



Laurea triennale in Fisica  
a.a. 2012 - 2013

# CORSO DI ASTRONOMIA

Determinazione  
di un'orbita ellittica  
da tre osservazioni

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Vedremo come determinare i parametri orbitali di un corpo celeste, e quindi una effemeride, da tre osservazioni.

Ci riferiremo ad un pianeta in orbita intorno al sole.

Il problema è complicato per due ragioni:

- 1) le osservazioni sono fatte dalla Terra (geocentriche)
- 2) può essere determinata facilmente solo la posizione del corpo sulla sfera celeste (due angoli), mentre la sua distanza è sconosciuta.

Poiché gli elementi orbitali sono 6, sono necessarie 6 equazioni indipendenti e quindi tre osservazioni effettuate in tre tempi diversi  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , che daranno, in genere, ascensione retta  $\alpha$  e declinazione  $\delta$  del corpo.

Si è vista qual è la forma delle orbite nel problema dei due corpi, ora vedremo come collegare l'orbita alle osservazioni.

Dapprima dalla conoscenza degli elementi orbitali determineremo la posizione del corpo celeste (effemeridi) e determineremo gli elementi orbitali dalle osservazioni.

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Supponiamo di conoscere:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 = \alpha(t_1) & \delta_1 = \delta(t_1) \\ [1] \quad & \alpha_2 = \alpha(t_2) & \delta_2 = \delta(t_2) \\ & \alpha_3 = \alpha(t_3) & \delta_3 = \delta(t_3) \end{aligned}$$

Esse definiranno un sistema di 6 equazioni difficile da risolvere anche per la presenza dell'equazione di Keplero.

Si ricorre a un procedimento numerico.

Questo problema ebbe grande importanza tra la fine del XVIII secolo e gli inizi del XIX: anni in cui si passò dalla scoperta di Urano (1781) a quella del primo asteroide (Cerere, 1801) poi via via a molti altri. Il problema occupò pertanto i maggiori astronomi e matematici del tempo, e la soluzione più completa e generale fu data da Gauss e pubblicata nel 1809 nel classico libro *Theoria motus corporum coelestium ...*

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Sebbene oggi la soluzione di questo problema è enormemente facilitata dall'uso del computer, i metodi sviluppati allora ne costituiscono la base, ed è perciò utile conoscerne almeno le linee generali.

Un metodo frequentemente usato in questi casi è quello per approssimazioni successive, in cui la conoscenza di una soluzione approssimata consente di ottenerne una più corretta.

Presentiamo il procedimento di Laplace, che è più semplice, ma è applicabile solo nei casi in cui i tre istanti  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  siano vicini ed equidistanti.

Il metodo di Gauss è decisamente più complesso, ma di applicazione generale e convergenza assai rapida ed è quello più utilizzato.

Illustreremo solo il caso di orbite ellittiche.

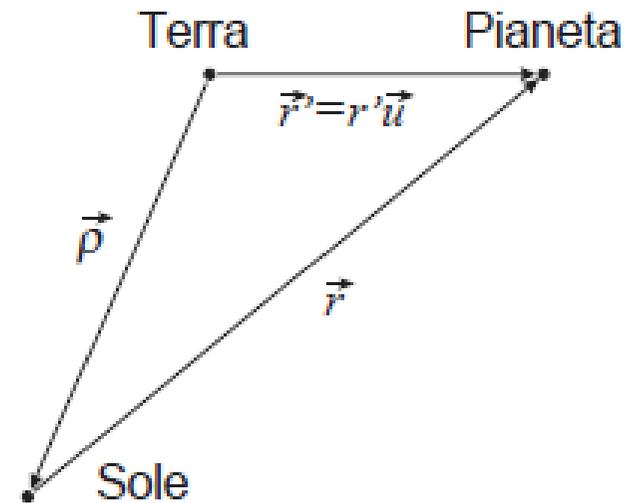
# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

$\rho_i$  indicano le posizioni geocentriche del Sole nei tre istanti di osservazione ( $i = 1, 2, 3$ ); questi vettori si suppongono noti in quanto ricavabili dalle effemeridi del Sole (che danno anche le coordinate cartesiane);

$u_i$  indicano le direzioni geocentriche dell'oggetto in esame, ricavabili immediatamente dalle coordinate (angolari) osservate;

$r'_i = |\mathbf{r}'_i|$  sono le distanze geocentriche, che non si ottengono direttamente dalle osservazioni, ma si troveranno come risultato secondario del calcolo;

$\mathbf{r}_i$  (posizioni eliocentriche) sono le incognite principali del problema.



# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Supponiamo che le tre osservazioni siano state fatte in tempi abbastanza vicini: ciò permetterà di ottenere senza troppo errore i valori della velocità e dell'accelerazione, trascurando infinitesimi di ordine superiore al secondo nel tempo. Per la stessa ragione, invece di  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  consideriamo noti  $\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}$  (posizione, velocità e accelerazione, del Sole, e quindi della Terra, ad un istante  $t$ ), anch'essi ricavabili dalle effemeridi.

Poniamo  $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$ , essendo gli istanti vicini possiamo effettuare uno sviluppo in serie di Taylor di  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_3$  intorno a  $\mathbf{u}_2$  avremo:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \dot{\mathbf{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^3)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 + \dot{\mathbf{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^3)$$

dalle quali, sommando e sottraendo membro a membro si ricava

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1}{2\Delta t}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3}{\Delta t^2}$$

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Da ciò si ricava che possiamo supporre noti  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ . Il problema sarà risolto non appena avremo trovato  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$ .

In relazione alla figura procediamo come segue: derivando due volte rispetto al tempo la relazione

$$[2] \quad r' \mathbf{u} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}$$

dapprima otteniamo

$$\dot{r}' \mathbf{u} + r' \dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{r}}$$

e infine

$$\ddot{r}' \mathbf{u} + 2\dot{r}' \dot{\mathbf{u}} + r' \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\mathbf{r}}.$$

Da quest'ultima, utilizzando l'equazione del moto nella forma  $\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , dove  $k^2 = G(M+m)$  è la costante di Gauss, si ha:

$$[3] \quad \ddot{r}' \mathbf{u} + 2\dot{r}' \dot{\mathbf{u}} + r' \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} - k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

ponendo ancora  $\mathbf{r} = r' \mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}$  nella [3] rimangono come incognite  $r'$ ,  $\dot{r}'$  e  $\ddot{r}'$ .

# La costante di Gauss

La costante di Gauss è il valore assunto dalla costante di gravitazione universale in unità riferite al sistema solare piuttosto che in unità del sistema internazionale.

Tale costante consente il calcolo del moto planetario pur essendo ignote le dimensioni del sistema solare o la massa dei pianeti in unità del Sistema Internazionale.

Gauss utilizzò le seguenti unità:  
lunghezza  $A$ : unità astronomica,  
tempo  $D$ : giorno solare medio,  
massa  $S$ : massa solare.

Dalla terza legge di Keplero applicata al moto della terra, Gauss determinò per la costante il valore

$$k = 0,01720209895 A^{3/2} S^{-1/2} D^{-1}.$$

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Per eliminare due di queste si moltiplica scalarmente la [3] per il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}$  che, essendo perpendicolare sia a  $\mathbf{u}$  che a  $\dot{\mathbf{u}}$  riduce la [3] a

$$[4] \quad r'(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}) = \ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} - \frac{k^2}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$$

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{v}$  anche la [2], si ha:

$$r'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Sostituendo nella [4] si ricava ha

$$[5] \quad r' = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}}{\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}} - \frac{k^2}{(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v})r^3}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$$

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

A questo punto potremmo sostituire la [5] nella [2], ma l'equazione che si ottiene non si risolve con metodi elementari. Conviene allora procedere per iterazione. Se il pianeta è abbastanza lontano dal Sole,  $r$  è grande e nella [5] il termine proporzionale a  $\frac{1}{r^3}$  è trascurabile rispetto al resto. Si ricava così un valore  $r'_1$  di  $r'$  e anche  $\mathbf{r}'_1$ . Dalla [2] si troverà il corrispondente valore  $\mathbf{r}_1 = r'_1 \mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}$  che posto nella [5] al posto di  $r$ , ci dà una seconda approssimazione  $r'_2$  di  $r'$ . Iterando il procedimento questo converge (se  $r$  è grande) e fornisce  $\mathbf{r}$  (e anche  $\mathbf{r}'$ ) all'istante  $t_2$ .

Per trovare  $\dot{\mathbf{r}}$  partiamo dalla [3], moltiplicando scalarmente per  $\dot{\mathbf{u}}$  abbiamo

$$\ddot{r}'(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + 2\dot{r}'(\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + r'(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = (\ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - \frac{k^2}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{u}})$$

$$2\dot{r}'|\dot{\mathbf{u}}|^2 + r'(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = (\ddot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \frac{k^2}{r^3}(\boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\mathbf{u}})$$

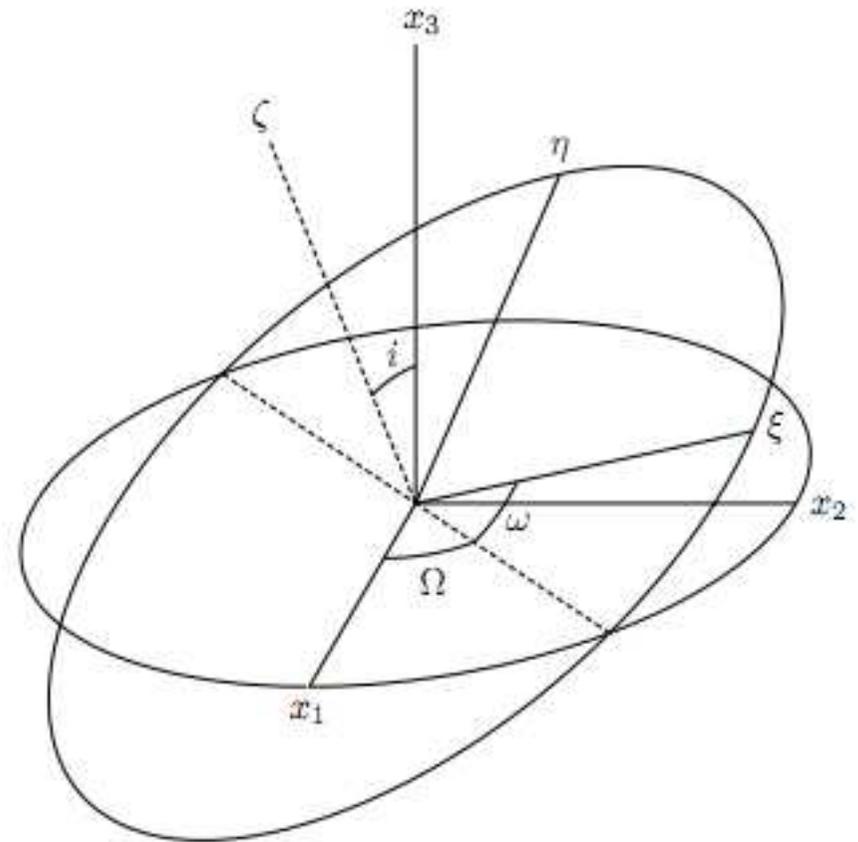
essendo  $(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = 0$  in quanto  $\mathbf{u}$  è un versore.

Da questa si ricava  $\dot{r}'$ . Infine, dalla derivata prima della [2], ricaviamo  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}'\mathbf{u} + r'\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}$  e quindi resta determinato  $\dot{\mathbf{r}}$ .

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Come abbiamo detto i vettori  $r$  e  $\dot{r}$  sono equivalenti ai sei parametri kepleriani.

Vediamo come passare dalle coordinate cartesiane ora ottenute agli elementi kepleriani  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ , e  $M$ .



# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Calcoliamo il vettore  $\mathbf{h} = \mathbf{L}/\mu$  (proporzionale al momento angolare  $\mathbf{L}$ )

$$[6] \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{L}}{\mu} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

le cui componenti nel sistema di riferimento inerziale sono:

$$\begin{cases} h_1 = h \sin \Omega \sin i \\ h_2 = -h \cos \Omega \sin i \\ h_3 = h \cos i \end{cases}$$

l'inclinazione orbitale  $i$  e la longitudine del nodo  $\Omega$  possono essere calcolate da:

$$[7] \quad \begin{cases} \cos i = \frac{h_3}{h} \\ \sin i = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h} \end{cases}$$

e|

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

$$[8] \quad \begin{cases} \cos \Omega = -\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ \sin i = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{cases}$$

Il semiasse maggiore  $a$  si ricava da:

$$[9] \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{\mu}$$

Si può dimostrare che il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz, definito da

$$[10] \quad \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

altro non è che l'eccentricità  $e$  dell'orbita.

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

In meccanica classica, il vettore di Laplace-Runge-Lenz è un vettore utilizzato per descrivere la forma e l'orientazione dell'orbita di un corpo celeste attorno ad un altro, come nel caso della rivoluzione di un pianeta attorno al sole.

Per due corpi interagenti secondo la gravità Newtoniana, il vettore di Lenz è una costante del moto, nel senso che esso, per una data orbita, conserva il suo aspetto indipendentemente dal punto o dal momento in cui esso venga calcolato; si può anche dire che il vettore si conserva durante il moto.

Più in generale, il vettore risulta conservato in tutti i problemi in cui due corpi interagiscono mediante una forza centrale che varia secondo la legge dell'inverso del quadrato delle distanze.

Il vettore di Lenz, giace sul piano dell'orbita ed è diretto parallelamente alla linea degli apsi dall'afelio verso il perielio.

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Moltiplicando scalarmente la [10] per  $\mathbf{r}$  si ha:  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = er \cos \theta = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{h}}{\mu} \cdot \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}$ , ma

$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$  e  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ , per cui:  $er \cos \theta = \frac{h^2}{\mu} - r$ ; da ciò segue

$r(1 + e \cos \theta) = \frac{h^2}{\mu}$  e quindi l'equazione dell'orbita  $r = \frac{h^2/\mu}{(1 + e \cos \theta)}$ .

Il semiasse maggiore è quindi dato da:

$$[11] \quad a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{h^2/\mu}{1 - e^2}.$$

Inoltre il versore della linea dei nodi

$$[12] \quad \mathbf{k} = \mathbf{x}_3 \times \frac{\mathbf{h}}{h} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

( $\mathbf{x}_3$  è il versore dell'asse  $x_3$ ); l'argomento del perielio  $\omega$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{e}$ , quindi il suo coseno è uguale al prodotto scalare dei due versori, mentre il suo seno è uguale alla proiezione del loro prodotto vettoriale lungo la direzione del momento angolare:

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

$$[12] \quad \cos \omega = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}}{e} \quad \text{sen} \omega = \left( \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{e} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{h}}{h} \right)$$

Per l'anomalia vera  $\nu$ , essendo l'angolo compreso tra la linea degli apsidi  $\mathbf{e}$  e il vettore posizione  $\mathbf{r}$ , quindi

$$[12] \quad \cos \nu = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \quad \text{sen} \nu = \left( \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{r}}{er} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{h}}{h} \right)$$

infine dall'anomalia vera si ricava l'anomalia eccentrica  $E$

$$[13] \quad \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}$$

e da questa l'anomalia media  $M$  utilizzando l'equazione di Keplero:

$$[14] \quad M = E - e \text{sen} E.$$

# Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

Per applicare questo metodo occorrerà sempre controllare a posteriori la validità delle ipotesi semplificative che si sono fatte.

Questo procedimento o altri simili sono utili quando avviene la scoperta di un oggetto celeste (generalmente un nuovo asteroide o cometa) e, non avendo altre informazioni, con tre misure di posizione si riesce a stimare i parametri orbitali.

Quando l'oggetto continua ad essere osservato e si accumulano un gran numero di osservazioni, un modo molto comune di affrontare il problema è quello dei minimi quadrati.

# Il problema dei tre corpi

# Il problema dei tre corpi

## *DEFINIZIONE DEL PROBLEMA:*

*Tre masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la legge newtoniana di gravitazione. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale.*

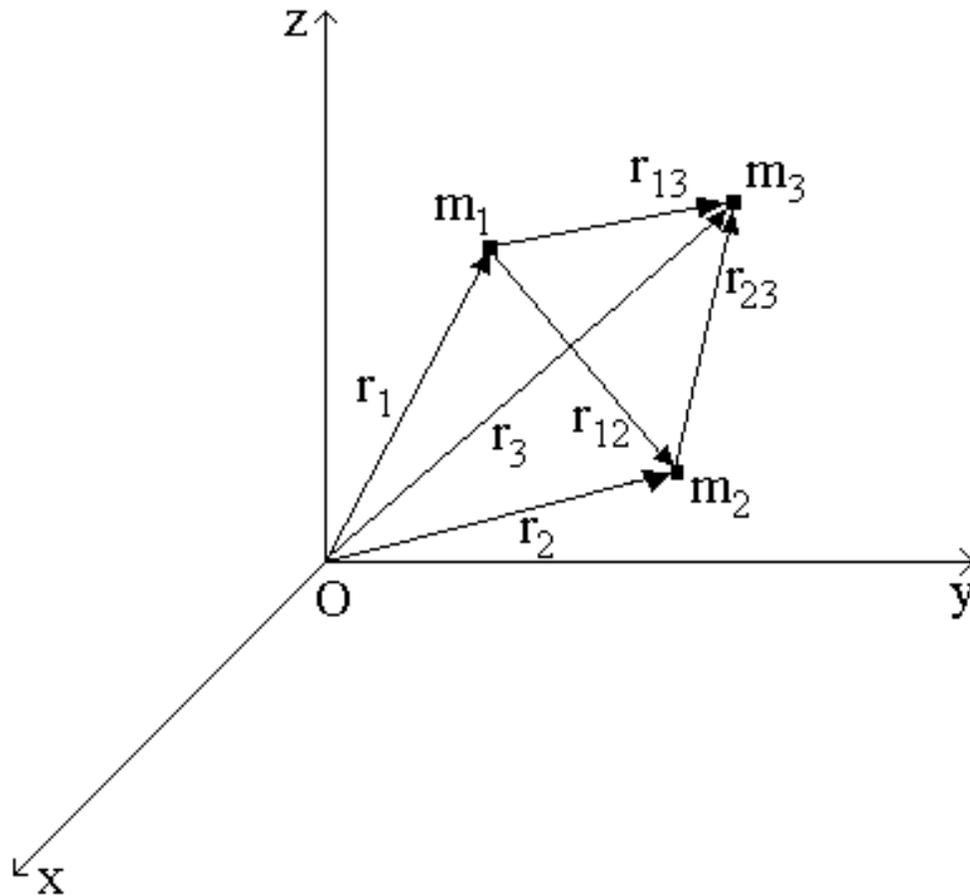
In Meccanica Celeste il problema dei tre corpi si presenta come lo schema più naturale in cui inquadrare, almeno in prima approssimazione, problemi quali:

- il moto dei pianeti interni all'orbita di Giove (Mercurio, Venere, Terra, Marte)
- il moto degli asteroidi quando si tenga conto dell'azione di Giove e del Sole,
- il moto degli oggetti transnettuniani,
- il moto della Luna,
- la dinamica della navicelle spaziali.

# Il problema dei tre corpi

Consideriamo tre corpi di masse rispettivamente  $m_1, m_2, m_3$  posti in un sistema di riferimento inerziale e sottoposti alla mutua attrazione gravitazionale.

Le equazioni di moto sono:



$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \right) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = G \left( \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \right) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -G \left( \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \right) \end{array} \right.$$

# Il problema dei tre corpi

La somma delle tre equazioni fornisce informazioni sul centro di massa del sistema.

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = 0$$

Integrando due volte si ottiene:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}' t + \mathbf{k}''$$

Dove  $\mathbf{k}'$  e  $\mathbf{k}''$  sono due vettori costanti. Indicando con  $\mathbf{R}$  il vettore rappresentativo della posizione del centro di massa e con  $M$  la massa totale del sistema si ha:

$$M\mathbf{R} = \mathbf{k}' t + \mathbf{k}''$$

Che definisce il primo integrale dell'equazione di moto.

# Il problema dei tre corpi

Consideriamo ora il momento angolare totale del sistema:

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

La derivata prima rispetto al tempo dà:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) &= G \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) = \\ &= G \left[ \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_{12} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_{23} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{r}_{13} \right] = 0 \end{aligned}$$

in quanto tutti i prodotti vettoriali sono tra vettori paralleli.

Questa fornisce il secondo integrale del moto e può essere vista come caso specifico della conservazione del momento angolare per sistemi isolati in campi centrali.

# Il problema dei tre corpi

C'è infine la conservazione dell'energia

$$E = G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right) + \frac{1}{2} (m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 + m_3 \dot{r}_3^2)$$

che costituisce un terzo integrale dell'equazione di moto.

# Il problema dei tre corpi

Le equazioni di moto sono quindi tre equazioni differenziali del secondo ordine:

due vettoriali e una scalare.

Per la loro soluzione sono quindi necessari 14 parametri.

Dalla conoscenza di  $\mathbf{k}'$  e  $\mathbf{k}''$  si ottengono sei parametri, altri tre si ottengono dalla conoscenza del momento angolare e solo uno dall'energia, per un totale di 10 parametri.

Da ciò si ricava che il sistema non è risolubile in modo analitico.

Il problema si risolve o con integrazioni numeriche o sotto opportune restrizioni.

# Problema dei tre corpi ristretto

Il **problema ristretto dei tre corpi** è quello in cui un corpo ha massa trascurabile rispetto agli altri due (ad esempio Sole-Giove-Asterioide, Terra-Luna-Satellite artificiale)

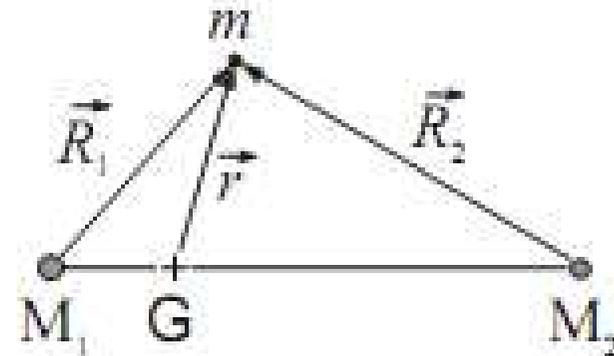
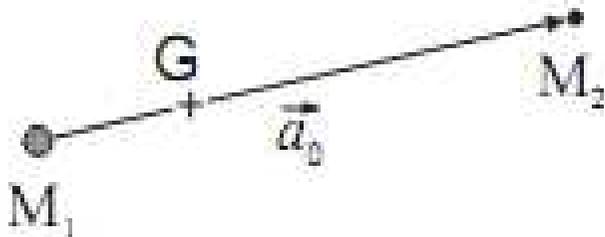
Siano  $M_1$  e  $M_2$  le masse dei primari e  $m$  la massa del terzo corpo; si ha:  $m \ll M_1$  e  $m \ll M_2$ .

Sia inoltre  $\mathbf{a}_0$  il vettore da  $M_1$  a  $M_2$  che consideriamo costante (moto circolare uniforme)

Se ci poniamo in un riferimento inerziale di origine nel centro di massa  $G$ , i corpi maggiori ruotano con velocità angolare  $n_0$  data da

$$n_0^2 a_0^3 = G(M_1 + M_2)$$

$\mathbf{n}_0$  è il vettore di modulo  $n_0$  perpendicolare al piano orbitale di  $M_1$  e  $M_2$ .



# Problema dei tre corpi ristretto

Se invece ci mettiamo in un riferimento rotante con velocità  $n_0$ , ma sempre con origine nel centro di massa, i corpi principali sono fissi.

Ci limiteremo a fare alcune considerazioni sul moto del corpo di massa  $m$  a partire dall'integrale dell'energia.

In un riferimento inerziale si conserverebbe la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale  $K + U$  data da

$$E = K + U = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 - Gm \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right)$$

# Problema dei tre corpi ristretto

Poiché il nostro riferimento non è inerziale occorre introdurre le forze apparenti, ma solo se queste sono conservative vale ancora l'integrale dell'energia.

La forza di Coriolis chiaramente non influisce essendo

$$\mathbf{f}_{Cor} = -2m\mathbf{n}_0 \times \dot{\mathbf{r}}$$

è perpendicolare a  $\dot{\mathbf{r}}$  e quindi a lavoro nullo e non altera il bilancio energetico. La forza centrifuga  $\mathbf{f}_c$  dipende invece solo da  $\mathbf{r}$ , quindi è conservativa e il suo potenziale è

$$U_c = -\frac{1}{2}m|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2$$

L'integrale dell'energia è quindi

$$\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - Gm\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) - \frac{1}{2}m|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = E$$

Detto *Integrale di Jacobi*

# Superfici di Hill

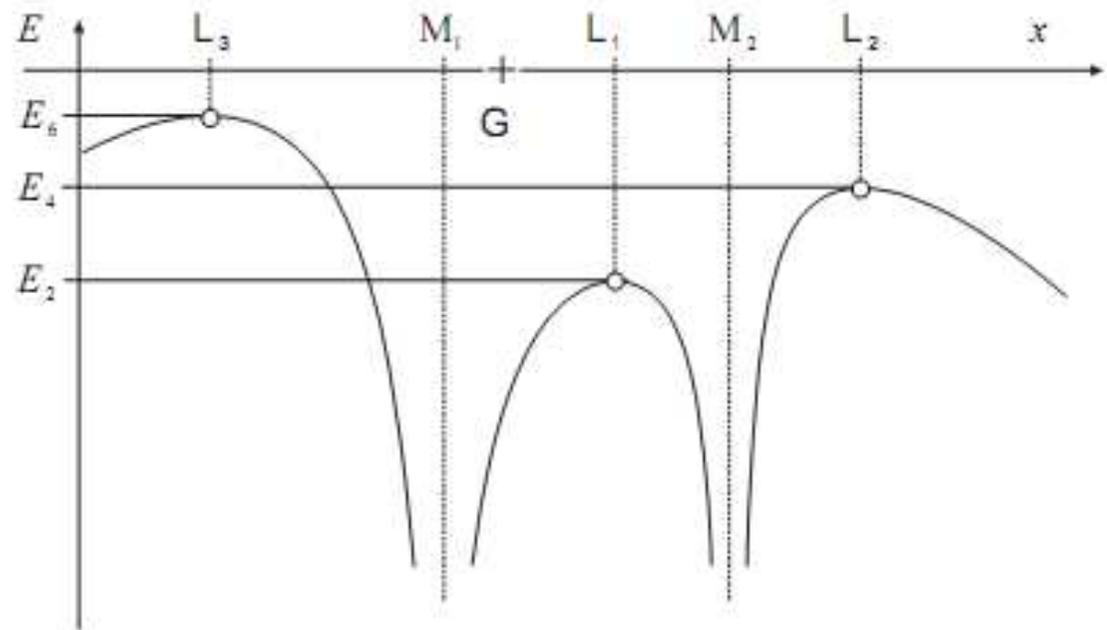
$$-Gm\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) - \frac{1}{2}m|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = E - \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 \leq E$$

$$-G\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) - \frac{1}{2}|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}|^2 = \frac{E}{m}$$

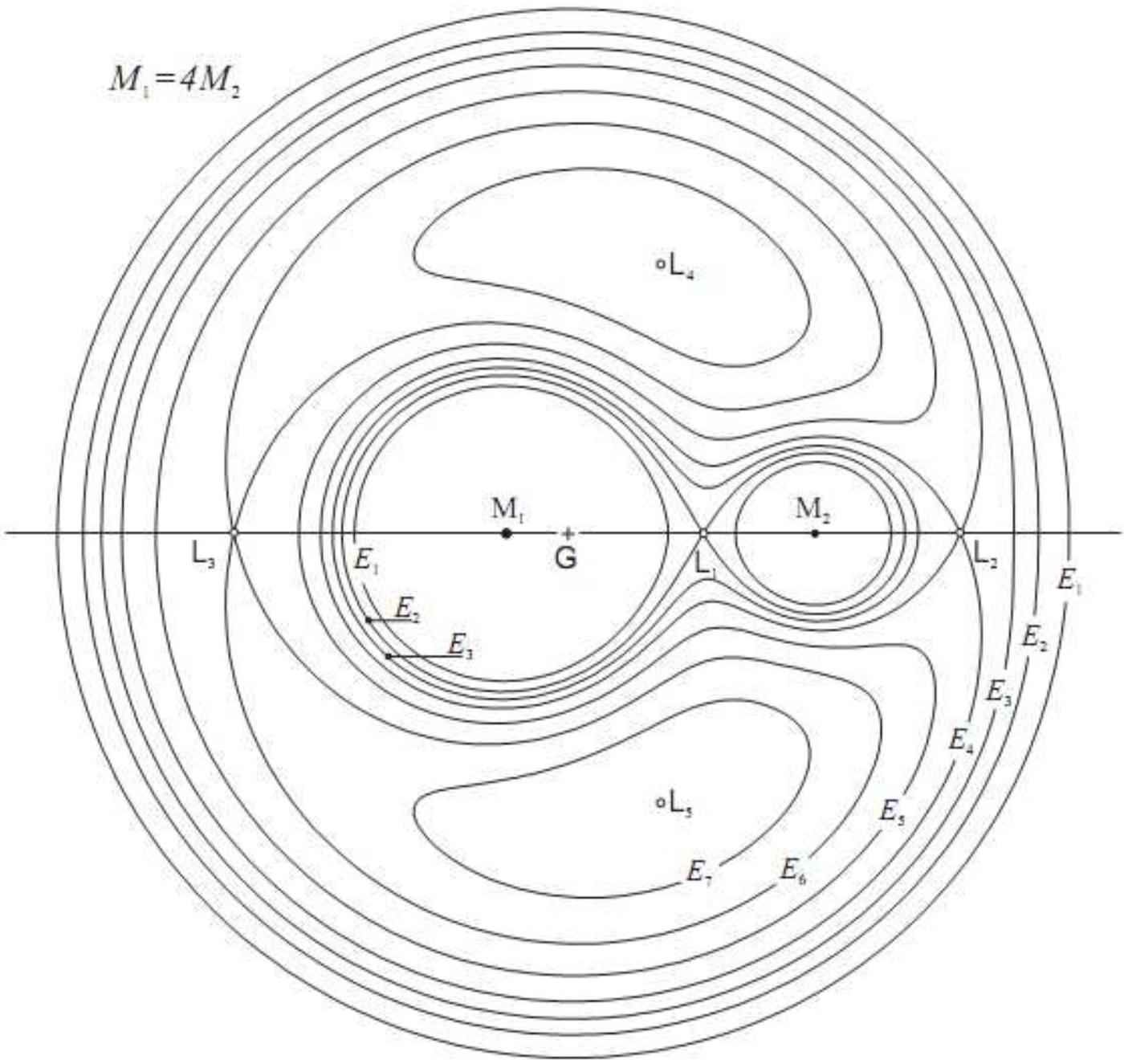
La soluzione dell'equazione permette di individuare le superfici che separano le zone permesse dalla zone precluse al moto della massa  $m$ .

Tali superfici si chiamano **superfici di Hill**.

Le superfici di Hill sono i punti dello spazio in cui la velocità di  $m$  è nulla



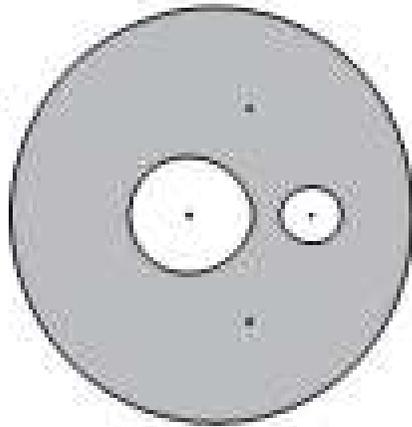
# Superfici di Hill



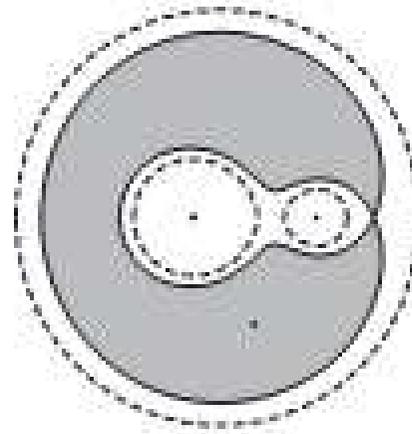
# Superfici di Hill

Regione proibita per

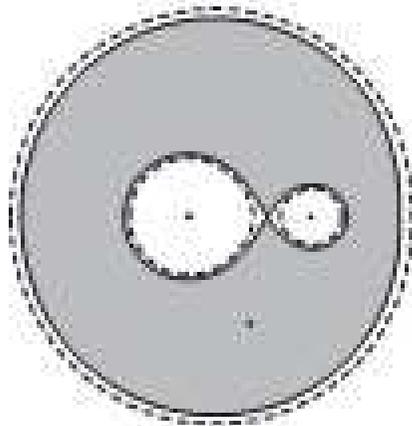
$$E < E_1$$



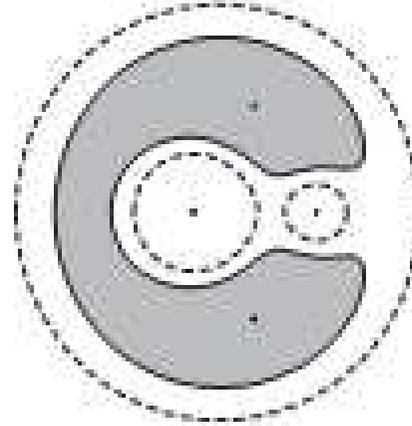
$$E < E_2$$



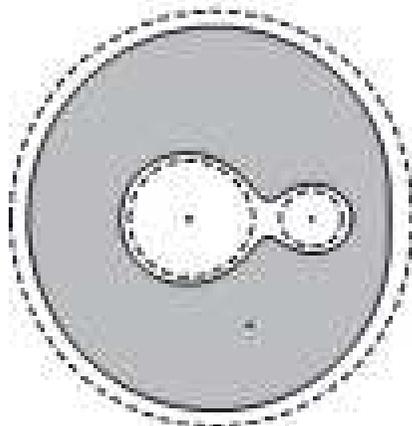
$$E < E_2$$



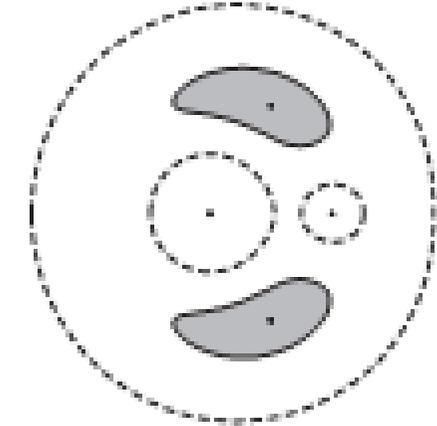
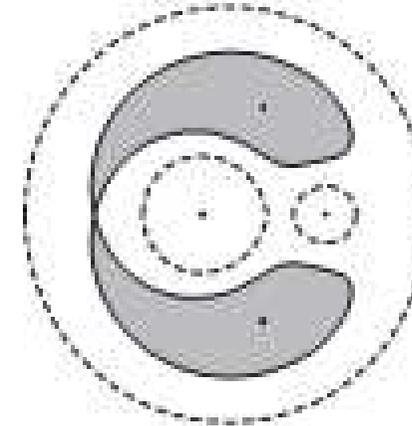
$$E < E_3$$



$$E < E_3$$



$$E < E_4$$



$$E < E_7$$



# Sfera di Hill

La sfera di Hill è la sfera di influenza gravitazionale di un corpo celeste rispetto alle perturbazioni di un altro corpo, di massa maggiore, attorno al quale esso orbita.

È la più grande sfera, centrata sul secondo corpo, all'interno della quale la somma delle forze gravitazionali è sempre orientata verso il secondo corpo.

Un terzo corpo più piccolo può orbitare intorno al secondo all'interno della sfera di Hill, con questa forza risultante come forza centripeta.

La sfera di Hill si estende fra i punti di Lagrange  $L_1$  e  $L_2$ .

Il raggio della sfera di Hill è approssimativamente:

$$r \simeq a_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$$

# Sfera di Hill

Per esempio, la Terra ( $M_2 = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg) orbita intorno al Sole ( $M_1 = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg) ad una distanza di circa  $1,4960 \cdot 10^{11}$  m.

La sfera di Hill per la Terra si estende a circa  $1,4966 \cdot 10^9$  m (0,01 UA).  
L'orbita della Luna, che si trova ad una distanza di circa  $3,844 \cdot 10^8$  m dalla Terra, è tranquillamente all'interno della sfera gravitazionale di influenza della Terra e non è quindi a rischio di essere attratta in un'orbita indipendente intorno al Sole.

Un astronauta non può orbitare attorno allo Space Shuttle se questo orbita ad un'altitudine di 300 km poiché la sfera di Hill dello Shuttle risulta avere soltanto circa 60 cm di raggio, molto più piccola dello Shuttle stesso.

In effetti per tutte le orbite terrestri basse (LEO) un corpo sferico dovrebbe essere 800 volte più denso del piombo per poter essere completamente contenuto entro la propria sfera di Hill (condizione necessaria per poter sostenere l'orbita di un proprio satellite).

# Sfera di Hill

Un satellite geostazionario sferico dovrebbe essere 5 volte più denso del piombo per avere a sua volta un satellite, il quale dovrebbe essere 2,5 volte più denso dell'Iridio che è, assieme all'Osmio, il materiale naturale più denso esistente sulla Terra.

Solamente ad una quota orbitale doppia rispetto a quella geostazionaria una sfera di piombo potrebbe avere un proprio satellite; la Luna dovrebbe trovarsi ad almeno 3 volte la quota geostazionaria (a  $2/7$  della sua distanza attuale) per poter supportare un oggetto orbitante intorno ad essa; dato che invece si trova a più di nove volte la distanza di un satellite geostazionario, le orbite lunari risultano possibili, come hanno dimostrato le missioni spaziali sul nostro satellite.

# Sfera di Hill

Nell'ambito del sistema solare, il pianeta con la più grande sfera di Hill è Nettuno con un raggio di  $1,16 \cdot 10^{11}$  m (0,775 UA); la sua distanza dal Sole compensa grandemente lo svantaggio di massa rispetto a Giove (la cui sfera di Hill misura invece  $5,3 \cdot 10^{10}$  m).

Gli asteroidi della fascia principale possono avere sfere di Hill fino a  $220 \cdot 10^6$  m di raggio (per Cerere), che diminuiscono rapidamente al diminuire della massa dell'asteroide. Nella fascia principale degli asteroidi non sono rari asteroidi con proprie lune.

Il primo individuato è Ida (scoperto nel 1884) con il suo satellite Dactyl (scoperto dalla sonda Galileo nel suo viaggio verso Giove nell'agosto del 1993). Ida non ha forma sferica, le sue dimensioni sono  $(53,6 \times 24,0 \times 15,2)$  km e Dactyl, con un diametro medio di 1,4 km (per la verità è un "uovo" di  $1,6 \times 1,4 \times 1,2$  km), orbita in circa 20 ore, ma i suoi parametri orbitali non sono noti con sufficiente precisione a causa delle poche misure fatte dalla sonda Galileo che tra l'altro si trovava sul piano orbitale del sistema.

# Ida e Dactyl



# Punti di Lagrange

I punti  $L_i$  ( $i=1 \dots 5$ ) sono i *punti di Lagrange*, punti di equilibrio; il gradiente del potenziale si annulla, e lo stesso accade per la forza risultante.

Questo però non ci dice nulla circa la stabilità, e non ci si può neppure basare sul consueto criterio del minimo, in quanto anche la forza di Coriolis – che non entra nel calcolo dell'energia – ha un ruolo importante nelle modalità del moto.

Si dimostra che si può avere stabilità addirittura dove l'energia potenziale ha un massimo.

La posizione dei punti  $L_1, L_2, L_3$  dipende dal rapporto delle masse; risulta inoltre che essi sono di equilibrio instabile.

$L_4$  e  $L_5$  hanno invece posizioni fisse, che formano due triangoli equilateri con  $M_1$  e  $M_2$ : la cosa notevole è che sebbene essi siano punti di massimo del potenziale, se un corpo si sposta da quella posizione la forza di Coriolis tende a riportarlo, per cui risultano di equilibrio stabile (almeno se il rapporto  $M_2/M_1$  è abbastanza piccolo).

# Punti di Lagrange

Per determinare la posizione dei punti di Lagrange studiamo il caso piano, in cui l'energia potenziale per unità di massa è data da

$$\frac{U}{m} = -\frac{1}{2}n_0^2 r^2 - \frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2}$$

Calcolando il gradiente e tenendo conto delle proprietà del centro di massa, si arriva alla relazione:

$$M_1 \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \mathbf{R}_1 + M_2 \left( \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \mathbf{R}_2 = 0$$

# Punti di Lagrange

Sono possibili due casi:

$\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  non sono paralleli

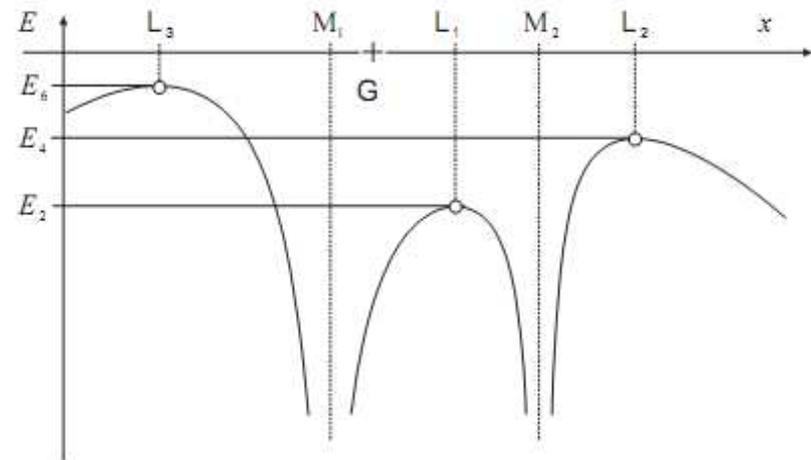
Allora deve essere:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{a_0^3} = 0 \\ \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{a_0^3} = 0 \end{cases} \quad \text{da cui segue } R_1 = R_2 = a_0$$

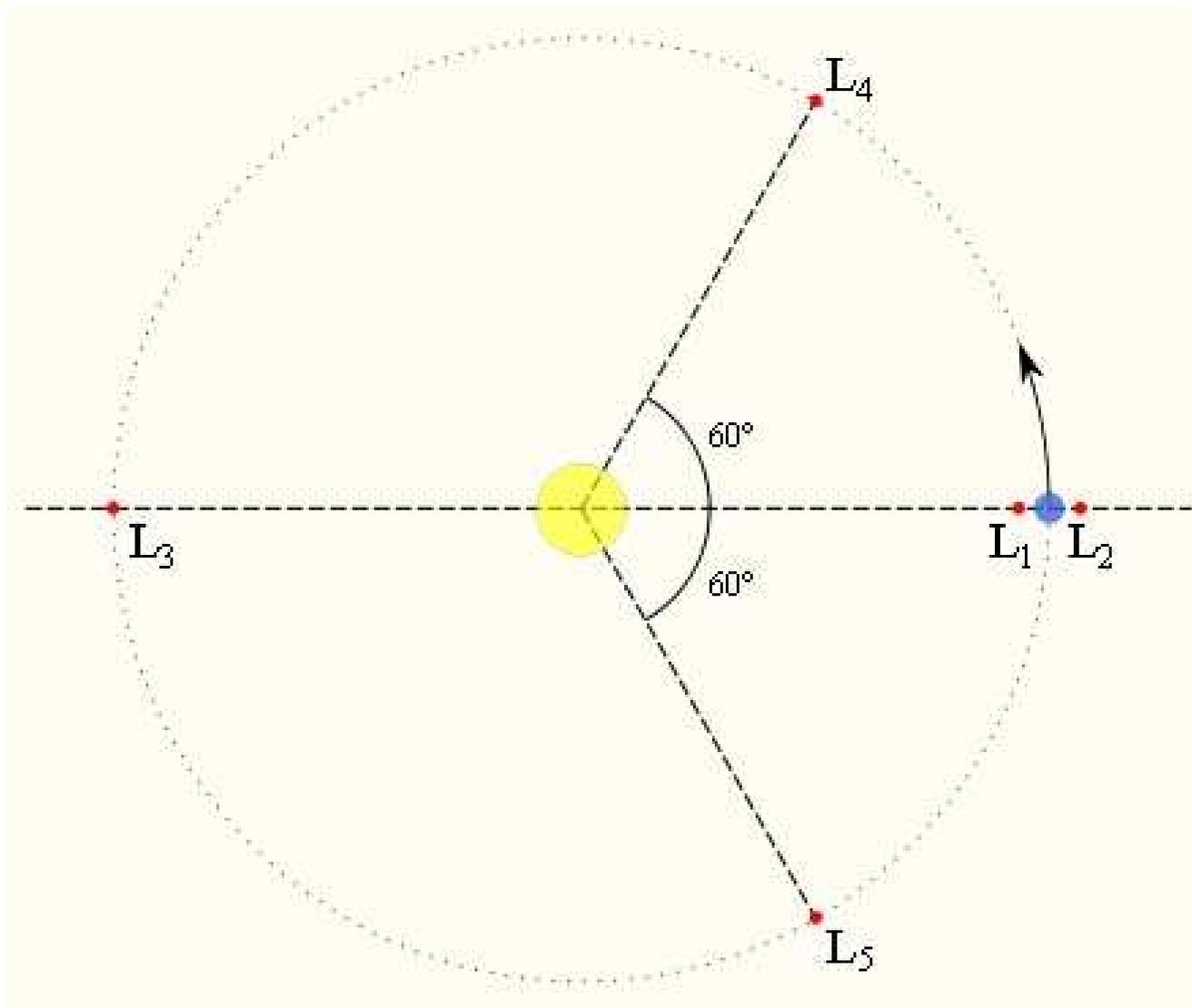
$\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  sono paralleli

Allora  $m$  sta sulla congiungente  $M_1$  e  $M_2$ .

L'equazione che si ottiene ha tre soluzioni reali che corrispondono ai punti  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ .



# Punti di Lagrange



# Punti di Lagrange

Si dimostra che i punti di Lagrange  $L_4$  e  $L_5$  sono stabili se

$$n_0^4 - \frac{27}{4} n_0^4 (1 - \alpha^2) \geq 0$$

$$\alpha = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$$

Da cui segue

$$\frac{M_2}{M_1} \leq \frac{2}{25 + \sqrt{621}} \approx \frac{1}{25}$$

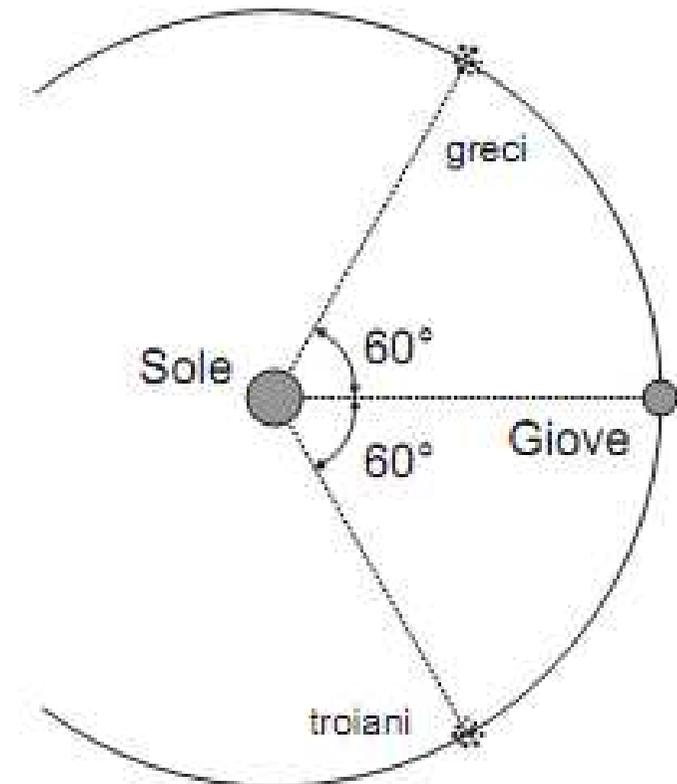
# Punti di Lagrange

L'esistenza dei punti di Lagrange stabili  $L_4$  e  $L_5$  ha un'interessante applicazione nel caso Sole-Giove.

Supponiamo per semplicità che l'orbita di Giove sia circolare (in realtà per Giove  $e = 0,05$ ).

Se poniamo un pianetino in uno dei punti e gli diamo una velocità in modulo pari a quella di Giove, il pianetino percorrerà esattamente l'orbita di Giove.

Il fatto che l'equilibrio è stabile vuol dire che se la velocità o la posizione non sono giuste il pianetino seguirà un moto più complicato, oscillando attorno al punto di equilibrio, ma seguendo sempre in media l'orbita di Giove.



Anche l'eccentricità di Giove causa oscillazioni, ma non tali da distruggere la stabilità.

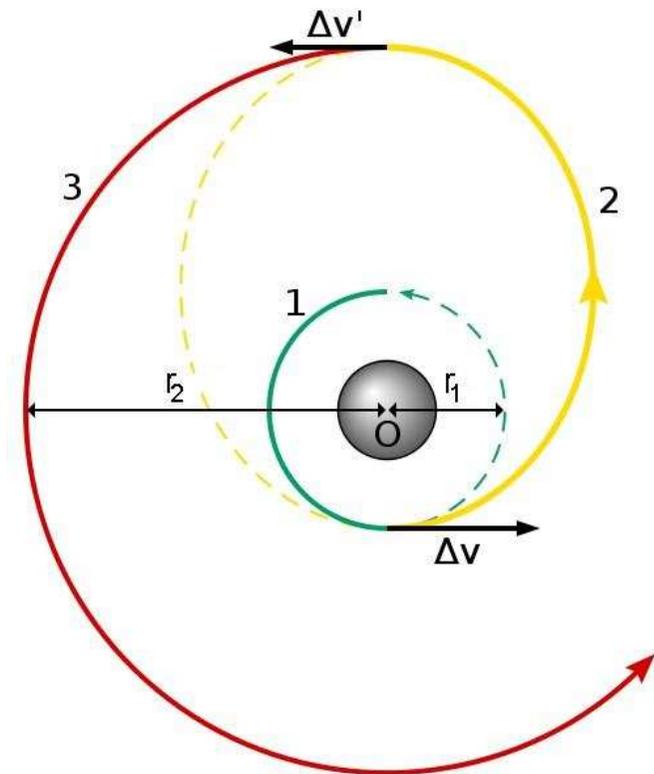
Nel passato alcuni pianetini sono stati catturati con le giuste condizioni iniziali e ora si trovano nei pressi di  $L_4$  e  $L_5$ ; sono le famiglie dei pianetini "Troiani" e "Greci" che seguono e precedono Giove.

Si pensa che anche per il sistema Terra-Luna possa avere un addensamento di materia in quei due punti (micrometeoriti, polvere cosmica) ma per ora non è stato trovato nulla.

# Orbite di Hohmann

Per collegare con voli interplanetari due diversi pianeti dello stesso sistema si fa uso solitamente di orbite di trasferimento che permettano il minor dispendio di energia. Delle molte orbite eseguibili quelle più economiche sono le cosiddette orbite di Hohmann, cioè ellissi tangenti all'orbita dei pianeti di partenza e di arrivo e in cui il Sole occupa uno dei fuochi.

Tracciando delle circonferenze tangenti all'orbita nei punti di partenza e di arrivo di raggio rispettivamente  $r_1$  e  $r_2$  e indicato con  $a$  il semiasse maggiore dell'orbita di Hohmann, si dimostra che per un'orbita circolare su si ha



$$v_{1c} = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \quad a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad v_e = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1} \frac{r_1}{r_1 + r_2}}$$

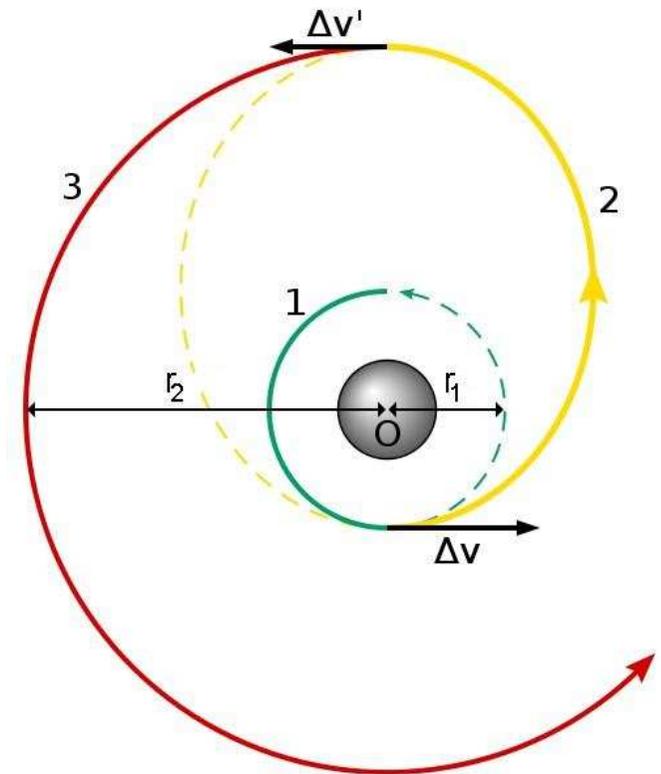
Mentre per un'orbita ellittica:

# Orbite di Hohmann

$$\left(\frac{v_{1c}}{v_e}\right)^2 = \frac{r_1 + r_2}{2r_2} \quad \left(\frac{v_{2c}}{v_e}\right)^2 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1}$$

Se la sonda parte da un'orbita interna verso una esterna prima va accelerata per portarla dall'orbita circolare interna all'orbita ellittica di Hohmann e poi nuovamente accelerata per portarla dall'orbita di trasferimento a quella circolare di arrivo.

La sonda andrà due volte decelerata per immetterla su di un'orbita interna.



# Orbite di Hohmann

Il tempo necessario per descrivere un'orbita di Hohmann, detto *tempo di trasferimento* è dato da

$$t = \frac{T}{2} = \frac{T_1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \right)^{\frac{3}{2}} = T_1 \left( \frac{r_1 + r_2}{2^{5/3} r_1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$T_1$  è il periodo di rivoluzione dell'orbita di partenza.

Se l'orbita di partenza è quella della Terra, tutte le volte che si fanno trasvolate interplanetarie servendosi delle orbite di Hohmann, i tempi sono superiori ad un anno se:

$$\frac{r_2}{r_1} \geq 2^{\frac{5}{3}} - 1 \approx 2,17$$

vale a dire se  $r_2 \gtrsim 2,17\text{UA}$  , cioè pressappoco dall'orbita di Marte in poi.

# Effetto fionda

Il passaggio ravvicinato di una sonda ad un pianeta modifica la velocità della sonda.



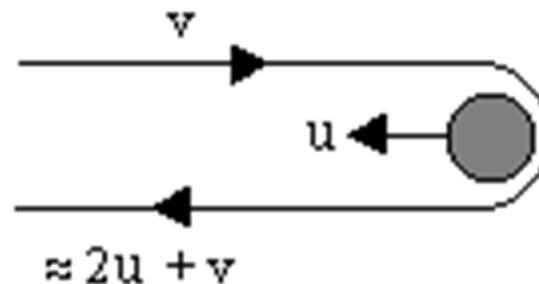
# Effetto fionda

Una forma estrema della manovra sarebbe quella di avvicinarsi al pianeta di fronte ad una velocità  $v$ , mentre il pianeta si muove direttamente verso di noi a una velocità  $u$  (entrambe le velocità misurate rispetto al Sole).

Se la traiettoria è quella giusta e passiamo dietro al pianeta in un'orbita molto eccentrica (iperbolica), facendo un giro a  $180^\circ$  l'effetto netto è quasi come se rimbalzassimo sulla parte anteriore del pianeta.

Rispetto al pianeta ci siamo avvicinati alla velocità  $u + v$ , e quindi ce ne dovremmo andare alla velocità  $u + v$ , ma rispetto al Sole il pianeta è ancora in movimento a (quasi) la velocità  $u$ , per cui, sempre rispetto al Sole ce ne andremo a  $2u + v$ .

Questo è esattamente come una palla da biliardo molto piccola che rimbalza su una molto grande.



# Effetto fionda

Per essere un po' più precisi, la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto prima e dopo l'interazione richiede che:

$$\begin{cases} Mu_1^2 + mv_1^2 = Mu_2^2 + mv_2^2 \\ Mu_1 - mv_1 = Mu_2 - mv_2 \end{cases}$$

Gli indici 1 e 2 denotano le quantità prima e dopo l'interazione con il pianeta.

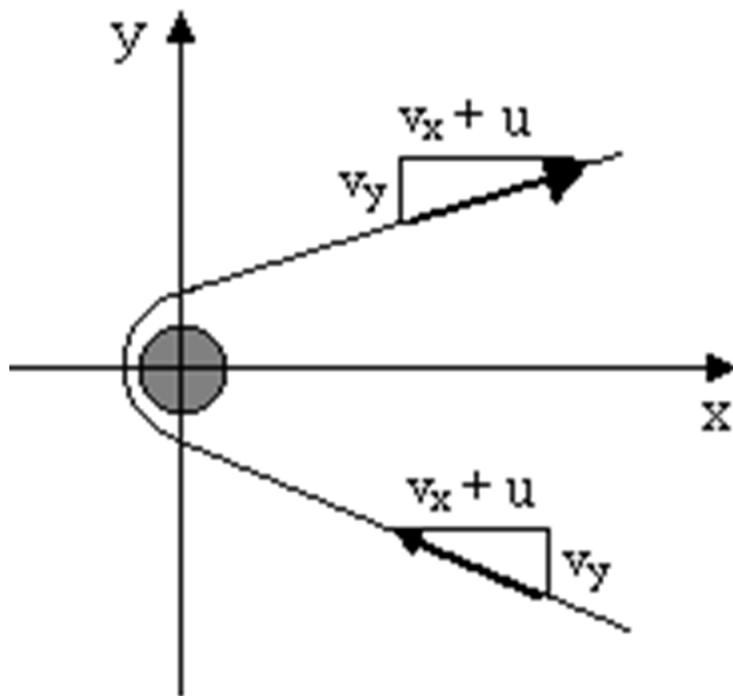
$$v_2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)v_1 + 2u_1}{1 + \frac{m}{M}}$$

Poiché il rapporto  $m/M$  è praticamente zero (la sonda ha una massa trascurabile in confronto a quella di un pianeta), questa si riduce

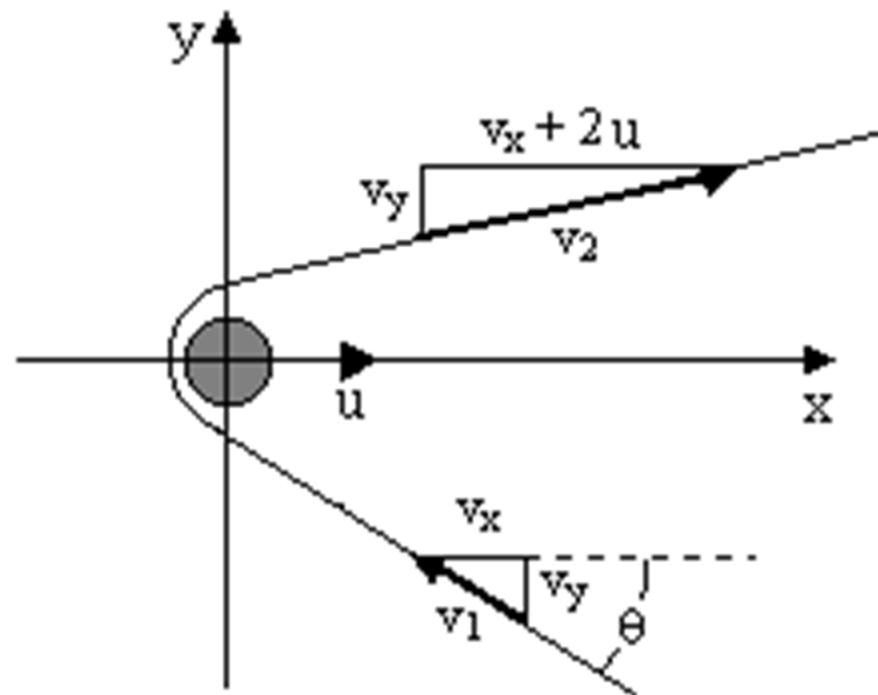
$$v_2 = v_1 + 2u_1$$

# Effetto fionda

La maggior parte dei *fly-bys* planetari non sono inversioni frontali, ma gli stessi principi si applicano per qualsiasi angolo di interazione. Poniamo la direzione del moto del pianeta come asse  $x$  e la direzione perpendicolare (in piano orbitale) come l'asse  $y$ ; la sonda è inizialmente in movimento con una velocità  $v$  rispetto al riferimento solidale con il Sole, in una direzione che si avvicina il pianeta in arrivo a un angolo  $\theta$ .



Moto rispetto al pianeta



Moto rispetto al sole

# Effetto fionda

Disegnando il parallelogramma delle velocità per la sonda e il pianeta e supponendo che l'orbita parabolica sia simmetrica rispetto all'asse  $x$  (nel sistema del pianeta), il vettore velocità iniziale della sonda rispetto Sole è:

$$\begin{cases} v_{1x} = -v_1 \cos \theta \\ v_{1y} = v_1 \sin \theta \end{cases}$$

ed il vettore velocità finale è:

$$\begin{cases} v_{2x} = v_1 \cos \theta + 2u \\ v_{2y} = v_1 \sin \theta \end{cases}$$

La velocità finale è:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{(v_1 \cos \theta + 2u)^2 + (v_1 \sin \theta)^2} = \sqrt{v_1^2 + 4u^2 + 4v_1 u \cos \theta} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + 4u^2 + 4v_1 u \cos \theta \pm 4v_1 u} = \sqrt{(v_1 + 2u)^2 - 4v_1 u (1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

Che possiamo scrivere nella forma:

$$v_2 = (v_1 + 2u) \sqrt{1 - \frac{4v_1 u (1 - \cos \theta)}{(v_1 + 2u)^2}}$$

# Effetto fionda

Se per esempio la velocità della sonda fosse proprio uguale a quella del pianeta ( $v_1 = u$ ) si avrebbe:

$$v_2 = v_1 \sqrt{5 + 4 \cos \theta}$$

Che nel caso  $\theta = 0$  darebbe il risultato precedente.

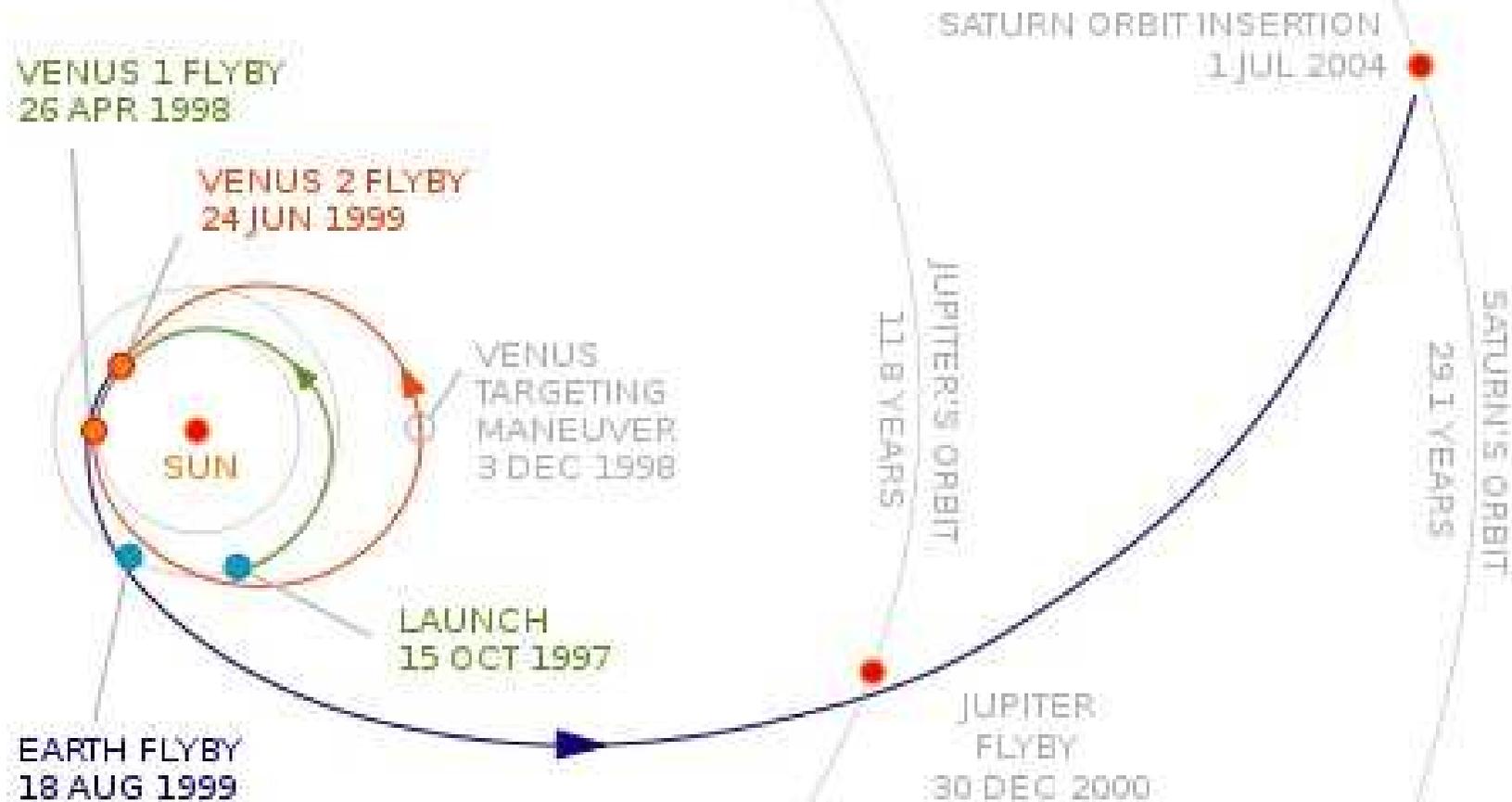
Un caso più realistico è quello in cui la sonda si avvicina al pianeta in direzione quasi perpendicolare al percorso del pianeta (vale a dire  $\theta = 90^\circ$ ). In questo caso la sonda subisce una deviazione che forma un angolo di  $26,56^\circ$  con la direzione del pianeta e la nuova velocità finale la velocità è

$$v_2 = v_1 \sqrt{5} \simeq 2,24v_1$$

Al giorno d'oggi quasi tutte le missioni spaziali subiscono effetti di fionda gravitazionale per raggiungere le proprie mete.

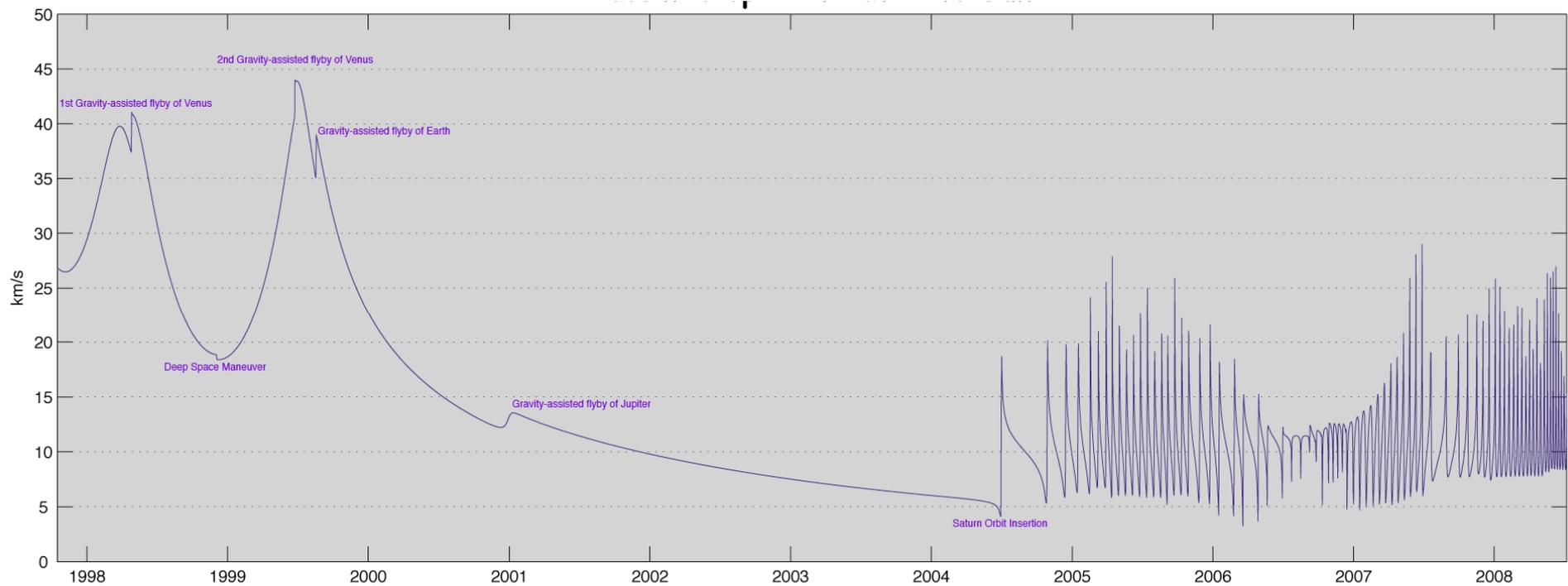
# Effetto fionda

## Orbita di trasferimento della sonda Cassini verso Saturno

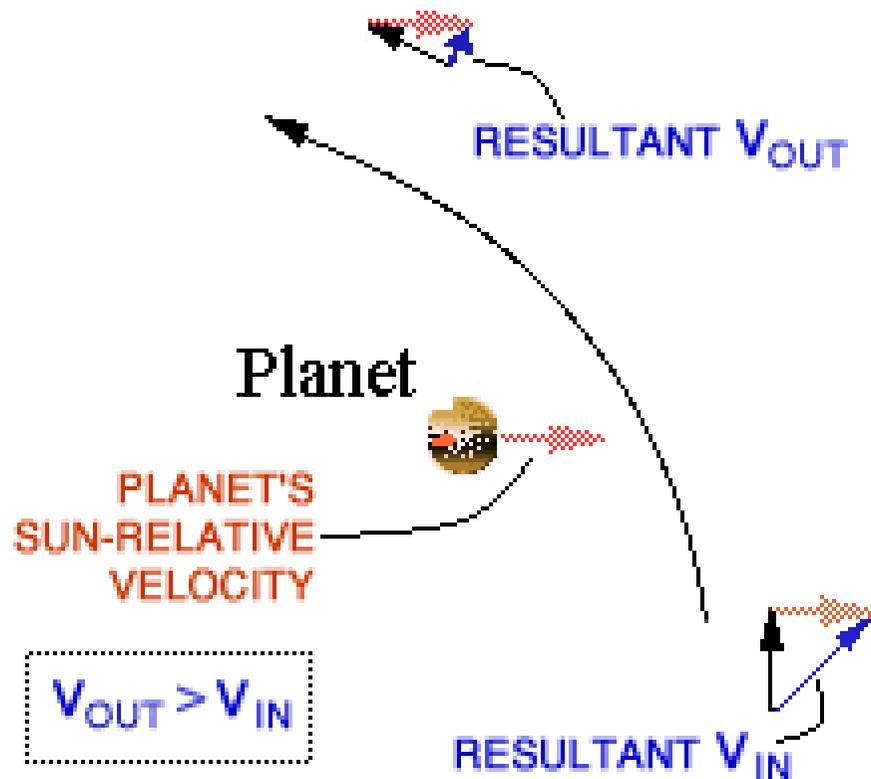


# Effetto fionda

## Velocità della sonda Cassini



# Effetto frenamento

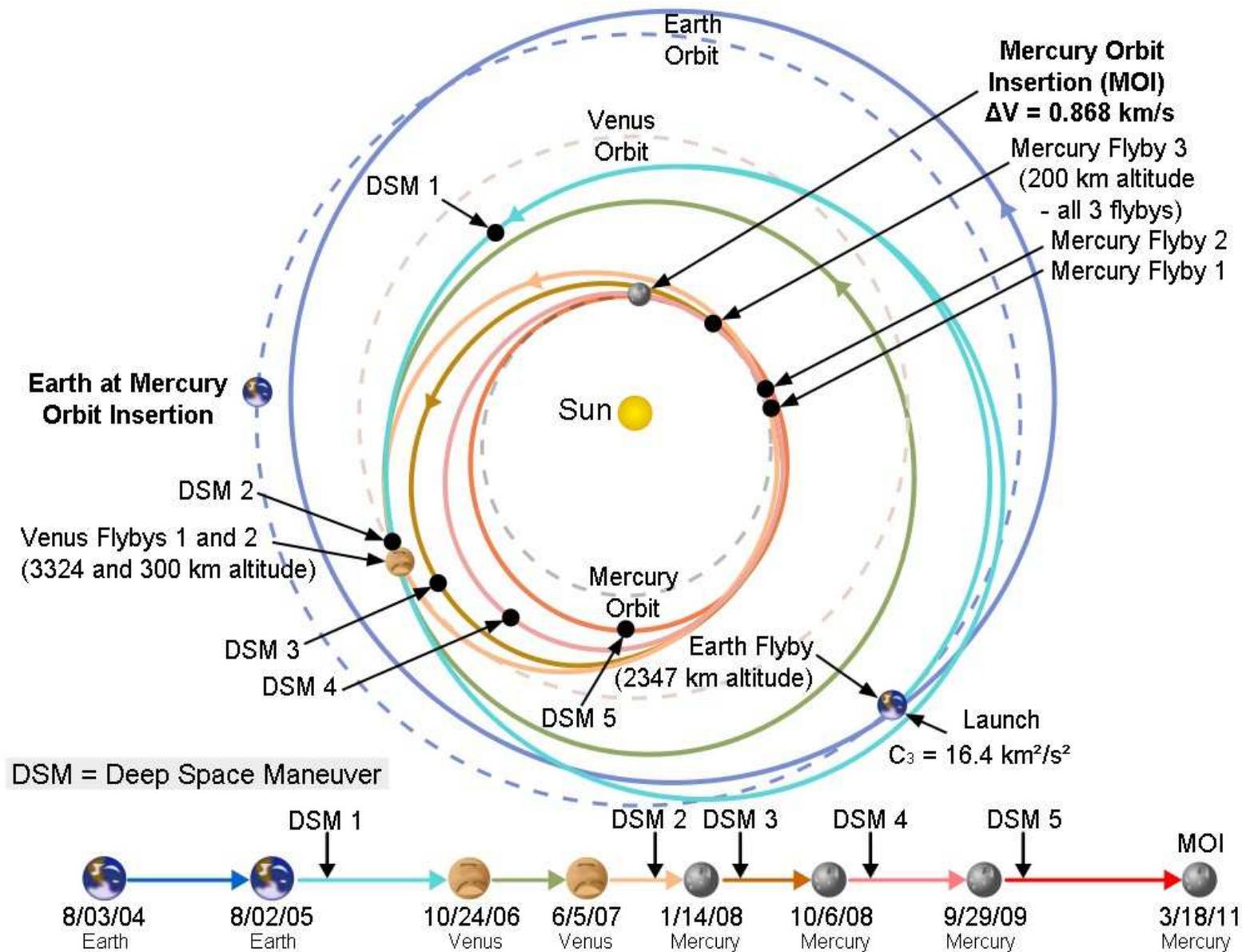


Se la sonda si avvicina al pianeta “passandogli davanti” si può dimostrare che la velocità finale rispetto al Sole diminuisce producendo un effetto di frenamento.

Se le condizioni sono giuste la sonda può anche essere messa in orbita ellittica attorno al pianeta.

# Effetto fionda

## Orbita di trasferimento della sonda Messenger



# Effetto fionda

