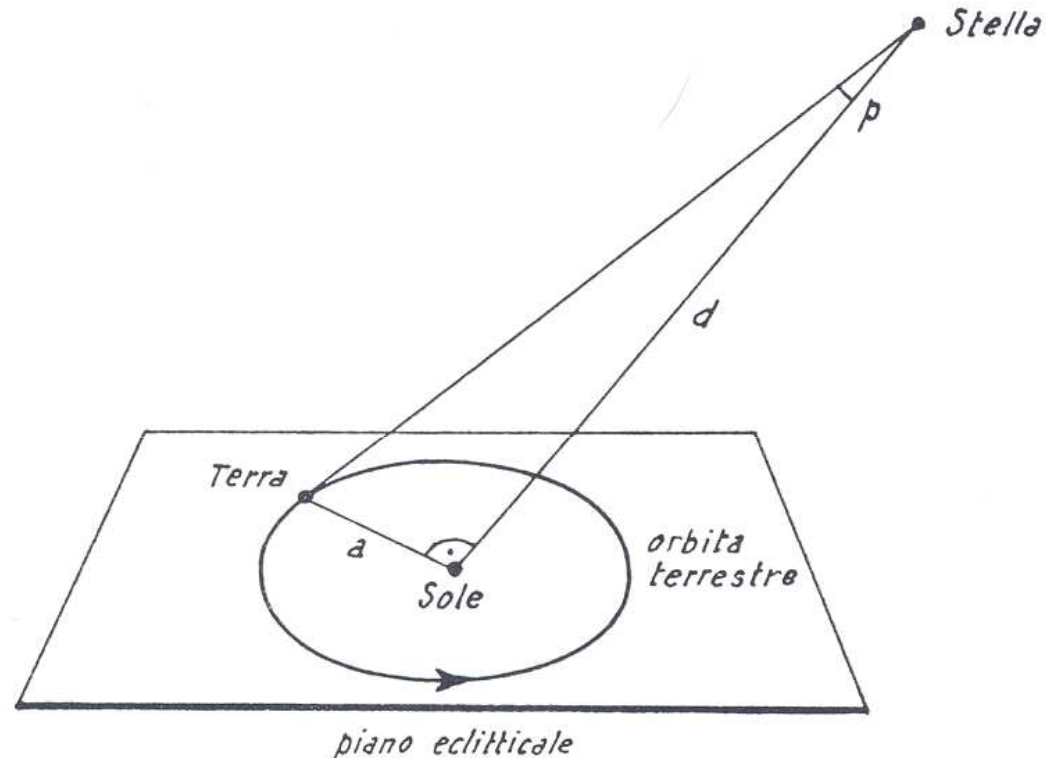
Parallasse annua

Si assume che la Terra si muove attorno al Sole secondo un'orbita circolare di raggio uguale alla distanza media a e sia p l'angolo sotto il quale il raggio dell'orbita terrestre è visto ortogonalmente da una stella alla distanza d dal Sole.

Questo angolo è per definizione la parallasse annua della stella.

$$a = d \tan p \approx d \cdot p$$

$$d = \frac{206265''}{p''} a$$



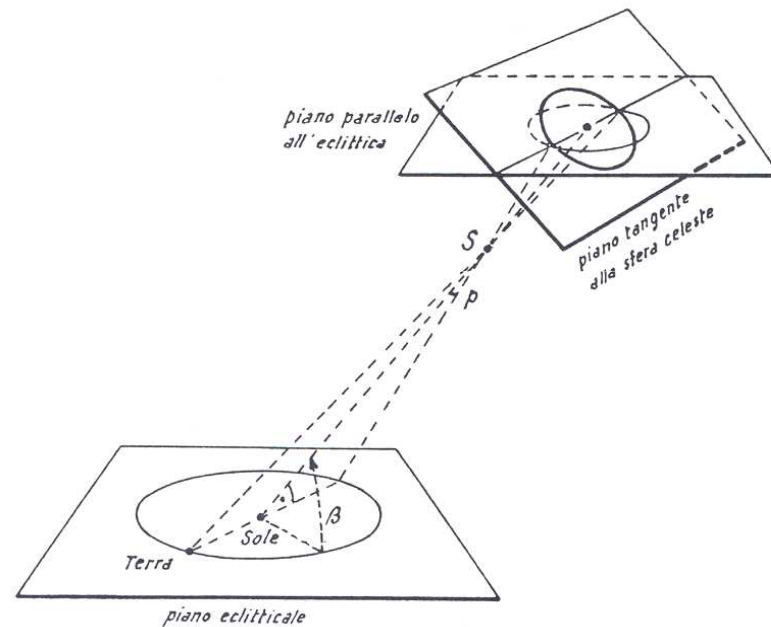
Parallasse annua

La definizione di parallasse trigonometrica è concettualmente semplice, tuttavia la sua effettiva determinazione è molto elaborata e le osservazioni devono essere estremamente accurate.

Nel caso della parallasse annua, a distanza di sei mesi la Terra viene a trovarsi in due punti opposti della sua orbita e vengono prese due immagini della regione di cielo di interesse.

Da esse è possibile ottenere gli spostamenti apparenti delle stelle più vicine rispetto a quelle di sfondo che, essendo a distanze maggiori, risultano praticamente fisse.

Metodi di riduzione abbastanza elaborati consentono poi di passare dagli spostamenti relativi sulle lastre agli angoli di parallasse e quindi alle distanze.



Parallasse annua

Le osservazioni vanno fatte su intervalli di tempo di più anni per separare la parallasse dal moto proprio.

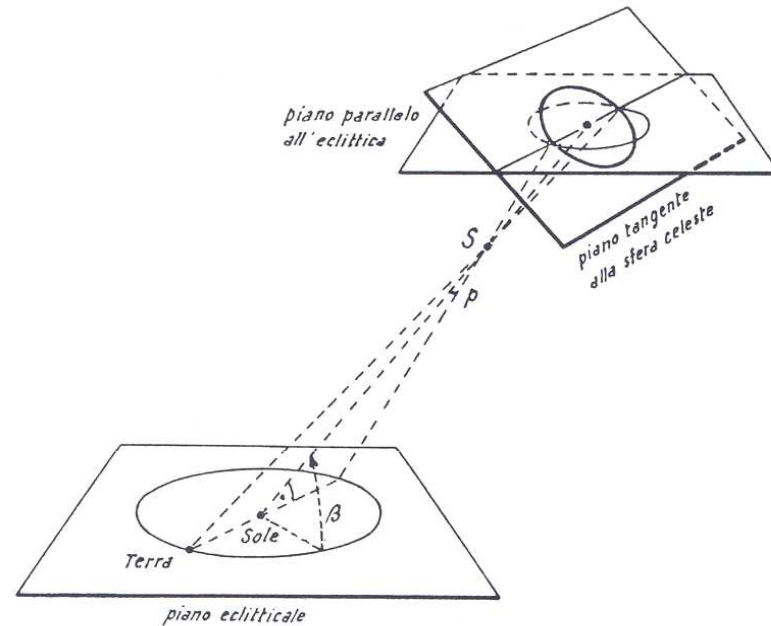
Come la parallasse diurna varia nel corso di un giorno a causa della rotazione terrestre, così l'angolo collegato alla parallasse annua varia nel corso di un anno a causa della rivoluzione terrestre.

La diversità della direzione secondo la quale una stessa stella è vista dalla Terra fa sì che per proiezione la stella appaia descrivere un'ellisse (detta *ellisse di parallasse*) sul piano tangente alla sfera celeste.

Il semiasse maggiore dell' ellisse ha una dimensione angolare uguale alla parallasse annua p , quello minore è uguale a $p \sin \beta$ con β latitudine eclittica della stella.

I semiassi dipendono dalla distanza e variano da stella a stella.

La parallasse annua, come l'aberrazione annua, costituisce una prova del moto orbitale della Terra attorno al Sole.



Unità di misura delle distanze

L'unità di misura delle distanze più frequentemente utilizzata nel sistema solare è l'*unità astronomica* (UA) definita come la distanza media tra il Sole e la Terra e pari a $1,486 \cdot 10^{11}$ m.

Per via trigonometrica l'unità astronomica sarebbe calcolabile direttamente una volta che venisse misurata la parallasse diurna del centro del disco solare, ma ciò non si può fare con la desiderata precisione a causa della difficoltà di localizzare tale centro.

Si fa uso di metodi indiretti basati sulla determinazione delle parallassi diurne di corpi del sistema solare e sulla conoscenza delle loro orbite. A questo scopo si sono calcolate le distanze assolute di pianetini e pianeti dalla Terra misurando le rispettive parallassi, che sono ovviamente tanto più precise quanto più ravvicinati sono i passaggi, e utilizzando come base di partenza una distanza accuratamente misurata sulla superficie terrestre.

Unità di misura delle distanze

Alcuni pianetini sono particolarmente indicati; essi si avvicinano alla Terra più di qualsiasi pianeta, appaiono puntiformi e le loro posizioni rispetto alle stelle di sfondo sono più facilmente misurabili. Così, ad esempio, il ripetuto avvicinamento di Eros e di Amor alla Terra è stato sfruttato per misure di questo genere. Lo stesso metodo è stato applicato a Marte e Venere.

Sono stati escogitati anche altri metodi, che vanno dalla determinazione delle modalità del transito dei pianeti inferiori (in particolare Venere) sul disco solare alla misura delle perturbazioni indotte dal Sole sul moto della Luna, dalla determinazione della distanza della Luna, di pianeti e pianetini tramite eco radar alla misura della velocità orbitale della Terra dedotta dall' effetto Doppler sulle righe spettrali di stelle osservate a varie epoche dell' anno.

Il risultato attualmente accettato per la parallasse orizzontale solare è 8,79".

Unità di misura delle distanze

Per distanze molto maggiori di quelle degli oggetti del sistema solare si ricorre alla definizione di unità più grandi, che danno luogo a misure di distanza più maneggevoli.

La distanza in corrispondenza della quale è $p = 1''$ risulta uguale a $206265a = 3,086 \cdot 10^{16}$ m. Questa lunghezza prende il nome di *parsec* (pc); essa rappresenta la distanza dalla quale il semiasse maggiore dell'orbita della Terra (1UA) è visto ortogonalmente sotto l'angolo di un secondo d'arco.

È molto frequente l'uso dei multipli del parsec: il chiloparsec (kpc), il megaparsec (Mpc) e il gigaparsec (Gpc).

Se si misurano le distanze in parsec è allora

$$d = \frac{1}{p''}$$

Unità di misura delle distanze

Un'altra unità di misura è l'*anno-luce* (a.l. o l.y.) che corrisponde alla distanza percorsa dalla luce nel vuoto (alla velocità di 299 792 458 m/s) in un anno tropico.

Un anno-luce equivale quindi a $9,4605 \cdot 10^{15}$ m e si ha pertanto
 $pc = 3,2616$ a.l.

Le parallassi delle stelle non superano 1"; la stella a noi più vicina è Proxima Centauri (componente di un sistema triplo di stelle comprendente α Centauri) che ha una parallasse di 0",76 corrispondente ad 1,31 pc, ovvero a 4,28 a.l.

Unità di misura delle distanze

Le migliori misure di parallasse sono state effettuate dalla missione spaziale Hipparcos, acronimo di High Precision Parallax Collecting Satellite (Satellite per ottenere parallassi ad alta precisione).

Il satellite è stato ideato e costruito, sotto la supervisione dell'ESA, da un consorzio industriale costituito dalla Matra Marconi Space (Francia) e dall'Alenia Spazio (Italia).



Il progetto era dedicato alla misura delle parallassi stellari e del moto proprio delle stelle. Il satellite è stato utilizzato per misurare la distanza di 2 milioni e mezzo di stelle, situate fino a 150 parsec. Il progetto fu proposto nel 1980 e il satellite fu lanciato il 18 agosto 1989. Il satellite è stato spento il 17 agosto 1993.

Il programma di lavoro era diviso in due parti: l'esperimento Hipparcos, il cui obiettivo era di misurare i parametri astrometrici di circa 120.000 stelle con una precisione da 2 a 4 miliardesimi di secondo, e l'esperimento Tycho, la misura delle proprietà astrometriche e di fotometria in due colori di 400.000 stelle ad una precisione leggermente inferiore.

Unità di misura delle distanze

Il Catalogo Hipparcos finale (120.000 stelle con risoluzione di 1 milliarcsec) e il Catalogo Tycho finale (più di un milione di stelle con risoluzione di 20-30 milliarcsec e fotometria a 2 colori) furono completati nell'agosto del 1996, e pubblicati dall'ESA nel giugno del 1997.

I dati dei due cataloghi sono stati utilizzati per realizzare il Millennium Star Atlas (Atlante Stellare del Millennio): un atlante di tutto il cielo, comprendente un milione di stelle fino alla magnitudine 11 dai dati Hipparcos, più circa 10.000 oggetti non stellari. Sebbene poco appariscente, il lavoro di Hipparcos è di importanza fondamentale: senza misure accurate di posizione e soprattutto di distanza non si può fare astrofisica.

La parallasse stellare è l'unico metodo diretto per misurare le distanze delle stelle: tutti gli altri, come le candele standard, sono metodi indiretti e incerti che si basano sulla parallasse per essere calibrati.

Unità di misura delle distanze

È attualmente operativa la missione GAIA (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics), un satellite sviluppato dall'Agenzia Spaziale Europea lanciato il 19 dicembre 2013 che occuperà il punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra.

Gaia compilerà un catalogo di circa un miliardo di stelle fino alla magnitudine 20.

L'obiettivo principale della missione è l'effettuazione di misure astrometriche di altissima precisione.

Il satellite determinerà la posizione esatta di ogni stella in tempi diversi durante la sua durata operativa.

Misurerà il moto proprio con una precisione variabile tra 20 e 200 microarcosecondi, rispettivamente per stelle di magnitudine 15 e 20. Sfruttando l'effetto della parallasse calcolerà anche la distanza di ognuna delle stelle, con una precisione maggiore di quella di Hipparcos.

La sonda effettuerà anche misure fotometriche a diverse lunghezze d'onda e in diversi periodi temporali degli oggetti, e sarà in grado di determinarne la velocità radiale.

Unità di misura delle distanze

I dati di Gaia permetteranno di realizzare una mappa tridimensionale molto precisa della porzione di Galassia vicina a noi, e una mappa meno accurata ma comunque dettagliata del resto. La mappa comprenderà sia la posizione che i movimenti delle stelle, in modo da poter studiare l'evoluzione della Galassia.

Questa analisi delle stelle fornirà dei dati fondamentali per risolvere problemi sull'origine, la struttura e la storia evolutiva della Galassia.



Unità di misura delle distanze

La risoluzione degli strumenti di GAIA permetterà anche l'identificazione di eventuali pianeti extrasolari: si stima che entro il termine della missione, previsto per il 2018, sarà possibile individuare circa 8000 pianeti extrasolari e circa 1000 sistemi solari.

Alla massima distanza osservabile (200 parsec) GAIA potrà individuare pianeti di 2-3 masse gioviane distanti tra 2 e 4 unità astronomiche dalla loro stella con un periodo orbitale di 10 anni, mentre a distanze intorno a 25 parsec sarà possibile individuare pianeti di massa simile a quella di Saturno a distanza compresa tra 1 e 4 unità astronomiche.



Magnitudine

La **magnitudine apparente** (m) di una stella, pianeta o di un altro oggetto celeste è una misura della sua luminosità rilevabile dal punto d'osservazione (tipicamente dalla Terra).

Maggiore è la luminosità dell'oggetto celeste minore è la sua magnitudine.

Poiché ad esempio un oggetto estremamente luminoso può apparire molto debole se si trova ad una grande distanza, questa misura non indica la luminosità intrinseca dell'oggetto celeste, che viene invece espressa con il concetto di **magnitudine assoluta** (M).

Magnitudine

La scala con cui sono misurate le magnitudini affonda le sue radici nella pratica ellenistica di dividere le stelle visibili ad occhio nudo in sei magnitudini (IPPARCO).

Le stelle più luminose erano dette di prima magnitudine ($m = +1$) e così via fino alla sesta magnitudine ($m = +6$), al limite della visione umana ad occhio nudo.

Questo metodo di indicare la luminosità delle stelle fu reso popolare da Tolomeo nell'Almagesto. Il sistema prendeva in considerazione solo le stelle, e non considerava la Luna, il Sole o altri oggetti celesti non stellari.

Nel 1856, Pogson formalizzò il sistema definendo una stella di prima magnitudine come una stella che fosse 100 volte più luminosa di una stella di sesta magnitudine. Perciò, una stella di prima magnitudine si trova ad essere $100^{1/5} = 2,512\dots$ volte più luminosa di una stella di seconda.

Magnitudine

Originariamente la scala di Pogson fu fissata assegnando alla stella Polare una magnitudine di 2.

Gli astronomi hanno in seguito scoperto che la Polare è leggermente variabile, pertanto oggi viene usata come riferimento la stella Vega.

Il sistema moderno non è più limitato a sei magnitudini: oggetti molto luminosi hanno magnitudini negative, per esempio Sirio ha una magnitudine apparente posta tra -1,44 e -1,46.

La scala moderna include la Luna e il Sole.

La Luna piena è di magnitudine -12, il Sole raggiunge la magnitudine -26,7.

Il Telescopio Spaziale Hubble e il Telescopio Keck hanno registrato stelle di magnitudine +30.

Magnitudine

La magnitudine apparente in una determinata banda x dello spettro elettromagnetico è definita tramite la formula di Pogson:

$$m_x = m_{RIF} - 2.5 \log \frac{F_x}{F_{RIF}}$$

dove F_x è il flusso osservato nella banda x , e m_{RIF} e F_{RIF} sono la magnitudine e il flusso nella stessa banda di un oggetto di riferimento.

Più un oggetto è debole più la sua magnitudine è alta.

La scala è logaritmica: quindi il rapporto fra le luminosità di due oggetti corrisponde alla differenza delle loro magnitudini. Per esempio, una differenza di 3,2 significa che un oggetto è circa 19 volte più luminoso di un altro ($100^{3,2/5} = 19,054607\dots$)

La natura logaritmica della scala è dovuta al fatto che l'occhio umano ha esso stesso una risposta logaritmica.

Magnitudine

La **magnitudine assoluta** (detta anche luminosità assoluta) è la magnitudine apparente (m) che un oggetto avrebbe se si trovasse ad una distanza dall'osservatore di 10 parsec o 1 Unità Astronomica a seconda del tipo di oggetto (stellare/galattico o corpo del Sistema solare).

È una misura della luminosità intrinseca di un oggetto, senza tener conto delle condizioni in cui si trova l'osservatore.

Più un oggetto è intrinsecamente luminoso, più la sua magnitudine assoluta è numericamente bassa, anche negativa. Ogni grado della scala corrisponde ad un incremento (o decremento) pari a $100^{1/5}$.

Nel definire la magnitudine assoluta, è necessario specificare il tipo di radiazione elettromagnetica che viene misurata. Se ci si riferisce al totale dell'energia emessa, il termine corretto è **magnitudine bolometrica**.

Se si considera lo spettro del visibile si parla di **magnitudine assoluta visuale**.

Magnitudine

Nota la magnitudine apparente (m) e la distanza (d) dell'oggetto espressa in parsec la magnitudine assoluta M si ricava da:

$$M = m + 5 - 5 \log d$$

Nell'astronomia stellare e galattica la distanza standard è di 10 parsec (circa 3.26 anni luce o 3.1×10^{13} km).

Per gli oggetti molto vasti come le galassie ci si riferisce ad un oggetto di pari luminosità intrinseca ma di aspetto puntiforme.

Molte stelle visibili ad occhio nudo hanno magnitudini assolute che sarebbero capaci di formare ombre da una distanza di 10 parsec:

Rigel (- 6,7), Deneb (- 8,5), Betelgeuse (- 5,6).

Per confronto, Sirio ha una magnitudine assoluta di 1,4 e il Sole ha una magnitudine assoluta di circa 4,5.

Magnitudine di alcune stelle

Nome	Magnitudine apparente	Magnitudine assoluta	Luminosità (Sole =1)
Eta Carinae (Massimo del 1843)	-0,8	-20,26	55.000.000
Eta Carinae (attuale)	tra 3,9 e 10,5	-12,1	5.500.000
Alnilan	1,70	-9,2	380.000
Deneb	1,25	-8,73	250.000
Rigel	0,12	-8,03	67.000-100.000
Betelgeuse	0,58	-5,14	135.000
Alnitak	1,79	-7,8	100.000
Mintaka	2,23	-7,6	87.000
Antares	0,92	-7,2	60.000
Spica	1,00	-5,6	14.000
Canopo	-0,62	-5,53	12.900
Bellatrix	1,64	-4,75	6.300
Stella Polare	1,97	-3,6	2.200
Regolo	1,35	-1,6	350
Aldebaran	0,85	-0,63	140
Arturo	-0,04	-0,31	110
Capella	0,08	0,4	55
Castore	1,98	0,5	50
Vega	0,00	0,58	47
Polluce	1,14	0,7	42
Sirio	-1,46	1,4	22
Alpha Centauri A	-0,01	4,38	1,4
Sole	-26,8	4,75	1,00

**Le leggi
di Keplero
e
di Newton**

Leggi di Keplero



Keplero (1571 – 1630) fu allievo e collaboratore di Tycho Brahe (1546 – 1601), dal quale ereditò una cospicua mole di dati osservativi sulle posizioni dei pianeti del Sistema Solare.

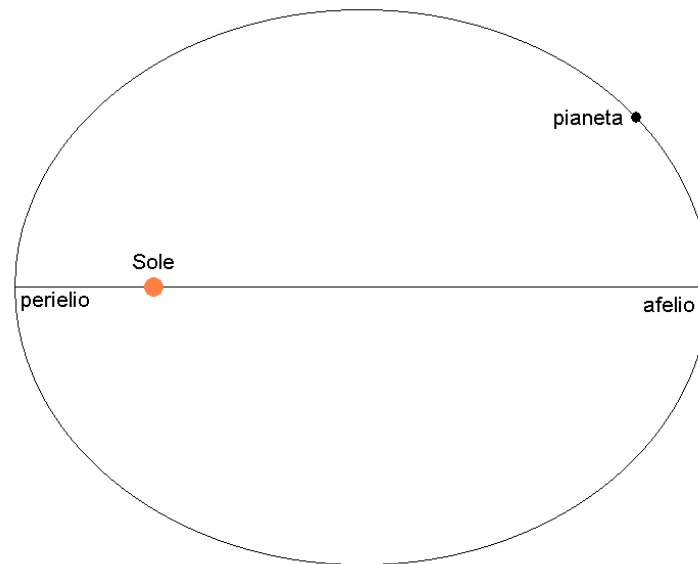
Alla morte del maestro analizzando le osservazioni di Tycho e le proprie, giunse a formulare quelle leggi ormai universalmente note come le **leggi di Keplero** che pubblicò tra il 1609 ed il 1619.

Le prime due leggi apparvero sull'*Astronomia nova* pubblicato a Praga nel 1609, la terza sull'*Harmonices mundi* edito a Linz nel 1619.

Leggi di Keplero

Prima legge

Le traiettorie descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi

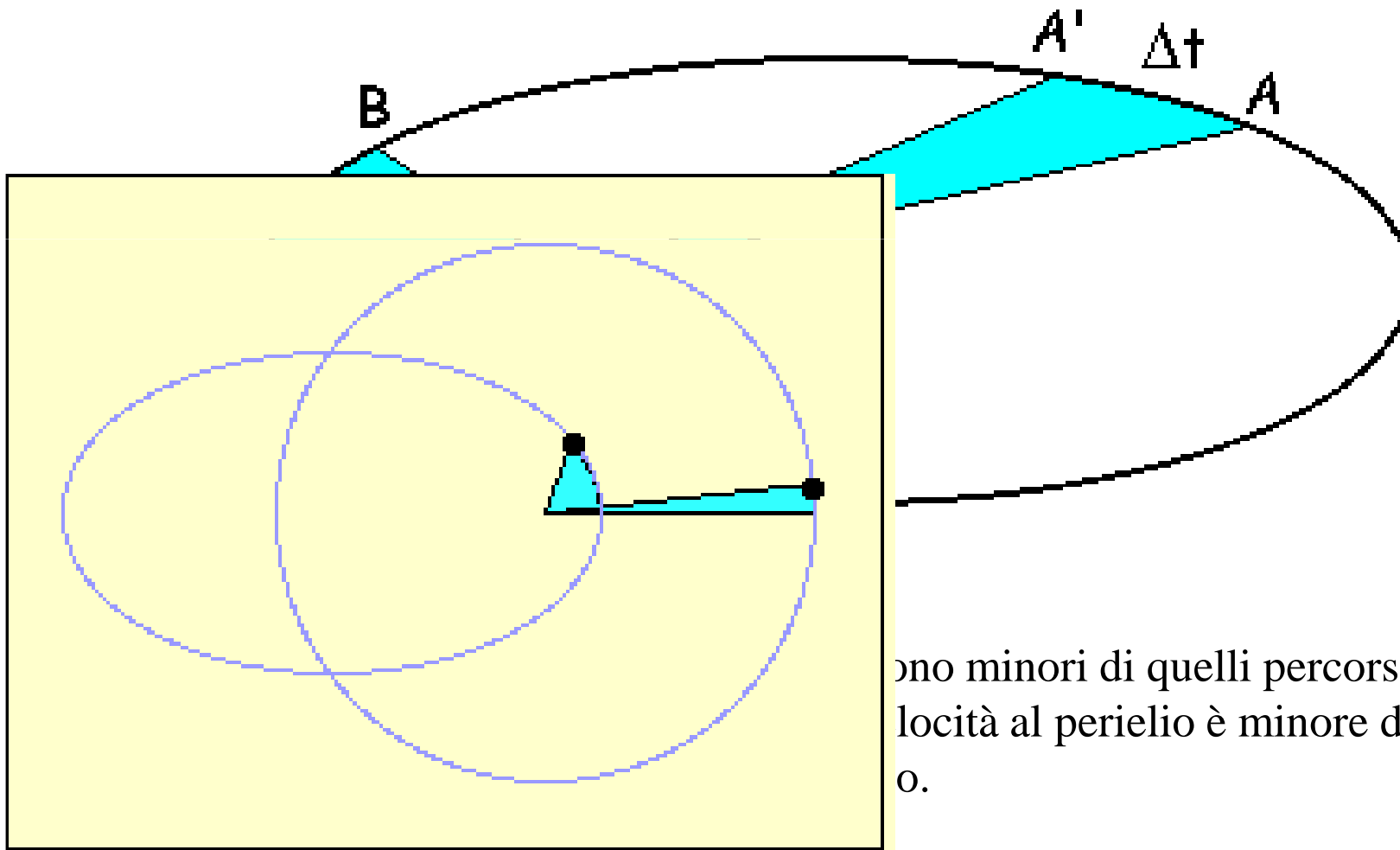


Il **perielio** (dal greco peri = intorno e helios = Sole) è il punto di minima distanza da Sole e l'**afelio** (dal greco apo = lontano e helios = Sole) è il punto di massima distanza dal Sole.

Leggi di Keplero

Seconda legge

Il raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.



sono minori di quelli percorsi all'afelio
locità al perielio è minore di quella
o.

Leggi di Keplero

Terza legge

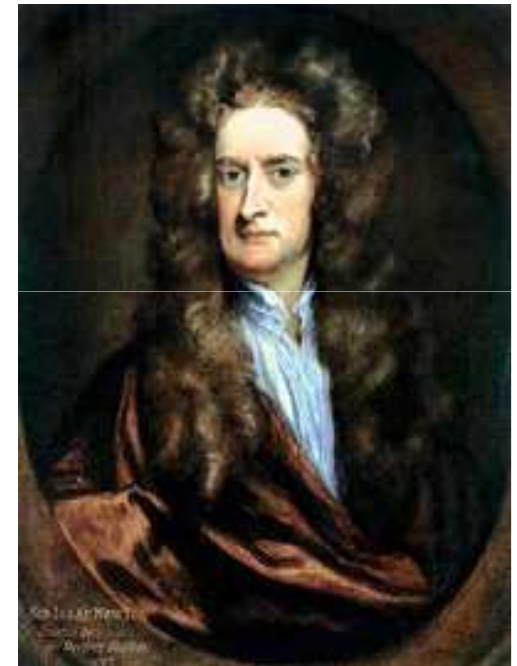
I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$$

Legge della gravitazione universale

Isaac Newton (1642-1727) è sicuramente uno dei più grandi geni di tutti i tempi.

Avvalendosi del principio d'inerzia enunciato da Galileo e di una brillante intuizione di Hooke (gli aveva consigliato di studiare il moto dei pianeti dividendolo in due parti: una rappresentata da un moto inerziale lungo la tangente alla traiettoria, l'altra rappresentata da un moto accelerato in direzione del Sole) scoprì quale fosse il significato fisico delle leggi di Keplero.



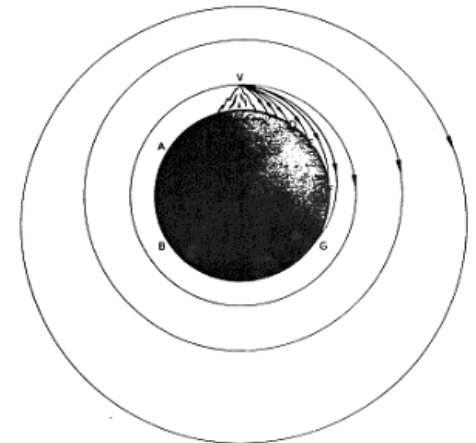
Concluse che essendo il moto dei pianeti non rettilineo e uniforme deve esserci una forza diretta verso il Sole che *regola*, ma non *causa* il moto.

Legge della gravitazione universale

Newton scoprì che tale forza segue la legge dell'inverso del quadrato della distanza.

I punti salienti del suo ragionamento sono:

- tutti i corpi cadono, in prossimità della superficie terrestre, con un'accelerazione pari a circa $9,8 \text{ m/s}^2$;
- la causa che fa cadere un corpo non viene meno qualunque sia l'altezza a cui il corpo è posto; se così non fosse dovrebbe esistere una determinata quota al di sopra della quale i corpi cessano di cadere e di pesare;
- anche la Luna deve avere un peso e deve in qualche modo cadere sulla Terra; questo significa che la presenza della Terra regola il moto orbitale della Luna.



Legge della gravitazione universale

Per verificare quantitativamente l'esattezza delle sue supposizioni Newton scelse il sistema Terra-Luna ed ipotizzò che la forza che faceva cadere i corpi in prossimità della superficie terrestre fosse la stessa che mantiene la Luna nella sua orbita.

I dati in possesso di Newton erano i seguenti:

raggio della Terra: $R_T \approx 6.400$ km

distanza Terra-Luna: $D_{T,L} \approx 60 R_T \approx 384.000$ km

periodo di rivoluzione della Luna: $T_L \approx 29$ giorni.

Da cui:

velocità orbitale della Luna: $v_L \approx 1$ km/s

accelerazione centripeta della Luna: $a \approx 0,0027$ m/s².

Il rapporto tra l'accelerazione centripeta della Luna e l'accelerazione gravitazionale della “mela” in prossimità della Terra dà:

$$\frac{a}{g} = \frac{0,0027}{9,8} \approx \frac{1}{3600}$$

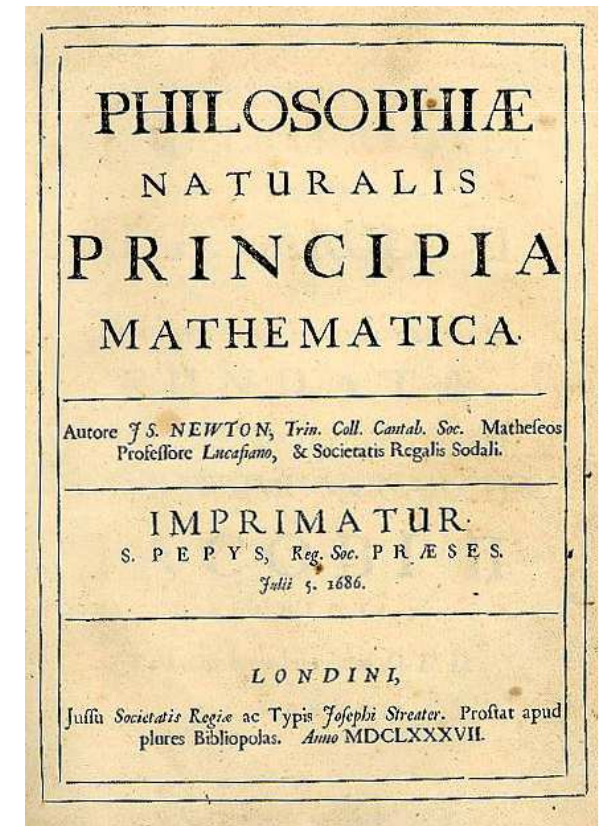
Legge della gravitazione universale

Questo indusse Newton a pensare che la forza di gravità variasse con l'inverso del quadrato della distanza

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Newton espone i suoi principi della Dinamica, nonché la legge della Gravitazione Universale nell'opera:
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica .

La prima edizione fu pubblicata nel 1687, ma gran parte del lavoro venne svolto dall'agosto 1665 al maggio 1667.



Legge della gravitazione universale

Nel tempo t che impiega la mela a cadere da un'altezza h , la Luna cade di una quantità s .

Si ha:

$$\frac{h}{s} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{1}{2}at^2} = \frac{g}{a}$$

Se consideriamo un albero di 5 m, dal quale la mela impiega circa 1 s a cadere, si ha:

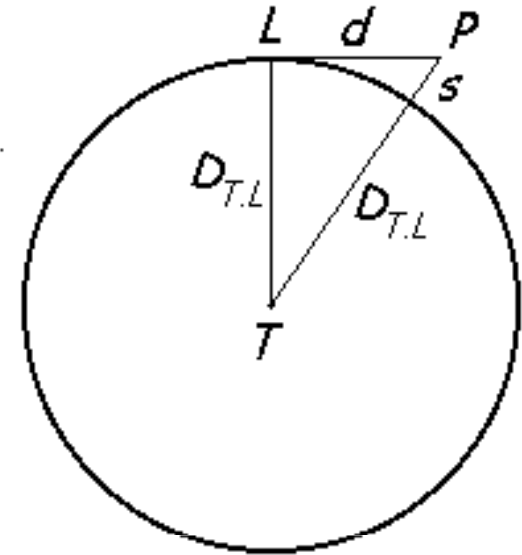
$$s = \frac{a}{g}h \approx \frac{1}{3600} \cdot (5\text{m}) \approx 1,4\text{mm}$$

Se è vera la legge dell'inverso del quadrato della distanza, allora, mentre la mela cade di 5 m, la Luna cade di circa 1,4 mm.

Legge della gravitazione universale

Se la Luna non cadesse, allora in 1 s percorrerebbe una distanza d tangenzialmente alla sua orbita

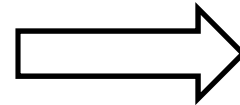
$$d = v \cdot t = \frac{2\pi D_{T,L}}{T_L} \cdot t = \frac{2\pi(384000\text{km})}{29\text{giorni}} \cdot (1\text{s}) \approx 1\text{km}$$



Dal triangolo rettangolo TLP :

$$\overline{TL}^2 + \overline{LP}^2 = \overline{TP}^2$$

$$D_{T,L}^2 + d^2 = (D_{T,L} + s)^2$$



$$s \approx \frac{d^2}{2D_{T,L}} \approx 1,3\text{mm}$$

$$D_{T,L}^2 + d^2 = D_{T,L}^2 + 2sD_{T,L} + s^2$$

Mentre la mela cade di 5 m, la Luna cade di circa 1,3 mm.

Legge della gravitazione universale

Solo nel 1679, con migliori misure della distanza Terra-Luna, egli ottenne la conferma numerica soddisfacente della sua teoria.

Per giungere al risultato che la forza di gravità segue la legge dell'inverso del quadrato della distanza Newton dovette compiere varie estrapolazioni .

In primo luogo il risultato ottenuto per il sistema Terra-Luna non autorizzava a pensare che potesse essere altrettanto corretto in altri sistemi con caratteristiche totalmente diverse da quello preso in esame.

In secondo luogo c'era il problema che il calcolo delle distanze usate per rapportare tra loro g e a veniva eseguito partendo dal centro della Terra.

Per poter giustificare questo calcolo Newton sviluppò quegli strumenti matematici (il calcolo infinitesimale) che gli permisero di dimostrare che se due corpi sferici esercitano l'uno verso l'altro una forza che varia come $1/r^2$ allora si può supporre che la massa di ciascun corpo sia concentrata nel centro del corpo stesso (il baricentro).

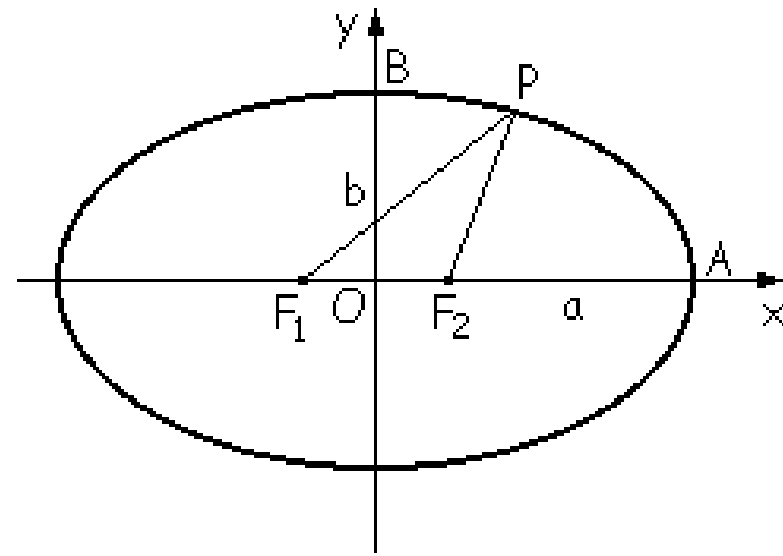
Deduzione della legge di Newton dalle leggi di Keplero

Dedurremo la legge della gravitazione universale di Newton dalle tre leggi di Keplero.

Seguiremo due percorsi, uno che fa uso del calcolo differenziale, l'altro segue la dimostrazione di Newton rivisitata da Feynmann che utilizza le proprietà geometriche dell'ellisse per dimostrare la legge delle orbite.

Equazione dell'ellisse

L'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi



Equazione cartesiana:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a è il semiasse maggiore, b quello minore.

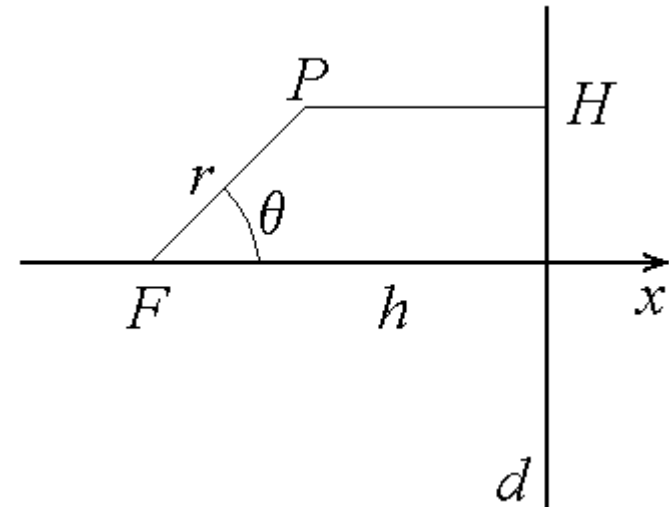
Se $2c$ è la distanza tra i due fuochi si ha: $a^2 = b^2 + c^2$

L'eccentricità dell'ellisse è: $e = c/a$

Equazione polare di una conica

Siano d una retta, F un punto non appartenente ad essa e h la sua distanza da d .

Determiniamo il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali il rapporto tra PF e PH è una costante e .



In coordinate polari di polo F e asse polare x , si ha:

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{r}{h - r \cos \theta} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

Si è introdotto il **parametro si scala** $p = eh$.

Si dimostra che è una conica.

$e > 1$ iperbole

$e = 1$ parabola

$0 < e < 1$ ellisse

$e = 0$ circonferenza

Equazione polare dell'ellisse

Nel caso dell'ellisse e è l'eccentricità e si ha:

$$\frac{p}{1+e} \leq r \leq \frac{p}{1-e}$$

Che sono i punti più vicino ($\theta = 0$) e più lontano ($\theta = \pi$) dal fuoco.

Il semiasse maggiore e il semiasse minore sono:

$$a = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right] = \frac{p}{1-e^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Ne segue che $\frac{b^2}{a} = p$

L'area dell'ellisse è: $A = \pi ab$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

Dalla cinematica del moto vario si ha:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

Si ricordi che se \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} sono i versori in una terna cartesiana e \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ , \mathbf{k} quelli di una terna cilindrica, si ha:

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\sin\theta\dot{\theta}\mathbf{i} + \cos\theta\dot{\theta}\mathbf{j} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\cos\theta\dot{\theta}\mathbf{i} - \sin\theta\dot{\theta}\mathbf{j} = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r$$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

Utilizzando l'idea di Newton, si considereranno Sole e pianeti come punti materiali con la loro massa.

Esprimeremo tutto in coordinate cilindriche.

Per il momento angolare \mathbf{L} si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r\mathbf{u}_r \times m(\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\mathbf{k}$$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

Per comodità scriviamo la (1):

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

E la deriviamo rispetto a θ

$$\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin \theta$$

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} = -\frac{e}{p} \cos \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$$

Dalla prima legge di Keplero segue che essendo l'ellisse una curva piana,

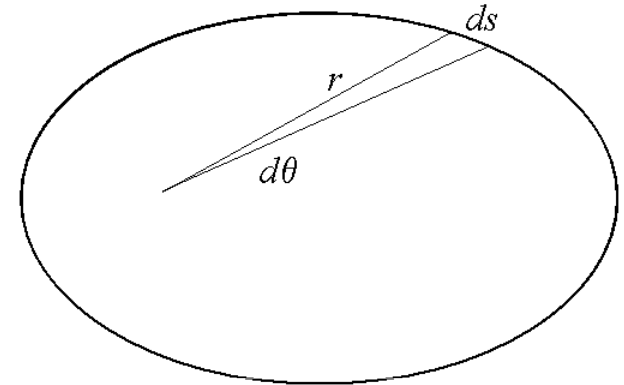
il verso del momento angolare è costante.

$$\frac{\mathbf{L}}{L} = \text{cost.}$$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

Se il raggio vettore descrive, in un intervallo dt , un angolo $d\theta$, allora l'area spazzata dA è :

$$dA = \frac{1}{2} ds \cdot r = \frac{1}{2} (r \cdot d\theta) \cdot r = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



Per la seconda legge di Keplero:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{cost.}$$

Da cui segue la costanza del vettore momento angolare **L**.

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

L'ipotesi da cui partiva Newton era che la forza fosse radiale, ossia:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Calcoliamo quindi la forza. Per prima cosa determiniamo \dot{r}

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d(1/r)} \frac{d(1/r)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{-1/r^2 dr} \left(-\frac{e}{p} \sin\theta \right) \frac{L}{mr^2} = \frac{Le}{mp} \sin\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{Le}{mp} \cos\theta \right) \dot{\theta} = \frac{L^2 e}{m^2 r^2 p} \cos\theta = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)$$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

La componente radiale dell'accelerazione è:

$$a_r = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r$$

$$\dot{\theta}^2 r = \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 r = \frac{L^2}{m^2 r^3}$$

$$\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{1}{p}$$

Quindi

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_r = m\mathbf{a}_r = -m \frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{1}{p} \mathbf{u}_r = -\frac{L^2}{mr^2 p} \mathbf{u}_r \quad (2)$$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

Dalla seconda legge di Keplero, in forma differenziale: $dA = \frac{L}{2m} dt$

$$\int_0^A dA = \int_0^T \frac{L}{2m} dt \Rightarrow A = \frac{L}{2m} T \Rightarrow \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m} \Rightarrow T = \frac{2\pi abm}{L}$$

Per la terza legge di Keplero

$$\frac{T^2}{a^3} = K' = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m^2}{L^2 a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 p}{L^2}$$

$$\frac{L^2}{mp} = \frac{4\pi^2 m}{K'} = K \cdot m \qquad K = \frac{4\pi^2}{K'}$$

Dalle leggi di Keplero alla legge di Newton

Confrontando con la (2) si ha:

$$F = -K \frac{m}{r^2}$$

Nell'ipotesi (di Newton) che K sia direttamente proporzionale alla massa del Sole M si ha:

$$F\mathbf{u}_r = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r$$

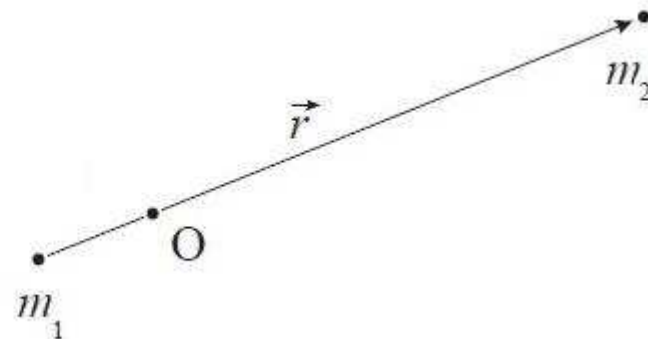
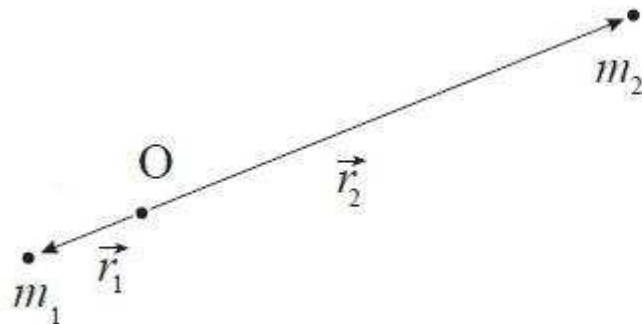
Il problema dei due corpi

È lo studio delle equazioni del moto di due corpi puntiformi, isolati, sotto l'azione della mutua interazione gravitazionale.

L'approssimazione è valida anche se si considerano corpi sferici, a patto di considerare la massa nei rispettivi centri di massa.

Il problema può essere affrontato da due sistemi di riferimento; quello inerziale, centrato nel centro di massa del sistema e quello non inerziale centrato nel corpo di massa maggiore.

Il ragionamento non cambia se si mette il sistema di riferimento nel corpo di massa minore.

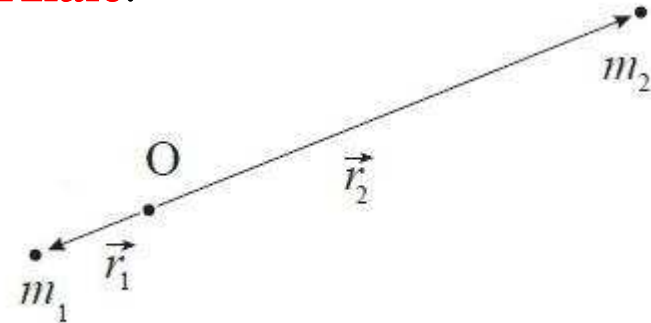


Il problema dei due corpi

Affrontiamo il problema dal punto di vista inerziale.

In coordinate polari si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{r_1} \\ \mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{r_2} \end{cases} \quad |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2|$$



Dalla definizione di centro di massa $m_1 r_1 + m_2 r_2 = m_{tot} r_g = 0$

$$|r_1| = \frac{m_2}{m_1} |r_2| \quad |r_2| = \frac{m_1}{m_2} |r_1|$$

Dove r_g è il modulo del vettore del centro di massa. Essendo anche $\mathbf{u}_{r_1} = -\mathbf{u}_{r_2}$

Poniamo $\mathbf{u}_{r_1} = \mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_{r_2} = -\mathbf{u}_r$

Il problema dei due corpi

Moltiplicando l'espressione sopra,
la prima per m_2 e la seconda per m_1 ,
e utilizzando le definizioni sui
versori si ha:

$$\begin{cases} m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \\ m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = +m_1 G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la **massa ridotta** e $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$

Il problema dei due corpi

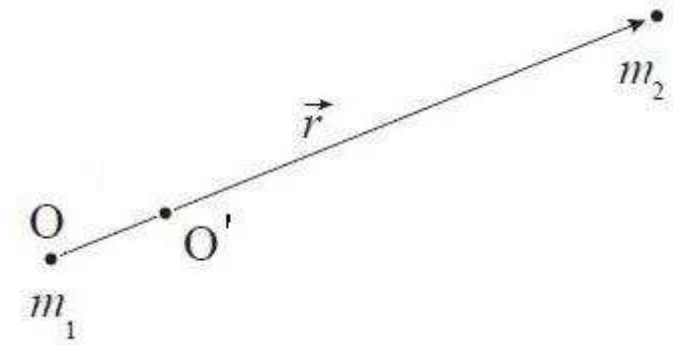
Affrontiamo il problema dal punto di vista di un sistema di riferimento non inerziale solidale con il punto di massa maggiore (m_1 per esempio).

Sia O e O' i sistemi di riferimento solidale con m_1 e con il centro di massa.

Gli assi dei due sistemi rimangono paralleli nel tempo (non ruotano $\omega = 0$).

In O .

$$\begin{cases} m_1 a_1' = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = F_{12} \\ m_2 a_2' = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = F_{21} \end{cases}$$



In O' .

$$\begin{cases} m_1 a_1 = 0 \\ m_2 a_2 = F_{21} + F_{tr} \end{cases}$$

F_{tr} sono le forze di trascinamento

$$F_{tr} = -m_2 a_1' = -m_2 \frac{m_1 a_1'}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1} F_{12} = \frac{m_2}{m_1} F_{21}$$

Il problema dei due corpi

$$m_2 a_2 = F_{21} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)$$

F_{21} è la stessa nei due sistemi.

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{a}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \Leftrightarrow \mu \mathbf{a}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

È la stessa soluzione trovata nel caso inerziale visto che $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$

È come se ci fosse un corpo di massa μ ad orbitare attorno al comune centro di massa del sistema.

Ogni pianeta compie moti piani ed orbite ellittiche, ma non rispetta la terza legge di Keplero se il semiasse viene misurato a partire dal centro di massa.

Considerazioni sull'energia

Per il principio di conservazione dell'energia: $E = T + U = \text{cost}$

Per un sistema Sole-pianeta isolato:

$$E = \frac{1}{2} \mu (v_{rad}^2 + v_{\perp}^2) - G \frac{Mm}{r}$$

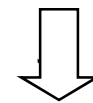
Ricordando che $v_{rad} = \dot{r}$ che $v_{\perp} = r\dot{\theta}$ e dimostrando che $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{rad}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G \frac{Mm}{r}$$

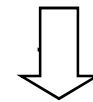
Energia potenziale efficace U_{eff}

$$U_{eff} \text{ è minima per: } r = \frac{L^2}{GMm\mu}$$

$$E = U_{eff}$$



$$v_{rad} = 0$$



moto circolare uniforme

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Consideriamo un sistema Sole-pianeta.

L'energia totale è
$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U$$

Il momento angolare totale è
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}$$

Ricordando che $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ e
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

Poiché le forze sono centrali, il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è nullo.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{cost.}$$

Il moto del pianeta avviene su di un piano.

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{rad}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - r^2 \dot{\theta}^2}$$

È inessenziale il segno della radice

Ricordando che $L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cost.} \Rightarrow r^2 \dot{\theta}^2 = r^2 \left(\frac{L}{\mu r^2} \right)^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}$$

$$d\theta = \dot{\theta} dt = \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r(\theta_0)}^r \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2GM^2 m^2}{(M+m)r} - \frac{L^2}{r^2}}}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r(\theta_0)}^r \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2GM^2 m^2}{(M+m)r} - \frac{L^2}{r^2}}}$$

$$\theta - \theta_0 = \arcsen \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r} \right) \right] - \arcsen \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r_0} \right) \right]$$

$$p = \frac{L^2 (M+m)}{GM^2 m^2} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2\mu EL^2 (M+m)^2}{G^2 M^4 m^4}}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Al perielio $\theta_0 = 0$ e $r_0 = a - c = a(1 - e) = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e) = \frac{p}{1 + e}$

$$\frac{p}{r_0} = 1 + e$$

$$\arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r_0}\right)\right] = \arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \arcsen\left[\frac{1}{e}\left(1 - \frac{p}{r}\right)\right] + \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Le orbite permesse sono delle coniche di eccentricità e che dipende dall'energia.

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mu EL^2 (M + m)^2}{G^2 M^4 m^4}}$$

$E < 0 \Rightarrow e < 1$ **ELLISSE**

$e = 0$ **CIRCONFERENZA** $E = -\frac{G^2 M^4 m^4}{2\mu L^2 (M + m)^2}$

$E = 0 \Rightarrow e = 1$ **PARABOLA**

$E > 0 \Rightarrow e > 1$ **IPERBOLE**

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

La seconda legge deriva dal fatto che essendo le forze centrali, il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è nullo e quindi il momento angolare \mathbf{L} è costante.

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

Essendo l'area:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

L'area spazzata nell'intervallo di tempo dt :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} = \text{cost.}$$

Dalla legge di Newton alle leggi di Keplero

Per la terza legge ricordiamo che:

$$A = \frac{L}{2\mu} T \quad \text{e} \quad A = \pi ab$$

$$T = \frac{2\mu A}{L} \Rightarrow T^2 = \frac{4\mu^2 \pi^2 a^2 b^2}{L^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\mu^2 \pi^2 a^2 b^2}{L^2} \frac{1}{a^3} = \frac{4\mu^2 \pi^2 b^2}{L^2 a} = \frac{4\mu^2 \pi^2}{L^2} p$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{L^2} \mu^2 p = \frac{4\pi^2}{L^2} \frac{M^2 m^2}{(M+m)^2} \frac{L^2 (M+m)}{GM^2 m^2} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

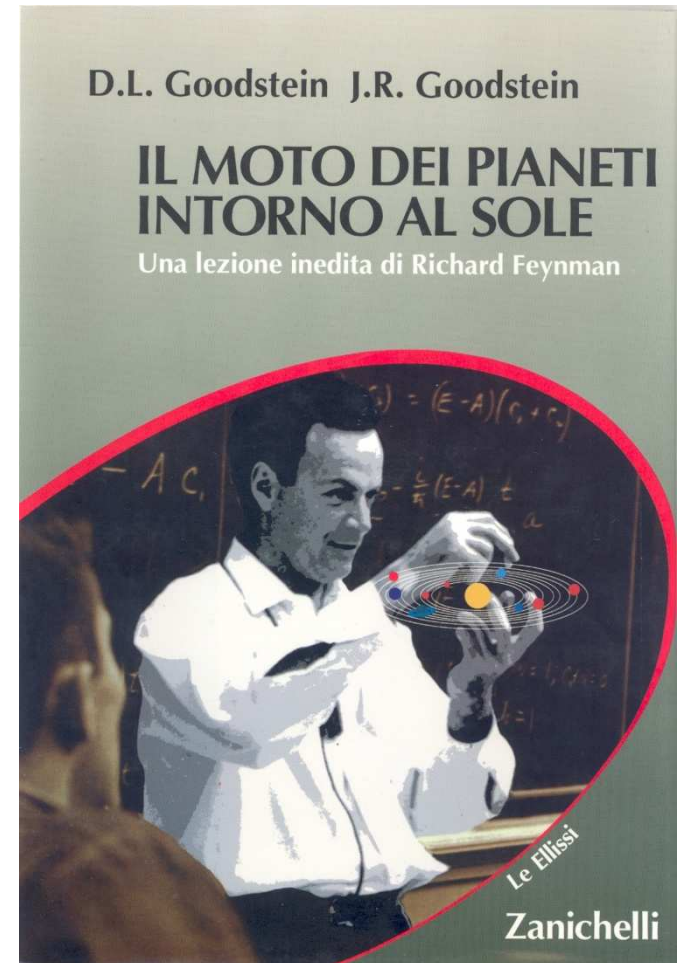
Il moto dei pianeti intorno al Sole

Una lezione di Richard Feynman

La lezione fu tenuta al Caltech (California Institute of Technology) il 13 marzo 1964.

La lezione si sviluppa nei seguenti punti:

1. un'introduzione storica al problema;
2. una descrizione di alcune proprietà geometriche di un'ellisse;
3. dimostrazione di Newton che se un pianeta descrive un'orbita mediante una forza diretta verso il sole allora vale la seconda legge di Keplero;
4. dimostrazione di Feynman che ad uguali variazioni della velocità corrisponde una uguale variazione degli angoli nell'orbita;
5. dimostrazione di Feynman, usando le tecniche di Fano, che questi cambiamenti di velocità implicano che l'orbita sia ellittica;
6. discussione sugli esperimenti del Rutherford con la dispersione delle particelle alfa e la scoperta del nucleo atomico.



L'idea

L'idea di fondo è che il moto di un pianeta intorno al sole è dovuto alla competizione tra la tendenza del pianeta a muoversi a velocità costante lungo una linea retta, se non ci sono forze agenti su di esso, (principio di inerzia) e il moto dovuto alla forza di gravità che è diretta verso il Sole.

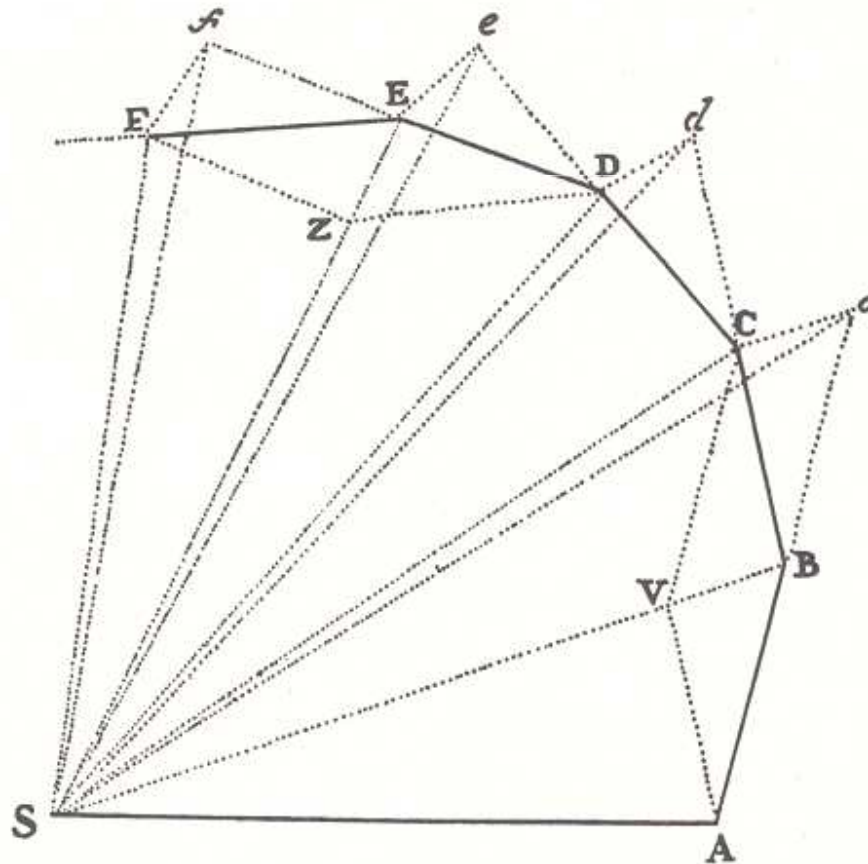


Diagramma di Newton

Le leggi di Newton

1. Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.
2. Una forza impressa ad un corpo ne modifica il moto secondo la legge $F = m \cdot a$,
ovvero

$$F \sim \Delta v / \Delta t.$$

1. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

L'idea

In realtà questi effetti danno luogo ad un'orbita rappresentata da una curva regolare, ma per la sua analisi Newton la considerò come una spezzata (ABCDEF) formata da una serie di segmenti di retta dovuti all'inerzia interrotti da improvvisi cambiamenti di direzione dovuti all'applicazione della forza del sole per un tempo molto breve.

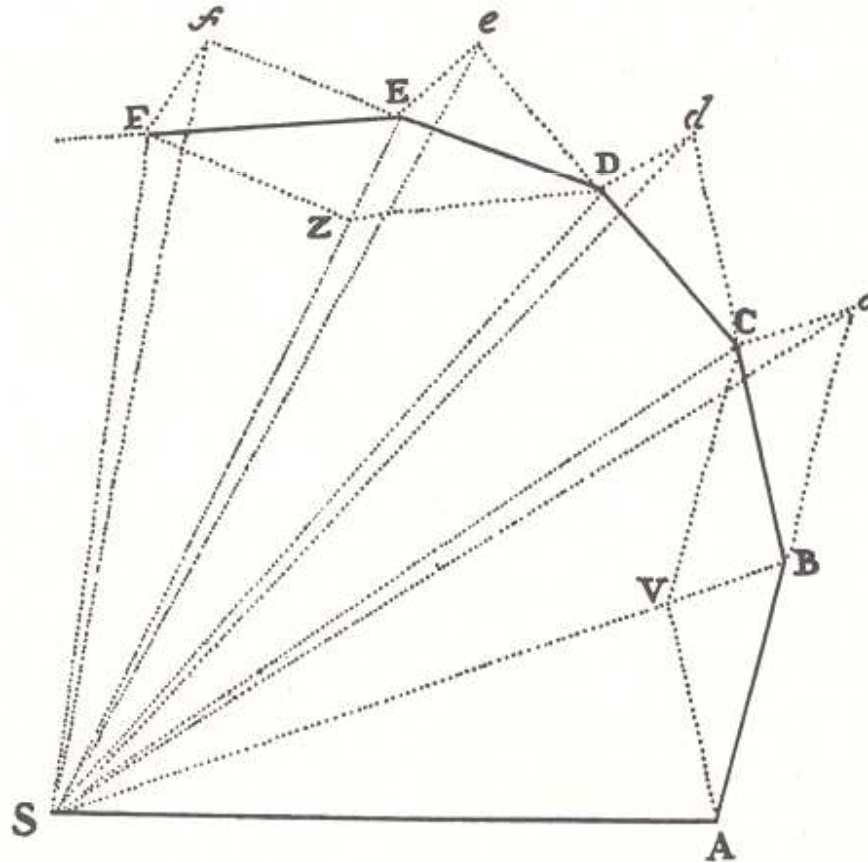
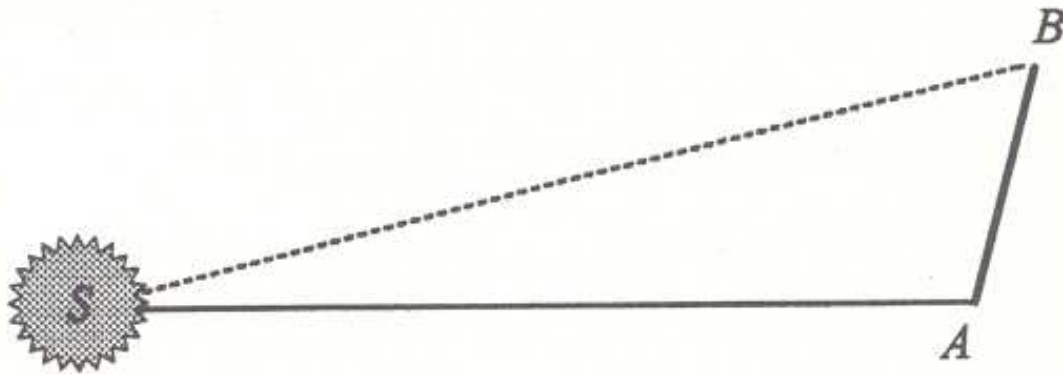


Diagramma di Newton

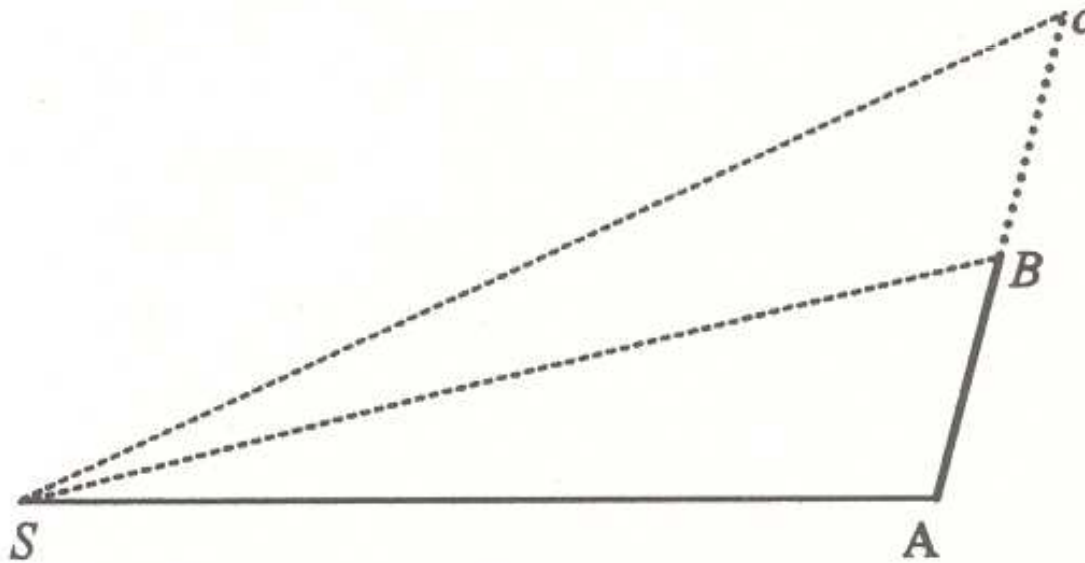
L'idea

In un certo intervallo di tempo il pianeta si muove da A fino a B, se non ci fosse alcuna forza ad agire su di esso.



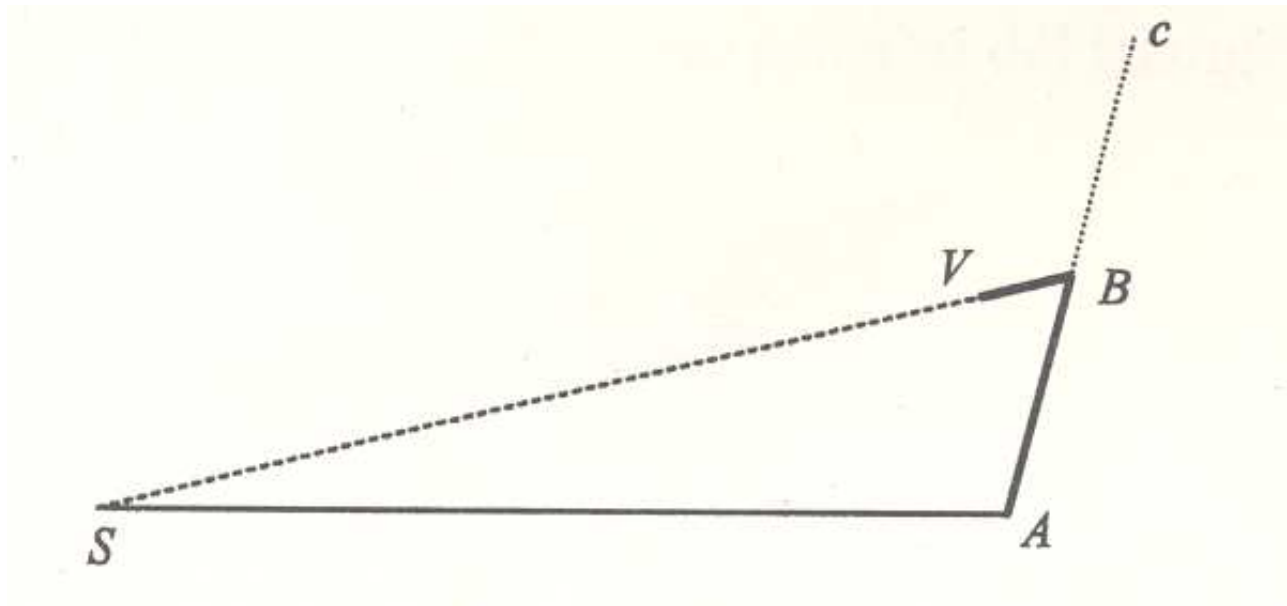
L'idea

In un intervallo successivo, di ugual durata, sempre se non ci fosse alcuna forza, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una ugual distanza Bc.



L'idea

Il sole esercita una forza, che agisce in realtà in modo continuo, che rappresentiamo con un impulso, applicato nel punto B, che dà origine ad una componente del moto diretta verso il sole, BV.

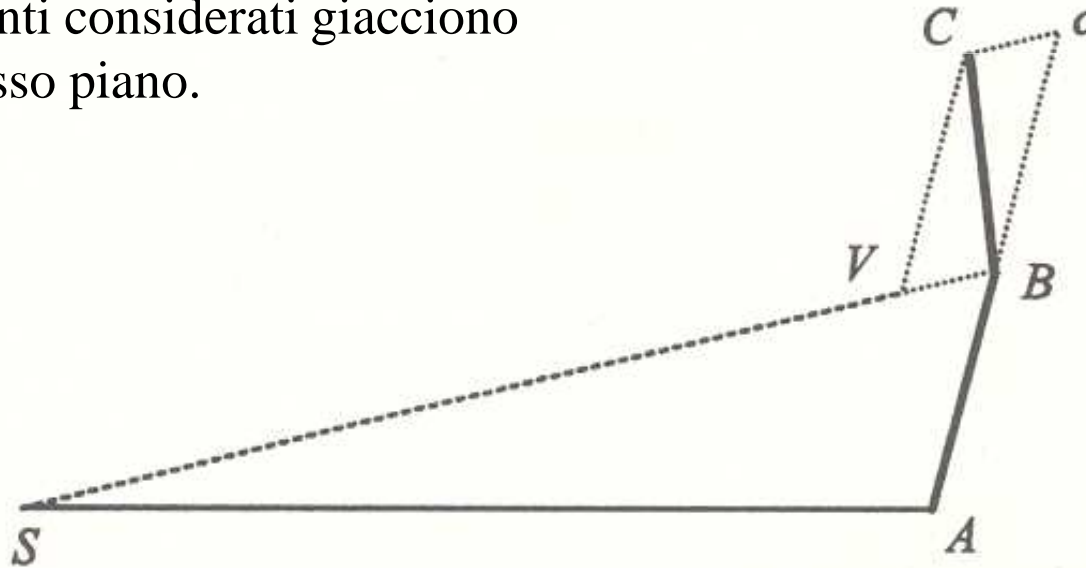


L'idea

Il moto dovuto alla combinazione dei due effetti è il segmento BC , diagonale del parallelogramma $VBcC$.

OSSERVAZIONI:

- 1) il segmento cC non è diretto verso il sole, ma è parallelo al segmento BV che invece è diretto verso il sole.
- 2) Tutti i punti considerati giacciono sullo stesso piano.

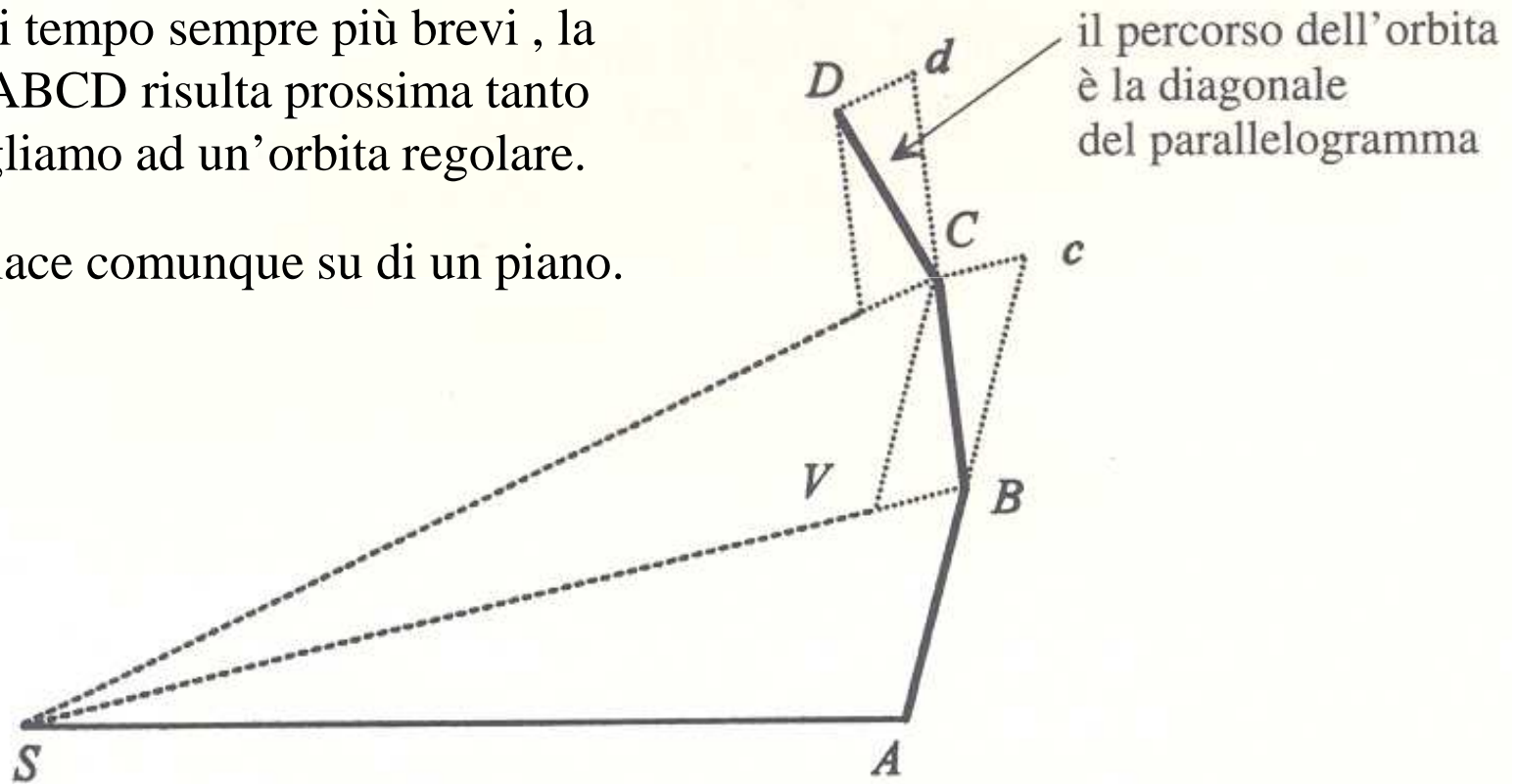


L'idea

Si può ripetere la stessa procedura ad ogni punto e il passo successivo la traiettoria avrà l'aspetto di figura.

Applicando lo stesso ragionamento ad intervalli di tempo sempre più brevi, la traiettoria ABCD risulta prossima tanto quanto vogliamo ad un'orbita regolare.

L'orbita giace comunque su di un piano.

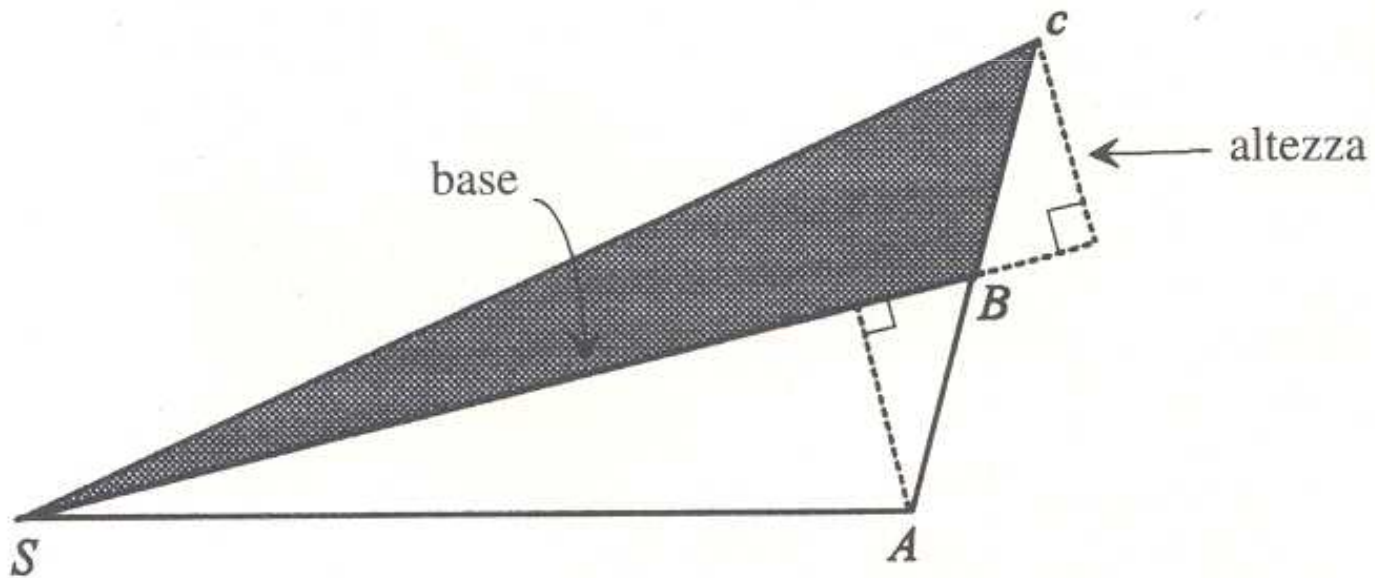


La natura della forza di gravità

Newton (e Feynman) dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

In altre parole i triangoli SAB e SBC hanno la stessa area.

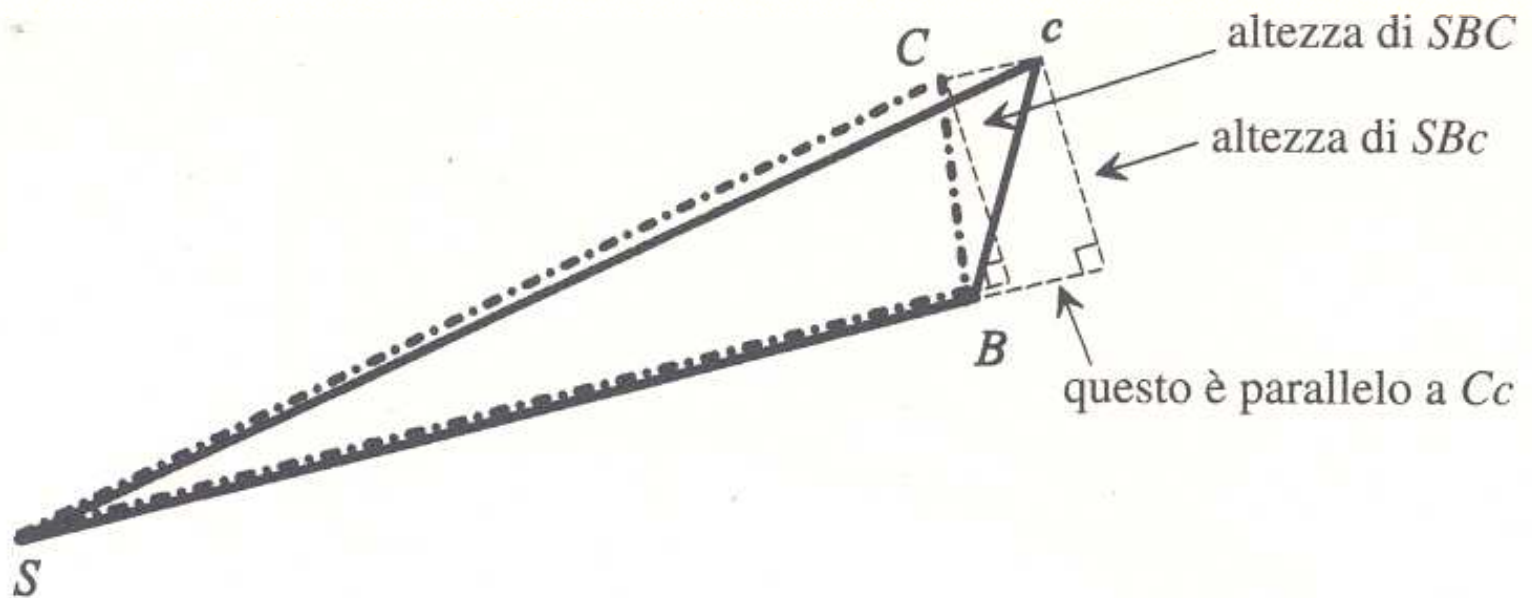
Per fare ciò, per prima cosa dimostra che SAB ha la stessa area di SBC.



La natura della forza di gravità

Quindi che SBc ha la stessa area di SBC .

La linea che congiunge il sole con un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.



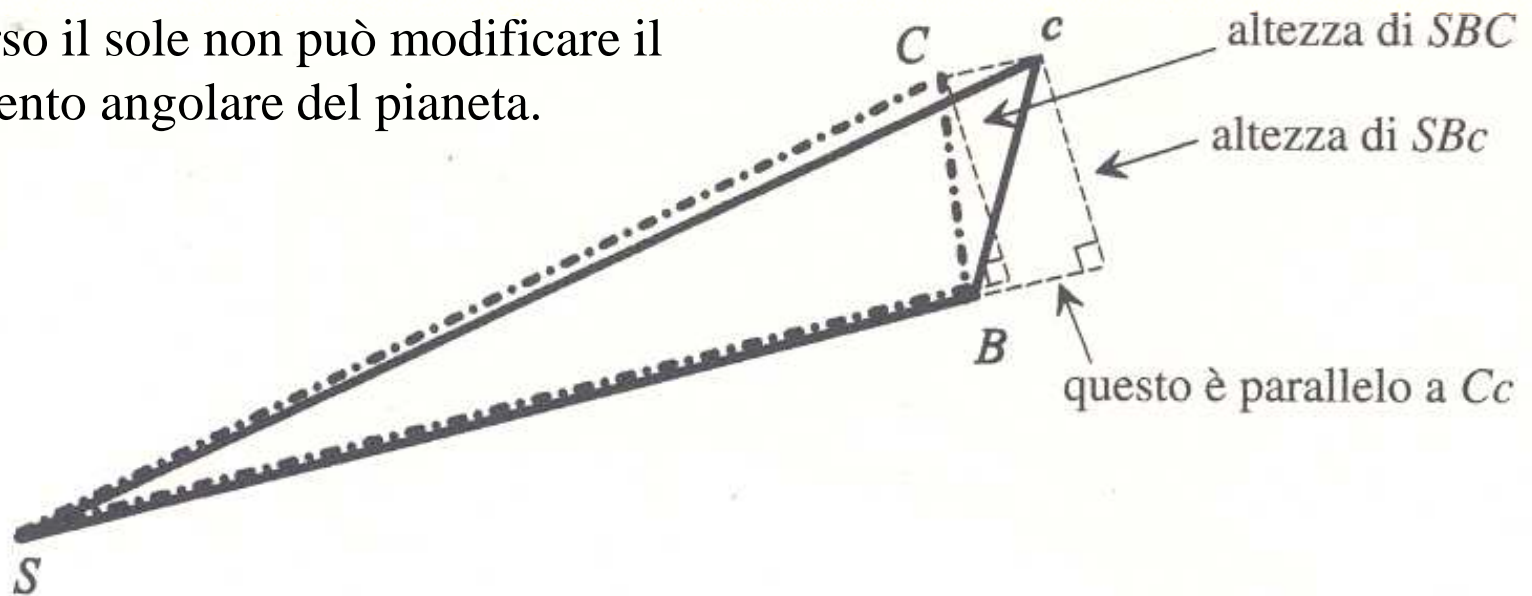
La natura della forza di gravità

Questo è un risultato molto importante per la fisica:

la forza che attrae il pianeta verso il sole cambia la traiettoria, ma non il valore dell'area spazzata nell'unità di tempo.

Dopo Newton si è dimostrato che l'area è proporzionale al *momento angolare* del pianeta rispetto al sole.

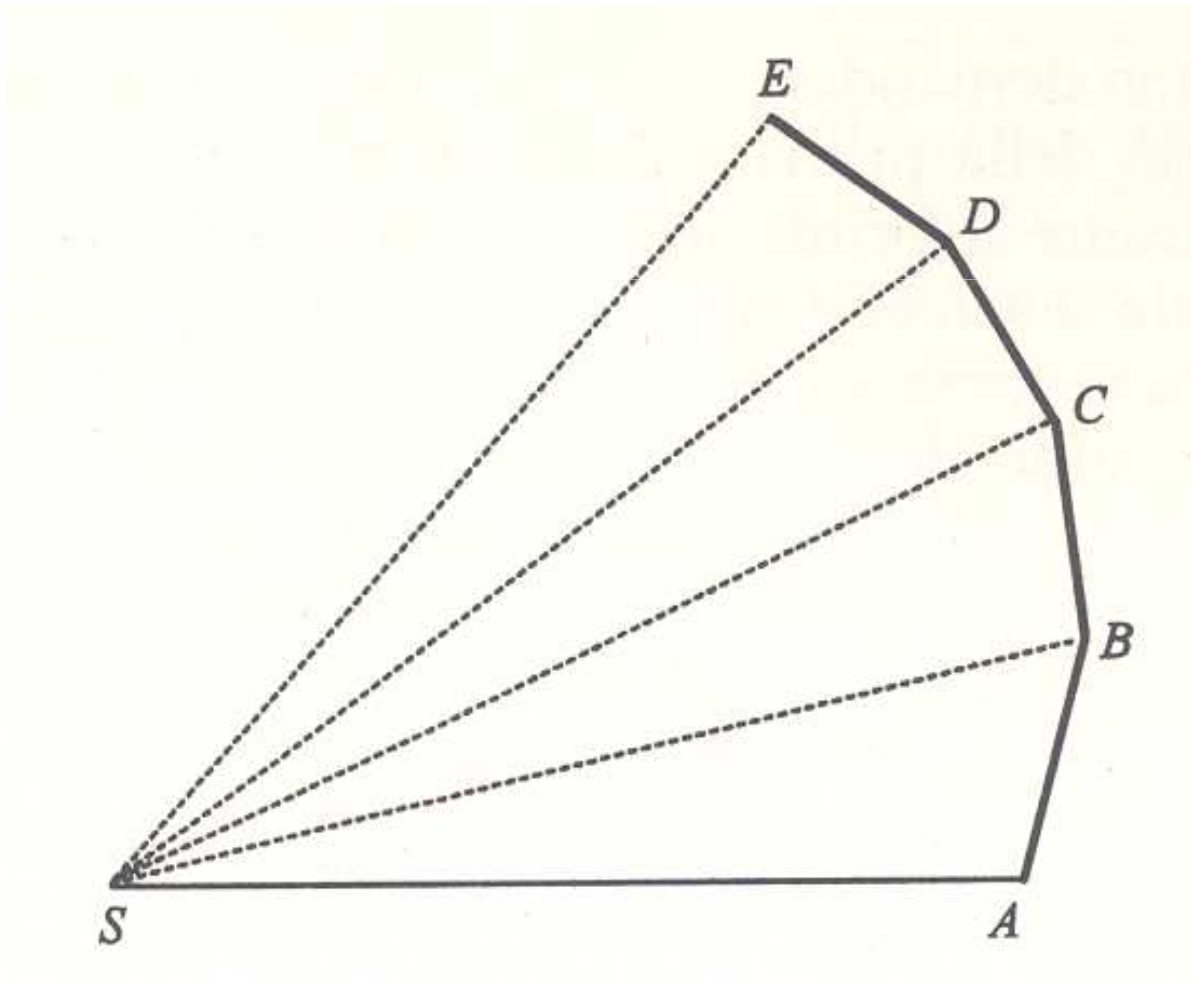
Con un linguaggio più moderno abbiamo dimostrato che la forza che attrae il pianeta verso il sole non può modificare il momento angolare del pianeta.



La natura della forza di gravità

E' ovvio che possiamo applicare lo stesso ragionamento ai successivi triangoli SCD, SDE, e così via. Essi sono i triangoli spazzati dal pianeta in tempi uguali.

Siamo quindi riusciti a dimostrare la seconda legge di Keplero.



Interludio

Si noti che fin qui si è utilizzato:

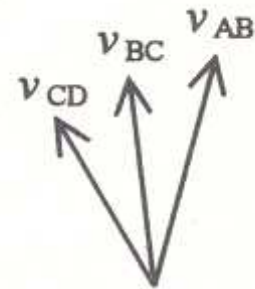
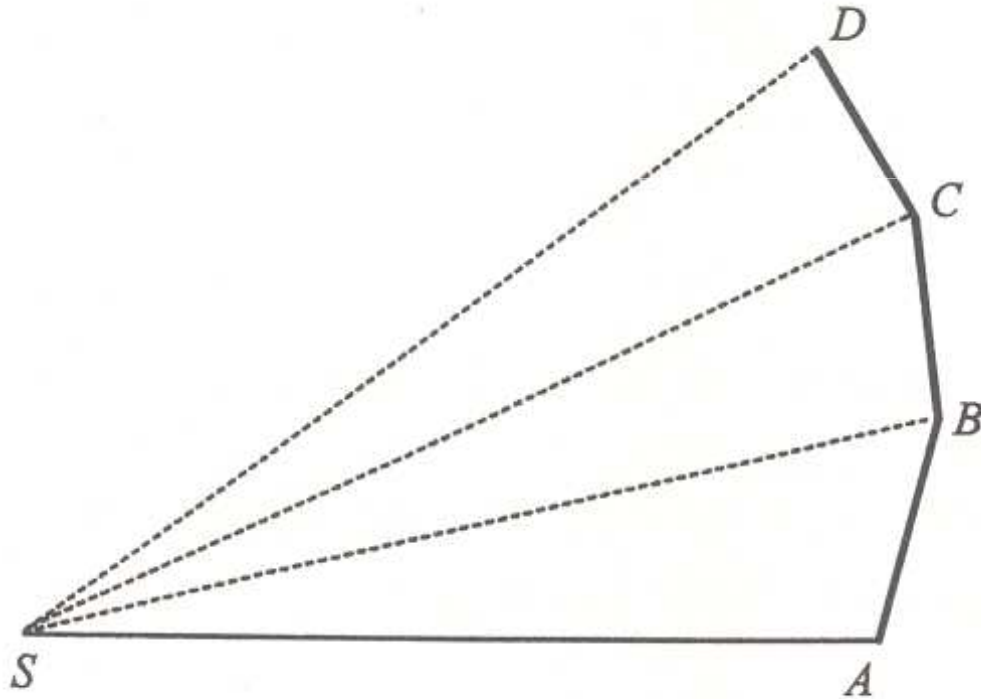
- 1) la prima legge di Newton,
- 2) parte della seconda legge di Newton (ogni cambiamento del moto avviene nella direzione della forza impressa),
- 3) l'idea che la forza di gravità sul pianeta è diretta verso il sole

Si noti che non è stato utilizzato il fatto che la forza di gravità è direttamente proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

Nella sua lezione Feynman dimostra che dalla terza legge di Keplero si deduce che la forza di gravità va come l'inverso del quadrato della distanza.

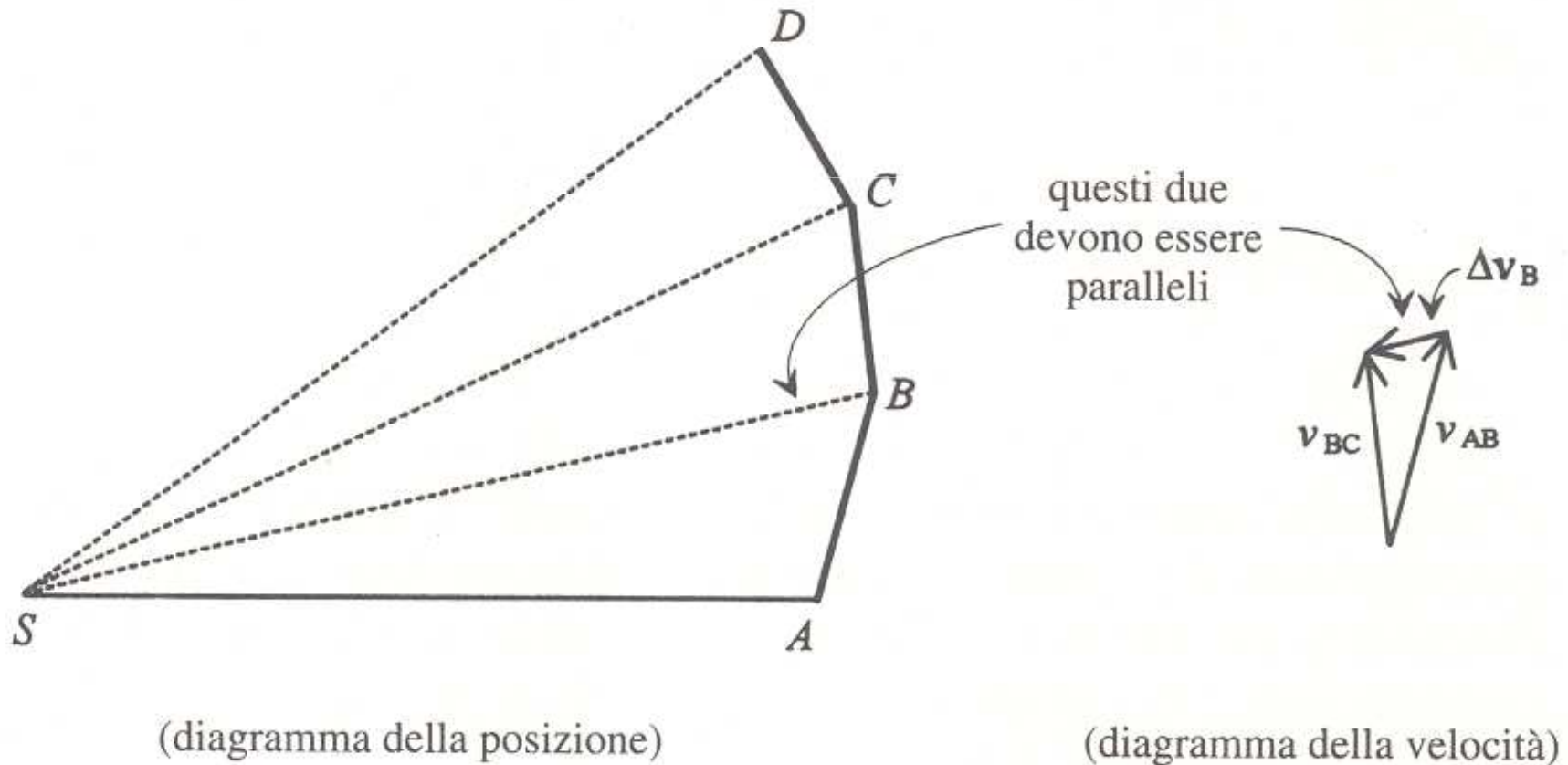
La natura della forza di gravità

In uguali intervalli di tempo, il pianeta si sposta da A a B, da B a C, e così via. Poiché il pianeta si sposta con velocità costante lungo i tratti AB, BC, ecc., allora possiamo rappresentare anche la velocità con frecce che hanno la stessa direzione degli spostamenti e lunghezze proporzionali ad essi.



La natura della forza di gravità

La variazione di velocità deve essere diretta verso il sole (dalla seconda legge di Newton) e quindi nella figura Δv_B è diretta nella stessa direzione di BS.

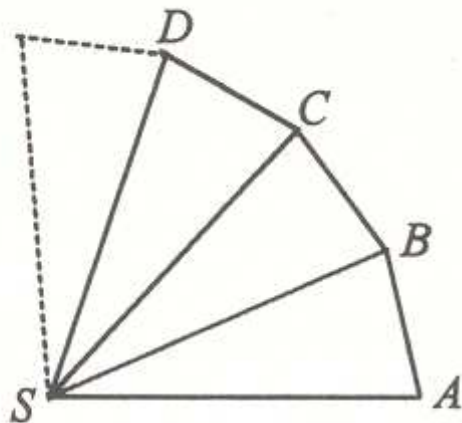


La natura della forza di gravità

Il più semplice degli esempi è quello in cui l'orbita è una circonferenza di raggio R .

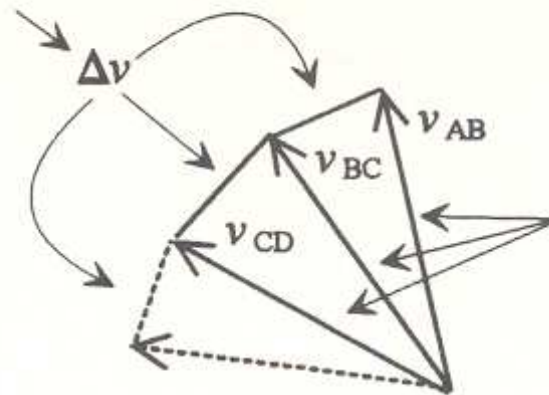
La costruzione dell'orbita con il metodo utilizzato da Newton porta a dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza il cui raggio R è la distanza dal sole.

Anche le velocità sono tutte uguali così che le variazioni di velocità sono tutte identiche e il diagramma delle velocità corrisponde anch'esso ad un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio v .



(diagramma dell'orbita)

questi sono
tutti uguali



questi sono
tutti uguali

(diagramma delle velocità)

La natura della forza di gravità

Il valore della velocità è dato dalla distanza percorsa dal pianeta su tutta l'orbita diviso per il tempo che impiega a percorrere l'orbita, ossia il periodo T .

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Ogni volta che il pianeta completa un'orbita, il diagramma delle velocità percorre anch'esso una circonferenza completa.

Quando la freccia della velocità completa un giro, la punta ha percorso una distanza $2\pi v$. La variazione della velocità in un intervallo di tempo Δt sarà data da:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

La natura della forza di gravità

Poiché la forza è proporzionale alla variazione della velocità sull'intervallo di tempo, abbiamo:

$$F \propto \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2\pi}{T} R \right) = (2\pi)^2 \frac{R}{T^2}$$

Ma per la terza legge di Keplero

$$T^2 \propto R^3$$

Quindi:

$$**F \propto 1/R^2**$$

Interludio

Sia Keplero sia Newton ci hanno dato tre leggi.

Le leggi di Keplero sono generalizzazioni dai risultati delle osservazioni celesti di Tycho Brahe.

Le leggi di Newton sono delle affermazioni di principio sulle relazioni tra materia, forze e moto. Se il comportamento dedotto da queste affermazioni corrisponde a quanto si osserva in natura, allora le assunzioni sono probabilmente corrette.

In campo planetario la verifica della correttezza delle affermazioni di Newton è data dal fatto che da esse dobbiamo dedurre le leggi di Keplero.

Per stabilire quale tipo di moto planetario prevedono le sue leggi, Newton dovette prima individuare la natura della forza di gravità (e per fare ciò si servì della seconda e della terza legge di Keplero), poi, servendosi della gravità, dimostrò che le orbite dei pianeti sono delle ellissi.

A questo punto Feynman dichiara di non capire la dimostrazione di Newton e segue un'altra strada.

La legge delle ellissi

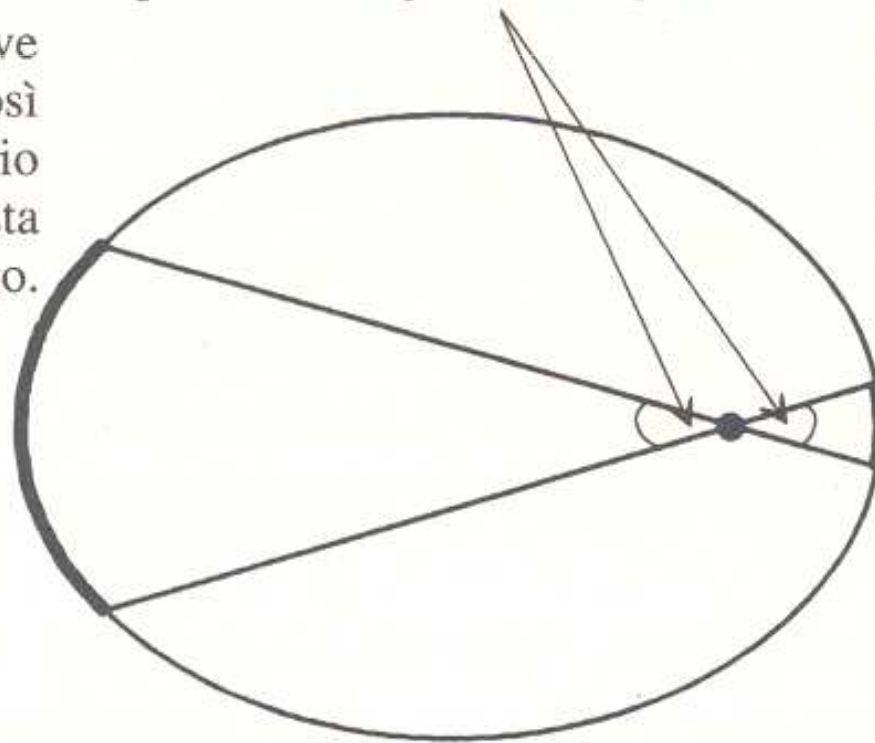
Per dimostrare la legge delle ellissi Feynman divide l'orbita in angoli uguali invece che in aree uguali.

La prima conclusione a cui arriva è che: $\Delta t \propto (\text{area spazzata}) \propto R^2$.

R è la distanza dal sole.

Qui il pianeta si muove più lentamente, così il tempo necessario a percorrere questa parte è più lungo.

questi due angoli sono uguali



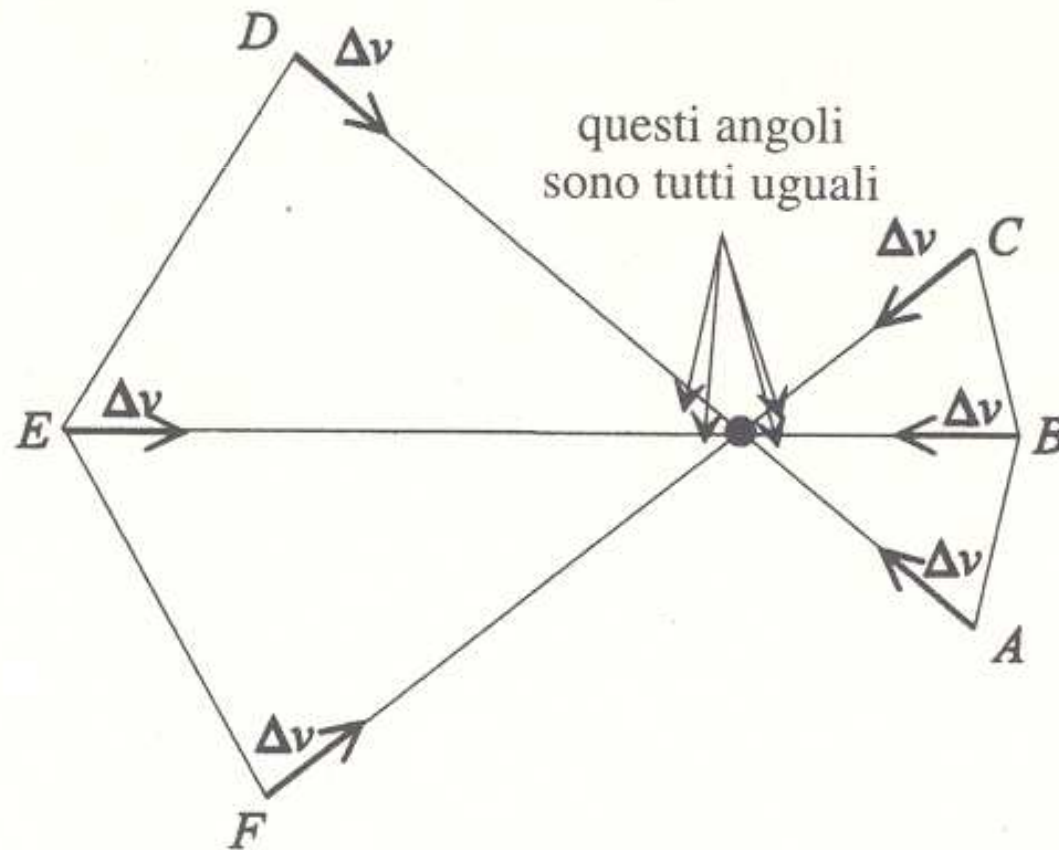
Poiché il pianeta si muove più lentamente quando è vicino al Sole, il tempo impiegato a percorrere questo segmento dell'orbita è breve.

La legge delle ellissi

In ogni punto posto sull'orbita (A, B, C, D, E, F e tutti i punti compresi tra questi) c'è una variazione Δv verso il sole.

Maggiore è la forza, maggiore è Δv ; inoltre più è lungo l'intervallo di tempo Δt , maggiore è la variazione di velocità

$$\Delta v \propto F \cdot \Delta t$$



Essendo $F \propto 1/R^2$ e $\Delta t \propto R^2$

$$\Delta v \propto (1/R^2) \cdot R^2 = 1.$$

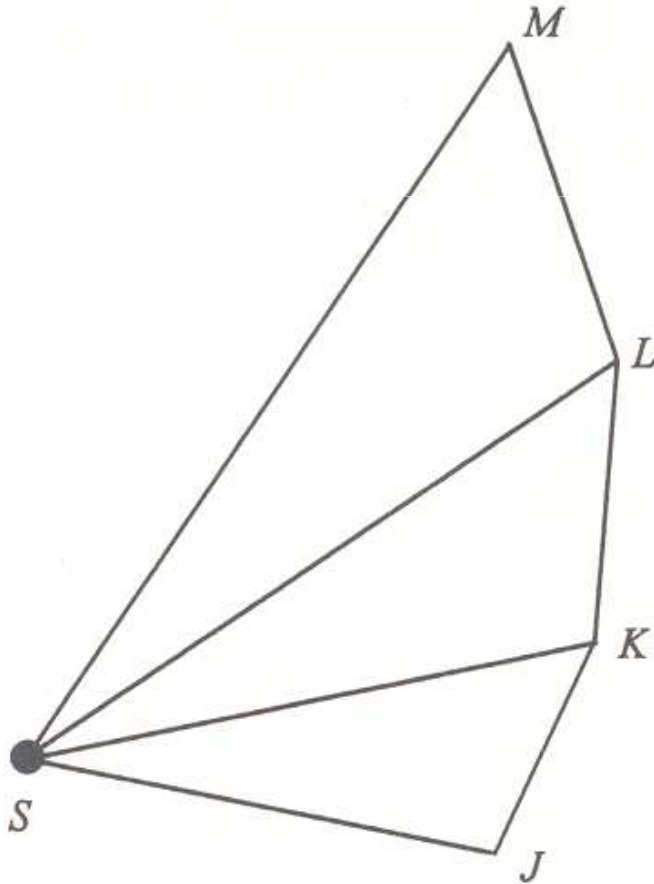
La variazione di velocità non dipende dalla distanza, ma è costante!!!

“Si verificano uguali variazioni di velocità quando l'orbita descrive angoli uguali.”

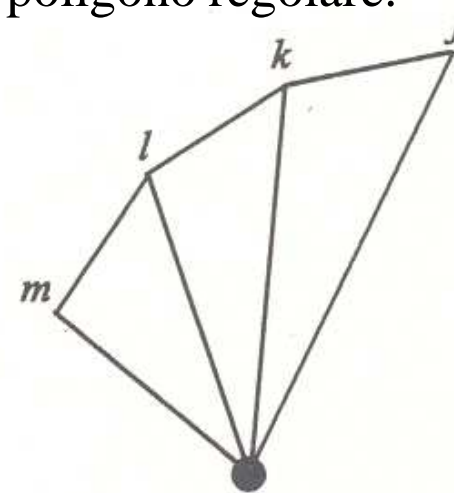
La legge delle ellissi

L'uso di angoli uguali fa sì che i segmenti sull'orbita siano diversi (JK, KL, LM) e quindi anche le velocità (i segmenti che nel grafico di sinistra hanno per estremi j, k, l, m), ma le variazioni di velocità sono uguali ($jk = kl = lm$).

Inoltre i segmenti jk e KS, kl e LS, lm e MS sono paralleli in quanto la variazione di velocità è sempre diretta verso il sole (S).

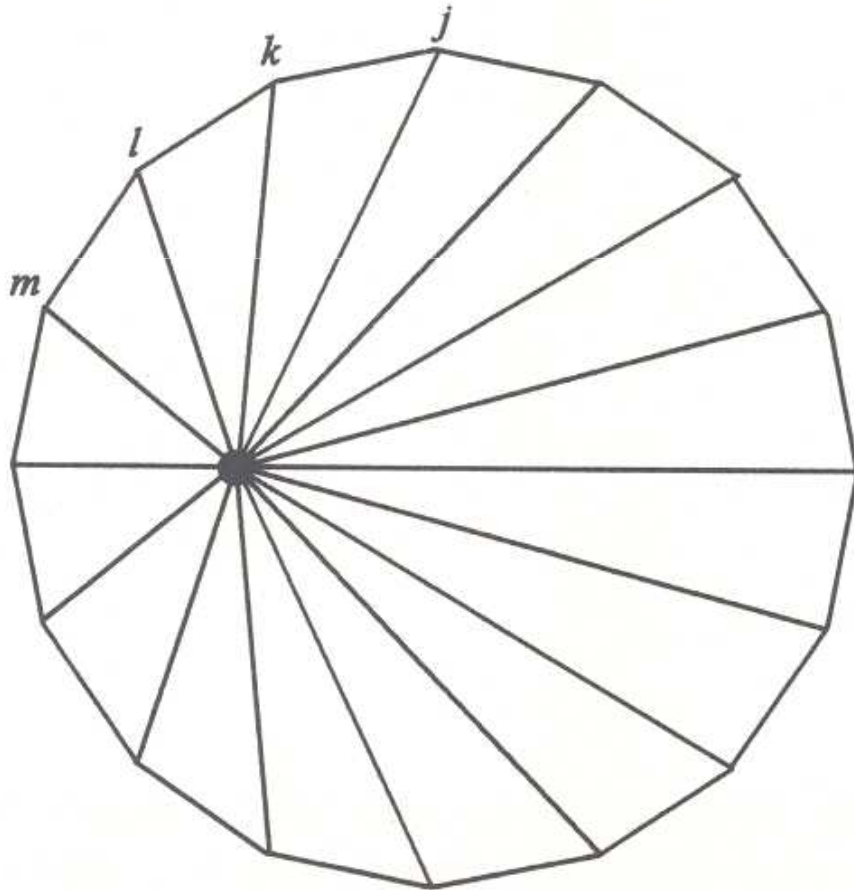


Poiché le linee KS, LS, MS , ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare.



La legge delle ellissi

Poiché le linee KS , LS , MS , ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare, anche se l'origine delle velocità non si trova al centro.



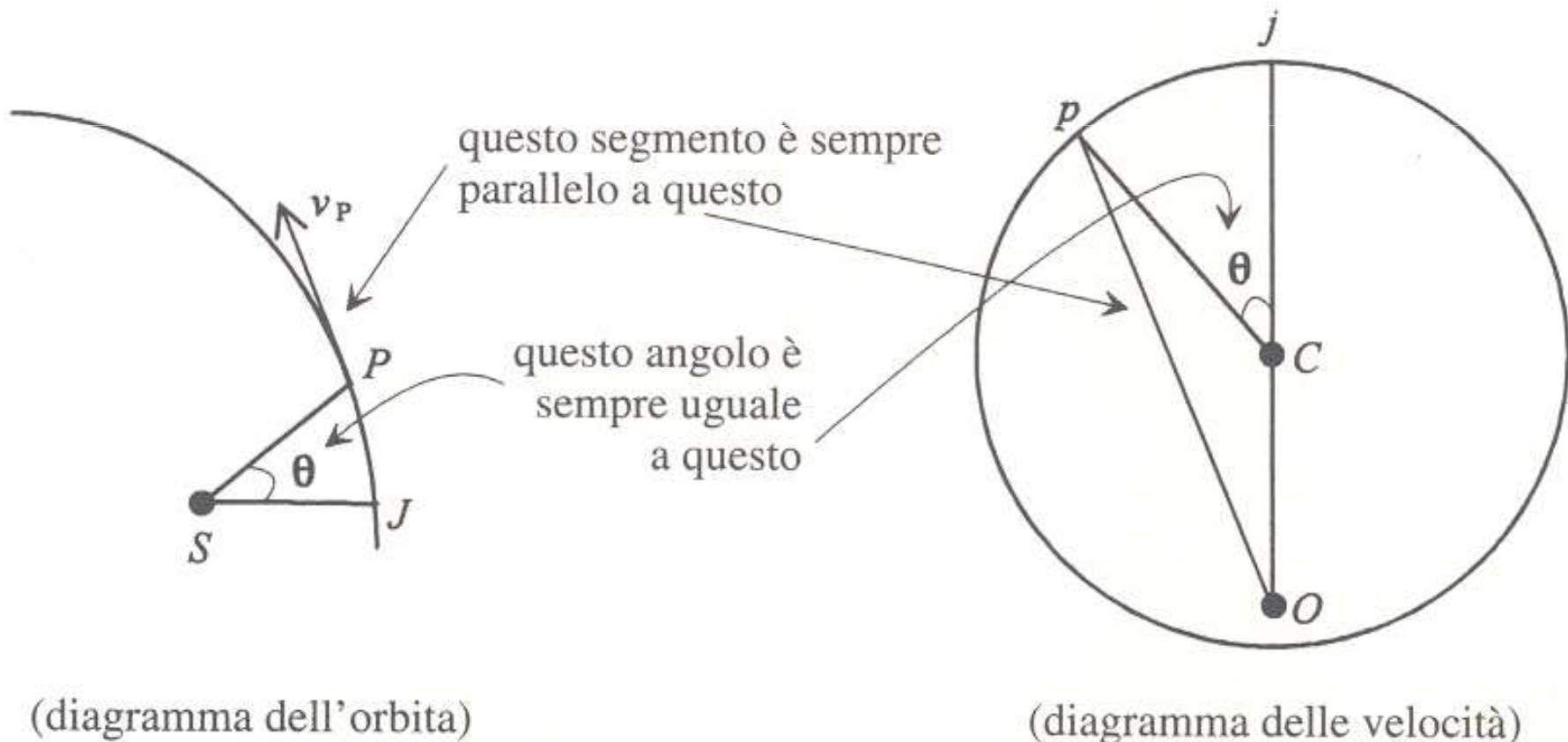
Se procediamo ora dividendo il diagramma dell'orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, che formino angoli fra loro uguali, ma sempre più piccoli, l'orbita viene a corrispondere sempre meglio a una curva liscia, e il diagramma delle velocità è un poligono regolare che si avvicina sempre più ad una circonferenza.

L'origine non è necessariamente al centro.

La legge delle ellissi

A questo punto Feynman costruisce un diagramma dell'orbita con la prima posizione (J) che forma una linea orizzontale con il sole (S) e quindi nel corrispondente diagramma delle velocità il segmento Oj rappresenta la velocità in J , mentre Op quella in P .

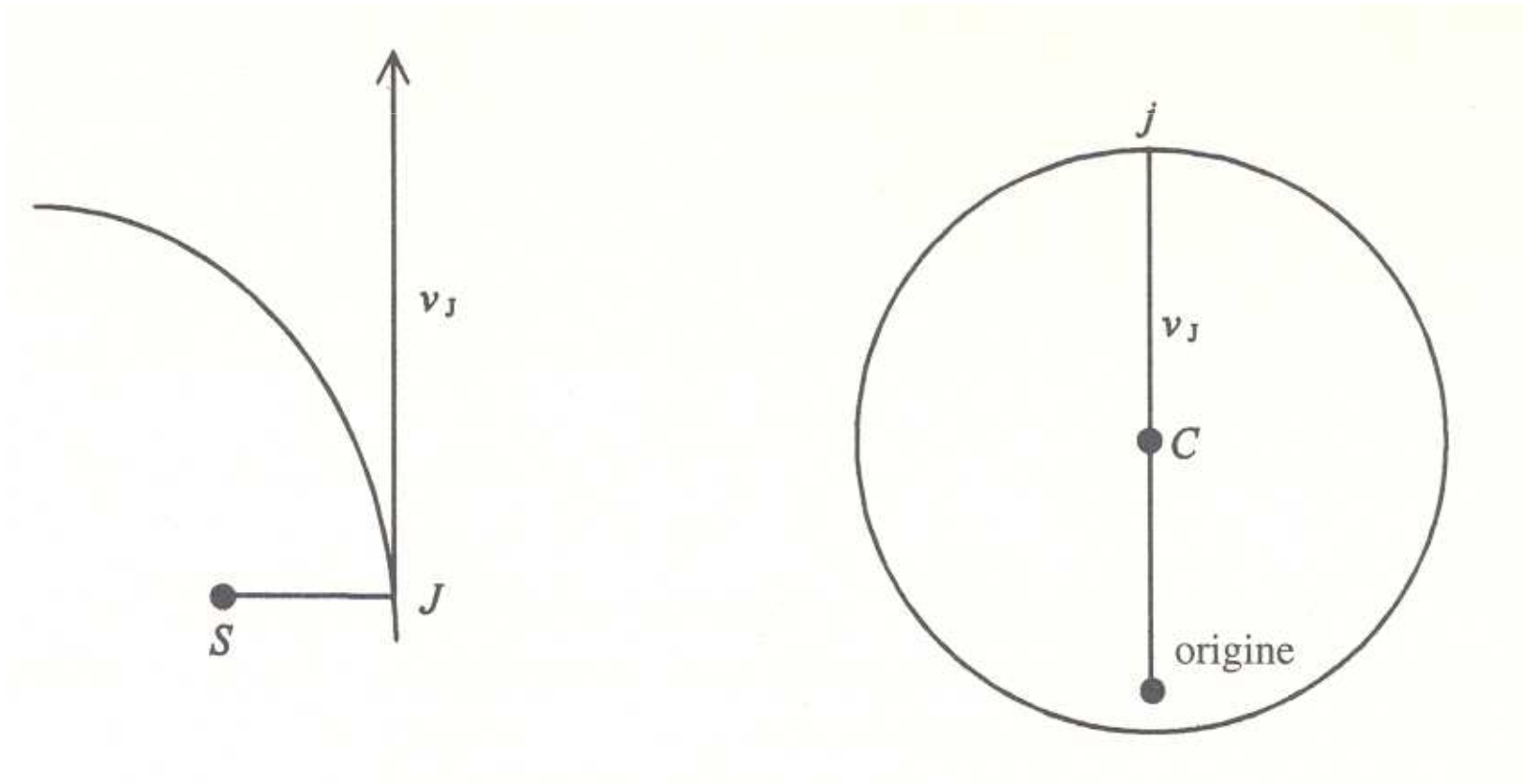
Egli fa notare che l'angolo jCp del diagramma delle velocità è uguale all'angolo JSP del diagramma delle orbite.



La legge delle ellissi

Possiamo ricostruire la forma dell'orbita sapendo che ogni orbita permessa dalle leggi di Newton e dalla forza di gravità deve avere per diagramma delle velocità una circonferenza.

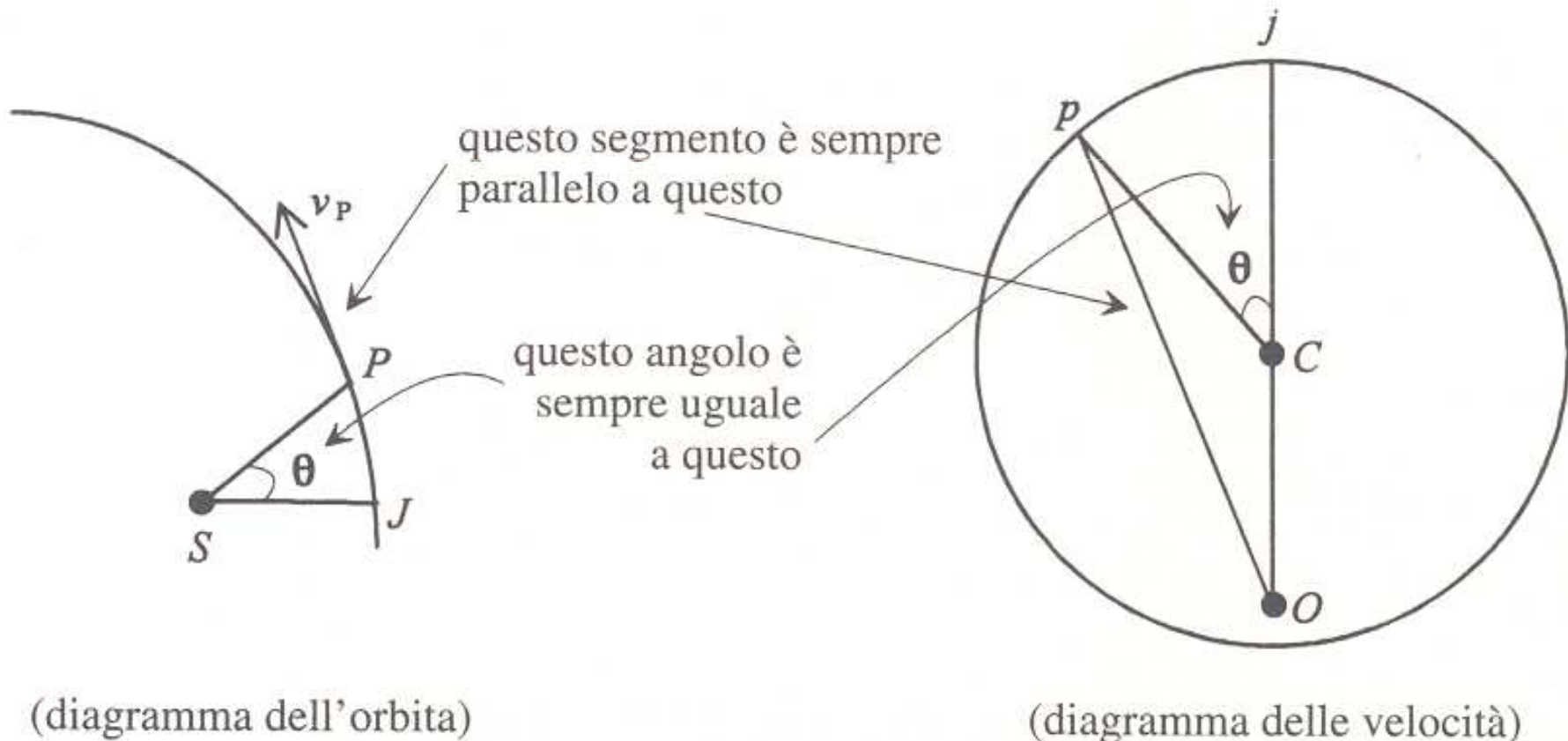
Scegliamo quindi un punto qualsiasi all'interno della circonferenza diverso dal centro C . Questo punto sarà l'origine delle velocità. Il segmento Oj è proporzionale e parallelo alla velocità v_J nel punto J del diagramma dell'orbita.



La legge delle ellissi

Tracciamo un segmento dall'origine ad un punto p qualsiasi della circonferenza, ad esso corrisponde un punto P sull'orbita, per il quale si ha:

- la linea dall'origine al punto p del diagramma delle velocità è parallela alla tangente al diagramma dell'orbita nel punto P ;
- l'angolo jCp è uguale all'angolo JSP .

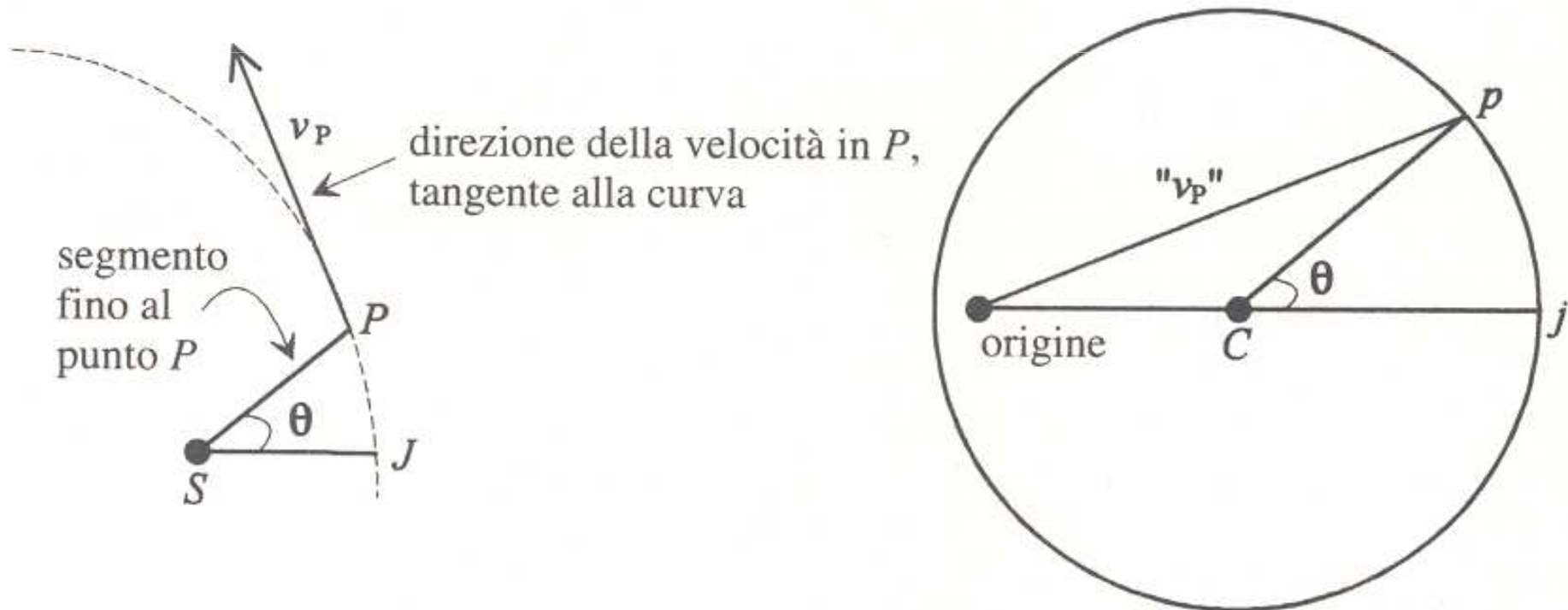


La legge delle ellissi

Feynman fa ruotare il diagramma delle velocità di 90° in senso orario in modo che il lati dell'angolo θ risultino paralleli tra un diagramma e l'altro.

La linea indicata con « v_P », che era parallela alla velocità, ora è perpendicolare.

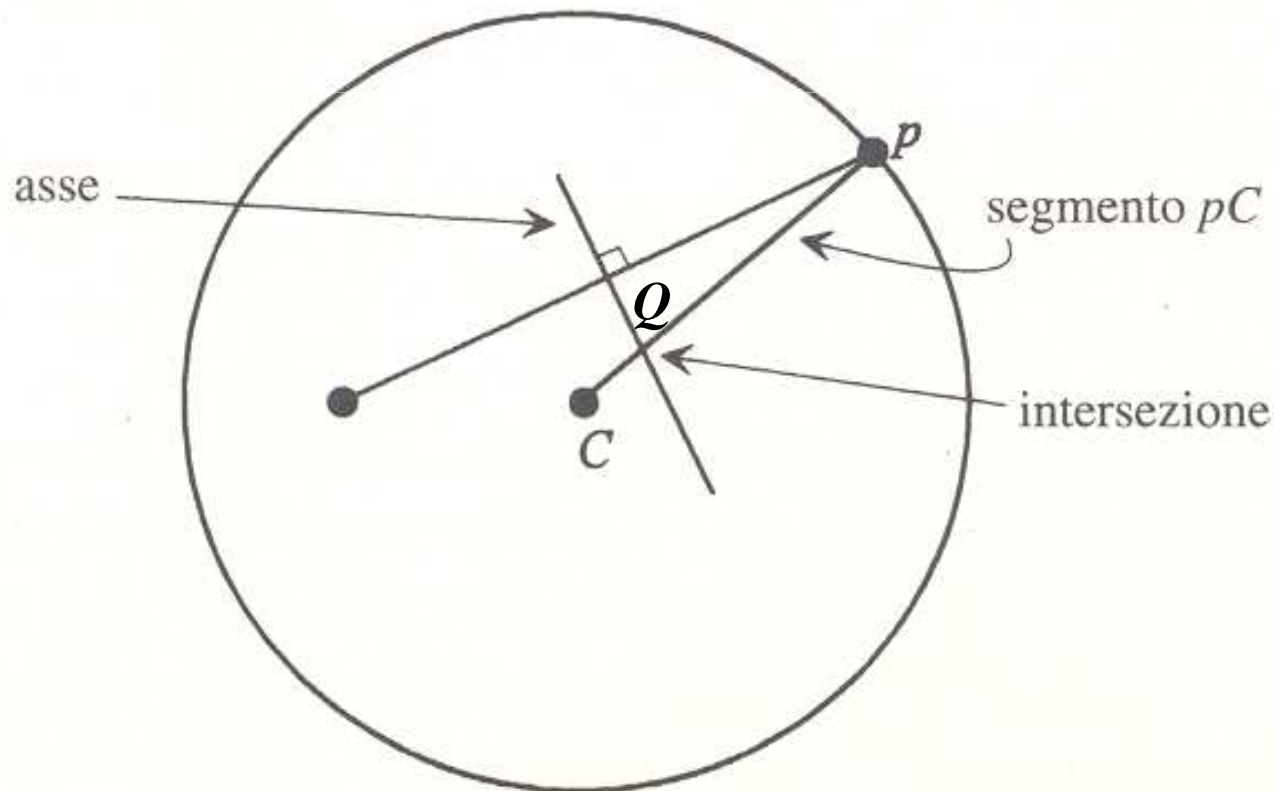
Dal diagramma delle velocità sappiamo la direzione del segmento che congiunge il sole al punto P e la direzione della tangente (la perpendicolare a v_P), ma non possiamo sapere con esattezza la posizione del punto P .



La legge delle ellissi

Si troverà a curva che gode di queste proprietà sul diagramma delle velocità in modo tale che le dimensioni dell'orbita siano del tutto arbitrarie, ma tutte le direzioni, e di conseguenza la forma, saranno giuste.

Per ottenere l'orbita costruiamo l'asse del segmento dall'origine a p (che è parallelo alla velocità in P), quindi tracciamo il segmento congiungente il centro C con p e un punto dell'orbita.



Il punto Q di intersezione tra queste due linee appartiene all'orbita.

Quando il punto p si muove sulla circonferenza, Q descrive l'orbita del pianeta.

La legge delle ellissi

La forma dell'orbita dipende dalla posizione del punto O origine delle velocità.

Se O coincide con C , il centro del diagramma, i due fuochi dell'ellisse coincidono e il pianeta ha la stessa velocità in ogni punto dell'orbita che risulta essere una **circonferenza**.

Più O e C sono vicini, più l'ellisse è vicina ad una circonferenza.

Più O e C sono lontani, più l'ellisse è allungata.

Se O è esterno alla circonferenza, l'orbita è un **iperbole**.

Se O è sulla circonferenza l'orbita è una **parabola**.