



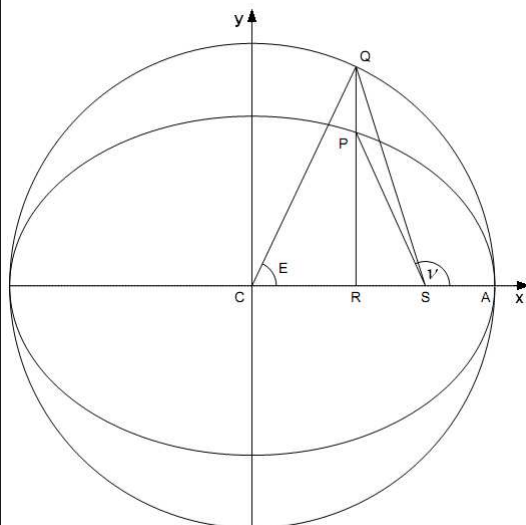
Laurea triennale in Fisica
a.a. 2011 - 2012

CORSO DI ASTRONOMIA

Prof. Angelo Angeletti

Equazione di Keplero

È la determinazione della legge oraria del moto di un pianeta intorno al sole
(detta **equazione di Keplero**).



$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P}(t - T)$$

E = **anomia eccentrica**
 e = **eccentricità**
 P = **periodo**
 T = **passaggio al perielio**

Equazione di Keplero

$$(I) \quad M = n(t - T) \quad \frac{2\pi}{P} = n$$

$n = \text{moto medio}; \quad M = \text{anomalía media}$

$$(II) \quad E - e \sin E = M$$

$$(III) \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

$v = \text{anomalía vera}$

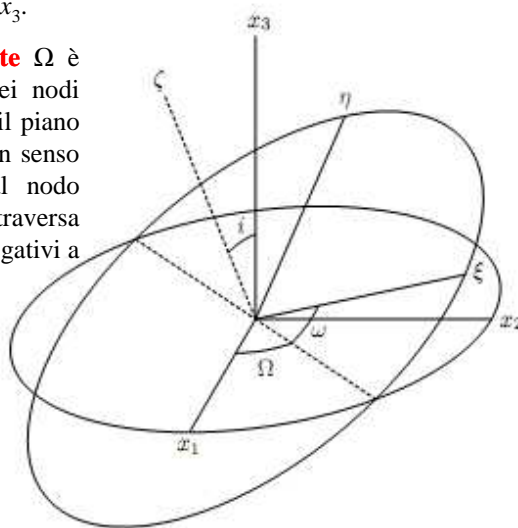
$$(IV) \quad r = a(1 - e \cos E)$$

L'orbita nello spazio

inclinazione orbitale i è l'angolo tra il piano orbitale e il piano (x_1, x_2) , cioè tra il vettore momento angolare \mathbf{L} e l'asse x_3 .

la **longitudine del nodo ascendente** Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2)), misurato sul piano (x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);

l'**argomento del perielio** ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.



Al posto di ω a volte si usa la **longitudine del perielio** $\varpi = \Omega + \omega$.

L'orbita nello spazio

Nell'uso tradizionale:

- vengono chiamati anomalie gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea degli apsi (direzione del perielio);
- vengono chiamati argomenti gli angoli misurati nel piano orbitale a partire dalla linea dei nodi (nodo ascendente);
- vengono chiamati longitudini gli angoli misurati nel piano fondamentale (x_1, x_2) del sistema di riferimento inerziale a partire dall'asse x_1 , anche quando (come nel caso della longitudine del perielio) l'angolo sia in realtà formato dalla somma di più termini, di cui solo il primo è misurato a partire dall'asse x_1 .

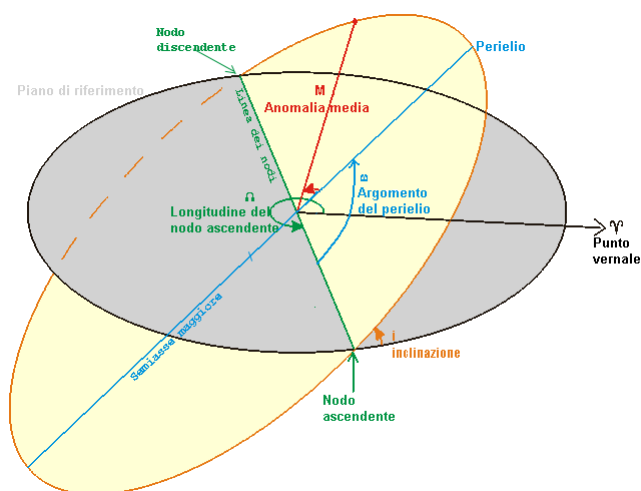
I parametri orbitali

L'orbita di un pianeta può essere specificata per mezzo dei sei elementi kepleriani $a, e, i, \omega, \Omega, M$.

a ed e descrivono la forma e le dimensioni dell'orbita;

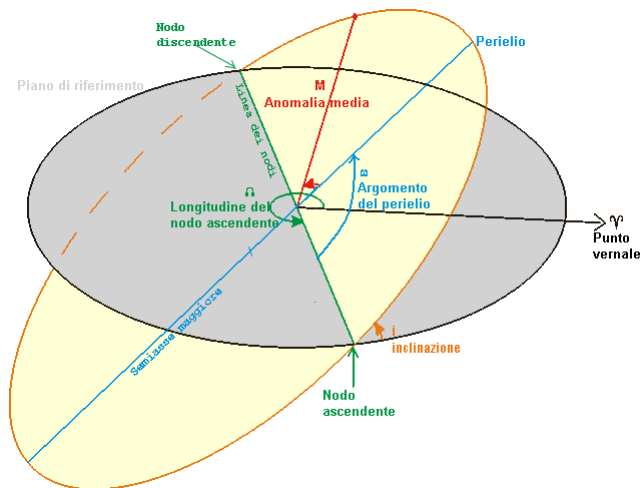
$i, \omega,$ e Ω danno l'orientazione del piano orbitale nel sistema di riferimento usato;

M indica la posizione del pianeta lungo l'orbita a un certo istante di tempo.



I parametri orbitali

È un altro modo di specificare le coordinate del pianeta, alternativo rispetto alle sei componenti dei vettori \mathbf{r} e \mathbf{v} , ma equivalente, tanto che tra le due rappresentazioni esiste una corrispondenza biunivoca.



I parametri orbitali

I sei elementi orbitali kepleriani non sono ben definiti per orbite di eccentricità e e/o inclinazione prossime a zero.

la longitudine del nodo Ω e l'argomento del perielio ω risultano indeterminati per $i = 0$;

l'argomento del perielio ω e l'anomalia media M sono indeterminati per $e = 0$.



La trasformazione di coordinate da elementi kepleriani a vettori posizione e velocità è localmente non invertibile nell'intorno di $i = 0$, $e = 0$, cioè la matrice jacobiana della trasformazione è singolare.

I parametri orbitali

Per eliminare ciò:

poiché le direzioni della linea dei nodi e del perielio sono indeterminate per $i = 0$, $e = 0$, occorre evitare di usare angoli che siano definiti a partire da tali direzioni; in particolare, l'argomento del perielio ω e le anomalie (media M ed eccentrica E) vanno sostituiti dalle corrispondenti *longitudini*

<i>longitudine al perielio</i>	$\bar{\omega} = \Omega + \omega$
<i>longitudine media</i>	$L = M + \bar{\omega}$
<i>longitudine eccentrica</i>	$F = E + \bar{\omega}$

le coppie di variabili di tipo "polare" ($e, \bar{\omega}$) e (i, Ω) vanno sostituite con le corrispondenti variabili "cartesiane"

$$h = e \sin \bar{\omega} \quad k = e \cos \bar{\omega}$$

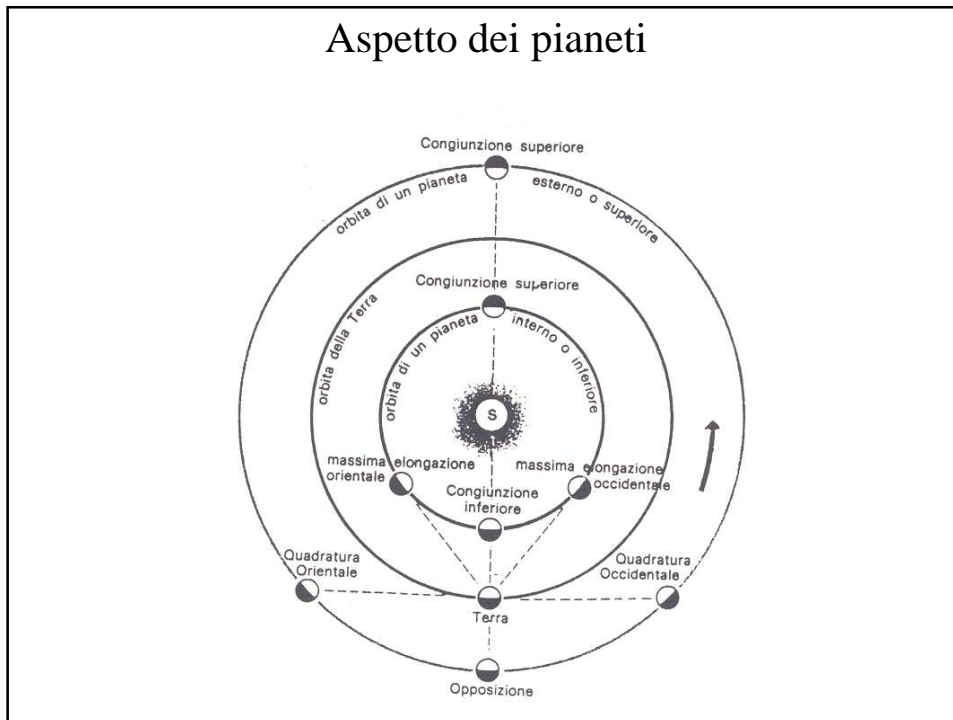
$$P = \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \quad Q = \tan \frac{i}{2} \cos \Omega$$

I parametri orbitali

Con queste sostituzioni l'equazione di Keplero prende la forma

$$L = F + h \cos F - k \sin F$$

Aspetto dei pianeti




Aspetto dei pianeti

L'osservatore terrestre deve poi distinguere tra periodo orbitale siderale e periodo apparente geocentrico (o sinodico), che è evidentemente influenzato dalla rivoluzione annua.

$$P_{sin} = \frac{2\pi}{n_T \pm n} \qquad n = n_T \pm \frac{2\pi}{P_{sin}}$$

il segno + vale per un pianeta interno, il segno - per uno esterno


Legge di Titius e Bode



Johann Daniel Titius
(1729 – 1796)

$$a_n = \frac{4 + n}{10}$$

con $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 \dots$



Johann Elert Bode
(1747 – 1826)

Matematicamente è equivalente a

$$a_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$$

con $n = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$

La legge fu scoperta nel 1741 da Wolf e riscoperta da Titius nel 1772. E' nota per l'opera di divulgazione di Bode, che nel 1778 ne ha dato una formulazione matematica.

n	Distanza UA	Pianeta	Distanza UA
0	0,4	Mercurio	0,387
3	0,7	Venere	0,723
6	1	Terra	1
12	1,6	Marte	1,524
24	2,8		
48	5,2	Giove	5,203
96	10	Saturno	9,539
192	19,6	Urano	19,18
384	38,8	Nettuno	30,06

Legge di Titius e Bode

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{2n-2} + 1)$$

Con $n = 1$ per Mercurio, $n = 2$ per Venere, $n = 3$ Terra, $n = 5$ la fascia degli Asteroidi, etc.

$$a_n = 1,53^n$$

$n = -2$ Mercurio, $n = -1$ Venere, $n = 0$ Terra, $n = 1$ Marte, per $n = 2$ e $n = 3$ si hanno due famiglie di asteroidi, $n = 4$ Giove, $n = 5$ Saturno, $n = 6$ Urano, manca $n = 7$, $n = 8$ Nettuno, $n = 9$ Plutone.

Una formulazione più generale è la seguente:

$$a_n = r_0 \cdot K^n$$

una progressione geometrica, con K e r_0 opportune costanti.

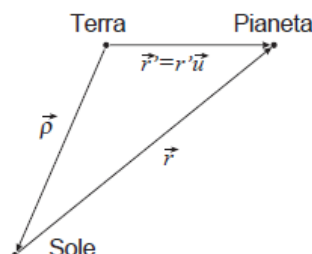
Determinazione di un'orbita ellittica da tre osservazioni

ρ_i indicano le posizioni geocentriche del Sole nei tre istanti di osservazione ($i = 1, 2, 3$); questi vettori si suppongono noti in quanto ricavabili dalle effemeridi del Sole (che danno anche le coordinate cartesiane);

u_i indicano le direzioni geocentriche dell'oggetto in esame, ricavabili immediatamente dalle coordinate (angolari) osservate;

$r'_i = |\mathbf{r}'_i|$ sono le distanze geocentriche, che non si ottengono direttamente dalle osservazioni, ma si troveranno come risultato secondario del calcolo;

\mathbf{r}_i (posizioni eliocentriche) sono le incognite principali del problema.

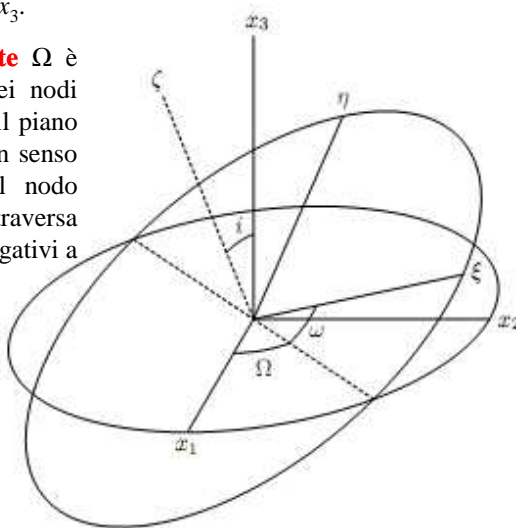


L'orbita nello spazio

inclinazione orbitale i è l'angolo tra il piano orbitale e il piano (x_1, x_2) , cioè tra il vettore momento angolare \mathbf{L} e l'asse x_3 .

la **longitudine del nodo ascendente** Ω è l'angolo tra l'asse x_1 e la linea dei nodi (intersezione del piano orbitale con il piano (x_1, x_2)), misurato sul piano (x_1, x_2) in senso diretto (antiorario), dall'asse x_1 al nodo ascendente (punto in cui il pianeta attraversa il piano (x_1, x_2) passando da valori negativi a valori positivi di x_3);

l'**argomento del perielio** ω è l'angolo tra la linea dei nodi e la linea degli apsi, misurato sul piano orbitale in senso diretto, dal nodo ascendente alla direzione del perielio.



Al posto di ω a volte si usa la **longitudine del perielio** $\varpi = \Omega + \omega$.